

粒子分散モデルを用いた
高機能性材料の構成則に関する研究



1998 年 2 月

九州工業大学大学院情報工学研究科
情報システム専攻

九州工業大学附属図書館



10247013

呉 亜東

目次

序論	1
第1章 機能性複合材料の概説	3
§ 1.1 一般的複合材料	3
1.1.1 複合材料の分類	3
1.1.2 複合材料の特性	4
§ 1.2 機能性複合材料の応用	5
1.2.1 宇宙・航空関連分野	5
1.2.2 エネルギー関連分野	6
1.2.3 他の分野	6
§ 1.3 機能性複合材料の発展	7
1.3.1 超耐熱複合材料	7
1.3.2 金属形状記憶合金材料	7
1.3.3 傾斜機能材料	8
参考文献	8
第2章 文献調査の概要と本論文の目的	10
§ 2.1 本論文の理論の位置づけ	10
2.1.1 従来モデルと本論文モデルの比較	10
2.1.2 解析モデル精度の検証	12
2.1.3 本論文の内容と目的	12
§ 2.2 文献調査の概要 (一) 単粒子の応力と歪みに関する理論	12
2.2.1 単粒子の内部応力-歪みに関する Eshelby 理論	13
2.2.2 実単粒子の内部応力-歪みに関する Eshelby 等価介在物理論	14
2.2.3 単粒子の外部応力-歪みに関する Mura-Cheng 理論	15

§ 2.3 文献調査の概要 (二) 母相中に多数の粒子が散在する複合材に関する理論	16
2.3.1 Voigt (1910) 理論	17
2.3.2 Reuss (1930) 理論	18
2.3.3 Hashin-Shtrikman (1962) 理論	19
2.3.4 Kerner (1956) 理論	19
2.3.5 均質粒子を多数含む複合体に関する Mori-Tanaka (1973) 理論	20
2.3.6 非均質粒子を多数含む複合体に関する Mori-Tanaka (1973) 理論	21
§ 2.4 文献調査の概要 (三) 粒子分散複合材料の特定問題に関する理論	23
2.4.1 Mori-Tanaka 混合則に基づく粒子分散複合材料に関する理論	23
2.4.2 Self-consistency 理論	28
§ 2.5 本論文の目的と内容	31
2.5.1 これまでの理論の問題点	31
2.5.2 本論文の目的	32
2.5.3 本論文の研究の方法と内容	32
参考文献	33
第3章 単粒子理論	38
§ 3.1 固有歪みと固有応力	38
3.1.1 固有歪みと固有応力、介在相と母相とは	38
3.1.2 固有歪みと固有応力の関係	39
§ 3.2 固有歪みを有する均質介在物の応力	40
3.2.1 固有歪みを有する均質材料における基本式	40
3.2.2 グリーン関数	41
3.2.3 均質楕円単粒子における Eshelby 理論の展開	42
§ 3.3 非均質介在物の応力	45
3.3.1 非均質楕円体単粒子における Eshelby 等価介在物の概念	46
3.3.2 等価条件を満たす固有歪みの解析	47
3.3.3 等価介在物法により求めた楕円体介在物の応力と歪み	47
§ 3.4 数値解析	48
3.4.1 数値解析に関する材料係数	49
3.4.2 非均質単粒子に関する応力分布	50
§ 3.4 結言	52
参照文献	52

第4章 多粒子弾性問題 (SCC法)	53
§ 4.1 複合材料及び各相材料の応力と歪み	53
4.1.1 複合材料の平均応力	53
4.1.2 複合材料の平均歪み	55
4.1.3 複合材料の平均歪みと平均応力の関係	56
§ 4.2 等価理論を用いた均質複合材料の各相応力と歪み	57
4.2.1 Mori-Tanaka の平均歪み	57
4.2.2 均質複合体に関する応力と歪みの分散則	58
§ 4.3 疎らな非均質粒子複合材に関する構成則 (EMTモデル)	59
4.3.1 低体積分率粒子複合材料への等価介在物法の適用	60
4.3.2 Mori-Tanaka 理論に基づく構成則	63
4.3.3 疎らな粒子複合材に関する構成則	64
§ 4.4 体積分率と剛性比の全域で適用可能な非均質粒子 複合材に関する構成則： (SCCモデル1)	65
4.4.1 高体積分率をもつ粒子複合材料の等価介在物法の適用	66
4.4.2 全体積分率、全剛性比領域に適用可能な整合コンプライアンス・モデル	69
§ 4.5 粒子分散複合材料に関する巨視的な構成則： (SCCモデル2)	70
4.5.1 非均質媒体に関する Eshelby 混合則の修正	70
4.5.2 等価条件を満たす等価粒子に関する固有歪みの決定	73
4.5.3 複合材料の構成則の決定	74
§ 4.6 粒子分散複合材料に関する巨視的な構成則： (SCCモデル3)	74
4.6.1 複合材-母相-介在相モデルに関する等価介在物法	74
4.6.2 複合材-母相-介在相モデルに関する介在相と母相の応力	76
4.6.3 複合材-母相-介在相モデルに関する構成則	77
§ 4.7 解析例	78
4.7.1 材料係数	78
4.7.2 粒子分散複合材料モデルと有限要素法解析参照領域	78
4.7.3 応力分散の検討	80
4.7.4 複合材料の巨視的な挙動についての検討	82
4.7.5 粒子が空孔と剛体の場合の複合材料巨視的な挙動についての検討	84
§ 4.8 結言	86
参考文献	86
付録：	92

第5章 多粒子塑性問題 (LRM法)	94
§ 5.1 複合材料局所性の影響	95
5.1.1 複合材料の平均応力と平均歪みの再定義	95
5.1.2 メゾ・メカニクス解析で複合材料の応力と歪みの局所現象の検討	97
5.1.3 母相と介在相の界面に沿う応力と歪み分布の検討	104
§ 5.2 複合材料局所性を考慮する理論解析 (LRM法)	106
5.2.1 母相と介在相の微視的応力と複合材料の巨視的応力	107
5.2.2 母相と介在相の微視的応力の決定	108
5.2.3 複合材料の巨視的構成則	110
§ 5.3 複合材料応力分布に関する理論解析	112
5.3.1 分布関数の導入	113
5.3.2 粒子界面での母相応力分布	113
5.3.3 応力分布に関するパラメタ	115
§ 5.4 理論解析例	116
5.4.1 応力分布	118
5.4.2 応力分布に関するパラメタ ϕ	118
5.4.3 複合材料の巨視的な弾塑性挙動	118
§ 5.5 結言	121
参考文献	121
付録:	123
第6章 短繊維分散強化材料	125
§ 6.1 短繊維分散複合材料の弾性構成則	126
6.1.1 繊維介在相に関する SCC 等価モデルの適用	127
6.1.2 局部座標下での繊維介在物に関する応力-歪み混合則	127
6.1.3 局部座標における応力の総座標への変換	129
6.1.4 繊維介在相の平均応力	130
6.1.5 繊維分散複合材料の構成則	131
§ 6.2 母相の局所性を考慮する繊維分散複合材料の構成則	131
§ 6.3 弾性問題における理論解析例と結果	134
6.3.1 材料係数値と座標変換テンソル	135
6.3.2 一様分布の場合	136
6.3.3 正規分布の場合	139
6.3.4 Tandon-Weng の理論との比較	141

§ 6.4 メゾ・メカニクス解析による数値計算解析結果	143
6.4.1 メゾ・メカニクス解析参照領域について	144
6.4.2 メゾ・メカニクス解析の結果と理論解析結果の比較	145
§ 6.5 短繊維クラスタ分散強化材料における弾性構成則	147
6.5.1 擬母相とクラスタ介在相の定義	148
6.5.2 クラスタ介在相と擬母相に関する混合則	148
6.5.3 短繊維クラスタ介在相分散複合材料に関する混合則	150
6.5.4 短繊維クラスタ介在相分散複合材料に関する理論モデルの解析	152
§ 6.6 結 言	158
参考文献	159
付録：	160
第7章 機能性複合材料の熱伝導と熱膨張	163
§ 7.1 粒子分散複合材料の熱伝導率	163
7.1.1 単粒子の熱伝導問題	163
7.1.2 多粒子分散複合材料の熱伝導率	165
7.1.3 数値計算解析（1）－球状粒子分散複合熱導体	168
7.1.4 数値計算解析（2）－繊維分散複合熱導体	172
§ 7.2 粒子分散複合材料の熱膨張	180
7.2.1 粒子分散複合材料の自由熱膨張率理論	180
7.2.2 球状粒子分散複合材料の熱膨張率に関する理論モデル	184
7.2.3 一方向繊維分散複合材料の熱膨張率に関する理論解析	187
§ 7.3 粒子分散複合材料の熱伝導率に関するメゾ・メカニクス解析	189
7.3.1 メゾ・メカニクス解析に関するデータ	190
7.3.2 参照領域の内部の温度分布	191
7.3.3 メゾ・メカニクス解析による熱伝導率	191
§ 7.4 理論解析の結果とメゾ・メカニクス解析による結果の比較	194
§ 7.5 結 言	195
参考文献	196
付録：	197
第8章 結 論	201
謝辞	205

序 論

現在、航空・宇宙開発、原子力、核融合等、また先端材料の分野で用いるため、高機能性材料の研究開発が進められている。スペースシャトルには、耐熱材料としてセラミックス系複合材料が使用されているが、これらの材料の応力緩和性、強度などの向上を図る設計にとって、理論解析は不可欠かつ重要な手段である。

材料の解析に関する実験も重要な手段であるが、実際に実験条件や資金などの制限により出来ない場合がある。また材料の特定の性能を理解する場合、実験によっては不可能な部分もある。例えば、一般に粒子分散複合材料の粒子は微小で、粒子の内部応力を実験で解析する事が困難である。また複合材料の微視的な応力分布は複合材料の巨視的変形挙動に大きな影響を与える。このような材料の微視的な非線形現象を実験で解析する事も困難である。複合材料のマクロの性能を正確に予測、解析する材料設計にとって、複合材料の挙動を正しく表す事が出来る厳密な理論構成則の構築は不可欠である。

機能性複合材料に関する従来の理論を適用する事の出来る条件は極めて限定されている。例えば、Mori-Tanakaの混合則に基づいて開発された理論構成則は、介在相の体積分率、また介在相と母相の剛性比が大きい場合、精度が低下する。従来のSelf-consistent方法は複合材料の内部応力が平均分布していると仮定するなどの前提で開発されたものであるが、実際の複合材料の内部状況と異なるため、適用条件も厳しく限定される。

そこで本研究では、機能性複合材料の粒子の相互干渉、複合体の剛性の変化が粒子の挙動に対して与える影響、材料の微視的な応力-歪み分布が、複合材料の塑性挙動に及ぼす影響などの要素を考慮しながら、構成則理論の構築及びメゾ・メカニクス解析を行う。

本論文では複合材料に関する物理的な現象をメゾ・メカニクス解析で明らかにすると同時に、それらの現象を理論構成則の中にモデル化する。更に、本論文で提示したモデ

ルにより、理論構成則を構築する。構築された理論構成則に基づいて、粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の弾塑性と熱の挙動を検証し、従来の理論モデルと比較し、本論文の優位性を示す。

本研究の意図する所は不備な点が多く適用範囲が著しく限定される従来のモデルが、複合材料技術分野ではその限度を越えて、広く利用されている事実に一石を投じ、本研究に於て合理性に立って構築した理論混合則を提案し、その検証された広範な適用性を、問う所にある。

第1章

機能性複合材料の概説

§ 1.1 一般的複合材料

複合材料とはその定義よれば、優れた特性或いは特殊な材料特性を得るために、数種類の材料又は要素を組み合わせて、作った人工材料である。

複合材料の源を探ると、近代においては40年代頃、複合材料はガラス繊維で強化したプラスチックに始まり、その後、ガラス繊維の弾性率をあげるための研究が進められ、ボロン (boron) 繊維やカーボン (carbon) 繊維が誕生した。最近ではさらに強度を高めた有機系のアラミド (aramid) 繊維や、耐熱性のアルミナ (alumina) 繊維などが開発されている。一方、使用環境の拡大も図られ、樹脂の耐熱性の改良から始まり、金属マトリックスの展開が試みられている。例えば、引張強さ 240kg/mm^2 以上を有し、耐熱性 250°C の繊維強化板、引張強さ 150kg/mm^2 以上を有し耐熱性 450°C の繊維強化材料なども出現している。また、遮熱を目的とするセラミックなどの無機材料をマトリックスに使う複合材の開発も高温技術領域で進められている。

ガラス繊維強化ポリエステルを第一世代の複合材料とすれば、CFRP (Carbon Fiber Reinforced Plate)、BFRP (Boron Fiber Reinforced Plate) などが第二世代、そして、フォーム材や、セラミックスをマトリックスとしたものが第三代である。ウイスカは理論強度に近い強さを有する完全結晶であり、これがを用いれば、数百～数千 kg/mm^2 の強さの機能性複合材料も実現する。

本論文では、粒子或いは繊維を用いた機能性複合材料を主体に考察を行う。

1.1.1 複合材料の分類

二つの異なった材料からなるという複合材料の定義は単純ながら、航空宇宙、自動車

その他の先進的な技術分野で使われる代表的な複合材料の複雑な定義には受け入れ難い。したがって、より厳密な定義が必要になる。

まず、始めに複合材料の定義のため、次のように分類する。

構造レベル

*基本レベル

単体分子、結晶セル

*微視的構造レベル

結晶、相、混合物

*巨視的構造レベル

母材、粒子、繊維

複合材料の基本構造によって、次のようなタイプに分けられる。

*粒子分散複合材料

粒子を介在相とする複合材料

*繊維複合材料

連続もしくはチョップド繊維を強化とする複合材料

*積層複合材料

層あるいはラミナ構成要素からなる複合材料

*フレーク複合材料

平たいフレークから成る複合材料

*充填／骨格複合材料

第二の材料で充填された連続骨格を母材とする複合材料

上の分類、強度、熱緩和性面において最も重要なものは粒子分散型複合材料であり、本論文が主に取り扱う複合材料である。とりわけ粒子分散強化合金、短繊維強化合金、粒子強化セラミックスなどは粒子型複合材料に類し、これ迄にも粒子型複合材料として研究されてきた。

1.1.2 複合材料の特性

複合材料の種類によって、与えられた荷重下での応答は異なる。材料の挙動を特性づける一般的な手法として巨視的なレベルでの材料を次のようなタイプに分ける事ができる。

均質－等方性

均質－異方性

不均質－等方性

不均質－異方性

均質体とは物体中で特性が均一で、位置の関数ではないものを言う。等方性材料は、材料中、どの方向においても同じ材料特性を持つ。こうして、固有の不均質性とそれに伴う挙動の複雑さのため、複合材料は通常、ミクロとマクロの視点から考察される。

微視解析では複合材料の基本構成要素、即ち介在相と母相を区別し、それぞれの材料の非均質性を考慮することより、複合材料の平均特性を構成材の特性と強化材の体積含有率から予測する。

巨視解析では複合材料の平均特性のみをとくに重要と考える。微視構造は無視され、古典的な弾性或いは塑性理論により構造体レベルで解析される。

本論文では微視的及び巨視的な手法を併用するモデル化と解析方法に焦点をあてる。

§ 1.2 機能性複合材料の応用

機能性複合材料では、二つ以上の材料を微視構造として組み合わせることによって、単一材料では望み得ないような機能をもたせることができる。例えば、(a) 組み合わせるそれぞれの材料の特徴を生かす目的；(b) どちらかの特性を100%発揮させるため、他を補助構成材として使う；(c) 組み合わせにより、物性の差などによって新しい性質を賦与するもの；等。

1.2.1 宇宙・航空関連分野

機能性複合材料は多くの分野で広く注目されており、また利用されている。宇宙関連分野を例にとり紹介すると、例えば、宇宙船オービターのメインエンジン用の推進剤を搭載した外部燃料タンクおよび推力を増強するための固体燃料ブースター・ロケット二基が組み合わせられており、発射重量が2000トンにもなるものである。このように大重量で、しかもロケットと航空機の両方の機能を備えた複雑な構造物であり、これを打ち上げ、回収し、再使用するサイクルに耐え得るために、空気力学、空力加熱などの解析に始まり、各構成要素の設計、製作、テスト、コンピュータによる複雑な制御技術など、多岐にわたる研究と開発を重ねなければならず、その項目は膨大である。

オービターは地上への返還の際の高度約120kmからの大気圏再突入時に、機体の一

部は最高約1,500°Cの高温を経験する。機体を保護するため、最も高温になる機首及び主翼部には、熱分解炭素繊維とグラファイト母相の複合材料である強化カーボン・カーボン材が使われている。いずれも直径1.5 μ mのシリカ短繊維をコロイド状シリカで固め加熱成形したもので、非常に優れた耐熱性と断熱性を持つ材料である。

このような粒子型複合材料は他に自動車や航空機にも利用され、実用化にされている。

1.2.2 エネルギー関連分野

例えば、日本ではエネルギー供給量全体に占める原子力発電の割合は90年代に入ってから10%を越えた。現在、運転されている発電用原子炉の構造材として用いられる材料の研究はその強度と安全性において大変重要である。さらに、軽水炉から高速増殖炉へと発展している現在、とかく問題となる原子炉の安全性を一層向上させるためには、材料の面でまだ解決しなければならない点が多い。例えば、炉心を構成する燃料被覆管の材料は、極めて厳しい環境に置かれるため、耐用時間が短い。そのため、原子炉に使用されている金属機能性材料の耐用年数の長寿化が今後の大きな課題である。

また現在、石油の代替エネルギーの利用技術の開発ということで、太陽エネルギー、地熱エネルギー、水素エネルギー、風力エネルギーなど新しいエネルギーの利用に関する新材料の開拓が重要な課題となる。そのためには、軽くて丈夫なため新材料として有望である粒子、繊維強化材料の強度、耐用時間の長寿化を図る開発を行う必要があり、さらに新材料に関する研究も必要である。

1.2.3 他の分野

例えば、エレクトロニクス (electronics) の発展に対しても、材料技術と材料研究は非常に重要な役割を果たしている。優れた電子材料はその加工技術の開発と材料性能の研究に支えられて現代のような成長が可能となった。機能性材料はまた医療の面でも、例えば人工の骨や血管など人体の中に用いられる材料として大きな役割を果たしている。

以上に示したように、材料技術の進歩発展が新しい技術や高性能材料の登場を促し、またその新しい技術や材料の向上を図るために、理論研究が要求されている。現用材料の改善或いは設計にとっても、理論研究はその構造と性質を知る上において最も重要な基礎を与えるものである。

§ 1.3 機能性複合材料の発展

1.3.1 超耐熱複合材料

一般に700°C以上で用いる合金を超耐熱複合材料と呼ぶ。耐熱材料は温度のみならず、他の条件、特に部材に加える応力によりその寿命が大幅に変化する。また使用条件も用途により千差万別である。

例えば、ジェットエンジンに用いられる超耐熱材料は高温で数万時間、あるいはそれ以上の長時間に亘り使用に耐えることが要求される。耐熱鋼では強度が著しく不足し、高温では小さな外力によっても金属の変形が時々刻々に進行するクリープ現象が起こり、外力や加熱冷却の繰り返しによる高温疲弊、熱疲弊などに起因して破壊に至る例も多い。

超耐熱材料としては、高温腐食に対する安定性、すなわち優れた耐食性と、高温での大きな強度、じん性とが最も重要な性質として要求されている。

超耐熱材料の高温耐食性を高める方法で最も多いのは、合金元素の添加、とりわけ高温での耐食性を改善する目的の添加元素が最も広く利用される。非酸化物セラミックスを金属結合材料として焼結した粒子分散超耐熱材料は注目を浴びている。

例えば、一般にセラミックスは微細なクラック（欠陥）の先端に応力集中を受けて、理論強度より極端に低い引っ張り応力によって破壊する。そのため、引っ張りには弱い、逆に圧縮に対しては強度が高いことが知られている。しかし、エンジン部品など多くの用途では引っ張り応力下におかれる場合が多く、そのため、材料に対してできるだけ高強度でじん性に富み、均質化度の高いことが求められている。金属と結合するセラミックス粒子分散材料は耐熱性、強度、耐食性、耐摩耗性などの点で単純なセラミックスあるいは金属より優れている。

1.3.2 金属形状記憶合金材料

形状記憶合金 (Shape Memory Alloy, SMA) は、形状を記憶する金属合金であり、外荷重で変形する後に熱を加えることにより、形状が回復できるという優れた制御能力を持つ知的材料として知られている。また、ある温度で形状記憶合金を引張試験すると、負荷過程で弾性ひずみと非弾性ひずみが発生するが、この非弾性ひずみは除荷過程で完全に回復する擬弾性という現象が起こる。このような形状記憶合金の独特な性質を利用して、様々な分野で実用化するにまでいたっている。

他に類を見ないこの特徴は、マルテンサイト (Martensite) 変態と呼ばれる熱弾性型の相変態によるものである。マルテンサイト (Martensite) は焼き入れによりできる鋼の変態で、炭素の量が特に多いため、大変硬い。この相変態のメカニズムは非常に複雑なものである。そのため、形状記憶効果や擬弾性効果を利用した製品などの生産過程や使用条件における要求基準を知る事の重要性は高い。

相変態は、工学、材料科学から化学、生物学さらには宇宙論、素粒子論などにわたる広範囲な研究領域において現在最も注目されている研究テーマの1つである。機械工学の分野でも、焼き入れ、金属の加工熱処理、形状記憶効果など、相変態と密接に関係する現象或いはプロセスが重要な役割を果たしている。

1.3.3 傾斜機能材料

前節で紹介した耐熱複合材料は直接高温に耐える構造であり、その開発が大いに期待されている。厳しい熱環境下で材料に高温と低温熱衝撃が同時に加える可能性があるようなジェット・エンジンに使われているガスタービン翼の外表面には、高温高圧のガスが流れており、内部には冷却用の空気が流れている。タービン翼に使われる金属材料は高温下で強度が低下する欠点があるため、高温に保持しなければならない。そのため、高温側に遮熱セラミックス材料をコーティング (Coating) する。熱は高い方から低い方へと流れるが、その間に熱伝導率の低いセラミックス材料を挿入すると熱抵抗がおおきくなり、結果として、タービン翼基材の実質温度はガスの温度に比べてかなり低くなり、金属の高強度性能を有効に発揮することができる。このような二種の材料を接合した場合、材料の剛性、熱膨張率が大きく異なるため剥離や亀裂の発生を伴う強度的問題が起きる。この問題を回避するため、金属側からセラミックス材料側に亘って、材料の体積分率が連続的に変化する傾斜機能材料が我が国でかんがえられ、今世界に広まっている。この分野で材料の応力緩和性、強度などを向上を図る設計にとって、粒子分散複合材料の理論モデルの構築は不可欠かつ重要な手段である。

参考文献

- (1.1) 野田 (Naotake Noda, Tomoaki Tsuji) , " 傾斜機能円筒の定常熱応力 (Steady thermal stresses in a hollow cylinder of functionally gradient) ", 日本機械学会 [No.900-86] 材

料力学講演会論文集 (90-11-28,29) , 豊橋市

- (1.2) 東郷敬一郎, 坂口学, 石井仁, "傾斜機能材料の強度評価における破壊力学の適用性に関する研究", 日本機械学会論文集 (A編), 61巻592号, pp.23-31, 1995.
- (1.3) 島村 昭治, "未来を拓く先端材料", Kogyo Chosakai Publishing Co., Ltd, 1982, Printed in Japan
- (1.4) "知的複合材料と知的適応構造物", 日本機械学会、Yokendo Ltd, 1996, Printed in Japan
- (1.5) 舟久 保熙康, "形状記憶合金", Hiroyasu Funakubo Ltd, 1984, Printed in Japan
- (1.6) James G. Boyd and Dimitris C. Lagoudas, "Thermomechanical Response of Shape Memory Composites", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol.5, May 1994
- (1.7) Hasuhide Nakayama, Shigeru Nagaki, Junya Fujimoto, "Plastic Deformation and Evaluation of Local Damage State of Perforated Sheets with Randomly Distributed Holes", 日本機械学会論文集 (A編)、61巻604号 (1996-12) , pp.133-139
- (1.8) Naotake NODA and Tomoaki TSUJI, "Steady thermal stresses in a plate of functionally gradient material with temperature-dependent properties", 日本機械学会論文集 (A編) , Vol. 57, No.535, pp.153-159, 1991.3
- (1.9) Y.-L.Shen, A.Needleman, and S.Suresh, "Coefficients of thermal expansion of metal-matrix composites for electronic packaging", Metallurgical and materials transactions, Vol.25A, p839-850, April 1994
- (1.10) Y.Takao, M.Taya, "The effect of variable fiber aspect ratio on the stiffness and thermal expansion coefficients of a short fiber composite", Journal of composite materials (Technomic Publish Co.,Inc.), Vol.21, P140-156, Feb. 1987
- (1.11) Naoki Takano, Masaru Zako, "Design procedure for structures using composites based on micro-stress evaluation", 40th CON-EX (強化プラスチック協会) ,1995-10
- (1.12) Naoki Takano, Masaru Zako, "Stress analysis of sandwich plate by the homogenization method", Materials science research international, Vol.1, No.2, pp.82-88, 1995

第2章

文献調査の概要と本論文の目的

要 旨

機能性複合材料の代表的なものは粒子分散複合材料または繊維分散複合材料であり、多くの研究者は粒子系分散複合材料、繊維系分散複合材料の様々な側面から理論研究を行っている。本章では機能性複合材料に関する従来の理論について紹介し、本論文の目的及び位置づけを示す。

§ 2.1 本論文の理論の位置づけ

2.1.1 従来のモデルと本論文のモデルの比較

複合材料研究分野において、本論文の意図とその位置づけを明らかにするため、従来のモデルと本論文のモデルの比較について図 2-1-1 に示す。従来の理論の中では Eshelby の等価介在物法と Mori-Tanaka の平均場理論を用い、粒子分散複合材料の構成則を構築するモデルが最も多い。これら二つの理論に基づいたモデルを本論文では EMT モデルと呼ぶこととする。Mori-Tanaka は複合材料の中に散在する粒子の周囲の剛性を母相の剛性と等しいと仮定する。そのため、原理的には機能性複合材料に関する従来の EMT モデルを適用する事の出来る条件は極めて限定されている。弾性問題に対しても、介在相の体積分率、また介在相と母相の剛性比が大きい場合、EMT モデルの精度が低下する。

そこで本研究では新しいな混合理論として、機能性複合材料の粒子の相互干渉、介在相の体積分率による複合体の剛性の変化が粒子の挙動に対して与える影響を考慮する SCC モデル (Self Consistent Compliance) を提案し、自己整合形式をとるの構成則を構築する。弾性問題に対しては、SCC モデルは介在相の体積分率、介在相と母相の剛性比、全範囲

に亘って精度がよく信頼性が高い事を示す。また構成式の計算時間についてはほぼ瞬時に完了することを付記する。有限要素法の長い計算時間がかかることより、時間の節約ができる。

従来のすべてのモデルは複合材料の構成則を構築する場合、母相と介在相材料の平均応力と平均歪みは単一均質材料と同じように取り扱う。しかし、本論文のメゾ解析で説明するように、複合材料の塑性挙動は複雑であり、材料内部の局所的な挙動は複合材料のマクロの性能に大きな影響を与える。そのため、従来のモデルを平均応力-歪みの取り扱いで塑性問題に応用する事が困難である。そのため、塑性に関する理論モデルは極めて少なく、存在するモデルでも塑性変形を非線形弾性材料に等価させ、弾性理論で取

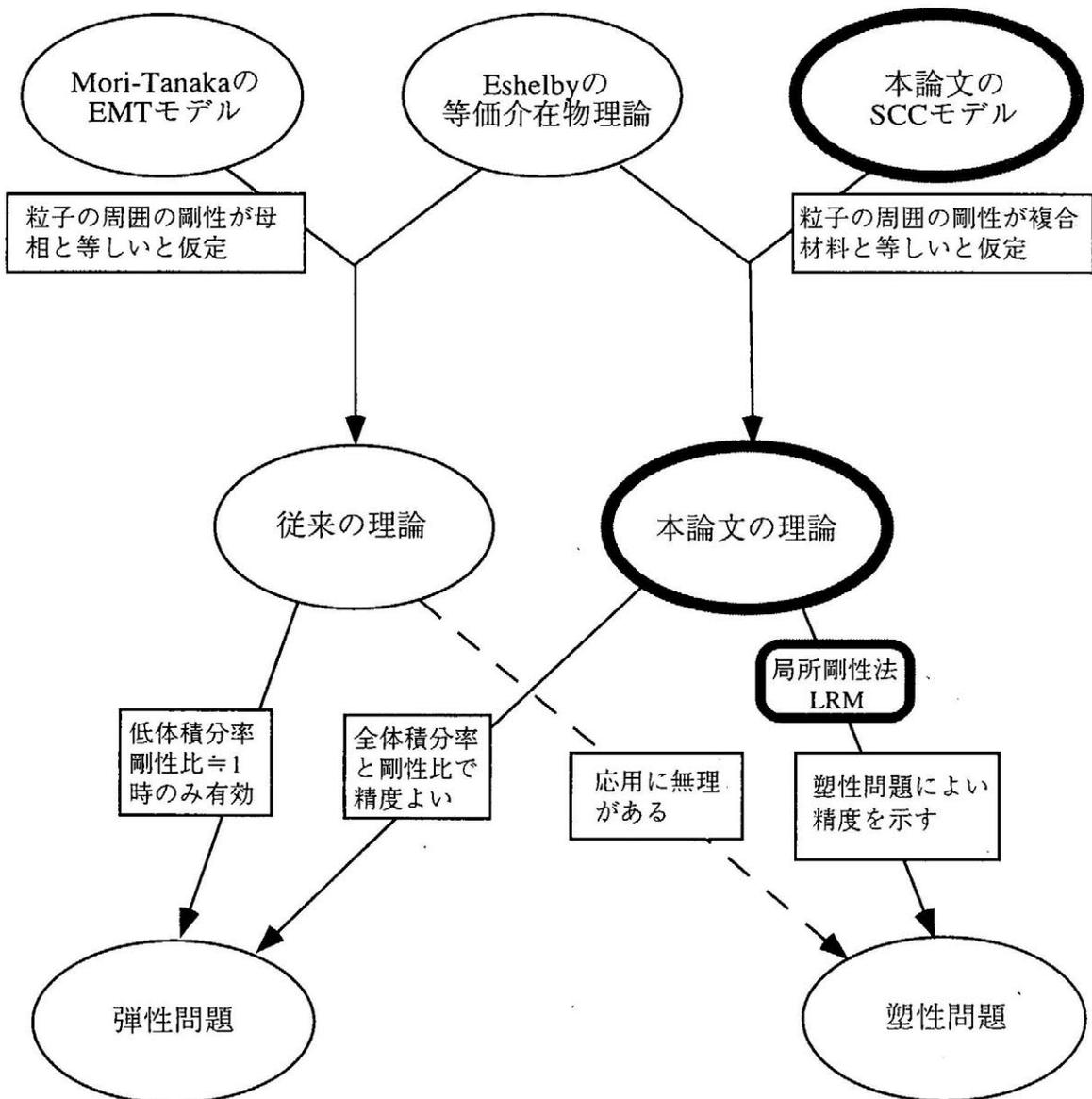


図 2-1-1 従来のモデルと本モデルの比較

り扱うと言う不合理の上に構築されているが事実である。

そこで、本論文では塑性問題に対して、SCCモデルを利用すると同時に、さらに、LRM法 (Localized Rigidity Method) を提案する。即ち、複合材料の局所的な領域の挙動を統計的に処理してモデル化し、弾塑性構成則を構築する。後述するメゾ・メカニクス解析による結果と比較することにより、LRMモデルが極めて高い精度を持つ事が判明した。

本論文では、SCCモデルとLRMモデルを繊維分散複合材料の挙動、及び機能性複合材料の熱挙動に応用し、それぞれの理論構成則を構築した。

2.1.2 解析モデル精度の検証

本論文の理論モデルを検証するため、メゾ・メカニクス (Meso-mechanics) 解析を行い、理論モデルの結果と比較した。メゾ・メカニクス解析は複合材料のマクロとミクロの間のレベルで行う計算力学的解析であり、これにより、メゾ・レベルでの複合材料の参照領域は、複合材料のマクロの性質を損わずに、複合材料のミクロの性能をも表すことが出来る。本論文では二次元問題に関するメゾ・メカニクス解析を行い、用いた解析参照領域はX方向、Y方向及び45°方向において単軸引っ張りを実施した結果、殆ど異方性がないことが証明された。また、体積分率を一定とした場合、介在粒子のサイズの変化は参照領域の挙動に殆ど影響を及ぼさない事が証明された。これらのことは規則性を持たせずにある程度以上の粒子数を参照領域に配置すれば、巨視的にはランダムで等方的な複合材料の計算力学的なモデルとすることができることをしめしている。そのため、本論文で用いるメゾ・メカニクス解析の結果は信用性がある事が分かる。

2.1.3 本論文の内容と目的

本論文の内容と目的に関する具体的な紹介を本章の § 2.5 に明記する。

§ 2.2 文献調査の概要 (一)

単粒子の応力と歪みに関する理論

多結晶金属合金を含み一般に複合材料は微視的に性質の異なる二相以上の材料から構成されるである。繊維等を含めて粒子分散系複合材料では一つの均質な相を母相(Matrix)

とし、その中に介在相 (Inclusion) を分散させた構造を持つ。

今、一つの単純な基本構造として、無限領域を持つ母相の中に母相と異なる性質の粒子を含む複合体を考える。均質無限媒体に存在する単粒子中の応力と歪みを求めるため、Eshelby (1957) は、弾性理論による単粒子理論を立てた。Eshelby 理論は粒子分散複合材料に関する研究論文によく引用される重要な理論であり、本論文の理論の基礎をなすものでもあるため、以下に簡単に紹介する。

一般に複雑な形状を持つ場合、理論構築を行うのが困難である。Eshelby は介在粒子の形状を数学的に取り扱いやすい楕円粒子によって考えた。多様な粒子を単純化する事が可能ならば球体 (sphere)、偏円 (oblate)、ウイスカ (whisker)、楕円筒 (cylinder) などは楕円体粒子によって代表する事が出来る。実際の粒子の形は以上の形のどちらかに近い場合、誤差の要求範囲を満足すれば Eshelby 理論を応用する事ができる。

2.2.1 単粒子の内部応力－歪みに関する Eshelby 理論

均質母相と等しい材料性質を持つ仮想粒子を考え、これを仮想粒子と呼ぶ。Eshelby はこの仮想粒子に固有歪み (Eigenstrain) を与えた場合の粒子内の応力と歪みを解いた。理想的な環境にある単粒子に対して、Eshelby は楕円粒子内部では応力が平均していると仮定する。理想的な環境とは、母相が無限で、また、材料の剛性、温度なども平均分布している環境を言う。この仮定は一般に受け入れられており、粒子の挙動の解析に対して数学的に扱いやすい。母相の中に多粒子が存在する場合、粒子の間に応力や歪みの干渉が生じ、粒子の内部パラメタは非均質的に分布する可能性がある。しかし、粒子が弾性の場合、Eshelby の仮定をそのまま利用することができる。

固有歪みを有する仮想単粒子の弾性係数は母相の弾性係数と等しいと考え、粒子と母相が一体の均質材料と考えることができる。固有歪みの存在のため、粒子が持つ応力と歪みは母相とは異なり、Eshelby 理論によれば、次のように与えられる。

$$\sigma^* = E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \varepsilon^* \quad (2-2-1-1)$$

$$\varepsilon^* = \mathcal{S}_1 : \varepsilon^* \quad (2-2-1-2)$$

ここで、 $(_)$ はテンソル、 $(:)$ は二重内積、 \otimes はテンソル積を表す。 ε^* は粒子に与えられた固有歪み、 σ^* と ε^* は無限母相領域にある固有歪みを有する均質粒子と母相の平均応力及び平均歪みの食い違いとなる。 E_1 は均質母相材料の剛性マトリクスである。 \mathcal{S}_1 は Eshelby テンソルと呼ばれ、母相材料のポアソン係数の関数である。 I は単位テンソルである。

均質材料の場合、外荷重で生じる応力と固有歪みで生じる応力は互いに干渉しないため、それぞれの影響を求めて加えれば、Eshelbyの理論により単粒子の平均内部応力と平均歪みを次のように求める事が出来る。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma^c \tag{2-2-1-3}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \varepsilon^c \tag{2-2-1-4}$$

ここで、 σ_0 と ε_0 は複合材料全体の平均応力と歪みである。単粒子を含む母相が無限であるため、複合材平均応力と歪みは母相の平均応力と歪みと等しいと見る事ができる。今後、添字 1 は母相を、2 は介在相、0 或いは (-) を複合材料平均値の諸量を表すとす。

2.2.2 実単粒子の内部応力-歪みに関する Eshelby 等価介在物理論

Eshelby 以前の研究者らは粒子の応力を求める際、粒子の形の影響を考えていない。例えば、Reuss (1930) は粒子の応力は母相と等しいと仮定して、粒子の歪みを求めた。一方、Voigt (1910) は粒子の歪みが母相と等しいと仮定して、粒子の応力を求めた。しかし、Reuss と Voigt 混合則の仮定は特別の場合を除いて厳密ではない。実際の複合材料問題において、介在物粒子の形の影響、また、介在相と母相の応力又は歪みの違いを考慮する事は重要であり、巨視的な材料特質に与える影響は大きい。

楕円体を介在物の形状として、介在物の応力-歪みを求めるため、Eshelby は図 2-2-1 に

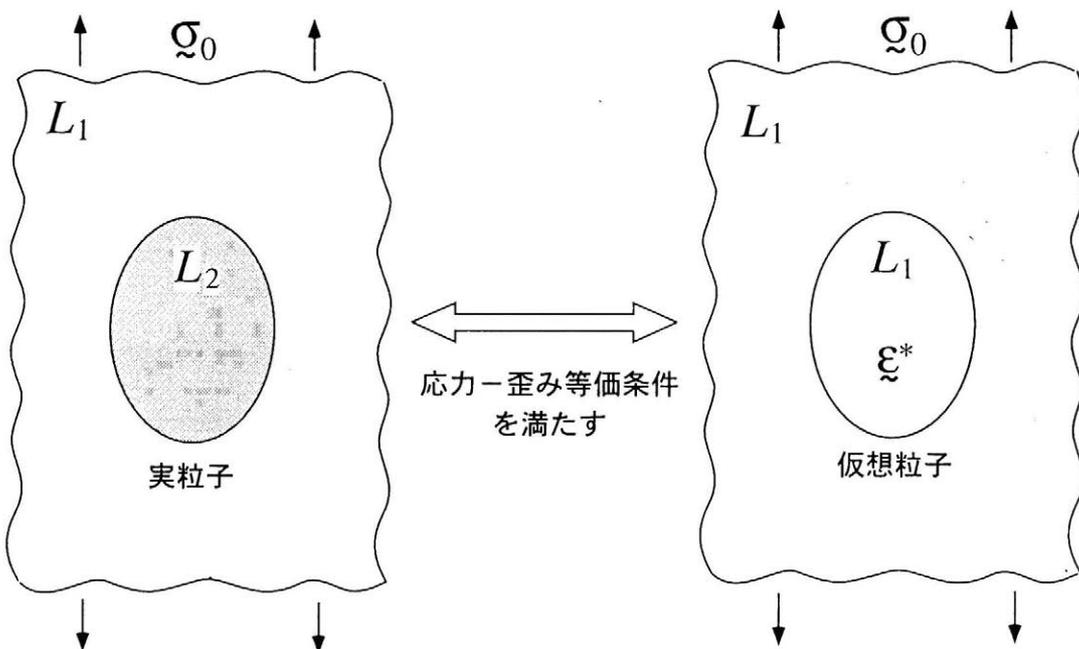


図 2-2-1 楕円粒子に対する Eshelby の等価介在物方法

示すような等価介在物法を提案した。即ち、等しい母相媒体中におかれた種類の異なる二つの粒子は形が同じであっても、剛性が異なれば、外荷重下で生じる応力と歪みが違う。しかし、二つの粒子のどちらかに適当な固有歪みを与えて調節する事により、二つの粒子の応力と歪みを次式に示す様に等価させる事ができる。

$$E_2 : \varepsilon_2 = E_1 : (\varepsilon_2 - \varepsilon^*) \quad (2-2-2-1)$$

ここで、 σ_2 と ε_2 はそれぞれ粒子の応力と歪みである。 E_2 は非均質粒子の剛性マトリクスである。

この方法を利用して、固有歪みを含む仮想粒子の応力及び歪みと実粒子の応力及び歪みとの間に等価関係を結ぶ事ができ、等価条件を満たす固有歪みを決定する事ができる。これにより、等価される実粒子の応力-歪みも同時に求める事が可能となる（方法についての詳細は第三章に示す）。

実際粒子の解析にとって、Reuss と Voigt などの方法とくらべ、Eshelby の等価介在物法では介在物の形を考慮して相応力と歪みを求める事ができ、その価値は高い。

Eshelby の等価介在物法は無限の均質媒体の中にある非均質単粒子の応力-歪みを求める方法であるが、Eshelby の理論では母相媒体が多数の粒子を含む非均質の場合について触れていない。非均質母相媒体、即ち他粒子からなる複合体の粒子の応力と歪みを求める問題について、他の研究者により、Eshelby の等価介在物法が様々な形で利用されている。

2.2.3 単粒子の外部応力-歪みに関する Mura-Cheng 理論

非均質複合材料の巨視的な材料特性を求める時、介在相の挙動を知ることだけでは不十分であり、介在相の周りの母相の挙動も知る必要がある。Mura-Chang (1977) は Eshelby 理論を発展させ、固有歪みを有する仮想粒子の外部の応力について解析を行った。それによれば、仮想粒子の内部で固有歪みにより生じた応力と歪みを弾性理論により求めることができる。Eshelby の場合、粒子内部の応力と歪みを求めることを中心的に行った。そこで、Mura-Chang は弾性理論に基づいて、粒子外部の応力と歪みを求めることを中心に理論構築を行った。

即ち、均質無限領域にある一つの点 $X(x_1, x_2, x_3)$ に固有歪み ε_{ij}^* をかければ、領域にある他の任意の点 $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ に変位を生じる。Kinoshita-Mura (1971) 理論によって、固有歪み ε_{ij}^* で生じた点 X' の変位を Fourier 積分関数により、次のように表す事が出来る。

$$u_i(X) = -(2\pi)^{-3} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} dX' \int_0^{\infty} \xi^2 d\xi \int_{S^2} C_{ijkl} \varepsilon_{nm}^*(X') N_{ik}(\xi) D(\xi) \times \exp \{i\xi \cdot (X - X')\} dS(\xi)$$

上式についての詳細については省略するが、任意点にある固有歪みと他の点の変位の間
に数学的な関係があることを示す。Mura-Changはこの式に基づいて、粒子外部の歪みを
求め、また、均質材の構成則を用いて粒子外部の応力を求めるた。

Eshelbyの等価介在物法により、等価条件を満たす固有歪みを持つ仮想粒子の周りの応
力は実粒子の外部の応力と等しいため、実粒子の周りの応力をも求めることができる。母
相の微視的な応力分布の影響を考慮しなければならない場合に対して、Mura-Changの混
合則は有効な解析手段である。

§ 2.3 文献調査の概要 (二)

母相中に多数の粒子が散在する複合材に関する理論

無限領域を持つ母相媒体にある単粒子が占める体積分率はゼロと考える事ができる。そ
のため、粒子が母相の平均応力に与える影響はゼロと考える事ができる。また、全領域
の平均的挙動も母相と等しいと考えてよい。しかし、多結晶金属合金を含む複合材料の
場合、母相の中に多数の粒子が存在し、同じ荷重下で母相の平均応力は単粒子の場合の
母相の平均応力とは異なる。また、粒子の材料係数が母相と異なる場合複合材料の全体
の平均的材料係数も母相とは異なる。

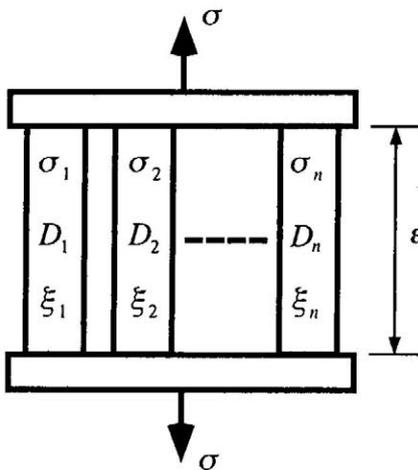


図 2-3-1 Voigt モデル

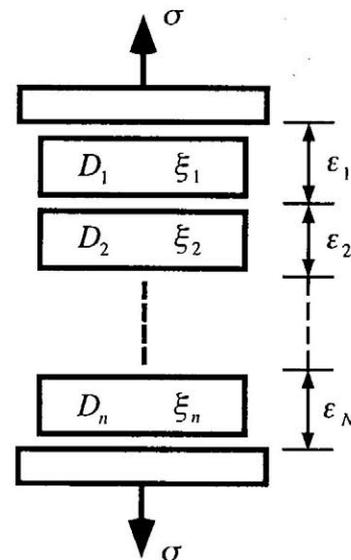


図 2-3-2 Reuss モデル

多数の粒子が存在する複合材料の巨視的な材料特性もしくは構成則を決定するため、複合材料の母相と介在相の応力-歪み、熱伝導率、熱膨張率などの諸物性に関する混合則を確立する必要がある。しかし、単粒子理論をそのまま適用した従来の多粒子混合則理論には問題があるため再検討の必要がある。

2.3.1 Voigt (1910) 理論

Voigt モデルは図 2-3-1 に示すように、全相に亘ってひずみ一定の概念から導出された混合理論である。複合材料の各相材料の応力平衡条件を次式に表す。

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^n f_i \sigma_i \quad (2-3-1-1)$$

ここで、 σ_0 は複合材料の平均応力であり、 σ_i は材料相 i の平均応力である。 f_i は複合材料の介在物材料相 i の体積分率である。複合材料と均質弾性材料である介在相材料に関する弾性構成則をそれぞれ次のように示す。

$$\sigma_0 = \bar{E} : \varepsilon_0 \quad (2-3-1-2)$$

$$\sigma_i = E_i : \varepsilon_i \quad (2-3-1-3)$$

ここで、 \bar{E} と ε_0 はそれぞれ複合材料の弾性マトリクスと複合材料の平均歪みである。 E_i と ε_i はそれぞれ材料相 i の弾性マトリクスと平均歪みである。式 (2-3-1-2)、(2-3-1-3) を式 (2-3-1-1) に代入すれば、次式を得る。

$$\bar{E} : \varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n f_i E_i : \varepsilon_i \quad (2-3-1-4)$$

Voigt は各相材料の平均歪みが複合材料の平均歪みと等しいと仮定している。即ち、

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \quad (2-3-1-5)$$

式 (2-3-1-4) を式 (2-3-1-5) と比較すると、次式を得る。

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n f_i E_i \quad (2-3-1-6)$$

Voigtモデルによる複合材料の平均剛性と各相の剛性間の関係は線形である。Voigtの理論より、複合材料に関する他の諸物性値も線形の形で表す事が出来る。例えば、

$$\text{体積弾性係数} \quad \bar{K} = \sum_{i=1}^n f_i K_i \quad (2-3-1-7)$$

$$\text{せん断弾性係数} \quad \bar{G} = \sum_{i=1}^n f_i G_i \quad (2-3-1-8)$$

$$\text{熱伝導率} \quad \bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n f_i \lambda_i \quad (2-3-1-9)$$

$$\text{熱膨張率} \quad \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^n f_i \alpha_i \quad (2-3-1-10)$$

Voigtモデルは各相材料の微視的形狀、微視的な分布などの影響を考えない、簡単な混

合則である。

2.3.2 Reuss (1930) 理論

Reuss モデルは Voigt モデルと類似して並んで引用される。Reuss モデルは図 2-3-2 に示すような応力一定の概念から導出された理論であり、複合材料の各相材料の歪みに関する平均則は次式によって与えられる。

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n f_i \varepsilon_i \quad (2-3-2-1)$$

ここで、 ε_0 は複合材料の平均歪みであり、 ε_i は材料相 i の平均歪みである。また、 f_i は全体複合材料の中に材料相 i の体積分率を示す。複合材料と均質弾性材料である各相材料の弾性構成則を次のように示す。

$$\varepsilon_0 = \bar{E}^{-1} : \sigma_0 \quad (2-3-2-2)$$

$$\varepsilon_i = E_i^{-1} : \sigma_i \quad (2-3-2-3)$$

式 (2-3-2-2)、(2-3-2-3) を式 (2-3-2-1) に代入すれば、次式を得る。

$$\bar{E}^{-1} : \sigma_0 = \sum_{i=1}^n f_i E_i^{-1} : \sigma_i \quad (2-3-2-4)$$

Reuss は各相材料の平均応力が複合材料の平均応力と等しいと仮定している。即ち、

$$\sigma_i = \sigma_0 \quad (2-3-2-5)$$

式 (2-3-2-4) を式 (2-3-2-5) と比較すると、次式を得る。

$$\bar{E}^{-1} = \sum_{i=1}^n f_i E_i^{-1} \quad (2-3-2-6)$$

ここで、 \bar{E}^{-1} と E_i^{-1} はそれぞれ複合材料と材料相 i の弾性コンプライアンスである。式 (2-3-2-6) に与えられている複合材料の平均弾性コンプライアンスと各相の弾性コンプライアンスの関係は線形である。Reuss の理論より、複合材料の他の諸物性値も式 (2-3-2-6) と類似の形で表すことが出来る。例えば、

$$\text{体積弾性係数} \quad 1 / \bar{K} = \sum_{i=1}^n f_i / K_i \quad (2-3-2-7)$$

$$\text{せん断弾性係数} \quad 1 / \bar{G} = \sum_{i=1}^n f_i / G_i \quad (2-3-2-8)$$

$$\text{熱伝導率} \quad 1 / \bar{\lambda} = \sum_{i=1}^n f_i / \lambda_i \quad (2-3-2-9)$$

$$\text{熱膨張率} \quad 1 / \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^n f_i / \alpha_i \quad (2-3-2-10)$$

Reuss の理論は Voigt 理論と同じく、各相材料の微視的形狀、分布などの影響を考慮しない簡単な混合則である。

2.3.3 Hashin-Shtrikman (1962) 理論

Reuss 理論の結果と Voigt 理論で得られた結果の違いが非常に大きい。Reuss 理論と Voigt 理論は多くの場合、複合材料係数の上限値、下限値として使われている。介在物形状を考慮しない複合材料研究では Reuss 理論と Voigt 理論より厳密な取り扱いをする構成則がいくつかある。その中 Hashin-Shtrikman は等価介在物法と変分原理を用いて、Reuss 理論と Voigt 理論より厳密な上限と下限を次のように設定した。

$$\bar{K}_m = K_1 + \frac{f}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-f)}{3K_1 + 4G_1}} \quad (2-3-2-11)$$

$$\bar{K}_n = K_2 + \frac{1-f}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3f}{3K_2 + 4G_2}} \quad (2-3-2-12)$$

ここで、 \bar{K}_m と \bar{K}_n は複合材料の体積弾性係数の上下限值になる。

$$\bar{G}_m = G_1 + \frac{f}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)(1-f)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \quad (2-3-2-13)$$

$$\bar{G}_n = G_2 + \frac{1-f}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)f}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}} \quad (2-3-2-14)$$

ここで、 \bar{G}_m と \bar{G}_n は複合材料のせん断弾性係数の上下限值になる。

2.3.4 Kerner (1956) 理論

Reuss、Voigt と Hashin-Shtrikman 理論は複合材料の各相材料の幾何学的な因子、即ち、介在相の形状や配向性などを考慮しない。介在相の形状や配向性などの影響を考慮した一つのモデルとして Kerner 理論がある。Kerner は介在相の形状や配置の方向性を等方的に扱い、複合材料の巨視的性能も等方性を持つと仮定する。また、Kerner はマトリックス中に球状粒子が分散するという仮定を用いた。Kerner は図 2-3-3 に示すように、介在物相と同じ弾性係数を有する一つの球状粒子の周りにマトリックス相と同じ弾性係数を有する球殻を考え、さらにその外側には求めるべき複合体と同じ弾性係数を有する無限の混合相があるモデルを考えている。このモデルは、一般に介在物の体積分率が低い場合

を想定し、粒子から遠い領域では均質の領域として粒子間の相互作用効果を考えている。Kernerは図2-3-3のモデルに基づいて、弾性理論を用い、球状粒子の応力と歪みを求め、さらに複合材料の平均材料係数も求めた。

粒子の形が球状と異なる場合、Kerner理論の球状粒子の仮定は適切でないと考えられる。しかし、Kernerの介在相-母相-複合材料モデルは一つの解析手段を提供し、今でも、このモデルは多くの研究者らにより利用されている。

2.3.5 均質粒子を多数含む複合体に関するMori-Tanaka (1973) 理論

Eshelbyの単粒子理論においては、多様な粒子の形状を楕円体とする事ができる。複合材料の介在相粒子の幾何学的形状の多様性に応じるため、Mori-Tanakaは多粒子分散複合材料の応力と歪み混合則モデルにEshelbyの理論を用いた。Mori-Tanakaは複合材料の特性が粒子の大きさに依存せず、粒子の体積分率に依存すると仮定する。

母相材料の中にある楕円体介在相の体積分率を f で表し、介在相を仮想均質粒子によりモデル化し、これに固有歪み ε^* を与える。外荷重がない場合、Mori-Tanakaは複合体の平均歪みを多粒子体に対して次のように与えた。

$$\varepsilon_0 = f \varepsilon^* \quad (2-3-5-1)$$

ここで、 ε_0 は複合体の平均歪みである。固有歪みを持つ粒子の平均応力と母相の平均応力との食い違いは単粒子の場合と同じく、Eshelby理論により次のように決まる。

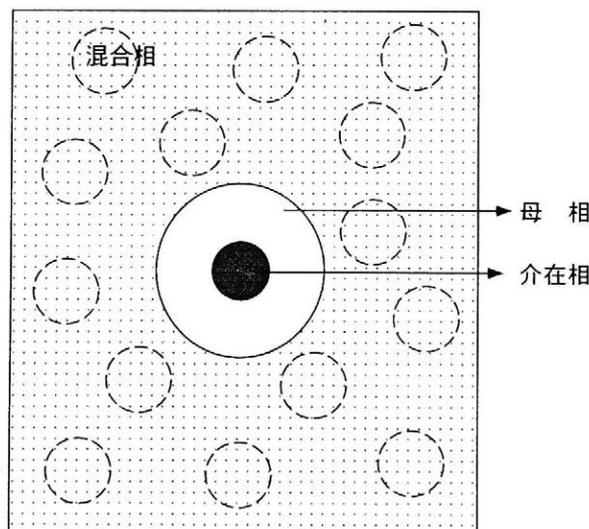


図2-3-3 Kernerの球状粒子分散モデル

$$\sigma^e = E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-2)$$

外荷重がないため、複合材料の応力平衡条件より相応力の間次式に成り立つ。

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 = 0 \quad (2-3-5-3)$$

以上の基本的な仮定に基づいて、筆者による定式化を以下に示す。等価性より実粒子の平均応力と母相の平均応力は次の関係を満たす。

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma^e \quad (2-3-5-4)$$

式 (2-3-5-2)、(2-3-5-3) と (2-3-5-4) より、母相と介在相の応力を解き、次のように求められる。

$$\sigma_1 = -f E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-5)$$

$$\sigma_2 = (1-f) E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-6)$$

母相と介在相に関する弾性構成関係式は次のように与えられる。

$$\xi_1 = L_1 : \sigma_1 \quad (2-3-5-7)$$

$$\xi_2 = L_1 : \sigma_2 + \xi^* \quad (2-3-5-8)$$

ここで、 L_1 は母相材料のコンプライアンスを表し、即ち、 $L_1 = E_1^{-1}$ である。式 (2-3-5-5)、(2-3-5-6) を式 (2-3-5-7)、(2-3-5-8) に代入し、母相と介在相の平均歪みが次のように得られた。

$$\xi_1 = -f (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-9)$$

$$\xi_2 = (1-f) (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* + \xi^* \quad (2-3-5-10)$$

式 (2-3-5-1) ~ (2-3-5-10) は外荷重がない場合の Mori-Tanaka の混合則であるが、外荷重がある場合は、母相と介在相には一様な応力と歪みが生じ、式 (2-3-5-1)、(2-3-5-5)、(2-3-5-6)、(2-3-5-9)、(2-3-5-10) はそれぞれ次に示す形で表される。

$$\xi_0 = L_1 : \sigma_0 + f \xi^* \quad (2-3-5-11)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 - f E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-12)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + (1-f) E_1 : (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-13)$$

$$\xi_1 = L_1 : \sigma_0 - f (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* \quad (2-3-5-14)$$

$$\xi_2 = L_1 : \sigma_0 + (1-f) (\mathcal{S}_1 - I \otimes I) : \xi^* + \xi^* \quad (2-3-5-15)$$

以上の Mori-Tanaka 混合則は温度の非平均分布している均質材料、残留歪みを含む均質材料などの問題について適用することができる。

2.3.6 非均質粒子を多数含む複合体に関する Mori-Tanaka (1973) 理論

多数の非均質粒子を含む複合体の応力と歪みを求めるため、Mori-Tanaka は Eshelby の等価介在物法を多粒子問題に応用した。

Mori-Tanaka は Eshelby の等価介在物法を応用する場合、図 2-3-4 に示す様な等価関係を定義した。図 a に示す実単粒子と図 b に示す固有歪みを有する等価単粒子は Eshelby 等価関係を満足するとする。図 a と同じ実単粒子を図 c に示すように母相の中に多数分散させる。また、図 b と同じ固有歪みを有する等価単粒子を図 c に示す実粒子と同数で、同じ位置に想定する。このように図 d の等価多粒子複合体と、図 c の実多粒子複合体の間に等価則を考え、Mori-Tanaka は図 c の介在相の応力-歪みが図 d の介在相の応力-歪みと等しいと仮定する。等価関係より当然、図 c の母相の応力-歪みも図 d の母相の応力-歪みと等しい。

図 2-3-4 に示す Mori-Tanaka の等価法によって、実粒子の応力と歪みを等価粒子の混合則で表すことができる。即ち、図 2-3-4 の図 a と図 b の等価関係を満たす固有歪みを式 (2-3-5-11) ~ 式 (2-3-5-15) に代入して求めた応力-歪みが非均質複合体の応力-歪みと等しいとする理論が Mori-Tanaka 理論の基本である。

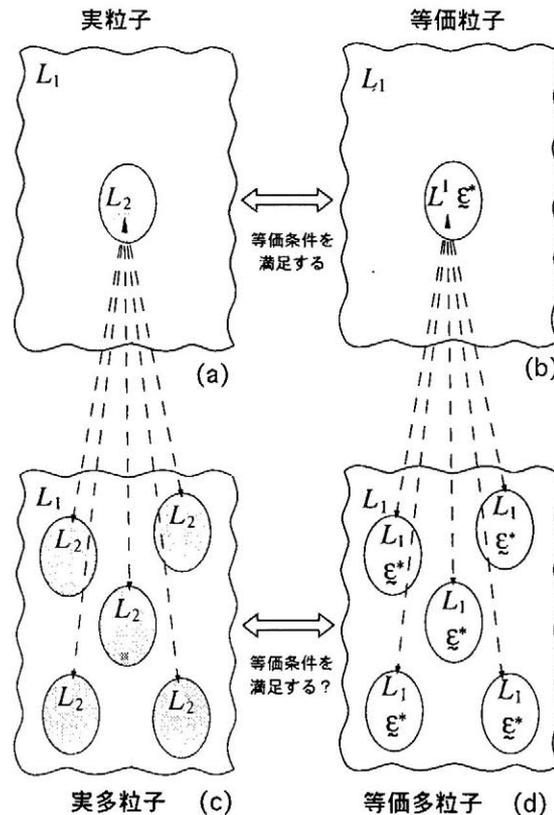


図 2-3-4 多粒子複合体に対する Mori-Tanaka の等価モデル

Mori-Tanaka の混合則は数学的に取り扱い易いので、よく引用されている。しかし、Mori-Tanaka の論文で述べられている様に、非均質粒子の体積分率が高い場合、Mori-Tanaka の混合則は大きな誤差を引き起こす。即ち、図 2-3-4 (d) の等価体で、複合体の剛性が母相と同じとして扱い、式 (2-3-5-2) に与えられている固有歪みと固有歪みで生じる応力の関係は、前節の単粒子の場合と等しいとしている。しかし、図 2-3-4 (c) に示すような非均質材料の場合、明らかに複合体の剛性は母相と異なる。一つの粒子にとって、周りの力学的な環境は単粒子の場合と異なり、また粒子と母相の食い違い単粒子の場合と異なる。実粒子の体積分率が大きくなるとその結果、実複合体と等価複合体の平均剛性の違いも増大する。その故に、Mori-Tanaka の混合則は、非均質粒子の体積分率が小さい場合に適用できると限定されている。

§ 2.4 文献調査の概要 (三)

粒子分散複合材料の特定問題に関する理論

第一章に述べた様に、粒子分散複合材料は機能性材料として多様な分野で使われている。そのため、粒子分散複合材料の弾性変形、塑性変形、熱伝導、熱膨張などの特性に関する理論構成則は材料設計と解析にとって非常に重要である。それ故、多数の研究者が粒子分散複合材料の構成則について研究している。

2.4.1 Mori-Tanaka 混合則に基づく粒子分散複合材料に関する理論

粒子分散複合材料の平均弾性係数を求める際、介在相の形を考慮しない Voigt、Reuss、Hashin-Shtrikman の理論を前文で紹介したが、具体的複合材料に対しては厳密な設計の必要性から粒子の形状を定義しなければならない。粒子の密度に対する制限はあるが、粒子の形を考慮する理論の中、Eshelby の等価介在物理論と Mori-Tanaka の平均場理論に基づいて粒子分散複合材料の平均弾性係数を求める方法は、この分野で最も広く用いられている方法である。但し、検討する複合材料問題の多様性により、Eshelby、Mori-Tanaka 理論に基づく解析モデルは数が多く、様々な分野で応用されている。しかし、それらのすべてにおいて、上述の制限に関しては無視されている。

(A) 球状粒子分散複合材料の弾性問題に関する理論

* ダメージ (damage) を含む複合材料に関する Tohgo (1991, 1994) 理論モデル

高強度の外荷重下で複合材料の粒子は、母相との界面で剥離を起こすかまたは粒子が破壊される場合がある。この様な粒子のダメージ (damage) を持つ球状粒子分散複合材料の強度について Tohgo は Eshelby、Mori-Tanaka 理論を用いて解析を行った。

まず、Tohgo はダメージが発生した粒子の剛性がゼロとなると仮定し、そのため損傷を被った粒子を空孔と故した。母相の中に二種類の粒子が存在すると考え、一つは実粒子、もう一つは損傷による空孔であるとする。実粒子の体積分率と空孔の体積分率の合計は定数である。粒子のダメージの発生率、即ち空孔の体積分率は複合材料の平均応力の関数として、各荷重ステップの粒子の体積分率と空孔の体積分率を決定している。

粒子の体積分率と空孔の体積分率を決定する仮定において、Tohgo は空孔の応力をゼロとし、Mori-Tanaka 理論に基づいて Eshelby の等価関係を満足する固有歪みを求めた。さらに、粒子と母相の平均応力-歪みと複合材料の平均値との関係、即ち混合則を決定した。

複合材料の混合則を決定する上に、Tohgo は Mori-Tanaka の式 (2-2-5-11) ~ (2-2-5-15) を利用して複合材料の平均剛性を求めた。Tohgo の論文は粒子の体積分率が 30% までの結果を示したが、実験の結果と一致することを提示した。

* 傾斜機能材料の剛性に関する Wakashima (1990) 理論

傾斜機能材料の粒子の体積分率は位置の関数として変化する。Wakashima は体積分率低い所で体積分率が一定と仮定し、Mori-Tanaka の混合則により、局所的な複合体の構成則を求めた。そして、粒子の体積分率の分布関数を用い、複合材料の全体の剛性を決定している。

* 傾斜機能材料の熱応力に関する Takahashi (1990) 理論

粒子分散複合材料の母相と介在相の材料係数が違うため、複合体の温度が変化する時、母相と介在相の変形が異なり、内部応力を生じる。温度の変化で生じる母相材料と介在相材料の歪み差が固有歪みの一種であるとし、Takahashi は Mori-Tanaka 理論を用い、温度の変化で生じた母相と介在相内部の応力を求めた。

(B) 球状粒子分散複合材料の塑性問題に関する理論

* Tandon-Weng 理論 (1988)

Tandon-Weng は母相と介在相の平均応力と平均歪みを求める Mori-Tanaka 理論を用い、

球状粒子分散モデルの複合材料の塑性変形についてのモデルを検討した。弾性的場合は、母相と介在相の平均応力と平均歪みの関係は均質材料と同様とする。Tandon-Weng は比例荷重条件と微小変形条件下で塑性問題に対して、母相と介在相の平均応力と平均歪みの関係を弾性的場合と同じように均質材料と等しいと考えてMori-Tanakaの平均場理論を用いた。

Tandon-Weng の論文では Metal Matrix 複合材料を想定し、母相が塑性材料であると仮定している。母相の相当応力と相当歪みの間の塑性硬化則を次のように与える。

$$\sigma_e = \sigma_y + h (\varepsilon_e^n) \quad (2-4-1-1)$$

ここで、 σ_y 、 h 、 n はそれぞれ降伏応力、歪み硬化係数、硬化指数である。 σ_e と ε_e^n はそれぞれ母相材料の相当応力と相当塑性歪みである。Tandon-Weng は母相材料を非線形弾性材料に等価させ、等価非線形弾性材料の "Secant" 弾性係数として、ヤング率とポアソン係数を式 (2-4-1-1) により次のように定義した。

$$E_0^s = \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{\varepsilon_e^n}{\sigma_y + h (\varepsilon_e^n)}}, \quad \nu_0^s = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \nu_1\right) \frac{E_0^s}{E_1} \quad (2-4-1-2)$$

ここで、 E_1 と ν_1 は母相材料のヤング率とポアソン係数である。母相の "Secant" 弾性係数と介在相の弾性係数を用い、Eshelby と Mori-Tanaka 理論を用いて複合材料の塑性構成則を求めた。

Tandon-Weng は粒子の体積分率の 52% 以下の場合について実験の結果と塑性の部分についてのみ比較し、粒子の体積分率が 35% 以下の場合に、結果が実験の結果に近いことを示した。しかし、Tandon-Weng は弾性部分の結果については実験と比較していない。

* Qiu-Weng 理論 (1992)

Qiu-Weng は Tandon-Weng と同じ方法で空孔を含む球状粒子分散複合材料について検討した。Qiu-Weng は粒子の体積分率が 6.5% の場合の有限要素法の結果と比べた結果を示した。弾性部分はよく一致するが、有限要素法の塑性部分の結果が 10% 程高い。粒子の体積分率が 20% の場合については、Tandon-Weng の結果と比べ、弾性段階でよく一致しているが、塑性段階では Tandon-Weng の結果より少し低く見積っている。

Tandon-Weng と Qiu-Weng は塑性材料内部で材料係数が微視的な局所性のために引き起こされる非均質効果を考慮しておらず、それが起こる場合、即ち粒子の体積分率が大きい場合の結果を示していない。この塑性効果は大きく複合材の挙動に影響を与え、Mori-Tanaka の混合則を用いる論理に無理がある。

(C) 繊維分散複合材料に関する理論

Mori-Tanaka混合則を用い、繊維分散複合材料の性質について理論モデルを構築する論文が多数ある。基本的な方法は類似しているが、検討する問題が異なる。その中の代表的な理論を簡単に紹介する。

繊維介在物と球状粒子介在物の最も大きく異なる所は、球状粒子介在物では方向性がなく、繊維介在物には強い方向性がある。繊維の配置と方向に関する分布は複合材料に大きな影響を与えるため、繊維分散複合材料の挙動の解析においては、繊維の配向性を充分考慮しなければならない。

* Wakashima-Tsukamoto (1990)

Wakashima-Tsukamotoは多種類の粒子が存在する複合材料について理論モデルで分析を行った。母相の中に楕円粒子、繊維と空孔が同時に存在するがしかし、同じ種類の粒子の配列方向は一致している。Wakashima-TsukamotoはMori-Tanakaの方法を多種類の粒子に拡張し、それぞれの種類の粒子について応力-歪みと複合材料の巨視的な平均応力-歪みの関係を立てた。さらに、式(2-2-1-1)に示した応力の平衡条件と、式(2-2-2-1)に示す歪み平均則を用いて複合材料の剛性に関する構成則を求めた。

その構成則を用い、Wakashima-Tsukamotoは傾斜機能材料の挙動に関する理論モデルを与えた。しかし、Wakashima-Tsukamotoの論文では理論モデルの結果を他の理論及び実験結果と比較していない点にその有効性に疑問が残る。

* Tandon-Wang (1986)

第一章で紹介したように、短繊維分散複合材料は広範な領域に応用されている。その中に繊維介在相がランダムに配列している複合材料が注目される。繊維がランダムに配列している複合材料の挙動を解析するため、繊維介在相の配列方向に関する分布関数を決定する必要がある。さらに、繊維の縦横比、即ちアスペクト比の影響を考慮しなければならない。そこで、Tandon-Wangは繊維の配列方向の分布とアスペクト比の影響を考慮するため、Mori-Tanakaの混合則に基づいて理論を立てた。

理論は一つの繊維を長楕円体で表し、着目する一つの粒子を配置した軸方向に合わせて局部座標系を設定している。Tandon-Wangは母相応力が平均分布していると仮定し、繊維の存在の影響を考慮して、母相の応力と複合材料の平均応力に関するMori-Tanaka混合則を次のように表す。

$$\sigma_i = \sigma_0 - f \langle \sigma^c \rangle \quad (2-4-1-3)$$

ここで、 σ_i と σ_0 はそれぞれ母相と複合材料の平均応力である。繊維の配列方向には任意性があり、繊維によって繊維と母相の食い違い応力が異なる。式 (2-4-1-3) に示す $\langle \sigma^c \rangle$ はすべての繊維の応力と母相の平均応力の差の平均値を表す McCauley Bracket である。局所座標系で繊維の応力と母相の食い違い応力は Mori-Tanaka の理論により次のように与えられる。

$$\sigma_i^c = E_i : (\underline{S}_i - \underline{I} \otimes \underline{I}) : \underline{\varepsilon}_i^c \quad (2-4-1-4)$$

ここで、 σ_i^c は繊維 i の食い違い応力である、 $\underline{\varepsilon}_i^c$ は繊維 i に関する局所座標系で等価関係を満たす固有歪みである。すべての粒子の形が等しいとしているため、Eshelby テンソル \underline{S}_i は一定である。Tandon-Wang は等価関係を満たす固有歪みをすべての粒子に対して平均化し、式 (2-4-1-3) の $\langle \sigma^c \rangle$ を求めた。さらに、Tandon-Weng は Mori-Tanaka 混合則に関する式 (2-2-5-11) ~ (2-2-5-15) を用い、複合材料の巨視的な剛性に関する体積弾性係数とせん断弾性係数を求めた。

アスペクト比が一定である繊維が全方向に平均分布している繊維複合材料の剛性について、Tandon-Wang は求めた弾性係数を利用して、理論モデルで解析を行った。さらに、Tandon-Wang はアスペクト比が複合材料の剛性に与える影響も検討した。繊維配置方向の分布に関する影響については Tandon-Wang は検討していない。

* Takao-Taya (1985)

Takao-Taya は繊維方向が一致に分布し、繊維のアスペクト比が任意である複合材料の弾性構成則について検討した。まず、一つの繊維について Mori-Tanaka 理論と等価介在物法を使用し、その繊維の内部応力を求める。さらに、Tandon-Weng の場合のように、すべて繊維の応力と固有歪みを平均化し、Mori-Tanaka 混合則の式 (2-2-5-11) ~ (2-2-5-15) に代入して、複合材料の巨視的な剛性に関する体積弾性係数とせん断弾性係数を求めた。

Takao-Taya は繊維の三種類のアスペクト比に対して体積分率関数を定め、それぞれの場合について検討した。繊維のアスペクト比の分布は繊維方向の分布と比べて、複合材料の剛性に与える影響はほとんどないという結論を Takao-Taya は得ている。

* Hatta-Taya (1985)

Hatta-Taya は繊維の配列方向とアスペクト比が共にランダムに分布している複合材料の熱伝導率について、理論モデルで解析を行った。熱流束、温度勾配と熱伝導率の関係は数学的に応力、歪みと弾性係数の関係と相似しているため、応力-歪みに関する混合則

から相似的に熱流束、温度勾配と熱伝導率を用い熱伝導問題の関係式を容易に導くことができる。

そのため、Hatta-TayaはMori-Tanakaの混合則に基づいて、任意の繊維の内部の熱流束と等価関係を満たす仮想温度勾配を求め、Tandon-WangとTakao-Taya方法のようにすべての繊維に対して平均化した。さらに、平均化した繊維の熱流束と仮想温度勾配をMori-Tanakaの混合則に代入して、複合材料の平均熱伝導率を求めた。

Hatta-Tayaは理論モデルの数値計算を行うとき、アスペクト比が影響の少ないパラメータなので、定数とした。繊維の配列方向について、平均分布とコサイン分布を選択した。この様な条件下で、Hatta-Tayaは二次元と三次元の場合の理論モデルの結果を示した。

2.4.2 Self-consistency 理論

節2.3.1で紹介した理論はすべてMori-Tanakaの混合則に基づいて開発されたモデルである。しかし、Mori-Tanakaの論文に述べられている様に、Mori-Tanakaの混合則は粒子の体積分率が小さい場合に限り適用できる。粒子の体積分率が大きい場合は大きな誤差を引き起こす可能性がある。節2.3.1で紹介したほとんどの理論が粒子の体積分率の高い場合の結果を示していないか、又は触れていない事の原因であると推測される。

Mori-Tanakaの混合則に基づいて開発した理論と異なり、Self-consistency理論は粒子の体積分率が高い場合に有効な一つの方法として適用することができる。Self-consistency理論の特徴は未知数である複合材料の巨視的な材料係数を求める際、複合材料の巨視的な材料係数を未知数として定式化の中で取り扱い解く手法である。当初、Hershey (1954) とKeröner(1961)により提案されたSelf-consistency理論の目的は、多結晶合金 (polycrystal) の性質を解析する事にあった。この多結晶合金では稠密な多結晶中に、介在相である他の結晶粒子が100%に近い体積分率で分散するというモデルを考えている。その場合、一つの粒子にとって、ほかの粒子は自己の母相となる。この様な状態で粒子の応力と歪みを求めるとき、複合体の剛性を未知数として扱い、定式化するのが便利である。

*多晶合金体に関する Hill 理論 (1965)

多晶合金は結晶粒子の集合体である。一つの粒子にとって、結晶粒子の集合体である合金自体は自己の母相となる。そのため、結晶粒子の応力と歪みを求めるとき、母相の剛性を合金体のそれと同じと仮定する。

Hillは合金体にあるすべての材料に対して楕円粒子モデルを導入した。任意の一つの結

晶粒子の応力を求めるため、Eshelby単粒子理論を利用した。結晶粒子の周りの合金体を均質媒体と見れば、Eshelby単粒子理論に基づいて、結晶粒子の応力-歪みと合金体の平均応力-歪みの関係を簡単に求めることができる。Hillは介在相と母相の別を問わず、すべての結晶粒子に対してEshelby単粒子理論を用い、結晶粒子の応力-歪みを求めた。しかし、この方法では、介在相と母相の応力を独立して定義するが、介在相と母相の歪みは等しいと仮定して得た関係式を解いて、合金体の弾性係数を求めることができる。

逆に、介在相と母相の歪みを独立して定義し、介在相と母相の応力が等しいと仮定すれば得た関係式を解いて、合金体の弾性コンプライアンスを求められる。

Hillは以上のように合金体と粒子に関して応力平衡条件と歪み平均則を使わずに、簡単な形で合金体の構成則を導いた。しかし、この方法で仮定された介在相と母相歪み又は応力が等しい条件の妥当性には疑問点が多く、得た理論構成則の精度や適用範囲などの問題に関する検討がHillの論文では行われずに残されている。

* 粒子分散複合材料に関する Hill 理論 (1965)

二種類の材料で組み合わせた複合材料に対して、Hillは合金体の解析の場合と同じ方法で複合材料の粒子の応力を求めた。即ち、成分である二つの材料にEshelby理論を同時に応用して、それぞれの応力或いは歪みを求める。求めた応力を式(2-2-1-1)に示す応力の平衡条件に代入して解くと、複合材料の弾性係数を求められる。同じ方法で、求めた歪みを式(2-2-2-1)に示す歪みの平均則に代入して解くと、複合材料の弾性コンプライアンスが求められる。

Hillはその構成則の適用範囲を、二相の中の一つの体積分率が非常に小さい場合、即ちもう一つの体積分率が非常に大きい場合と限定している。

* 粒子分散複合材料に関する Budiansky 理論 (1965)

Budianskyはまず、すべて材料のせん断応力と静水圧応力が等しいと仮定する。せん断歪みエネルギーの保存法則に基づいて、複合材料のせん断弾性係数を次のようにもとめた。

$$\frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G_1} + \sum_{i=2}^n f_i \left(1 - \frac{G_i}{G_1}\right) \left(\frac{\gamma_i}{\tau_0}\right) \quad (2-4-1-5)$$

ここで、 \bar{G} 、 G_1 と G_i はそれぞれ複合材料、母相材料と第 i 介在相材料のせん断弾性係数である。 f_i と γ_i は第 i 介在相の体積分率と平均せん断歪みである。 τ_0 は複合材料のせん断応力である。そこで、Budianskyは粒子の外部領域の剛性が複合材料と等しいと仮定し、

Eshelby 理論に基づいて式 (2-4-1-5) の γ_i と τ_0 の関係を求めた。その上で、複合材料のせん断弾性係数に関する selfconsistency 形式の構成則を導いた。

同じ方法で複合材料の体積弾性係数を次のように求めた。

$$\frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{K_1} + \sum_{i=2}^n f_i \left(1 - \frac{K_i}{K_1}\right) \left(\frac{\varepsilon_i^k}{\sigma_0^k}\right) \quad (2-4-1-6)$$

\bar{K} 、 K_1 と K_i はそれぞれ複合材料、母相材料と第 i 介在相材料の体積弾性係数である。 ε_i^k は第 i 介在相の体積歪み、 σ_0^k は複合材料の静水圧力である。Eshelby 理論に基づいて式 (2-4-1-6) の ε_i^k と σ_0^k の関係を求め、複合材料のせん断弾性係数に関する selfconsistency 形式の構成則を構築した。

Budiansky の論文によると、二相材料について、二つの材料のせん断弾性係数が等しい場合、Budiansky の理論で得た複合材料の体積弾性係数が Hill の結果と同じとなる。また、Budiansky 論文によると、Budiansky の理論で得た結果は Voigt と Reuss の結果の間にある。

* Berveiller-Zaoui 理論 (1978)

Berveiller-Zaoui の目的は、Hill 理論の稠密な多結晶体の塑性変形について Kröner より精度の良い構成則を開発するためであった。Berveiller-Zaoui は粒子の塑性歪みと複合体の平均塑性歪みの差を固有歪みとし、Eshelby の理論に基づいてすべての粒子（母相なし）の応力を求めた。即ち、一定の応力状態下での粒子の応力と歪みの関係を弾性粒子に等価させ、Secant 法により弾性等価粒子の弾性係数を応力の変化に従って変化させる。すべての材料の等価弾性係数を決定した上で、Berveiller-Zaoui は Hill の構成則 (1965) をそのまま利用して、塑性問題の解析を行った。

* Huang-Hu 理論 (1994)、(1995)

Huang-Hu (1994) は粒子分散複合材料の弾性係数を求めるため、Budiansky の理論と同じように複合材料の各相材料中のせん断応力と静水圧力が等しいと仮定する。また、式 (2-4-1-5) と (2-4-1-6) に示す Budiansky の selfconsistency 形式の混合則をそのまま用いた。第 i 介在相材料のせん断歪み－せん断応力と、体積歪みと静水圧力に関する混合則を導くため、上で紹介した図 1-2-3 に示す Kerner モデルと同じ介在相－母相－複合体モデルを利用した。核部分は介在相、中間層は母相であり、核部分の体積と中間層の体積の比が介在相と母相の体積分率比と等しいとする。

Huang-Hu は複合体に静水圧力と反対称せん断応力をかけ、介在相－母相－複合体モデルを利用した弾性理論に基づいて、介在相材料のせん断歪み－せん断応力と体積歪みと

静水圧力に関する混合則を決定した。それを式 (2-4-1-5) と (2-4-1-6) を代入し、selfconsistency 形式の複合体弾性係数を求めた。

Huang-Hu の論文によると、上の方法で解析した結果は Mori-Tanaka 混合則に基づく Weng の理論の結果に近い。

さらに、Huang-Hu (1995) は同じ介在相-母相-複合体モデルで繊維分散複合材料について検討した。繊維介在物と母相の剛性比の影響と繊維のアスペクト比の影響について Mori-Tanaka 混合則に基づく Zhao-Weng の理論による結果と比較し、その結果、繊維の体積分率が大きい場合 (50% 以上)、Huang-Hu 理論の結果は Zhao-Weng 理論の結果に近いが、粒子の体積分率が小さい場合 (50% 以下)、Huang-Hu 理論の結果と Zhao-Weng 理論の結果は大きく離れる。

§ 2.5 本論文の目的と内容

2.5.1 これまでの理論の問題点

機能性材料である粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の性能に関する代表的な理論を詳しく紹介した。従来の理論はそれぞれの特徴、また利点がある。しかし、最も要求される複合体構成則の精度においていくつかの問題点がある。それらを整理すれば以下の項目として挙げられる。即ち、

(1) 複合材料の一つの粒子に対する周りからの拘束は、周囲の粒子と母相の剛性の相及び粒子密度により大きく影響される。Mori-Tanaka の混合則モデル理論では拘束は母相のみにより、この事実を考慮していないため、粒子の体積分率が高い場合、また介在相と母相の剛性比が大きい場合、Mori-Tanaka 混合則に基づく構成則の精度が低下する。

(2) 従来の理論は複合材の塑性変形を取り扱う際、各相材料の平均応力と平均歪みの間に非線形構成を立てている。また、ほとんどの研究者が塑性材料を弾性材料と等価する方法による塑性の剛性を求める。しかし、メゾ・メカニクス解析によれば微視的に起きる局所塑性化が、マクロな挙動に与える影響は大きく、この事実を取り扱った例はない。

(3) 粒子の体積分率が高い場合における開発された従来の Selfconsistency 理論は介在相と母相を区別せず、すべての材料を介在相とする。介在相にとって、母相は平均化された複合材料媒体である。そのため、従来の Selfconsistency 理論は実際の複合材料の母相と介在相に関するそれぞれの役割の規定を無視している。

(4) また取扱上の困難さから、従来の Selfconsistency 理論は、介在相と母相の応力一歪みが同様であると仮定する。実際の複合材料では、母相と介在相の応力が著しく異なる。その上、同じ複合材料でも、塑性変形の発生する場合には塑性化した材料の剛性が変化するため、母相と介在相の応力の割合も弾性の場合と異なる。

2.5.2 本論文の目的

上に掲げた従来モデル理論の問題点により複合材料の実際的な精度に大きな疑問がある。この点を克服するべく、本論文では次に示す項目を目的として設定した。

(1) 粒子分散複合材料について介在相の体積分率の全範囲即ち、0から100%まで、また介在相と母相剛性比の全範囲 (0から ∞) に亘って、精度の良い構成則を開発する。この範囲で十分な精度が保証された従来の理論モデルは存在しない。

(2) 粒子分散複合材料における微視的な応力分布が複合体挙動に与える効果は大きく、これをモデル化した理論はまだ存在しない。本論文ではこれに挑戦し、非線形域で局所非線形化を可能とするモデルを考え、優れた精度を持つ、粒子分散複合体の弾塑性構成則を開発する。

(3) 繊維分散複合材料における繊維間の剛性による干渉を及び繊維の配向性分布を考慮した構成則を構築する。また介在相の体積分率の全範囲また介在相と母相剛性比の全範囲に亘って、精度の良い構成則を開発する。

(4) 粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の熱挙動、即ち、熱膨張率及び熱伝導率について介在相の体積分率の全範囲また介在相と母相剛性比の全範囲に亘って、精度の良い構成則を開発する。

よに示した目的に沿って開発した理論構成則モデルの精度を検証するため、充分信頼できる計算力学的モデルとして、有限要素法を用いたメゾ・メカニクス・モデルを実施し、理論解の結果と比較する。またメゾ・メカニクス解析は、微視的な現象を把握したヒントを理論モデルの開発に与える事が可能でもある。

2.5.3 本論文の研究の方法と内容

(1) まず、固有応力と固有歪みの概念から弾性理論を構築し、単粒子の挙動について Eshelby モデルの展開と検証を行った。

(2) 粒子分散複合材料の弾性問題について、可能ないくつかのモデルを考え、それぞれの混合則と構成則を構築する上で、理論モデルとメゾ・メカニクス解析から相の剛

性比と体積分率の影響を考慮する。

(3) 粒子分散複合材料の塑性問題について、まず、メゾ・メカニクス解析で複合材料内部の微視的な応力-歪み挙動に関する現象を解明する。その上、微視的な応力-歪み挙動について数学的にモデル化する。そのモデルに基づいて、理論モデルで解析を行い、さらに、メゾ・メカニクス解析の結果と比較する。

(4) 繊維分散複合材料について、繊維の剛性の干渉、配列方向、配列分布などを考慮した数学的なモデルを構築し、弾性構成則を開発する。また、理論モデルとメゾ・メカニクス解析を行い精度を検証する。

(5) 機能性材料の熱挙動に関する理論モデルは一つの大きな課題である。そのため、本論文で粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の熱挙動について、本論文のモデルを用いて、解析を行う。また、理論モデルの精度を検証するため、メゾ・メカニクス解析を行う。

以上に述べたように、本論文で理論展開を行う傍、メゾ・メカニクス解析を並行して実施する。本来ならば理想である。しかし、実験では粒子と母相との界面において剥離など複雑な現象が付随し、粒子分散複合材料の弾性、塑性レベルに限定して検証する事が不可能である。まずこの分野においては、既に複雑な弾塑性域における構成則の確立が第一目標であり、更に複雑な剥離現象の取扱いは次段階の課題として取り扱う。

また、本論文の理論数学的モデルを実験で検証することが粒子の分散複合材料の介在相と母相の応力-歪みの割合、粒子の界面上の応力分布、塑性材料内部の微視的な応力分布などを実験で分析するのは不可能である。そのため、メゾ・メカニクス解析は本論文理論モデルにとって、不可欠で重要な検証手段である。

参考文献

- (2.1) M.Berveiller and A.Zaoui, "An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals", J.Mech.Phys.Solids, Vol.26, p325-344, 1979
- (2.2) B.Budiansky, "On the elastic moduli of some heterogeneous materials", Mech.Phys.Solids, Vol.13, pp.223-227, 1965. Pergamon Press Ltd.
- (2.3) Bernard Budiansky, "Elastic moduli of a cracked solid", Int.J.Solids structures, Vol.12, pp.81-97, 1976, Pergamon Press.

- (2.4) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proc. of the Royal Society of London, Series A, Vol.241A, pp.376~396, 1957.
- (2.5) Zvi Hashin and S.Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol.10, No.7, pp.342-352, 1962
- (2.6) Z.Hashin, S.Shtrikman, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials", J. Mech. Phys. Solids, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- (2.7) R. Hill, "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials", J. Mech. Phys. Solids, 1964, pp.199-212
- (2.8) R. Hill, " Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Plastic Polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, pp.89-101, 1965. Pergamon Press Ltd.
- (2.9) R.Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials", J.Mech.Phys.Solids,1965, Vol.13,pp.213-222
- (2.10) Hiroshi Hatta, Minoru Taya, "Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite", J. Appl. Phys. (American Institute of Physics) , Vol.58 (7) , pp.2478-2486, October 1985
- (2.11) .Huang, K.X.Hu, X.Wei and A.Chandra, "A generalized self-consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions", J.Mech.Phys.Solids,1994, Vol.42,No.3,pp.491-504
- (2.12) Y.Huang, K.X.Hu, "A generalized self-consistent mechanics method for solids containing elliptical inclusions", Transactions of the ASME, Vol.62, September 1995, pp.566-572
- (2.13) Y.Huang, K.X.Hu and A.Chandra, "Stiffness evaluation for solids containing dilute distributions of inclusions and microcracks", Journal of Applied Mechanicals, March 1995, Vol.62,pp.71-77
- (2.14) E.H.Kerner, "The elastic and thermo-elastic properties of composite media", Proc. Phys. Soc. Lxix,8-B
- (2.15) E.Kroner, "Zur plastischen verformung des vielkristalls", Acta metallurgica, Vol.9, February, 1961
- (2.16) T.Mori, K.Tanaka "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta, Metallurgica, Vol.21, pp. 571-574, May 1973.
- (2.17) T. Mura, P.C. Cheng "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", J. of Applied

- Mechanics, Transaction of ASME, pp.591-594, Dec. 1977.
- (2.18) T.Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
- (2.19) Y.P. Qiu, G.J.Weng, "A Theory of Plasticity for Porous Materials and Particle-Reinforced Composites", J. of Applied Mechanics, Vol.59, pp.261-268, June 1992.
- (2.20) Reuss, Beruchichtigung der Elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, Z.angew. Math, Mech.,10, pp.266-274, 1930.
- (2.21) Y.Takao, M.Taya, "The effect of variable fiber aspect ratio on the stiffness and thermal expansion coefficients of a short fiber composite", Journal of composite materials (Technomic Publish Co.,Inc.) , Vol.21, P140-156, Feb. 1987
- (2.22) Y.Takao and M.Taya, "Thermal expansion coefficients and thermal stresses in an aligned short fiber composite with application to a short carbon fiber/aluminum", Transaction of the ASME, Vol.52, pp.806-810, Dec.1985
- (2.23) K.Tanaka, T.Mori, "The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres", Acta metall. mater. (USA) , Vol.18, p931-941, August 1970
- (2.24) G.P. Tandon and G.J. Weng, "Average Stress in the Matrix and Effective Moduli of Randomly Oriented Composites", Composite Science and Technology 27, 1986, pp.111-132
- (2.25) G.P.Tandon,G.J.Weng, "A Theory of Particle-Reinforced Plasticity", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, Vol.55, pp.126-135, March 1986.
- (2.26) G.P.Tandon, G.J.Weng, "Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration", J. of Applied Mechanics, Vol.53, pp.511-518, Sept.1986.
- (2.27) M. Yaya and T. Mura, "On Stiffness and Strength of an Aligned Short-fiber Reinforced Composite Containing Fiber-End Cracks Under Uniaxial Applied Stress", Journal of Applied Mechanics, June.1981, Vol.48, pp.361-367
- (2.28) Keiishiro Tohgo, Tsu-Wei Chou, "Center for composite materials technical report", CCM Report 91-45, (Center for composite materials, Composites manufacturing science laboratory, College of engineering, University of Delaware)
- (2.29) Keiichiro TOHGO, Tetsuya TAGAWA, and Akio OTSUKA, "Analysis of elastic and elastic-plastic deformation behavior of two-phase sintered materials", 日本機械学会論文集 (A編) , Vol.53, No.494, 昭 62-10, pp.153-159, 1991.3
- (2.30) Keiichiro Tohgo, G.J.Weng, "A progressive damage mechanics in particle-reinforced metal-

- matrix composites under high triaxial tension", *Journal of engineering materials and technology*, Transactions of the ASME, Vol.116, July 1994
- (2.31) Keiichiro Tohgo, Naomori Suzuki, Hitoshi Ishii, "Influence of damage evolution on a crack-tip field in particulate-reinforced composite", *The ninth technical conference of the american society for composites*, (University of Delaware) , Sep.1994
- (2.32) Minoru Taya and Tsu-Wei Chou, "On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body : An application to a hybrid composite", *Int. J. Solids Structures* Vol.17, pp.553-563, 1981
- (2.33) K.Wakashima, "Macroscopic mechanical properties of composite materials, Part I. Theoretical basis, Part II.Elastic moduli and thermal expansion coefficients", *日本複合材料学会誌*, Part I. pp.119-125, Vol.2-3, 1976, Part II. pp.161-167, Vol.2-4, 1976
- (2.34) K.Wakashima and T.Mori, "Elastic and inelastic behavior of composites with multidirectionally oriented ellipsoidal reinforcements", *Proceedings of the 8th Riso international symposium on metallurgy and materials science*, pp543-548, Sept.1-11, 1987
- (2.35) K.Wakashima and H.Tsukamoto, "Micromechanical approach to the thermomechanics of ceramic-metal gradient materials", *Proceedings : The first international symposium, FGM, Sendai*, pp.19-29, Sendai, 1990
- (2.36) K.Wakashima, T. Hirano and M. Niino, "Functionally gradient materials (FGM) architecture : a new type of ceramic-metal assemblage designed for hot structural components", *Proc. ESA Symp. : ' Space applications of advanced structural materials'*, ESTEC, Noordwijk (NL) , 21-23 March 1990
- (2.37) G.J. Weng, "The Theoretical Connection between Mori-Tanaka's Theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole Bounds", *Int. J. Engng Sci.* Vol.28, No.11, pp.1111-1120, 1990.
- (2.38) Y.H. Zhao, G.P. Tandon, and G.J. Weng, "Elastic Moduli for a Class of Porous Materials", *Acta Mechanica* 76, pp.105-130, 1989
- (2.39) Voigt, *Lehrbuch. der Kristallphysik*, B.G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1910.
- (2.40) 若島健司, "複合材料の巨視的力学特性, Part II 弾性係数および熱膨張係数", *日本複合材料学会誌*, Vol.2-4, pp161-167,1976.
- (2.41) 東郷敬一郎, 坂口学, 石井仁, "傾斜機能材料の強度評価における破壊力学の適用性

に関する研究", 日本機械学会論文集 (A編), 61 巻 592 号, pp.23-31, 1995.

(2.42) 中垣ほか, 第8回破壊力シンポジウム講演論文集, pp.165-169, 1995.

(2.43) 呉亜東, 中垣通彦, "粒子分散複合材料の構成則とその評価", 日本機械学会, M&M96, No.96-10, pp.279-280, 1996.

(2.45) A. V. Hershey, Dahlgren, VA. "The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals", Journal of Applied Mechanics, Sept., 1954, pp.236-240

第3章

単粒子理論

要 旨

無限領域に一つの介在物が存在する単粒子構造は最も基本の複合体であるので、複合材料に関する理論解析は単粒子の挙動を解明する上に発展するものである。そのため、単粒子の挙動を理解する必要がある。第三章で固有歪みと固有応力の概念の説明から初め、固有歪みを有する仮想粒子の応力と歪みに関する混合則を構築する。さらに、Eshelbyの単粒子が無限相の中に存在する基本的問題に関する仮定を用いて、本論文独自の理論展開を進め、後章の多粒子問題への準備を整える。また、本章で単粒子の内部応力分布と粒子の界面上の応力分布についてメゾ・メカニクス解析分析を行う。

§ 3.1 固有歪みと固有応力

3.1.1 固有歪みと固有応力、介在相と母相とは

固有歪みは弾性力学においては、非弾性歪みと定義されている。具体的には、応力が存在する条件下において生じる歪みのうち、熱膨張、相変態、残留歪み、塑性歪みなどがその例として挙げられる。複合材料内部の相内に存在する固有歪みが他と一致しない場合には、外荷重がなくても、材料内部で応力が生じる場合がある。このような固有歪みの存在することにより、生じた応力を固有応力と呼ぶ。現に技術者は製造過程や塑性変形後、材料の内部に残存する固有応力として残量応力とが存在する場合がある。

一例として、図3-1-1に示す材料Dの中にある一部分 Ω の温度が T °C度上昇するとすれば、熱膨張による歪みは次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \alpha T \boldsymbol{I} \quad (3-1-1-1)$$

ここで、 α は線形熱膨張率、 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ は固有歪みテンソル、 \boldsymbol{I} は単位テンソルである。材料領域

Dは拘束力を持っているため、領域 Ω は自由に変形出来ず、内部に固有応力が生じる。この時領域Dに包含される領域 Ω は領域Dと異なる挙動をするため、これを介在物 (inclusion) と言ふ。介在物を除く領域 $D - \Omega$ は母相となり、材料係数が母相と同じである介在物は均質介在物 (homogeneous inclusion) と定義する。一方材料係数が母相と違う場合には非均質介在物 (inhomogeneity) と呼ぶ。等価介在物法における仮想粒子はこの均質介在物の事である。母相領域は連続域であるが、介在相領域は不連続域であり、互いに分離されている。

3.1.2 固有歪みと固有応力の関係

固有歪みを含む領域 Ω の全歪みは弾性歪みと固有歪みに分離可能であり、次式のように表される。

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon^* \quad (3-1-2-1)$$

ここで、添字2は介在相の事を表す。 ε_2 と ε_2' は介在相領域 Ω の全歪みと弾性歪みである。Hooke 法則理論により、弾性歪みは次式で与えられる。

$$\varepsilon_2' = L_2 : \sigma_2 \quad (3-1-2-2)$$

σ_2 は介在物の応力、 L_2 は介在物の弾性コンプライアンスである。式 (3-1-2-1) と (3-1-2-2) より次式が成り立つ。

$$\varepsilon_2 = L_2 : \sigma_2 + \varepsilon^* \quad (3-1-2-3)$$

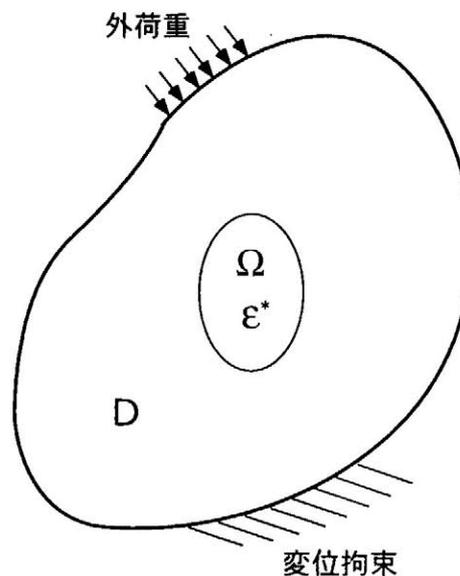


図 3-1-1、固有歪みを有する介在物領域 Ω と全領域D

式 (3-1-2-3) は固有歪みを含む介在相材料の応力と歪みの関係を表し、式 (3-1-2-3) により、介在相材料の応力は次のように表す事が出来る。

$$\sigma_2 = E_2 : (\varepsilon_2 - \varepsilon^*) \quad (3-1-2-4)$$

E_2 は介在物の弾性マトリクスである。 L_2 と E_2 は次式を満足する。

$$E_2 = L_2^{-1} \quad (3-1-2-5)$$

式 (3-1-2-3) と式 (3-1-2-4) はすべて固有歪みを含む材料に対し、応用することが出来るが、ここでは外荷重をかけていないため、無限領域Dの母相領域の平均応力と平均歪みは0である。

$$\sigma_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0 \quad (3-1-2-6)$$

よって、式 (3-1-2-3) の歪み ε_2 と応力 σ_2 は、それぞれ介在相の歪み、応力と母相の平均歪みと平均応力の差に等しいと言える。さらに母相と介在相の平均応力と平均歪みの差は食い違いとして次のように定義する。

$$\sigma^c = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (3-1-2-7)$$

$$\varepsilon^c = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (3-1-2-8)$$

式 (3-1-2-6)、(3-1-2-7) と (3-1-2-8) により、外荷重がない場合に式 (3-1-2-4) は次のように表す事ができる。

$$\sigma^c = E_2 : (\varepsilon^c - \varepsilon^*) \quad (3-1-2-9)$$

均質材料の場合は介在相と母相の弾性係数が等しい。

$$E_2 = E_1 \quad (3-1-2-10)$$

ゆえに、均質材料の場合は式 (3-1-2-9) は次式のように表すことができる。

$$\sigma^c = E_1 : (\varepsilon^c - \varepsilon^*) \quad (3-1-2-11)$$

ここでの歪み ε^c は、固有歪みと関係があり、介在物の形にも大きく影響される。

§ 3.2 固有歪みを有する均質介在物の応力

ここで扱う複合材料の各相材料はすべて等方性材料と仮定し、材料内部で均質等方性性質が保たれることを前提とする。

3.2.1 固有歪みを有する均質材料における基本式

応力を解りやすく表すため、テンソルを使い応力自己平衡式を次のように表す。

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3-2-1-1)$$

ここで、 $(,j)$ は $\partial/\partial x_j$ を表す。材料の自由境界条件は

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad (3-2-1-2)$$

となる。ここで、 n_j は界面における外法線ベクトルの成分である。また均質材料の場合に固有応力と固有歪みに関する構成則を示す式 (3-1-1-12) は次のように表す事ができる。

$$\sigma_{ij}^c = E_{ijkl} (\epsilon_{kl}^c - \epsilon_{kl}^*) \quad (3-2-1-3)$$

固有応力 σ_{ij}^c も式 (3-2-1-1) のような平衡条件と式 (3-2-1-2) のような境界条件を満足するので、次式を得ることになる。

$$E_{ijkl} (\epsilon_{kl,j}^c - \epsilon_{kl,j}^*) = 0 \quad (3-2-1-4)$$

$$E_{ijkl} (\epsilon_{kl}^c - \epsilon_{kl}^*) n_j = 0 \quad (3-2-1-5)$$

上の両式は次のように変形することができる。

$$E_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^c = E_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^* \quad (3-2-1-6)$$

$$E_{ijkl} \epsilon_{kl}^c n_j = E_{ijkl} \epsilon_{kl}^* n_j \quad (3-2-1-7)$$

固有歪みを有する領域においては、 $E_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^*$ を領域の体積力のようなもの、また $E_{ijkl} \epsilon_{kl}^* n_j$ を領域の表面力のようなものと想定することができる。

3.2.2 グリーン関数

任意点 \mathbf{x}' の固有歪みが点 \mathbf{x} に与える影響を一つの干渉波とすれば、前領域に亘って、すべての固有歪みの干渉波が点 \mathbf{x} に与える影響の総和をFourier積分で求める事が出来る。そのため、全領域に存在する固有歪みにより生じた点 \mathbf{x} の変位は次のように表す事が出来る。

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ijklmn} \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{ik,j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3-2-2-1)$$

ここで、 $G_{ik,j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ はグリーン関数であり、次式のように表すことができる。

$$G_{ik,j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{ij}(\xi) D^{-1}(\xi) \exp \{i \xi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} d\xi \quad (3-2-2-2)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $N_{ij}(\xi)$ 、 $D^{-1}(\xi)$ はそれぞれ干渉波の形状、材料の弾性係数と関連するパラメタである。また ξ は干渉波の周期に関する波ベクトルであり、点 \mathbf{x} と点 \mathbf{x}' の間に次のような関係がある。

$$\xi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \xi_k (x_k - x'_k) \quad (3-2-2-3)$$

一般に連続体の歪みは次のように定義される。

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-2-2-4)$$

式 (3-2-2-1) を式 (3-2-2-4) に代入すると、次式を得る。

$$\varepsilon_{ij}^c(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ijklmn} \varepsilon_{mn}^*(x') \{G_{ik,lj}(x-x') + G_{jk,li}(x-x')\} dx' \quad (3-2-2-5)$$

式 (3-2-2-4) に示す応力と歪みの構成則により、 x 点の応力は

$$\sigma_{ij}^c(x) = -E_{ijkl} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} E_{lpqmn} \varepsilon_{mn}^*(x') \{G_{kp,ql}(x-x') dx' + \varepsilon_{kl}^*(x)\} \right. \quad (3-2-2-6)$$

となる。

3.2.3 均質楕円単粒子における Eshelby 理論の展開

介在物の形はいろいろあるが、例えば、球体 (sphere)、偏円 (oblate)、ウイスカ (whisker)、円筒 (cylinder) など。一般に、数学的に楕円体モデルとする事ができる。介在物における理論解析にとって、楕円体モデルは数学的に極めて有用であり、扱い易い。まず、固有歪みを有する楕円体介在物を等方性材料と考え、材料中の固有歪みは定数と仮定すると、式 (3-2-2-6) により、介在物の内部にある参照点 x の変位は次式のように表す事ができる。

$$u_i(x) = -E_{ijklmn} \varepsilon_{mn}^* \int_{\Omega} G_{ik,jl}(x-x') dx' \quad (3-2-3-1)$$

ここで、 Ω は楕円領域を示す。ベクトル x は参照点の座標を示し、楕円体の中心点は座標の原点として、ベクトル x の各成分 (x_1, x_2, x_3) は次式を満足する。

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 \leq 1 \quad (3-2-3-2)$$

ここで、 a_1, a_2, a_3 は楕円の半径である。式 (3-2-3-1) の $G_{ik,jl}(x-x')$ は

$$G_{ik,jl}(x-x') = \frac{1}{16\pi(1-\gamma)} \frac{1}{|x-x'|} \left[(3-4\gamma) \delta_{ij} + \frac{(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)}{|x-x'|^2} \right] \quad (3-2-3-3)$$

である。式 (3-2-3-1) と式 (3-2-3-3) から、次式を得る。

$$u_i(x) = -\frac{\varepsilon_{jk}^*}{8\pi(1-\gamma)} \int_{\Omega} g_{ijk}(l) \frac{dx'}{|x-x'|^2} \quad (3-2-3-4)$$

$$g_{ijk}(l) = (1-2\gamma) (\delta_{ij} l_k + \delta_{ik} l_j + \delta_{jk} l_i) + 3 l_i l_j l_k \quad (3-2-3-5)$$

ここで、 l は単位ベクトルで、次式のように表される。

$$l = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) / |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \quad (3-2-3-6)$$

球座標で表す場合に、 $d\mathbf{x}'$ は次のように表される。

$$d\mathbf{x}' = r^2 dr d\omega \quad (3-2-3-7)$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (3-2-3-8)$$

式 (3-2-3-7) と式 (3-2-3-8) を式 (3-2-3-4) に入れると、式 (3-2-3-4) は

$$u_i(\mathbf{x}) = -\frac{\varepsilon_{jk}^*}{8\pi(1-\gamma)} \int_{\Omega} g_{ijk}(l) dr d\omega \quad (3-2-3-9)$$

となる。楕円介在相は均質材料で、歪みは次式を満足する。

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-2-3-10)$$

式 (3-2-3-9) を式 (3-2-3-10) に代入して、

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{\varepsilon_{mn}^*}{16\pi(1-\gamma)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_i g_{jmn} + \lambda_j g_{imn}}{g} d\omega \quad (3-2-3-11)$$

ここで、

$$\lambda_1 = l_1 / a_1^2, \quad \lambda_2 = l_2 / a_2^2, \quad \lambda_3 = l_3 / a_3^2 \quad (3-2-3-12)$$

式 (3-2-3-11) は次のように表す事ができる。

$$\varepsilon_{ij}^c = S_{ijmn} \varepsilon_{mn}^* \quad (3-2-3-13)$$

S_{ijmn} は Eshelby テンソルと呼ばれ、Mura により、次のように与えられている。

$$S_{ijmn} = S_{jmn} = S_{ijn} \quad (3-2-3-14)$$

$$S_{1111} = \frac{3}{8\pi(1-\gamma)} a_1^2 I_{11} + \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_1 \quad (3-2-3-15)$$

$$S_{1122} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_2^2 I_{12} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_1 \quad (3-2-3-16)$$

$$S_{1133} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_3^2 I_{13} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_1 \quad (3-2-3-17)$$

$$S_{1212} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{8\pi(1-\gamma)} I_{12} - \frac{1-2\gamma}{16\pi(1-\gamma)} (I_1 + I_2) \quad (3-2-3-18)$$

$$S_{2222} = \frac{3}{8\pi(1-\gamma)} a_2^2 I_{22} + \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_2 \quad (3-2-3-19)$$

$$S_{2233} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_3^2 I_{23} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_2 \quad (3-2-3-20)$$

$$S_{2211} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_1^2 I_{21} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_2 \quad (3-2-3-21)$$

$$S_{2323} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{8\pi(1-\gamma)} I_{23} - \frac{1-2\gamma}{16\pi(1-\gamma)} (I_2 + I_3) \quad (3-2-3-22)$$

$$S_{3333} = \frac{3}{8\pi(1-\gamma)} a_3^2 I_{33} + \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_3 \quad (3-2-3-23)$$

$$S_{3311} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_1^2 I_{31} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_3 \quad (3-2-3-24)$$

$$S_{3322} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_2^2 I_{32} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_3 \quad (3-2-3-25)$$

$$S_{3131} = \frac{a_3^2 + a_1^2}{8\pi(1-\gamma)} I_{31} - \frac{1-2\gamma}{16\pi(1-\gamma)} (I_3 + I_1) \quad (3-2-3-26)$$

対称条件式 (3-2-3-14) から、上に示す要素以外の項を求める事が出来る。それ以外の要素は0である。パラメタ I_i と I_j は楕円の形によって変わる。なお具体的な表現式はMura [Ref. (2.5)] に与えられる。 γ は均質材料のポアソン (Poisson) 係数であり、式 (3-2-3-13) とテンソルで表せば、次のように表す事ができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathcal{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-2-3-27)$$

式 (3-2-3-27) は固有歪みを含む均質楕円介在物の歪みと固有歪みの関係を示し、式 (3-1-1-12) に代入すると、楕円介在相の応力は次のように求めらる。

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \underline{E}_1 : (\mathcal{S} - \underline{I} \otimes \underline{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-2-3-28)$$

式 (3-2-3-28) は Eshelby 理論の中核である。なぜなら、Eshelby は固有歪みと固有応力の関係を理論的に表し、その理論は楕円体を持つ粒子分散複合材料の基本として普遍的に使われている。外力を有する場合には、均質材料の中に外力により生じた応力、歪みと介在相の固有応力、歪みとは互いに依存しないため、介在相の応力と歪みは次のように分離して表す事ができる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}^c \quad (3-2-3-29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (3-2-3-30)$$

式 (3-2-3-27) と式 (3-2-3-28) を式 (3-2-3-29)、(3-2-3-30) に代入して、介在相の応力と歪みは次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \underline{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-2-3-31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathcal{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-2-3-32)$$

ここで、 \mathcal{S} は Eshelby テンソル、 \underline{E}_0 は母相の拘束力に関する Eshelby 係数である。

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_1 : (\mathcal{S} - \underline{I} \otimes \underline{I}) \quad (3-2-3-33)$$

つまり均質材料の中の楕円体領域に温度の変化などにより与えられる固有歪みによって生じる応力を表すことが出来る

§ 3.3 非均質介在物の応力

各領域に応用されている粒子分散複合材料は空孔、亀裂、沈澱物などを含む複合材料などのように介在物の弾性係数と母相の弾性係数の違う場合が多い。それらは外力が掛けられている場合、一般に材料の非均質性の影響で、介在相の応力及び歪みは母相と異なり、また外力が掛けられていない場合は、普段は介在相と母相の応力が0であるものの固有歪みを含むなどの原因で介在相の中に応力が存在するケースも多い。一般的に弾性力学により非均質介在物の応力を解決するのはとても困難である。そこでEshelbyは楕円介在物に対して、等価介在物方法を導入することにより、適度な固有歪みを含む均質単粒子を用いて非均質単粒子をシミュレートし、解くことができた。即ち、非均質性を持つ複合材料の挙動を均質材料に固有歪みを仮想的に与える事によって、弾性理論で表した。

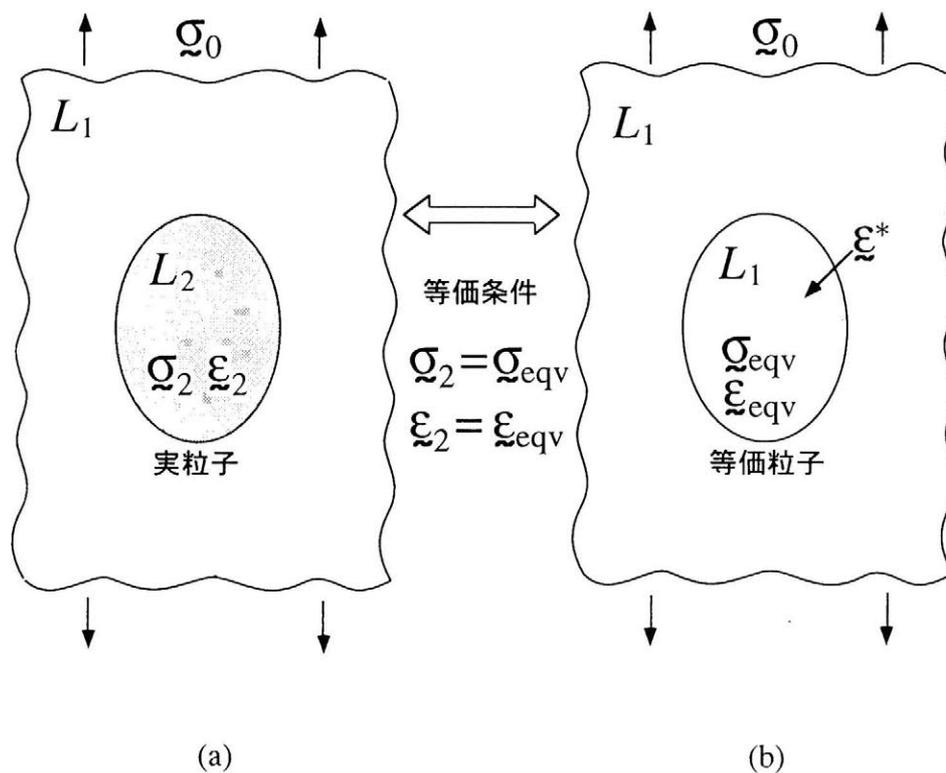


図 3-3-1 Eshelby の等価介在物方法の仕組み

3.3.1 非均質楕円体単粒子における Eshelby 等価介在物の概念

図 3-3-1 (a) に示すように非均質介在物の剛性は母相材料と異なるが、介在物内の応力と歪みには次の関係が存在する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (3-3-1-1)$$

無限母相領域中に単一の粒子が存在する非均質体を想定する。等価介在物法により、図 3-3-1 (b) に示されている母相と同じ弾性係数の仮想粒子を考え、これに適当な固有歪を与え、図 3-3-1 (a) に示す実粒子に等価させる事によって粒子の応力と歪を求める事ができる。但し、実粒子と等価粒子の間に次の等価条件を満足しなければならない。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_{eqv} \quad (3-3-1-2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{eqv} \quad (3-3-1-3)$$

$\boldsymbol{\sigma}_{eqv}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_{eqv}$ は等価介在物の応力と歪みである。式 (3-3-1-2)、(3-3-1-3) により、等価条件を満たす等価介在物の応力と歪みを $\boldsymbol{\sigma}_2$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ で表すことができる。等価粒子に固有歪 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ が与えられた時の粒子歪は

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2^* + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-3-1-4)$$

と表される。ここで、添字 1 と 2 はそれぞれ母相と介在相を表し、相添字をもって表す諸量は相内での平均値であるとする。 $\boldsymbol{\varepsilon}_2^*$ は介在相の弾性歪である。等価粒子の弾性係数は母相のものと同じであるので、Hooke の法則より、母相のコンプライアンス・テンソルを用いて等価介在相の弾性歪を次式のように表す事が出来る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2^* = \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (3-3-1-5)$$

母相と介在相の平均歪の食い違いおよび平均応力の食い違いをそれぞれ $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ および $\boldsymbol{\sigma}^c$ で示すと、介在相の応力は次のように表す事ができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (3-3-1-6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}^c \quad (3-3-1-7)$$

単粒子の場合、介在相と母相の応力差および歪差は節 3.2.3 の Eshelby 理論により、次のように表す事が出来る。

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-3-1-8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-3-1-9)$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_1 : (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) \quad (3-3-1-10)$$

ここで、 \boldsymbol{E}_1 は母相の弾性材料テンソルであり、 \boldsymbol{E}_0 は母相の拘束係数である。また \boldsymbol{I} は単位テンソルを表す。 \boldsymbol{S} は Eshelby テンソルである。この時、粒子の回りは全てマトリックス

材料であるので、固有歪みを与えた時に反応する外界のコンプライアンスはマトリックスのコンプライアンスに等しい。

3.3.2 等価条件を満たす固有歪みの解析

等価介在物方法を応用する際に、等価条件を満たす固有歪みの決定は介在物の応力と歪みの解析にとって非常に重要である。実介在粒子側では、粒子の応力と歪の関係式は式 (3-3-1-1) に与えられるが、等価性により、式 (3-3-1-1)、式 (3-3-1-5) を式 (3-3-1-4) に代入すると、固有歪みは

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (3-3-2-1)$$

となる。式 (3-3-1-7)、(3-3-1-8) から等価粒子の応力を固有歪の関数として表せば

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3-3-2-2)$$

となり、式 (3-3-2-1) および (3-3-2-2) から $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ について解けば等価性を満たす固有歪が求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}_0^* : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (3-3-2-3)$$

ここで

$$\mathbf{A}_0^* = [(\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)^{-1} - \mathbf{E}_0]^{-1} \quad (3-3-2-4)$$

更に単粒子の場合には母相の平均応力は粒子から離れた距離にある応力、即ち外荷重応力 $\boldsymbol{\sigma}_0$ と等しいと考えられるので、次式が得られるので、

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3-3-2-5)$$

固有歪みを次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}_0^* : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3-3-2-6)$$

3.3.3 等価介在物法により求めた楕円体介在物の応力と歪み

等価条件を満たす固有歪みは式 (3-3-2-6) で与えられたが、式 (3-3-2-3) を式 (3-3-2-2) に用いれば、等価介在粒子応力は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}_0^* : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (3-3-3-1)$$

単粒子の場合には母相の平均応力は式 (3-3-2-5) を満足するので、粒子の応力は

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}_0^*) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3-3-3-2)$$

と求められる。また、式 (3-3-2-3) を式 (3-3-1-6) に用いて、次式となる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{S} : \mathbf{A}_0^* : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (3-3-3-3)$$

母相の応力-歪み関係は次式となるので、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 \tag{3-3-3-4}$$

式 (3-3-3-4) を式 (3-3-3-3) に代入すると、粒子の歪みは

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\boldsymbol{L}_1 + \mathcal{S} : \boldsymbol{A}_0^*) : \boldsymbol{\sigma}_1 \tag{3-3-3-5}$$

となる。式 (3-3-2-5) に基づいて、等価粒子の歪みは次のように表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\boldsymbol{L}_1 + \mathcal{S} : \boldsymbol{A}_0^*) : \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{3-3-3-6}$$

非均質粒子の応力と歪みは等価粒子の歪みと等価であるので、外荷重 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 下で生じた非均質粒子の応力と歪みは次のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{A}_0^*) : \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{3-3-3-7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\boldsymbol{L}_1 + \mathcal{S} : \boldsymbol{A}_0^*) : \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{3-3-3-8}$$

Eshelbyの等価介在物法により、弾性力学理論による求解が困難であった非均質楕円体介在物の応力と歪みを解くことができた事に大きな意味がある。

§ 3.4 数値解析

第三章で単粒子の挙動について理論的に解明したが、解くにEshelbyの等価介在物方法に基づいて、非均質単粒子内部の応力と母相媒体の平均応力の関係に関する混合則を構

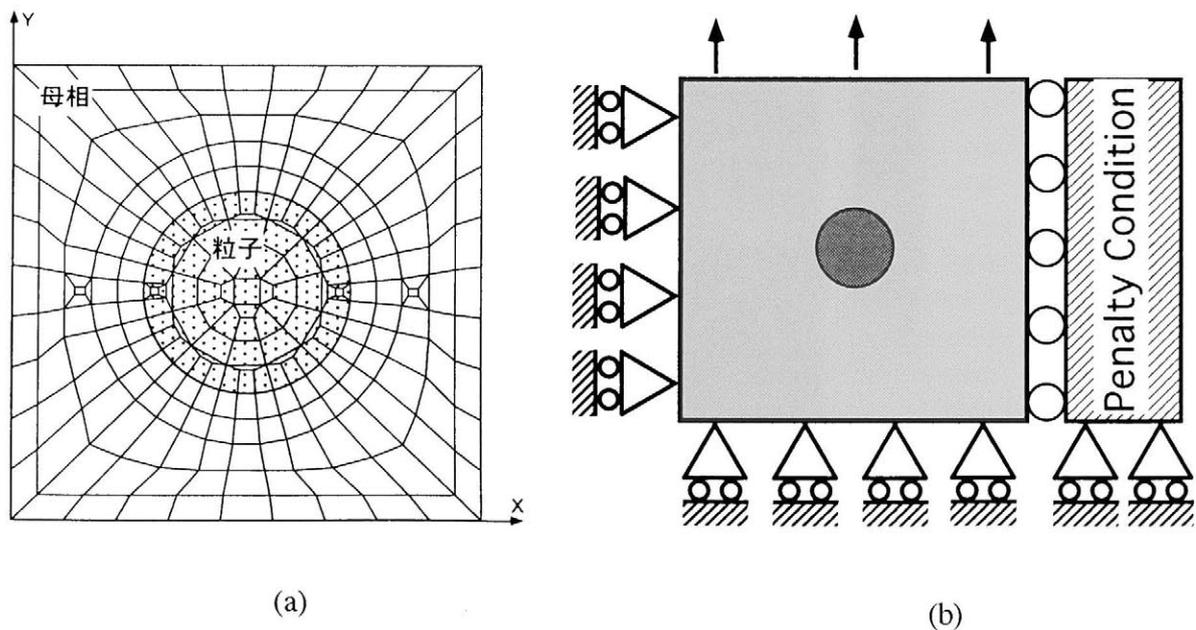


図 3-4-1 単粒子に関するメソ・メカニクス解析の参照領域とメッシュ

築した。非均質単粒子内部の応力の分布を観察するため、二次元平面応力のメゾ・メカニクス解析を行う。

3.4.1 数値解析に関する材料係数

二相からなる粒子分散複合材を考え、構成材料のヤング率 E とポアソン係数 γ をそれぞれ次のように仮定する。添え字1および2は、それぞれ母相及び介在相を表す。

$$\text{母相 (Epoxy)}: \quad E_1 = 2 \text{ Gpa}, \quad \gamma_1 = 0.35 \quad (3-4-1-1)$$

$$\text{介在相 (Silica)}: \quad E_2 = 40 \text{ Gpa}, \quad \gamma_2 = 0.18 \quad (3-4-1-2)$$

介在相と母相の剛性が近い場合、介在相の存在意義がなく、またその影響も非常に小さいため、理論式を立証出来ない。そのため、介在相ヤング率を母相のヤング率の20倍として、両相の剛性が著しく異なる場合の影響を調べる。

メゾ・メカニクス解析を行う際の球状粒子領域と外部参照領域及び有限要素分割を図3-4-1aに示す。図3-4-1の球状単粒子の体積は全体の体積5.9%を占め、体積分率が比較的小さく、単粒子の状態を表わしていると考えられる。Y方向に沿って単軸引っ張りを行う際、図3-4-1bに示されているようなペナルティ拘束をかける。これらの境界条件は、図のユニット領域の無限周期を領域とする無限複合体を表し、正確には単粒子体を表すものではないが、粒子近傍においては、他の粒子からの影響は充分小さく、単粒子状態を表すと考えて差し支えない。

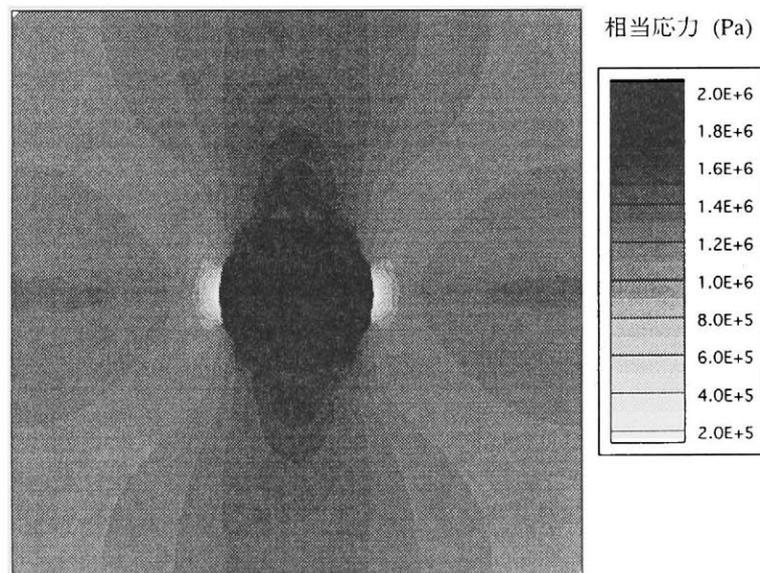


図3-4-2 単軸引っ張り下で単粒子を含む複合体の応力分布

図3-4-1に示す参照領域の荷重界面は粒子と十分離れているので、荷重界面の干渉は非常に小さく、粒子の外部の母相領域は無量大領域と近いと考えられる。

3.4.2 非均質単粒子に関する応力分布

粒子内部の応力を解明することは粒子の解析にとって非常に重要である。特に多粒子分散複合材料の解析にとって、粒子の応力を決定しなければ、複合材料全体の性質に関する理論的な混合則と構成則を求める事が出来ない。

図3-4-1に示す参照領域に対してメゾ・メカニクス解析を行い、得た応力分布図を図3-4-2に示す。図は全体のY方向平均荷重応力が1.21Mpa、歪みが $5.56E-4$ 場合の相当応力分布の結果である。介在物領域の中心部では応力値がほぼ一様である事が分かる。周辺部に残る僅かな不均一性は周辺要素を多角形とした結果の影響である。介在相の応力分布は母相の応力分布に比べ平均している。母相領域は介在相領域に比べ、応力の変化は著しく、また荷重軸に対して二重対称となっている。母相の最大応力と最小応力は、介在相との境界上で縦横軸部付近に発生する事が分かる。

母相の最大と最小応力値とその分布を知るのは本研究の目的に於て重要なことである。弾塑性問題の場合には応力の微視的分布は複合材料の剛性に大きな影響を与えるため、理論モデルの構築において、局所応力分布を考慮しなければならない。また応力分布の上

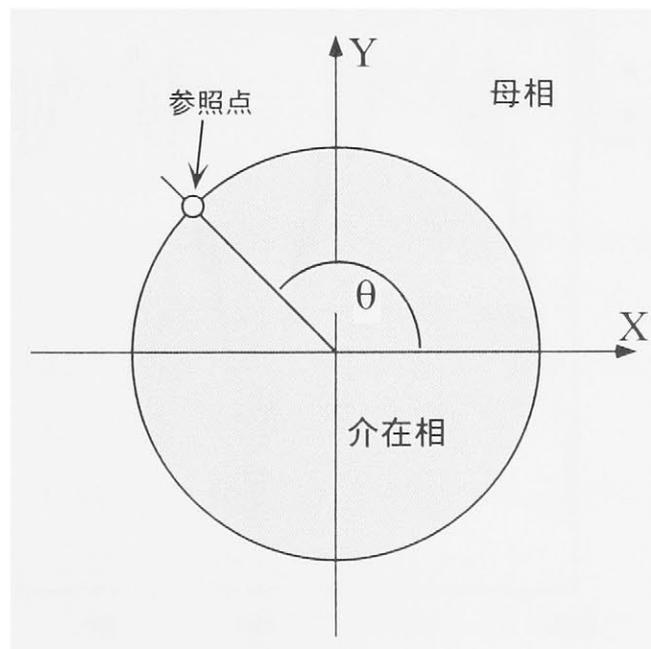


図 3-4-3 界面参照点

下限値も理論モデルにとって重要なパラメタとなる。

界面付近の母相と介在相の応力を数値的に表すため、図3-4-3に示すような界面に沿って母相側と介在相側に多数の参照点を選び角度 θ ($0^\circ \sim 360^\circ$) によって示す。

図3-4-4に示すのは界面の母相側と介在相側の応力分布の結果を示す。"Matrix (FEM)" はメゾ・メカニクス解析で得た母相側の応力分布で、"Inclusion (FEM)" は介在相の応力分布である。二つの曲線が振動する理由はメッシュの依存性影響です。粒子の内側のメッシュの形が角度によって変化しているので、メッシュの形の影響があると考えられる。

又、図3-4-4の左側の縦軸に示す円点 [Average-I (FEM)] と菱形の点 [Average-I (Present)] はそれぞれ母相とメゾ・メカニクス解析で得た介在相の平均応力と本章で構築した混合則の式 (3-3-3-7) で得た介在相の平均応力を示すが、また図3-4-4により、二つの結果が近い事は分かる。母相と介在相の応力分布を比べてみると、次のことが分かる。

(a)、数値解析で得られた介在相の応力は比較的一様に分布している。Eshelbyの理論における楕円粒子の場合に粒子内部の応力が一様に分布しているという仮定は、本計算の結果によって正しい事が分かる。その理由は母相から介在相に与えられる荷重はすべての直径軸に関して対称であるため、つまり、平均的な応力荷重を受けているからである。

(b) 介在相と母相の境界線を亘って、相当応力は連続ではない。もちろん、界面の垂直

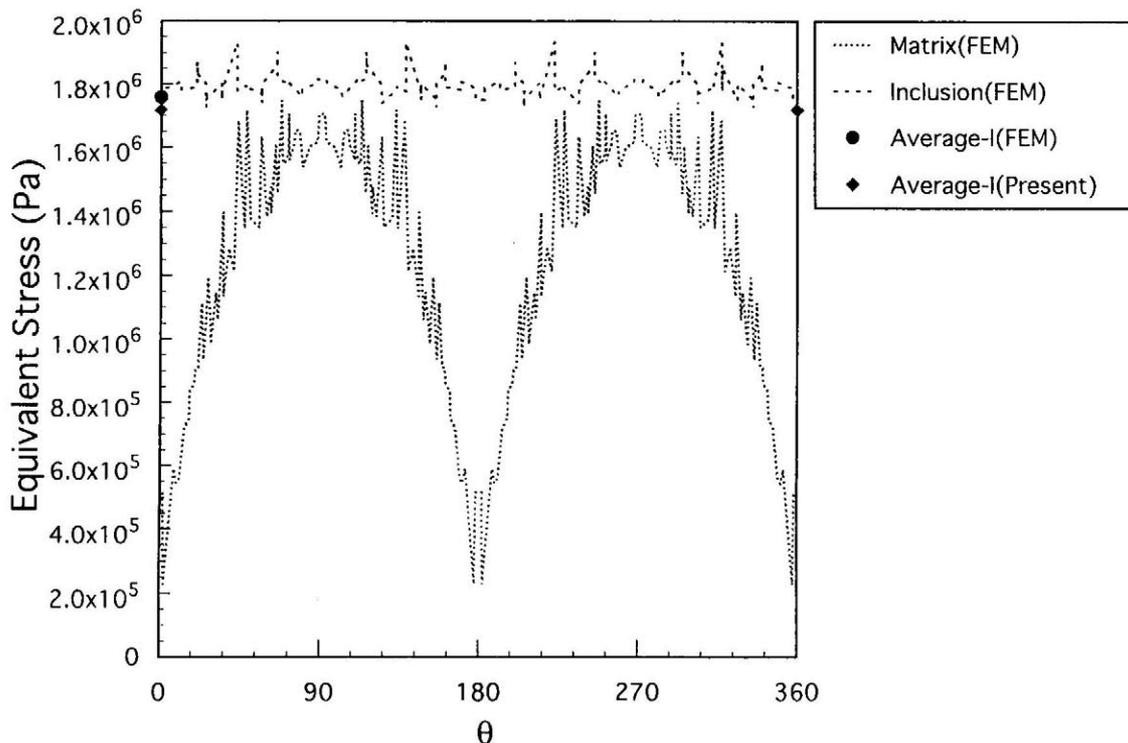


図3-4-4 界面付近の母相と介在相の応力分布

方向の応力は連続しているが、界面に沿う方向の母相と介在相応力は大きく違う。これが両相の界面上で亀裂、剥離などが起こりやすい原因である。

(c) 単軸引っ張りにおいて、界面の母相側の相当応力分布に周期性が表れている。0と180度の所の相当応力は最小であり、引っ張り方向の縦線と交差する90と270度において応力は最大である。

§ 3.4 結言

第三章で、単粒子の挙動について理論モデルとメゾ・メカニクス解析の結果をしめした。Eshelbyの理論と等価介在物方法に基づいて、固有歪みを有する単粒子の応力-歪み混合則と実粒子の応力-歪み混合則を導いた。結果をまとめれば、以下のようになる。

(1) 単粒子の場合、メゾ・メカニクス解析により、粒子の内部応力が平均分布している。これにより、Eshelbyの平均分布仮定に信用性のあることは証明された。

(2) 単軸引っ張りで外荷重をかけた場合、粒子の界面上の母相応力は大きく分布する。

(3) 非均質粒子の応力に関する本混合則の結果はメゾ・メカニクス解析により得た結果と一致している。

参考文献

- (3.1) R.J.Arenault and M.Taya, "Thermal residual stress in metal matrix composite", Acta metall. Vol.35, No.3, pp.651-659, 1987
- (3.2) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proc. of the Royal Society of London, Series A, Vol.241A, pp.376~396, 1957.
- (3.3) E.H.Kerner, "The elastic and thermo-elastic properties of composite media", Proc. Phys. Soc. Lxix,8-B
- (3.4) T. Mura, P.C. Cheng "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, pp.591-594, Dec. 1977.
- (3.5) T.Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
- (3.6) G.P.Tandon, G.J.Weng, "Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration", J. of Applied Mechanics, Vol.53, pp.511-518, Sept.1986.

第4章

多粒子弾性問題 (SCC法)

要 旨

第三章で単粒子の応力及び歪の弾性理論を明らかにした。実際の粒子分散複合材料の場合、母相の中に多数の粒子が存在するので、粒子周り及び粒子内部の応力と歪みは他粒子の影響を受けると考えられる。そこで、多粒子分散複合材料の巨視的な平均応力と、母相また介在相の応力の関係を確立すれば、複合材料の全体的な特性は理論的に予測出来る。

単粒子の場合、粒子から十分離れている場所の母相応力は一様に分布しており、粒子界面付近の母相応力は粒子の影響を受けても、無限母相領域は影響を受けない。しかし、粒子の数が増えると、粒子の影響は母相の全領域に及び、応力の変化を考慮しなければならない。弾性の場合材料の物性値は応力の値に依存せず、母相内部の任意点の応力-歪み関係は均質材料のそれと同じである。そのため、第四章で多粒子の弾性理論モデルの構築を行う時、材料内部の微視的な応力の分布はあるが、これを考慮せず、複合材料、母相と介在相内で平均応力と平均歪み間で構成関係を立てる事で充分である。

§ 4.1 複合材料及び各相材料の応力と歪み

母相の中に多数の粒子が散在する場合、単粒子問題と異なり、母相と介在相の応力は粒子の密度によって有為な影響を受けるため、母相と介在相の応力を再定義する必要がある。

4.1.1 複合材料の平均応力

先ず複合材料、母相と介在相の平均応力を次のように定義する。

$$\sigma_0 = \int_{V_D} \sigma dV / \int_{V_D} dV \quad (4-1-1-1)$$

$$\sigma_1 = \int_{V_D-V_\Omega} \sigma dV / \int_{V_D-V_\Omega} dV \quad (4-1-1-2)$$

$$\sigma_2 = \int_{V_\Omega} \sigma dV / \int_{V_\Omega} dV \quad (4-1-1-3)$$

σ_0 は図4-1-1に示す複合材料領域Dの平均応力、 σ_1 と σ_2 は母相と介在相の平均応力、 dV は体積の全微分、 V_D は複合材料全領域、 V_Ω は介在相領域、 V_D-V_Ω は母相領域を示す。それぞれの平均応力を考えると、式(4-1-1-1)は次式で表すことができる。

$$\sigma_0 = \left(\int_{V_D-V_\Omega} \sigma_1 dV + \int_{V_\Omega} \sigma_2 dV \right) / \int_{V_D} dV \quad (4-1-1-4)$$

式(4-1-1-4)は次のようになる。

$$\sigma_0 = \frac{V_D-V_\Omega}{V_D} \sigma_1 + \frac{V_\Omega}{V_D} \sigma_2 \quad (4-1-1-5)$$

ここで、

$$V_D = \int_{V_D} dV, \quad V_\Omega = \int_{V_\Omega} dV, \quad V_D-V_\Omega = \int_{V_D-V_\Omega} dV \quad (4-1-1-6)$$

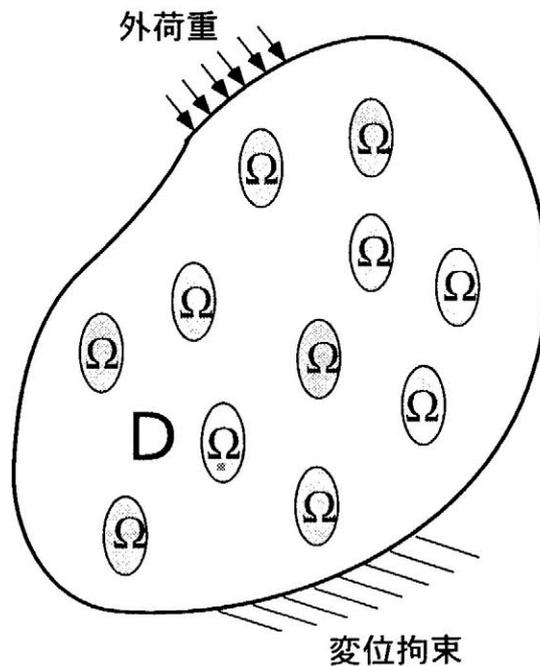


図4-1-1 多数の粒子が散在している複合材料

と表せば、母相と介在相の体積分率は次のように表すことが出来る。

$$f = \frac{V_{\Omega}}{V_D}, \quad 1 - f = \frac{V_D - V_{\Omega}}{V_D} \quad (4-1-1-5)$$

ここで、 f は粒子の体積分率、 $1 - f$ は母相の体積分率。これを式 (4-1-1-5) に代入すると、複合材料の平均応力は次のようになる。

$$\bar{\sigma}_0 = (1 - f)\bar{\sigma}_1 + f\bar{\sigma}_2 \quad (4-1-1-8)$$

連続体の応力は Gauss 定理により、添字テンソル表記すれば次式を満足する。

$$\int_{V_D} \sigma_{ij} dV = \int_{S_D} \sigma_{ik} x_j n_k dS - \int_{V_D} \sigma_{ik,k} x_j dV \quad (4-1-1-9)$$

ここで、 x_j は座標の成分、 n_k は境界面の単位外法線ベクトルの成分を示す。境界に応力が掛けられていない時は

$$\sigma_{ik} x_j n_k = 0 \quad (4-1-1-10)$$

となる。さらに、外部から体積力を受けていない時は

$$\sigma_{ik,k} = 0 \quad (4-1-1-11)$$

となるため、すべての外力がない場合の式 (4-1-1-9) は次のように表せる。

$$\int_{V_D} \bar{\sigma} dV = 0 \quad (4-1-1-12)$$

この時、複合体の平均応力は次のようになる。

$$\bar{\sigma}_0 = (1 - f)\bar{\sigma}_1 + f\bar{\sigma}_2 = 0 \quad (4-1-1-13)$$

また、外力がある場合には、式 (4-1-1-9) により、複合体の平均応力は

$$\bar{\sigma}_0 = (1 - f)\bar{\sigma}_1 + f\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma} \quad (4-1-1-14)$$

となる。 $\bar{\sigma}$ は次式のように表すことができる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(\int_{S_D} \sigma_{ik} x_j n_k dV - \int_{V_D} \sigma_{ik,k} x_j dV \right) / \int_{V_D} dV \quad (4-1-1-15)$$

4.1.2 複合材料の平均歪み

複合材料の平均歪みを次のように定義する。

$$\bar{\epsilon}_0 = \int_{V_D} \underline{\epsilon} dV / \int_{V_D} dV \quad (4-1-2-1)$$

$$\bar{\epsilon}_1 = \int_{V_D - V_{\Omega}} \underline{\epsilon} dV / \int_{V_D - V_{\Omega}} dV \quad (4-1-2-2)$$

$$\varepsilon_2 = \int_{V_\Omega} \underline{\varepsilon} dV / \int_{V_\Omega} dV \quad (4-1-2-3)$$

応力の場合と同じように演算を行えば、複合材料の平均歪みと母相及び介在相の平均歪との間に次の関係が成立する。

$$\varepsilon_0 = (1-f) \varepsilon_1 + f \varepsilon_2 \quad (4-1-2-4)$$

式 (4-1-1-8) と (4-1-2-4) は平均応力と平均歪みに関する基本混合則であり、多数の材料相が存在する時、一般化された混合則を次のように書くことが出来る。

$$\underline{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^n f_i \underline{\sigma}_i \quad (4-1-2-5)$$

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n f_i \varepsilon_i \quad (4-1-2-6)$$

ここで f_i は i 相材料の体積分率である。式 (4-1-1-8) と (4-1-2-4) で定義された平均応力と平均歪みに関する混合則はすべての型の複合材料に適用できる。

4.1.3 複合材料の平均歪みと平均応力の関係

複合材料の母相と介在相内部の応力と歪みは非均質に分布しているが、任意微小体積 dV は十分小さいと仮定して、その内部の応力と歪みは均質材料と同じ関係を持っていると考えることができる。式 (4-1-2-2) と式 (4-1-2-3) は次のようになる。

$$\varepsilon_1 = \int_{V_{D-V_\Omega}} [L_1 : \underline{\sigma}] dV / \int_{V_{D-V_\Omega}} dV \quad (4-1-3-1)$$

$$\varepsilon_2 = \int_{V_\Omega} [L_2 : \underline{\sigma}] dV / \int_{V_\Omega} dV \quad (4-1-3-2)$$

ここで、 L_1 と L_2 は母相と介在相の弾性コンプライアンスであり、弾性の場合には材料係数は応力に依存せず、常数であるので、上記の両式は次のように表される。

$$\varepsilon_1 = L_1 : \int_{V_{D-V_\Omega}} \underline{\sigma} dV / \int_{V_{D-V_\Omega}} dV \quad (4-1-3-3)$$

$$\varepsilon_2 = L_2 : \int_{V_\Omega} \underline{\sigma} dV / \int_{V_\Omega} dV \quad (4-1-3-4)$$

式 (4-1-1-2) と式 (4-1-1-3) を考慮すれば上式から、平均においての各相の構成関係が次のように求められる。

$$\varepsilon_1 = L_1 : \underline{\sigma}_1 \quad (4-1-3-5)$$

$$\varepsilon_2 = L_2 : \underline{\sigma}_2 \quad (4-1-3-6)$$

このように複合材料各相の平均応力と平均歪みは均質材料と同じ関係で表させることが

示された。式 (4-1-3-5) と式 (4-1-3-6) を式 (4-1-2-4) に代入すると、複合材料の平均歪みは次のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1-f)\boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 + f\boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (4-1-3-7)$$

これは弾性複合材料問題において重要な関係を表す法則である。

§ 4.2 等価理論を用いた均質複合材料の各相応力と歪み

均質複合材料とは材料物性値が定数であり、固有歪みを含むなどの理由により局所的な応力と歪みの関係が均質材料と異なる材料であると定義する。しかし、当然均質複合材料の挙動は均質材料とは異なる。

4.2.1 Mori-Tanaka の平均歪み

Mori-Tanaka は固有歪みを含む均質複合体の平均歪みを次のように定義した。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \int_{V_D} (\boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV / \int_{V_D} dV \quad (4-2-1-1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ は弾性歪みであり、また均質複合体全領域の弾性係数は定数であるので、上式は次のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\boldsymbol{L}_i : \int_{V_D} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_D} \boldsymbol{\varepsilon}^* dV) / \int_{V_D} dV \quad (4-2-1-2)$$

固有歪みを持つのは領域 V_Ω のみであるため、式 (4-2-1-1) は次のように表せる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{L}_i : \int_{V_D} \boldsymbol{\sigma} dV / \int_{V_D} dV + \int_{V_\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* dV / \int_{V_D} dV \quad (4-2-1-3)$$

固有歪み $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ を平均値と考えれば、式 (4-2-1-3) は次のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{L}_i : \boldsymbol{\sigma}_0 + f\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-2-1-4)$$

式 (4-2-1-4) は固有歪みを含む均質複合材料に関する Mori-Tanaka の近似的な歪み混合則である。均質材料の構成則には式 (4-2-1-4) の固有歪みの項がなく、均質複合材料と異なる。Mori-Tanaka により与えられた均質複合材料の構成則は非常に簡単であるため、実際に今まで粒子分散複合材料の理論解析に関する論文で、均質等価材料による複合材料の構成則としてよく使われてきた。非均質粒子分散複合材料の場合、固有歪みを持つ均質材料に等価させ、求めた固有歪みを式 (4-2-1-4) に代入すれば、複合材料の平均歪みを決定することが出来る。しかし、第二章で紹介したように適用範囲は粒子の体積分率が低

い場合に限定されている。

4.2.2 均質複合体に関する応力と歪みの分散則

均質材料において局部の温度変化などの原因で部分領域に固有歪みが生じることがある。固有歪みを含む領域が分離した状態で多数散在する場合は、複合体中の固有歪みを含む部分を均質介在物と呼び、その他の部分を以前と同様、母相と呼ぶ。この理論では、弾性係数は全領域に亘って一定であり、ゆえに、周囲の剛性は固有歪みを含まない均質材料と同じである。そのため、固有歪みと固有応力の関係も均質単粒子の場合と同じく、介在相形状が同じであれば、均質単粒子に関する理論はすべての粒子について、そのまま適用することができる。

単粒子の場合、無限母相領域の平均応力は全領域の平均応力と同じである。しかし、多数の粒子を含む母相材料の平均応力は全領域の平均応力と異なる。そこで、母相材料の平均応力を次のように定義する。

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma} \quad (4-2-2-1)$$

ここで、 σ_0 は全体平均応力、 $\bar{\sigma}$ は母相の平均応力と混合体平均応力の差である。介在相の応力は母相の応力とことなり、介在物の平均応力を次式のように表す。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \bar{\sigma} + \sigma' \quad (4-2-2-2)$$

σ' は介在相と母相の応力の食い違い、即ち固有応力である。各相の平均歪みと平均応力は材料のHookeの法則を満足するため、母相と固有歪みを含む介在相の歪みは次のように表される。

$$\epsilon_1 = L_1 \cdot \sigma_1 \quad (4-2-2-3)$$

$$\epsilon_2 = L_1 \cdot \sigma_2 + \epsilon' \quad (4-2-2-4)$$

複合均質体の平均応力、母相の平均応力、介在相の平均応力の間には平衡条件により式(4-1-1-8)のように次の関係がある。

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (4-2-2-5)$$

f は多粒子の体積分率である。これに式(4-2-2-1)、(4-2-2-2)を代入すれば次式を得る。

$$\bar{\sigma} = -f\sigma' \quad (4-2-2-6)$$

式(4-2-2-6)は相間応力差と食い違い値及び粒子の体積分率の間の関係を示している。式(4-2-2-6)を式(4-2-2-1)と式(4-2-2-2)に用いれば、母相と介在相の平均応力は次のようになる。

$$\sigma_1 = \sigma_0 - f\sigma^c \quad (4-2-2-7)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + (1-f)\sigma^c \quad (4-2-2-8)$$

ここで、弾性係数が定数である均質等価材料中に存在する均質粒子の固有歪みと固有応力の関係は均質単粒子の場合と同様であり、Eshelbyによれば次式のように表される。

$$\sigma^c = E_0 : \varepsilon^* \quad (4-2-2-9)$$

式 (4-2-2-7)、式 (4-2-2-8) と式 (4-2-2-9) から、母相と介在相の平均応力は次式のように表すことが出来る。

$$\sigma_1 = \sigma_0 - fE_0 : \varepsilon^* \quad (4-2-2-10)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + (1-f)E_0 : \varepsilon^* \quad (4-2-2-11)$$

ここで、

$$E_0 = E_1(S_1 - I) \quad (4-2-2-12)$$

であり、 S_1 は材料のEshelbyテンソル、 I は単位テンソル、 E_1 は材料の弾性マトリクスであるが、コンプライアンスとの間に次式を満足する。

$$E_1 = L_1^{-1} \quad (4-2-2-13)$$

式 (4-2-2-10) と式 (4-2-2-11) を式 (4-2-2-3)、式 (4-2-2-4) に代入して、固有歪みを含む均質粒子が多数に散在する複合体の母相と介在相の平均歪みが次式のように求められた。

$$\varepsilon_1 = L_1 : \sigma_0 - f(S_1 - I) : \varepsilon^* \quad (4-2-2-14)$$

$$\varepsilon_2 = L_1 : \sigma_0 + (1-f)(S_1 - I) : \varepsilon^* + \varepsilon^* \quad (4-2-2-15)$$

§ 4.3 疎らな非均質粒子複合材に関する構成則 (EMTモデル)

非均質複合材料の内部の材料物性値は一様ではない。介在相の弾性係数と母相の弾性係数が異なり、外部からの荷重によって、介在相と母相の挙動も異なる。非均質複合材に関する従来の理論研究は殆どEshelbyとMori-Tanakaの理論に基づいて開発したものであり、本論文ではこれらを総称し、EMTモデルと呼ぶこととする。後に示すSCCモデルと比較するため、本節で著者による独自の展開とテンソル表記によるEMTモデルの導出を行い、理論構成則を構築する。

複合材料の理論モデルを立てることにおいて、まず構成材料相の応力と歪みを決定するのが基本である。各相の応力が分かれば、複合材料巨視的な性質を理論的に予測することが可能であるが、それらの応力を直接に求めるのは困難である。

4.3.1 低体積分率粒子複合材料への等価介在物法の適用

非均質粒子複合材料のモデル化にEshelbyは等価介在物の概念を導入した。第三章で単粒子の問題についてEshelbyの等価介在物の概念を紹介した。多粒子の場合に対しても等価介在物の概念が適用できるが、等価条件を満たす固有歪みが単粒子の場合と異なる。なぜなら、任意の一つの粒子は必ず他の粒子の影響を受けるからであり、この影響は粒子の数の増加に従って顕著となる。先ず、粒子の体積分率が低い場合から以下に定式化を進める。

非均質複合材料の介在物の弾性係数は母相と異なるが、複合体に荷重がかけられた時、介在相と母相は異なる材料挙動を呈し、その結果、母相と介在相の応力と歪みも異なる。今、単粒子の定義を用い、式(4-2-2-1)と同じように母相の平均応力を次のように定義する。

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \tilde{\sigma} \quad (4-3-1-1)$$

σ_0 は複合体平均応力、 $\tilde{\sigma}$ は母相平均応力と複合体の平均応力の差である。複合材料の介在相応力も前節と同様に次式で定義される。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \tilde{\sigma} + \sigma^c \quad (4-3-1-2)$$

σ^c は介在相と母相の応力の食い違いである。各相の平均歪みと平均応力との間に材料のHooke法則が成り立ち、母相と非均質介在相の歪みは次のように表される。

$$\epsilon_1 = L_1 \cdot \sigma_1 \quad (4-3-1-3)$$

$$\epsilon_2 = L_2 \cdot \sigma_2 \quad (4-3-1-4)$$

粒子の体積分率を f として、複合材料、母相、介在相の平均応力の間に平衡条件により次の関係がある。

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (4-3-1-5)$$

式(4-3-1-1)、(4-3-1-2)を式(4-3-1-5)に代入すれば次式を得る。

$$\tilde{\sigma} = -f\sigma^c \quad (4-3-1-6)$$

式(4-3-1-6)を式(4-3-1-1)と式(4-3-1-2)に用いれば、母相と介在相の平均応力は次のようになる。

$$\sigma_1 = \sigma_0 - f\sigma^c \quad (4-3-1-7)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + (1-f)\sigma^c \quad (4-3-1-8)$$

ここで、応力の分散則4.2.2節のは均質複合材料の場合の応力分散則と同じ形として表せる。但し、4.2.2節の応力 σ^c は固有応力であり、固有歪みにより決定できるので、母相と介在相の応力も既知数であるが、本節の式(4-3-1-7)と式(4-3-1-8)に示される介在相と母相の応力はまだ未知数である。

Mori-Tanakaの等価モデルは母相の中に散在する粒子の体積分率が小さい場合に、粒子間の距離は充分遠く、任意の実粒子の外側領域の平均剛性は母相と等しいと仮定すると、実粒子を図4-3-1(b)に示すような均質単粒子が分散する複合体に等価させることができるとするものである。それによれば、図4-3-1(b)に示す均質粒子を含む複合体に加えられた荷重 σ_0 は図4-3-1(a)の母相平均応力と同じとすると、この均質単粒子回りの母相の応力は均質単粒子周りの母相の応力と等しいと考え、単粒子の場合と同様に扱い、等価することができ、固有応力と固有歪みの関係を表す混合則も、そのまま適用することが出来るというモデルである。

図4-3-1(a)に示さる実粒子の応力は次式で表し、

$$\epsilon_2 = L_2 : \sigma_2 \quad (4-3-1-9)$$

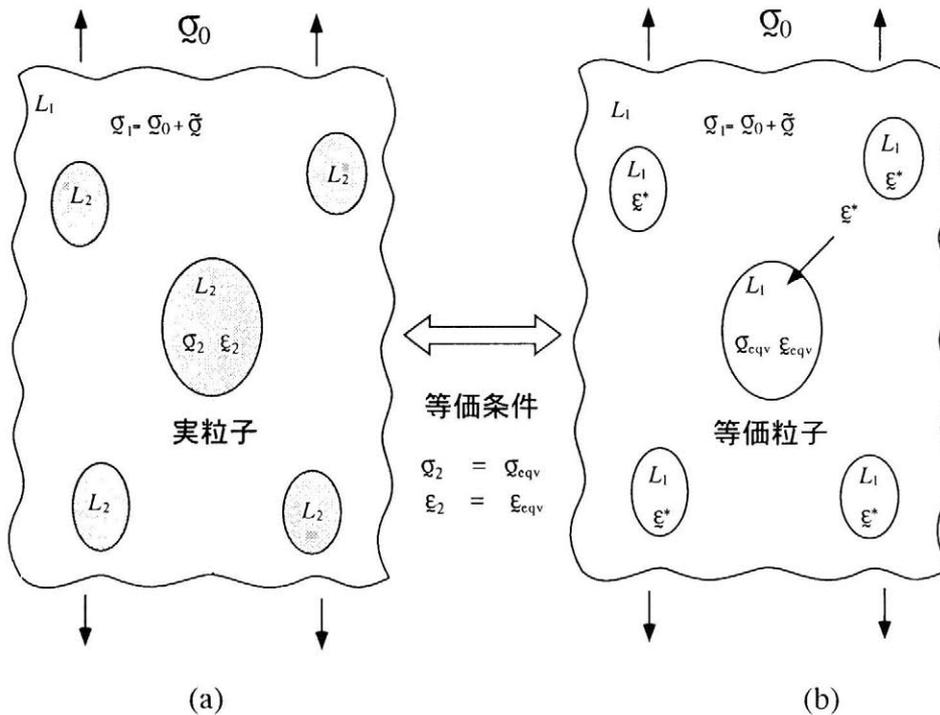


図4-3-1 Mori-Tanakaの等価モデル

図4-3-1 (b) の等価粒子の応力は次式によって与えられる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eqv} = \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_{eqv} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-3-1-10)$$

Eshelby の等価介在物理論により、図4-3-1 (a) の実粒子と図4-3-1 (b) の等価粒子には次の等価関係がある。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{eqv} \quad (4-3-1-11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_{eqv} \quad (4-3-1-12)$$

式 (4-3-1-9) と式 (4-3-1-10) を式 (4-3-1-11) に代入すれば、次式を得る。

$$\boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_{eqv} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-3-1-13)$$

式 (4-3-1-12) と式 (4-3-1-13) より、次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_{eqv} - \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_{eqv} \quad (4-3-1-14)$$

図4-3-1 (b) の均質等価材料は、節4-1-3に示した固有歪みを含む均質材料と同じ問題であり、式 (4-2-2-11) の結果を用いて、均質粒子の応力を次式により表すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{eqv} = \boldsymbol{\sigma}_0 + (1-f)\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-3-1-15)$$

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_1 : (\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) \quad (4-3-1-16)$$

式 (4-3-1-14) と式 (4-3-1-15) から、等価性を実現する固有歪が次式のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{A}^* : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-3-1-17)$$

ここで、

$$\boldsymbol{A}^* = \left[(\boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1)^{-1} - (1-f)\boldsymbol{E}_0 \right]^{-1} \quad (4-3-1-18)$$

粒子が疎らに分散する場合の複合材料と等価材料の間の等価条件を満足させる固有歪みが式 (4-3-1-17) により決定された。等価材料は均質材料であり、均質材料に関する節4.2.2の応力分散則は等価材料に適用できるので、式 (4-3-1-17) を式 (4-3-1-15) に代入すれば、式 (4-2-2-11) と同じように介在相の応力は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{eqv} = \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + (1-f)\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-3-1-19)$$

式 (4-3-1-12) に与えられる等価条件により、複合材料の実粒子の応力は次式で表せる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + (1-f)\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-3-1-20)$$

式 (4-1-1-8) の応力平衡条件と式 (4-3-1-20) を用い、母相の平均応力を次のように表せる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - f\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-3-1-21)$$

複合材料各相の応力をここにまとめれば、次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - f\boldsymbol{E}_0 : \boldsymbol{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-3-1-22)$$

$$\sigma_2 = \left(I \otimes I + (1-f) E_0 : A^* \right) : \sigma_0 \quad (4-3-1-23)$$

式 (4-3-1-2) 中の介在相と母相の応力差 σ^c は次式で表せる。

$$\sigma^c = E_0 : A^* : \sigma_0 \quad (4-3-1-24)$$

以上のように、粒子の体積分率が小さい場合、粒子の外側領域の平均剛性を母相と同じと仮定し、等価介在物法に基づいて、単粒子の場合の Eshelby 理論をそのまま適用でき、非均質粒子複合材料の介在相と母相の平均応力を求めることができる。

4.3.2 Mori-Tanaka 理論に基づく構成則

複合材料の構成則の確立は複合材料の解析、設計、応用などにとって非常に重要である。本節は粒子分散複合材料の構成則を中心として理論解析を行う。弾性の場合材料の弾性係数は応力に依存しないので、各相材料の平均応力、平均歪みに関する挙動のみが明らかとなればよい。そのため、理論展開にあたっては、あえて材料内部の局所の特性を無視することとした。

Mori-Tanaka理論では、等価均質体の仮想粒子が固有歪みを含む時の全体平均応力と平均歪みを次のように与えている。

$$\varepsilon_0 = L_1 : \sigma_0 + f \varepsilon^* \quad (4-3-2-1)$$

ε_0 と σ_0 は複合材料の平均歪みと平均応力である。 L_1 は均質材料の弾性コンプライアンスである。 f は固有歪みを含む領域の全複合体に占める体積分率を示す。式 (4-3-2-1) が成立するのは介在相の体積分率が小さい場合に限定されている。

非均質粒子複合材料の場合について、等価条件を満たせば、固有歪みを均質材料の仮想粒子に与える事によって平均歪みと平均応力を決定する事ができる。節4.3.1において低体積分率問題に対して、等価材料の固有歪み、応力などについて検討した。等価条件を満たす固有歪みは式 (4-3-1-17) に与えられ、次式のように表される。

$$\varepsilon^* = A^* : \sigma_0 \quad (4-3-2-2)$$

$$A^* = \left[(L_2 - L_1)^{-1} - (1-f) E_0 \right]^{-1} \quad (4-3-2-3)$$

式 (4-3-2-2) を式 (4-3-2-1) に代入すれば、非均質の実複合体の平均歪み-応力関係として次式を得る。

$$\varepsilon_0 = \bar{L} : \sigma_0 \quad (4-3-2-4)$$

ここで

$$\underline{L} = \underline{L}_1 + f \underline{A}^* \quad (4-3-2-5)$$

式 (4-3-2-5) は Mori-Tanaka 理論に基づいて求めた構成則である。この方法の適用範囲は体積分率が小さい場合に限られている。

球状粒子分散複合材料の場合、複合体は巨視的等方性を持ち、独立な弾性係数は2個であるため、式 (4-3-2-5) を次式のような形でスカラ量で表すことができる。

$$\bar{K} = K_1 \frac{K_2 - (1-f)(\alpha-1)(K_1 - K_2)}{K_1 - (1-f)(\alpha-1)(K_1 - K_2)} \quad (4-3-2-6)$$

$$\bar{G} = G_1 \frac{G_2 - (1-f)(\beta-1)(G_1 - G_2)}{G_1 - (1-f)(\beta-1)(G_1 - G_2)} \quad (4-3-2-7)$$

ここで、 \bar{K} と \bar{G} はそれぞれ複合材料の平均体積弾性係数とせん断係数である。球状粒子に対しては Eshelby のテンソル α と β もスカラ量となり、次のように与えられる。

$$\alpha = \frac{1 + \gamma_1}{3(1 - \gamma_1)} \quad (4-3-2-8)$$

$$\beta = \frac{8 - 10\gamma_1}{15(1 - \gamma_1)} \quad (4-3-2-9)$$

ここで、 γ_1 は母相材料の Poisson 係数である。

4.3.3 疎らな粒子複合材に関する構成則

既に公表されている従来の理論の多くは節 4.3.2 の式 (4-3-2-1) を用い、理論構成則を構築している。前節の Mori-Tanaka 理論による混合則、式 (4-3-2-1) は等価均質体に於いて立てたものであるが、本論文では、実粒子上で歪みの混合則を立て、次のように応力と歪み関係を利用して EMT 形式の構成則を構築する。式 (4-1-3-7) より、弾性問題の場合に全体の平均歪みと各相の平均応力の間には次の関係がある。

$$\underline{\varepsilon}_0 = (1-f) \underline{L}_1 : \underline{\sigma}_1 + f \underline{L}_2 : \underline{\sigma}_2 \quad (4-3-3-1)$$

節 4.3.1 に、母相と介在相の応力は次の様に求められた。

$$\underline{\sigma}_1 = \left(\underline{I} \otimes \underline{I} - f \underline{E}_0 : \underline{A}^* \right) : \underline{\sigma}_0 \quad (4-3-3-2)$$

$$\underline{\sigma}_2 = \left(\underline{I} \otimes \underline{I} + (1-f) \underline{E}_0 : \underline{A}^* \right) : \underline{\sigma}_0 \quad (4-3-3-3)$$

式 (4-3-3-2) と式 (4-3-3-3) を式 (4-3-3-1) に代入すれば、巨視的な平均応力と平均歪に関する構成則は

$$\underline{\varepsilon}_0 = \underline{L}_0 : \underline{\sigma}_0 \quad (4-3-3-4)$$

と表すことができる。 \underline{L}_0 は複合材料の平均弾性コンプライアンス・テンソルであり、次

式のようになる。

$$L_0 = (1-f)L_1 + fL_2 + f(1-f)(L_2 - L_1)E_0 : A^* \quad (4-3-3-5)$$

$$A^* = \left[(L_2 - L_1)^{-1} - (1-f)E_0 \right]^{-1} \quad (4-3-3-6)$$

本混合則は比較的体積分率の低い粒子分散複合材料に対して有効であり、簡単なテンソル演算によって求められる事ができる。本モデルは水を入れた容器にボールを浮かべた状態に例えることが出来る。水位に対応する母相応力は粒子数を増やせば上昇するが、介在相と母相の間の平均応力差は不変である。ReussやVoigtモデルでは各相の応力表現は粒子の体積分率に全く依存しない形であるが、本モデルでは応力が体積分率に依存することを考慮し、また介在相の外領域の平均的なコンプライアンスが母相のものと同等であるとするモデルである。Wakashima、Tohgoらのモデルは式(4-3-2-1)の混合則を用いるが、本モデルは式(4-3-3-1)の混合則を用いる点において導出経路に違いはあるが、等価則の基本仮定においては同じであるので本構成則(EMTモデル)と同じであると言える。

式(4-3-3-5)について、球状粒子分散複合材料の場合、複合体はの平均体積弾性係数 \bar{K} とせん断係数 \bar{G} をスカラ量で表せば、式(4-3-3-5)を次のように表すことができる。

$$\bar{K} = \frac{K_1 K_2}{(1-f)K_2 + fK_1 + f(1-f)(K_1 - K_2)K_1(\alpha - 1)A_k^*} \quad (4-3-3-7)$$

$$\bar{G} = \frac{G_1 G_2}{(1-f)G_2 + fG_1 + f(1-f)(G_1 - G_2)G_1(\beta - 1)A_g^*} \quad (4-3-3-8)$$

$$A_k^* = \frac{K_1 - K_2}{K_1 K_2 - (1-f)K_1(K_1 - K_2)(\alpha - 1)} \quad (4-3-3-9)$$

$$A_g^* = \frac{G_1 - G_2}{G_1 G_2 - (1-f)G_1(G_1 - G_2)(\beta - 1)} \quad (4-3-3-10)$$

球状粒子に対するEshelbyテンソルのスカラ量、 α と β はそれぞれ式(4-4-1-8)と式(4-4-1-9)と同じ様に与えられる。

§ 4.4 体積分率と剛性比の全域で適用可能な非均質粒子複合材に関する構成則 (SCCモデル1)

前節の式(4-3-2-2)と式(4-3-2-3)に示す応力の分散則を開発する際の介在相の外側領

域の平均剛性は母相と同じと仮定している。粒子の体積分率が高く、特に粒子の剛性が母相と大きく異なる時、介在相の外側領域の平均剛性を母相と同じとするEMT法では実際と状況が異なる。介在相の外側領域の平均剛性の変化を考慮する必要がある。そのため、ここでは節4.3.2に平均剛性の変化を考慮して開発した応力の分散則を応用する。粒子の周囲の平均剛性を未知数として、構成則の定式化を行い、得られた非線形方程式を解くという手順をとる。構成則は自己整合 (Self-consistent) の形式をとるので、本論文では本理論を SCC モデル (Self-consistent Compliance) と呼ぶ。

4.4.1 高体積分率をもつ粒子複合材料の等価介在物法の適用

節4.3.1において粒子は母相材料に包含されていると考え、母相の応力変化を考慮して、応力の分散則が与えられた。しかし、介在物の体積分率が高くなると、粒子と粒子の距離が小さくなるほか、粒子間の干渉も強くなる。さらに一つの粒子に着目すると、周りの母相域に数多くの介在物が含まれているため、複合体の平均剛性は母相と大きく異なる。この場合、固有歪みを持つ実複合体環境の中に母相と同じ剛性の仮想粒子で実粒子を置き換えれば、Mori-Tanakaの固有歪みを用いて生じる固有応力は、無限大母相の中の均質単粒子の固有応力と異なる。そのため、均質単粒子の固有歪みと固有応力に関するEshelbyの式をそのまま適用することができない。

ここで、介在相の外側領域の平均剛性の変化に対応するため、図4-4-1のような等価モデルを導入した。複合材料の実粒子系では、一つの粒子に着目すれば、粒子の外界の平

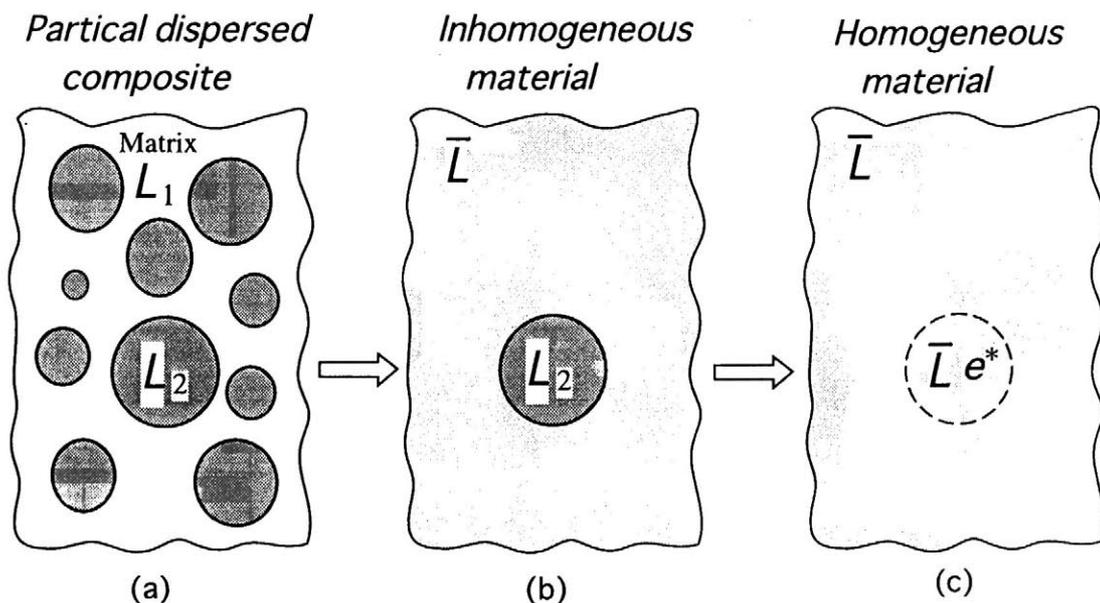


図4-4-1 巨視的な剛性の変化を考慮する等価介在物法

均的な剛性は当然、粒子の体積分率の増加と共に変化する。そこで本論文では、特に粒子間の相互作用の観点から、等価介在粒子に与えられた固有歪みに対して粒子の外界が応答する平均的なコンプライアンスを自己整合的に決定する混合則を提案する。

図4-4-1 (a) に示すような外応力を受ける微視的領域の中の一つの粒子に着目し、この粒子が複合体の巨視的なコンプライアンスに等しいコンプライアンス Γ を持つ均質媒体中にあると仮定する [図4-4-1 (b)]。この複合体に等価させるモデルとして、図4-4-1 (c) に示すように均質媒体 L の中に一つの等価粒子を考える。この仮想粒子にある固有歪を与えることにより、実粒子との間に全歪と応力において等価関係を樹立する。こうしてできた等価粒子は実粒子と同じ環境に存在し、実粒子の挙動を正しくシミュレートすることができる。

図4-4-1 (c) に示すように粒子は複合材料に包含されていると考えれば、粒子の応力は次のように定義することができる。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma' \quad (4-4-1-1)$$

σ_0 は全体平均応力、 σ' は介在相の平均応力と複合体の平均応力の食い違いである。介在相と母相の応力偏差 σ^c は前と同じように表す。

$$\sigma^c = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (4-4-1-2)$$

母相の平均応力は次のようになる。

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma' - \sigma^c \quad (4-4-1-3)$$

複合材料の応力平衡条件、

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (4-4-1-4)$$

に、式 (4-4-1-1) と式 (4-4-1-3) を代入すると、次式を得る。

$$\sigma^c = \sigma' / (1-f) \quad (4-4-1-5)$$

式 (4-4-1-5) を式 (4-4-1-3) と式 (4-4-1-1) に用いて、母相と介在相の平均応力は次のように表すことができる。

$$\sigma_1 = \sigma_0 - f\sigma' / (1-f) \quad (4-4-1-6)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma' \quad (4-4-1-7)$$

式 (4-4-1-6) と式 (4-4-1-7) に示されている SCC モデルの応力分散則は、前節の EMT モデルの式 (4-3-1-7) と式 (4-3-1-8) と著しく異なっている。この応力分散則の相違は EMT モデルと SCC モデルの間の最も基本的な違いを表すものである。この様に応力の分散において異なるので、両モデルに基づく複合材料の巨視的構成則にも顕著な影響を及ぼすと予測される。

4.1.3節より母相と介在相内部の平均歪みと平均応力に次式の関係がある。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \bar{\boldsymbol{L}}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (4-4-1-8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \bar{\boldsymbol{L}}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (4-4-1-9)$$

式 (4-4-1-6) と式 (4-4-1-7) に示す応力分散則の表現式は節4.3.1の応力分散則と著しく異なる。式 (4-4-1-6) と式 (4-4-1-7) は介在相と複合材料の応力差を中心として考えられたものであり、介在相と複合材料の関係を強調する。節4.3.1の応力分散則は低体積分率の場合の介在相と母相の関係を強調する。

図4-4-1 (c) に示すように均質媒体にある固有歪み \boldsymbol{e}^* を含む均質粒子の応力と歪みは次の等価条件を満たす。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_{eqv} \quad (4-4-1-10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{eqv} \quad (4-4-1-11)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}_{eqv}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{eqv}$ は図4-4-1 (c) に示されている均質等価粒子の応力と歪みである。Eshelbyの均質単粒子の理論を本ケースに用いれば、均質等価粒子の応力は次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{eqv} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \bar{\boldsymbol{E}}_0 : \boldsymbol{e}^* \quad (4-4-1-12)$$

ここで

$$\bar{\boldsymbol{E}}_0 = \bar{\boldsymbol{E}} : (\bar{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) \quad (4-4-1-13)$$

図4-4-1 (c) に示されている等価粒子を含む等価材料の平均剛性は複合体の平均剛性と同一である。そのため、Eshelbyテンソルも複合体の平均剛性に依存する。式 (4-4-1-13) の $\bar{\boldsymbol{E}}$ は複合体の平均弾性マトリクス、 $\bar{\boldsymbol{S}}$ は複合体の平均Eshelbyテンソルである。

固有歪みを持ち、複合体と同じ平均剛性を持つ等価粒子の歪みは次式で表せる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eqv} = \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_{eqv} + \boldsymbol{e}^* \quad (4-4-1-14)$$

応力と歪みの等価条件、式 (4-4-1-10) と式 (4-4-1-11) により次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{e}^* \quad (4-4-1-15)$$

式 (4-4-1-10) と式 (4-4-1-12) より、

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \bar{\boldsymbol{E}}_0 : \boldsymbol{e}^* \quad (4-4-1-16)$$

式 (4-4-1-9) を式 (4-4-1-16) に代入して、式 (4-4-1-15) は次のように表すことができる。

$$\bar{\boldsymbol{L}}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 = \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{e}^* \quad (4-4-1-17)$$

式 (4-4-1-16) を式 (4-4-1-17) に代入して、等価条件を満たす固有歪み \boldsymbol{e}^* は次のように解くことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \bar{\mathbf{A}}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-18)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_0 = \left[(\mathbf{L}_2 - \bar{\mathbf{L}})^{-1} - \bar{\mathbf{E}}_0 \right]^{-1} \quad (4-4-1-19)$$

式 (4-4-1-18) は、一定の荷重下で複合体の平均応力が $\boldsymbol{\sigma}_0$ である場合に、均質等価粒子と実粒子の間に等価条件を満たす固有歪みを表す。式 (4-4-1-18) を式 (4-4-1-16) に代入すると、介在物の応力は次のように求められた。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \bar{\mathbf{E}}_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 \right] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-20)$$

式 (4-4-1-4) に示される複合材料の応力平衡条件と式 (4-4-1-20) により、母相の平均応力を次のように得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{f}{1-f} \bar{\mathbf{E}}_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 \right] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-21)$$

式 (4-4-1-20) と式 (4-4-1-1) から介在物と母相の応力差 $\boldsymbol{\sigma}'$ は次のようになり、

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{1-f} \bar{\mathbf{E}}_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-22)$$

式 (4-4-1-22) を式 (4-4-1-6) と式 (4-4-1-7) に用いれば、母相と介在相の平均応力は次のようにすることができる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{f}{1-f} \bar{\mathbf{E}}_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 \right] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \bar{\mathbf{E}}_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 \right] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-1-24)$$

この方法で母相と介在相の応力を求める時、複合材料の平均剛性が確定している事を前提とするが、この段階ではこれらは未知であり、これらを求めるため複合材料の構成則の理論式が必要となる。

4.4.2 全体積分率、全剛性比領域に適用可能な

整合コンプライアンス・モデル

節4.1.3の弾性問題において、全体の平均歪みと各相の平均応力の間に次の関係がある。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1-f)\mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 + f\mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (4-4-2-1)$$

平均剛性の変化を考慮した応力の分散則は節4.3.2により、次のように与えられる。式 (4-4-1-23) と式 (4-4-1-24) を式 (4-4-2-1) に代入して、次式が得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\mathbf{L}} : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-4-2-2)$$

$\bar{\mathbf{L}}$ は複合材料の平均弾性コンプライアンス・テンソルである。

$$\bar{L} = (1-f)L_1 + fL_2 + f(L_2 - L_1)\bar{E}_0 : \bar{A}_0 \quad (4-4-2-3)$$

式(4-4-2-3)は右辺に未知数 \bar{L} 自身を含む整合形式 (Self-consistency) をとっている。解は収束計算により求めなければならないが、右辺における初期値を簡単なVoigtモデル又はReussモデルを用いて \bar{L} 及び \bar{E} とするのが一つの妥当な方法である。閉じた形の解を必要とする場合には、その第一近似をもってあてることが出来る。

本モデルでは、相応力と粒子の外領域のコンプライアンスにおいても共に粒子の体積分率の変化が考慮されていて、粒子の体積分率が高い場合にも、また粒子と母相の弾性係数比が著しく異なる場合にも適用出来るモデルである。

式(4-4-2-3)について、球状粒子分散複合材料の場合、複合体の平均体積弾性係数 \bar{K} とせん断係数 \bar{G} をスカラ量で表せば、式(4-4-2-3)を次のように表すことができる。

$$\bar{K} = \frac{K_1 K_2}{(1-f)K_2 + fK_1 + f(K_1 - K_2)\bar{K}(\alpha - 1)A_K^*} \quad (4-4-2-4)$$

$$\bar{G} = \frac{G_1 G_2}{(1-f)G_2 + fG_1 + f(G_1 - G_2)\bar{G}(\beta - 1)A_G^*} \quad (4-4-2-5)$$

$$A_K^* = \frac{\bar{K} - K_2}{\bar{K}K_2 - \bar{K}(\bar{K} - K_2)(\alpha - 1)} \quad (4-4-2-6)$$

$$A_G^* = \frac{\bar{G} - G_2}{\bar{G}G_2 - \bar{G}(\bar{G} - G_2)(\beta - 1)} \quad (4-4-2-7)$$

§ 4.5 粒子分散複合材料に関する巨視的な構成則： (SCCモデル2)

複合材料の構成則は仮定と方法によって異なる。本節に複合材料の構成則の多様性を紹介するため、もう一つの整合コンプライアンス法を紹介する。

4.5.1 非均質媒体に関する Eshelby 混合則の修正

図4-5-1aに示される均質媒体中の一つの楕円領域に固有歪みを与え、生じた固有応力とこの固有歪みの関係は、第三章で紹介したEshelbyの理論により決定される。しかし、図4-5-1bに示すような媒体の中にたくさんの異物、即ち均質媒体の性能と異なる介在物

が存在する場合、同じ楕円領域の固有応力と固有歪みの関係はどうなるか、Eshelbyは明らかにしていない。Mori-Tanakaは図4-5-1bの場合は図4-5-1aの場合と同じであると仮定した。介在物が少ない場合はMori-Tanakaの仮定は近似的に成り立つが、多く存在する場合にはMori-Tanakaの仮定は実際と大きく異なる可能性があると予想されている。ここで、介在物間の干渉を考慮して、固有応力と固有歪みの関係を検討する。

先ず、前章の単粒子の場合と同じように、母相と同じ弾性係数 L_1 (或いは E_1)、及び固有歪み ε^* を持つ、図4-5-1bに示すようなEshelby介在物に対して、図4-5-2aに示すモデルを考える。粒子の外側領域は非均質粒子の平均性能と同じ剛性を有する。相応力を求めるため、図4-5-2bに示す均質等価材料を考える。

弾性理論により、図4-5-2bに示す均質等価材料の応力等価条件を次式のように表わすことが出来る。

$$E_1 : (\varepsilon_0 + \varepsilon_c - \varepsilon^*) = \bar{E} : (\varepsilon_0 + \varepsilon_c - \varepsilon^*) \quad (4-5-1-1)$$

ここで、 ε_0 は全体の平均歪みである、 ε_c は介在相歪みと複合体平均歪み間の食い違いであり、 ε^* は固有歪み、 ε^* は図4-5-2aと図4-5-2bの間の等価条件を満たすため図4-5-2bの仮想粒子に与える固有歪みである。等価均質材料に関する弾性理論により、次式を得る。

$$\sigma_0 = \bar{E} : \varepsilon_0 \quad (4-5-1-2)$$

$$\sigma_c = \bar{E} : (\varepsilon_c - \varepsilon^*) \quad (4-5-1-3)$$

ここで、 σ_0 は全領域に亘る平均応力であり、 σ_c は粒子応力と複合体平均応力 σ_0 の食い違いである。Eshelby理論により、次式が成り立つ。

$$\varepsilon_c = \bar{S} : \varepsilon^* \quad (4-5-1-4)$$

\bar{S} は非均質材料の平均Eshelbyテンソルである。式(4-5-1-4)を式(4-5-1-1)に代入すれば、仮想固有歪み ε^* は次のように求められる。

$$\varepsilon^* = B_0 : \bar{E} : \varepsilon_0 + B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-5-1-5)$$

$$B_0 = [(L_1 - \bar{L})^{-1} - \bar{E}_0]^{-1} \quad (4-5-1-6)$$

また、仮想粒子の応力は次式で表せる。

$$\sigma_2 = \bar{E} : \varepsilon_0 + \bar{E}_0 : \varepsilon^* \quad (4-5-1-7)$$

式(4-5-1-5)を式(4-5-1-7)に代入し、式(4-5-1-2)を用いて次式を得る。

$$\sigma_2 = [I \otimes I + \bar{E}_0 : B_0] : \sigma_0 + \bar{E}_0 : B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-5-1-8)$$

粒子の外側領域の剛性の変化を考慮した式(4-5-1-8)は多粒子の場合のEMTの式(4-2-11)と異なる事が分かる。EMTモデルとSCCモデルの相違は、相応力の形の上にも明らか

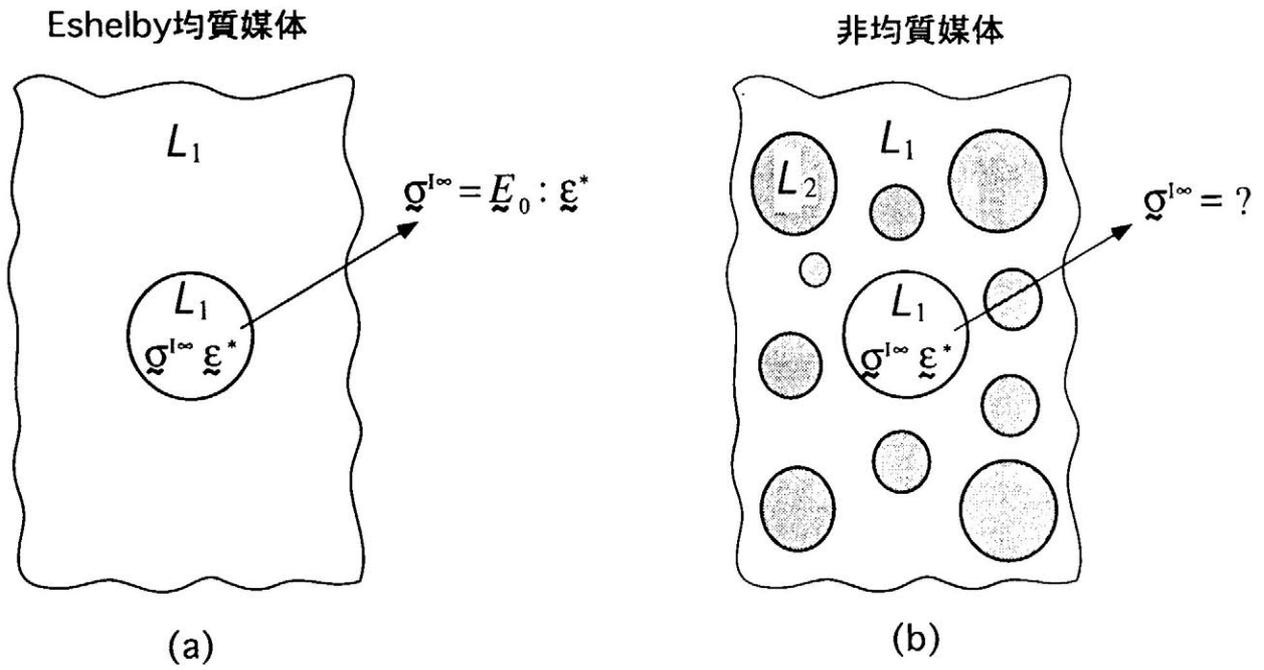


図4-5-1 Eshelby 均質媒体と非均質媒体に存在する同一の粒子

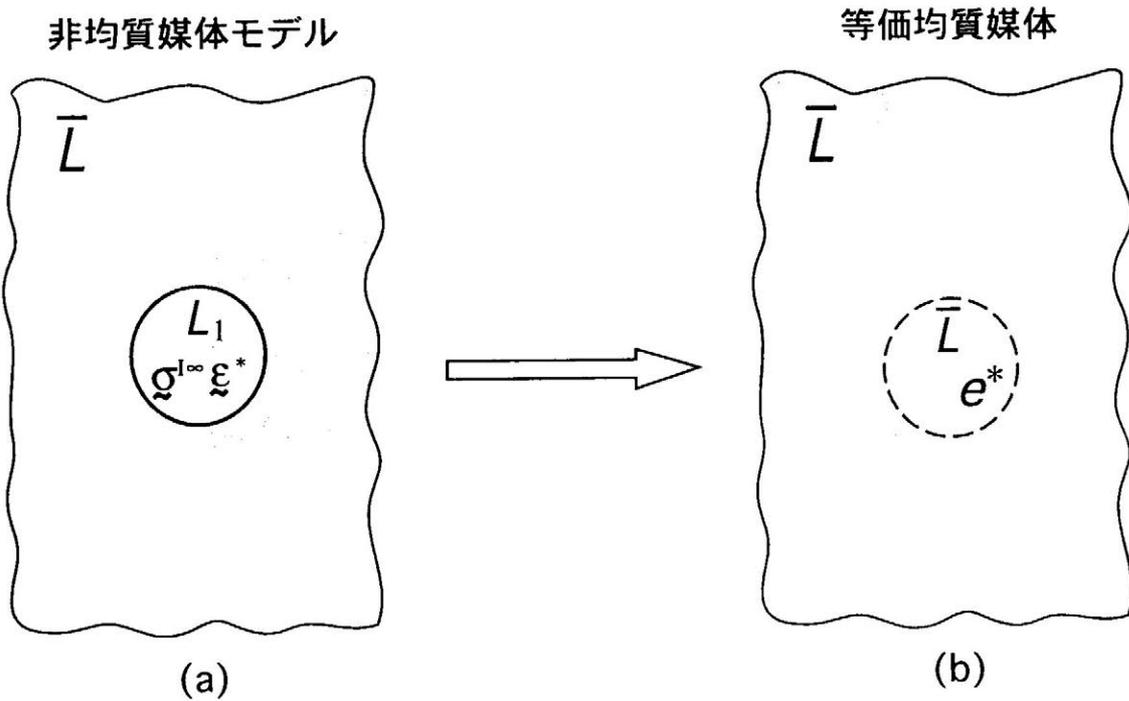


図4-5-2 非均質媒体に存在する Eshelby 粒子に関する等価介在物法

かに現れている。また、複合体の平均応力が0の場合には、式(4-5-1-8)は次のようになる。

$$\sigma_2 = \sigma'^* = \bar{E}_0 : B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-5-1-9)$$

Mori-Tanakaは、Eshelby単粒子の場合の固有応力の決定式、 $\sigma'^* = E_0 : \varepsilon^*$ をそのまま利用しているが、粒子の外側領域の剛性の変化を考慮した本モデルの式(4-5-1-9)は、Eshelbyの単粒子場合の式とも異なる。もし粒子の存在が複合体の剛性に与える影響が小さければ、Eshelbyの固有応力の決定式は実際に近いが、多粒子や剛性著しく異なる場合など、粒子の存在の影響が大きい時、実際から離れる。

本節のモデルで求めた介在相の応力その他、母相の強度を求める際など母相の応力を知る必要がある。複合体の平衡条件

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (4-5-1-10)$$

により、母相の応力を次のように表すことができる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{(1-f)}(\sigma_0 - f\sigma_2) \quad (4-5-1-11)$$

式(4-5-1-8)を式(4-5-1-11)に代入すると、母相の応力が次のように得られる。

$$\sigma_1 = [I \otimes I + \bar{E}_0 : B_0] : \sigma_0 - \frac{f}{(1-f)} \bar{E}_0 : B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-5-1-12)$$

母相と介在相の応力を示す式(4-5-1-9)と式(4-5-1-12)はEMTモデルの応力混合則を示す式(4-3-1-19)と式(4-3-1-20)より複雑で、それは複合材料の剛性の影響と粒子の干渉を考慮するからである。

4.5.2 等価条件を満たす等価粒子に関する固有歪みの決定

式(4-5-1-2)により、式(4-5-1-5)は次のように表すことができる。

$$\varepsilon^* = B_0 : \sigma_0 + B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-5-2-1)$$

実粒子の応力と歪みの等価条件を満たす仮想粒子の固有歪みは、式(4-3-2-18)、(4-3-2-19)と同様に、次のように求められる。

$$\varepsilon^* = \bar{A}_0 : \sigma_0 \quad (4-5-2-2)$$

$$\bar{A}_0 = \left[(L_2 - \bar{L})^{-1} - \bar{E}_0 \right]^{-1} \quad (4-5-2-3)$$

式(4-5-2-1)と式(4-5-2-2)から解くと、等価条件を満たすEshelby等価粒子の固有歪み ε^* が次のように求められる。

$$\varepsilon^* = C_0 : \sigma_0 \quad (4-5-2-4)$$

$$\mathcal{C}_0 = (\mathcal{L}_1 - \bar{\mathcal{L}}) : \mathcal{B}_0^{-1} : (\mathcal{A}_0 - \mathcal{B}_0) \quad (4-5-2-5)$$

4.5.3 複合材料の構成則の決定

本モデルの均質等価粒子の剛性は母相と同じで、Mori-Tanakaのモデルと等しい等価粒子を利用したが、ここで、Mori-Tanakaの歪み混合則を用いることができる。Mori-Tanaka理論により、複合材料の全体平均歪みは次式に与えられる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\mathcal{L}}_1 : \boldsymbol{\sigma}_0 + f \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-5-3-1)$$

式(4-5-2-4)を式(4-5-3-1)に用い、次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\bar{\mathcal{L}}_1 + f \mathcal{C}_0] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-5-3-2)$$

従って、複合材料の平均弾性コンプライアンス・テンソル $\bar{\mathcal{L}}$ は次の様に与えられる。

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_1 + f \mathcal{C}_0 \quad (4-5-3-3)$$

このモデルはMori-Tanakaの方法と同様の等価介在物を適用するが、固有応力と固有歪みの関係に複合体の剛性の変化の影響が考慮された点が強調される。式(4-4-3-7)と同じ、解は収束計算により求めなければならない。

§ 4.6 粒子分散複合材料に関する巨視的な構成則 (SCCモデル3)

§ 4.5と§ 4.6で紹介したモデルは粒子の応力を求める時、粒子の外側領域は複合体平均剛性と等しい均質材料と考えられる。実際、粒子は母相に包含されているので、ここで、図4-6-1aに示される粒子分散複合材料に関して、図4-6-1bのような複合材—母相—介在相モデルを考え、これに等価則を用いた複合材料の混合則と構成則について検討する。なお図4-6-1bに示す粒子と母相の体積分率の比は複合材料と同じである。

4.6.1 複合材—母相—介在相モデルに関する等価介在物法

図4-6-2aには複合材—母相—介在相モデルを示す。図4-6-2bに示す等価体では実粒子が占める領域(点線の中)に母相と同じ材料を考え、更に適当な固有歪みを与えて、応力と歪みを実粒子の応力と歪みに等しい条件を満足させる。固有歪み課す点線中の領域の体積分率は f であるため、実線が占める領域の平均固有歪みは $f \boldsymbol{\varepsilon}^*$ である(図4-6-2cに参照)。

図4-6-2cに示す構造は、図4-5-2aと同じ関係であるので、節4.5.1と同様な方法で解くことが出来る。実線内の応力は次式に与えられる。

$$\sigma_{in} = [I \otimes I + \bar{E}_0 : B_0] : \sigma_0 + f \bar{E}_0 : B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-6-1-1)$$

ここで、実線領域内が複合体全体の平均を充分あらわしていると仮定すると、式(4-6-1-1)はつぎのように表すことが出来る。

$$\sigma_0 = [I \otimes I + \bar{E}_0 : B_0] : \sigma_0 + f \bar{E}_0 : B_0 : (L_1 - \bar{L})^{-1} : \varepsilon^* \quad (4-6-1-2)$$

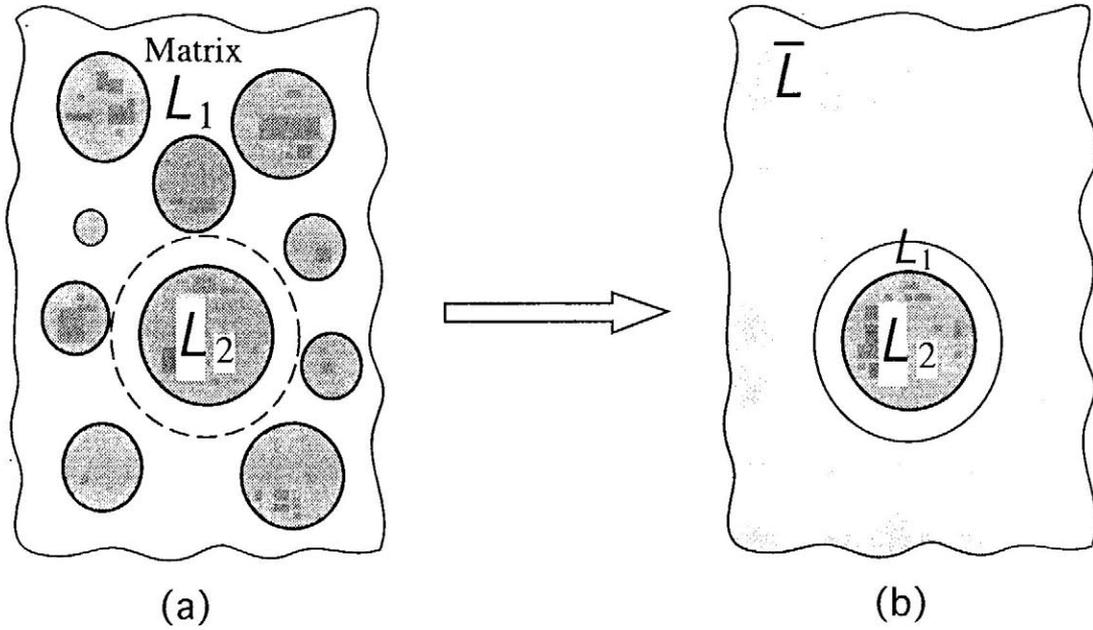


図4-6-1 複合材—母相—介在相モデル

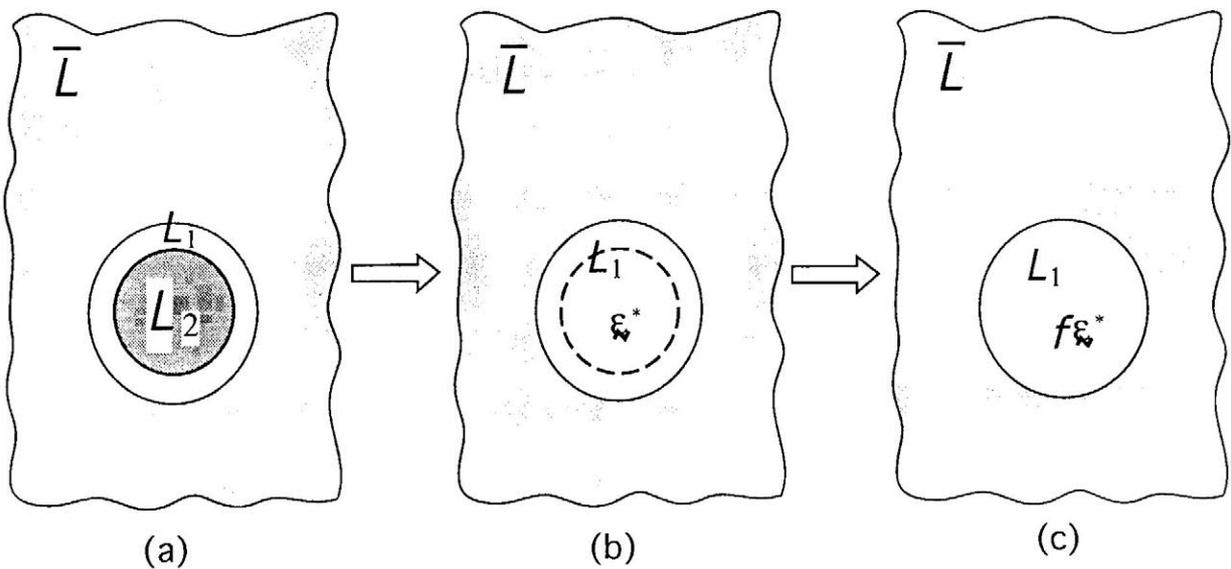


図4-6-2 複合材—母相—介在相モデルの等価法

式(4-6-1-1)より、等価条件を満たす固有歪み $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ が次のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{f} (\bar{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_1) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-6-1-3)$$

4.6.2 複合材—母相—介在相モデルに関する介在相と母相の応力

楕円介在物の応力はEshelbyの理論により、介在物中で定数であり、以前と同じように $\boldsymbol{\sigma}_2$ とする。図4-6-2aの実粒子と図4-6-2bの仮想粒子は等価条件を満足するため、次式が与えられる。

$$\mathbf{E}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{E}_1 : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad (4-6-2-1)$$

式(4-6-2-1)を解くと、次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)^{-1} : \mathbf{E}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (4-6-2-2)$$

式(4-6-1-3)を式(4-6-2-2)から、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{f} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)^{-1} : \mathbf{E}_1 : (\bar{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_1) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-6-2-3)$$

となる。介在相の応力は次式に与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{C}_0^2 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-6-2-4)$$

$$\mathbf{C}_0^2 = \frac{1}{f} \mathbf{E}_2 : (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)^{-1} : \mathbf{E}_1 : (\bar{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_1) \quad (4-6-2-5)$$

介在相と複合体に挟まれ狭い母相の部分で界面の影響による応力分布を考え、応力 $\boldsymbol{\sigma}_1$ を次式の形をとると仮定する。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B} \frac{1}{f_\Omega} \quad (4-6-2-6)$$

\mathbf{A} 、 \mathbf{B} は未知数であり、 f_Ω は図4-6-3に示す複合体と介在相の間の母相層の任意 Ω 界面内の領域の、母相と複合体の界面に含まれる領域に対する体積分率である。更に界面の応力釣

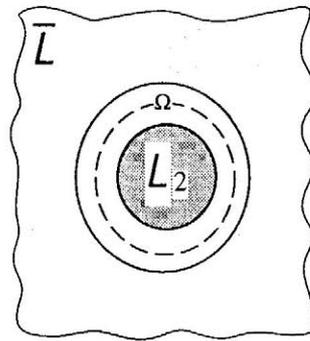


図4-6-3 母相層の参照界面 Ω

合条件により、式 (4-6-2-6) は次式を満たす。

$$f_{\Omega} = 1 \text{ の場合、 } \sigma_1 = \sigma_0 \quad (4-6-2-7)$$

$$f_{\Omega} = f \text{ の場合、 } \sigma_1 = \sigma_2 \quad (4-6-2-8)$$

式 (4-6-2-6)、(4-6-2-7) と (4-6-2-8) から、 A 、 B は次のように求められる。

$$A = \frac{1}{1-f}(\sigma_0 - f\sigma_2), \quad B = \frac{f}{1-f}(\sigma_2 - \sigma_0) \quad (4-6-2-9)$$

式 (4-6-2-9) を式 (4-6-2-6) に代入すれば、式 (4-6-3-1) は次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-f}(\sigma_0 - f\sigma_2) + \frac{f}{1-f}(\sigma_2 - \sigma_0) \frac{1}{f_{\Omega}} \quad (4-6-2-10)$$

母相層の平均応力は次式で定義される。

$$\langle \sigma_1 \rangle = \frac{1}{1-f} \int_f^1 \sigma_1 \, d f_{\Omega} \quad (4-6-2-11)$$

式 (4-6-2-10) を式 (4-6-2-11) に代入すれば、

$$\langle \sigma_1 \rangle = \frac{1}{1-f}(\sigma_0 - f\sigma_2) - \frac{f \ln(f)}{(1-f)^2}(\sigma_2 - \sigma_0) \quad (4-6-2-12)$$

式 (4-6-2-4) を式 (4-6-2-12) に代入すれば、母相の平均応力は次のようになる。

$$\langle \sigma_1 \rangle = C_0^1 : \sigma_0 \quad (4-6-2-13)$$

$$C_0^1 = \frac{1}{1-f}(I \otimes I - fC_0^2) - \frac{f \ln(f)}{(1-f)^2}(C_0^2 - I \otimes I) \quad (4-6-3-14)$$

4.6.3 複合材—母相—介在相モデルに関する構成則

式 (4-1-1-20) に示されたように複合材料の平均歪みと各相の平均応力の間は次の関係がある。

$$\epsilon_0 = (1-f)L_1 : \sigma_1 + fL_2 : \sigma_2 \quad (4-6-3-1)$$

式 (4-6-2-4) と式 (4-6-2-11) を式 (4-6-3-1) に代入すると、次式を得る。

$$\epsilon_0 = [(1-f)C_0^1 + fC_0^2] : \sigma_0 \quad (4-6-3-2)$$

これより、複合材料の巨視的なコンプライアンスは次のように与えられる。

$$L = (1-f)C_0^1 + fC_0^2 \quad (4-6-3-3)$$

このモデルは複合体の剛性の変化の影響と、粒子まわりの母相内の応力分布を同時に考慮した構成則である。前の整合形式の構成則と同じく、解は収束計算により求めなければならぬ。

§ 4.7 解析例

本章で開発された混合則と構成則の精度を検討するため、球状粒子分散複合材料の2次元化した無限領域の引っ張り弾性解析を行った。広範囲の適用性を立証するため、粒子の体積分率は0~100%まで、また介在物については空孔と剛体を含めて、材料剛性比が0~ ∞ にわたって検討した。

本論文では弾性問題を取り扱っているので、体積膨張変形モードとせん断変形モードを分離することが出来、前述の構成則と収束過程を、より簡単なスカラー演算により扱うことが出来る。以下に示す解析はスカラー演算を用いた例であり、SCCモデルにつき具体的な表示式を付録に示す。テンソル形式で計算した場合も、ほとんど変わらない精度の収束解が得られていることを付記する。

4.7.1 材料係数

本問題に対しては、ポアソン係数の影響は比較的小さく、母相と粒子のポアソン係数をそれぞれ、 $\nu_2 = 0.18$ と固定した。ヤング率による影響は顕著であるため、多数の剛性比について詳しく検討した。解析に用いた母相と介在相のヤング率をそれぞれ、 E_1, E_2 とし、剛性比 E_1/E_2 を表1に示す。表1の ∞ により表すケースは、粒子が空孔 (Void) $E_2 = 0$ 、母相のヤング率が $E_1 = 40$ である場合を示す。また、粒子が剛体 (Rigid Inclusion) $E_2 = \infty$ 、母相のヤング率が $E_1 = 40$ である場合には、母相と介在相のヤング率比は、 $E_1/E_2 = 0$ となる。母相と介在相のヤング率比、 E_1/E_2 は0から ∞ までとする目的は本章で開発された混合則と構成則の精度を、母相と介在相のヤング率比の全範囲で検討するためである。本章では弾性変形に限定し、母相と介在相の塑性変形を考慮しない。

4.7.2 粒子分散複合材料モデルと有限要素法解析参照領域

実複合体では粒子形状の不均一性や相間剥離など複雑な問題があるため、本モデルの実験との比較が難しい。そこで本モデルと同じ条件の下に立つ粒子分散複合材料のメゾメカニクス解析を有限要素法により行い、ベンチマークとして用いて本モデルおよび他のモデルとの比較検討を行った。

図4-7-1に示す無限領域を持つ粒子分散モデルを考え、その一部をとり図4-7-2のような解析参照領域として考えた。周期無限領域とするため、参照領域の左辺、下辺には対

Young's modulus (Unit : GPa)

$E_1 \backslash E_2$	2	4	10	40	Void	Rigid Inclusion
2	1	0.5	0.2	0.05		
4	2	1				
10	5		1			
40	20			1	∞	0

表1 母相と介在相のヤング率及びそれらの比

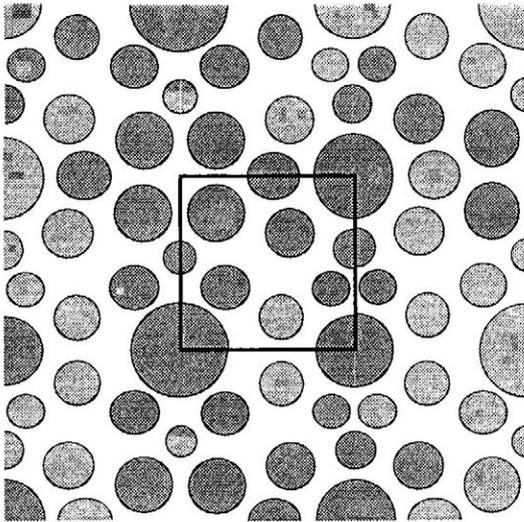


図 4-7-1 粒子分散複合材料モデル

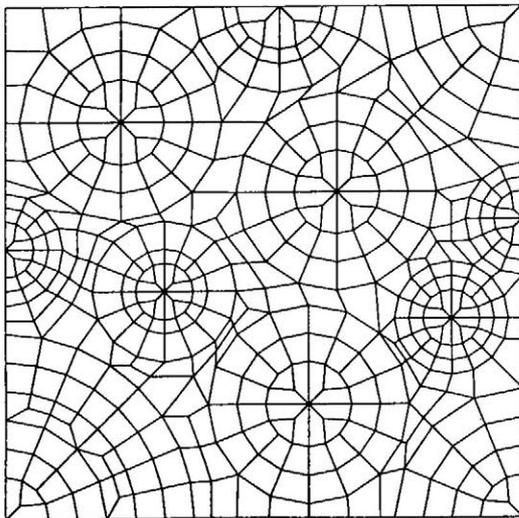


図 4-7-2 有限要素法解析参照領域

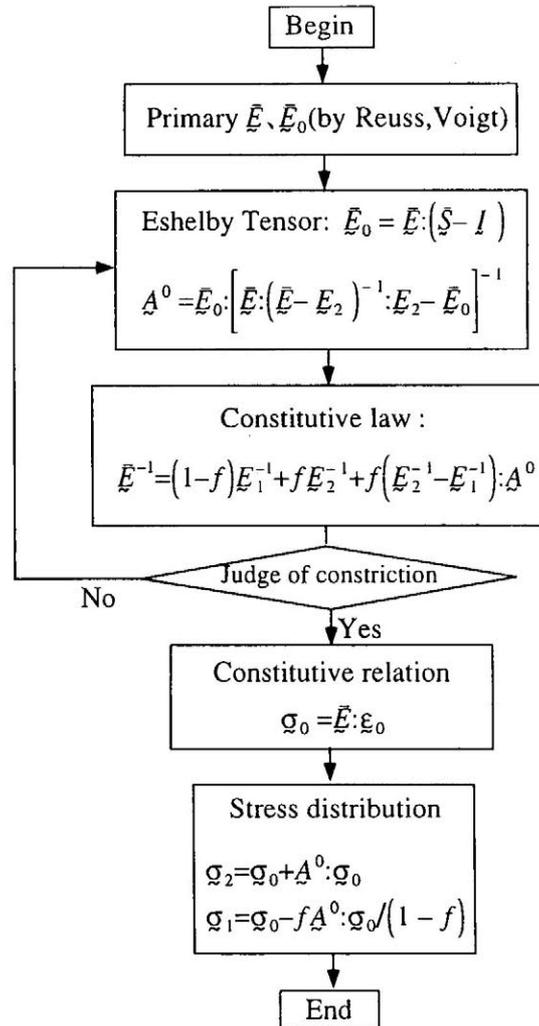


図 4-7-3 収束計算に関する計算流れ

称境界条件、右辺、上辺にはペナルティ拘束を施している。単粒子の参照領域からなる正方配列の場合には強い異方性が現われるが、粒子をランダム配置した本参照領域モデルはほとんど異方性を持たないパターンであることが示されている。

4.7.3 応力分散の検討

EMTモデルの計算上の取り扱いは比較的容易であるが、粒子の体積分率が大きい場合に効力を表すSCCモデルの解析は収束計算を行う必要がある。収束計算に関する計算の流れは図4-7-3に示す。弾性問題に対して、弾性係数をスカラー量で表すことが出来、収束計算もスカラー量で行う事ができる(付録)。本節では弾性問題を解析するため、各相の平均応力を決定するのは非常に重要なことである。また複合材料の巨視的な性能を表すため、精度よい応力決定式が基本条件となる。そのため、まず本章では応力分散則を検討する。

図4-7-2に示す有限要素法による解析参照領域では、介在相の体積分率は0.04から0.72までの範囲で可能である。その体積分率の範囲で、ヤング率の比が1/20、1/10、10、20の場合を解析し、これらの結果をベンチマーク解析とし、本構成則の結果と比較して図4-7-4から図4-7-7に示す。横軸に介在相の体積分率、縦軸には複合材料の平均応力により無次元化された母相または介在相の応力をとる。 $E_1/E_2 < 1$ の場合の図で上側の二つの曲線は無次元化した介在相応力の結果を示し、下側の二つの線は無次元化した母相応力の結果を示す。 $E_1/E_2 > 1$ の場合の図では、上側の二つの曲線は無次元化した母相応力の結果を示し、下の二つの曲線は無次元化した介在相応力の結果を示す。

これら四つの図において、SCCモデルの応力分散則の式(4-4-1-22)、(4-4-1-23)で計算した実線の結果と、EMTモデルの応力分散則式(4-4-3-2)、(4-4-3-3)で計算した点線の結果とシンボルで表したベンチマークの結果を示す。体積分率が0においては、母相と介在相の剛性比に拘わらず、EMTモデルとSCCモデルの応力分散則で計算した両結果は同じ値に収束する。体積分率が10%以下の場合、EMTモデルとSCCモデルの応力分散則で計算した結果は共にベンチマークの結果に近く、低体積分率の場合に二つのモデルの応力分散則が有効であることを示している。

SCCモデルの応力分散式(4-4-3-2)、(4-4-3-3)より計算した結果は、全領域に互ってベンチマーク結果と満足すべき一致が得られている。一方、EMTモデルの介在相応力はさ程ではないが、母相応力は介在相の体積分率が30%を超過する辺りからベンチマーク値

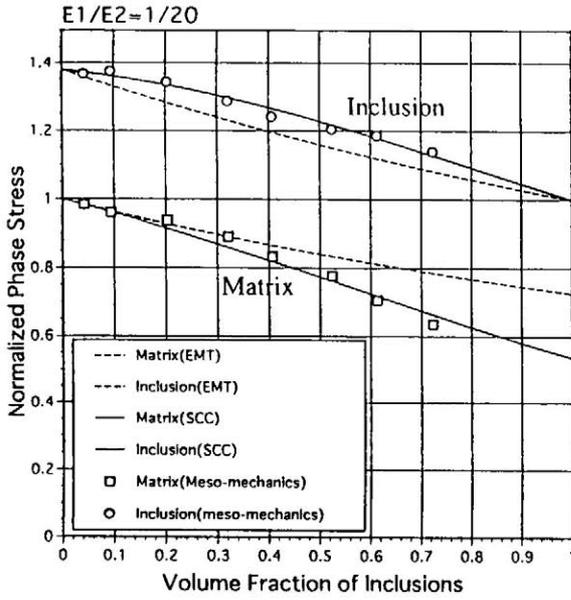


図4-7-4 母相と介在相の材料比が $E_1/E_2 = 1/20$ 場合の応力分布

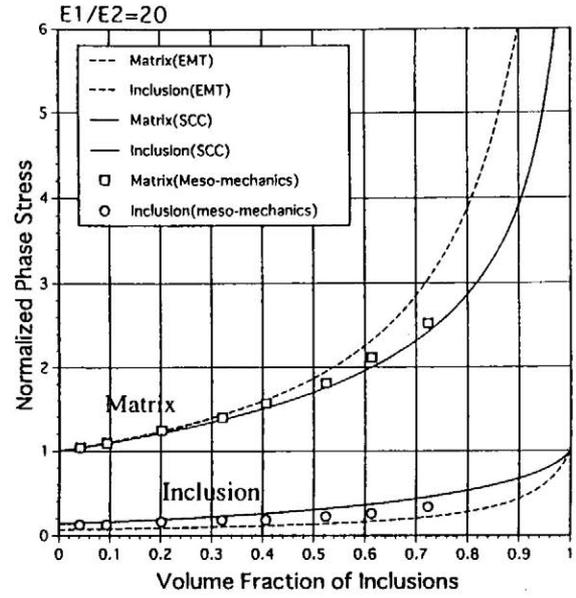


図4-7-5 母相と介在相の材料比が $E_1/E_2 = 20$ 場合の応力分布

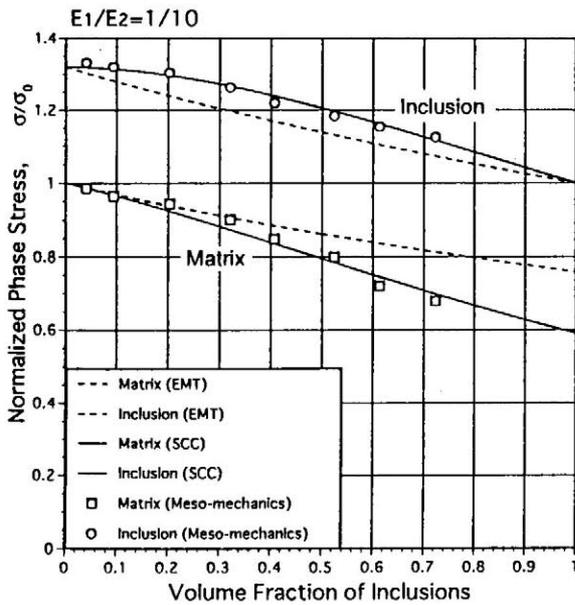


図4-7-6 母相と介在相の材料比が $E_1/E_2 = 1/10$ 場合の応力分布

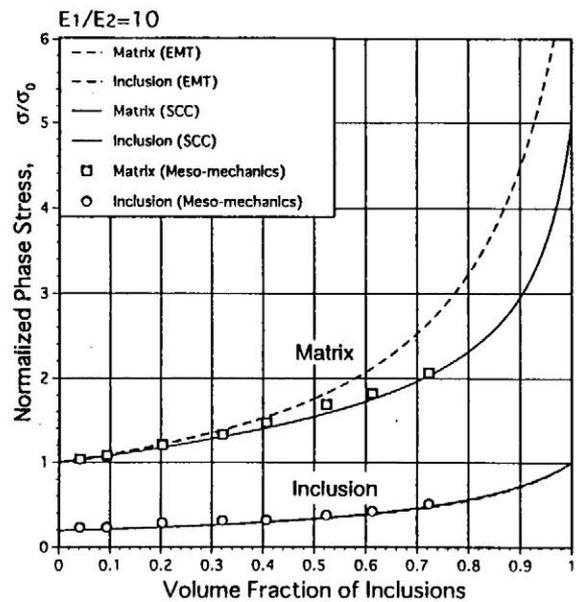


図4-7-7 母相と介在相の材料比が $E_1/E_2 = 10$ 場合の応力分布

及びSCCモデルから離れて行き、高体積分率においては大きくそれる傾向を示している。 $f \rightarrow 1$ の時のSCCモデルの収束値が有限であり、ベンチマーク結果との一致においてEMTモデルの結果よりも正しい極限值を指し示していると思われる。

4.7.4 複合材料の巨視的な挙動についての検討

次に、本章に示した応力分散則に基づく複合材料の構成則について検討する。二相複合材料の場合、Reuss (付録4-1) と Voigt (付録4-2) の線形混合則および、変分原理に基づく Hashin-Shtrikman (付録4-3) の Lower Bound と Higher Bound の式がよく利用参照されている。Reussモデルは母相と介在相の応力が等しいとするモデルであり、母相が介在相に比べて非常に低い剛性を持つ場合に適している。一方、Voigtモデルは母相と介在相の歪みが等しいとするモデルであり、母相の剛性が介在相に比して非常に高い場合に適する。

図4-7-8と図4-7-9は、母相と介在相のヤング率比がそれぞれ20および1/20の場合について、全ての体積分率領域に亘って複合材料の巨視的な縦弾性係数の結果を示す。ReussとVoigtモデルはHashin-Shtrikmanの上下限の外に位置していることが認められ、この程度の剛性比ではReussとVoigt混合則の適用は疑問となる。Eshelby (付録4-4) のモデルは体積分率が50%を越える辺りからVoigtモデルからも大きく離れ、適用範囲はかなり制限されると考えるべきである。

相応力の場合と同様に、低体積分率領域では、EMTモデルの式(4-3-3-7)～式(4-3-3-10)で得た結果は、SCCモデルの式(4-4-2-8)～式(4-4-2-11)で得た結果と同様にベンチマーク値に近いが、体積分率が高くなるに従って一致しなくなる。一方、SCCモデルは全領域に亘りベンチマーク値とよく一致していると言える。また、 $E_1/E_2=20$ の時はEMTモデルは数値的にHashin-Shtrikmanの上限とほぼ一致していることは興味深い。

図4-7-9の左右を反転させ、図4-7-8に重ね合わせればReuss、Voigtモデル、Hashin-Shtrikmanの上、下限値はそれぞれ一致することが分かる。これは、これらのモデルが母相と介在相の区別をしない理由による。粒子の形を考慮し、母相と介在相を区別する本モデルの結果は非対称となる。特に剛性比が極端なこれらの場合、SCCモデルが粒子分散メゾメカニクス・モデルであるベンチマークとよく一致する。これらの領域では弾性であっても、複合体の微視的な幾何学的条件が複合体の巨視的材料挙動に無関係でなく、それらを顕著に支配することが分かる。

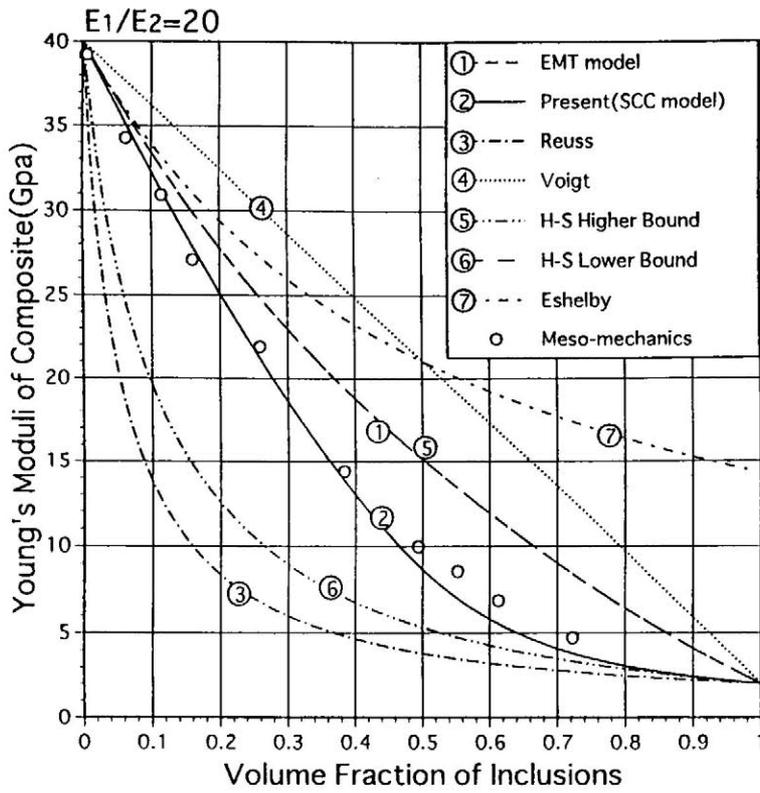


図4-7-8 母相と粒子の剛性比が $E_1/E_2=20$ 場合の複合材料巨視的なヤング率

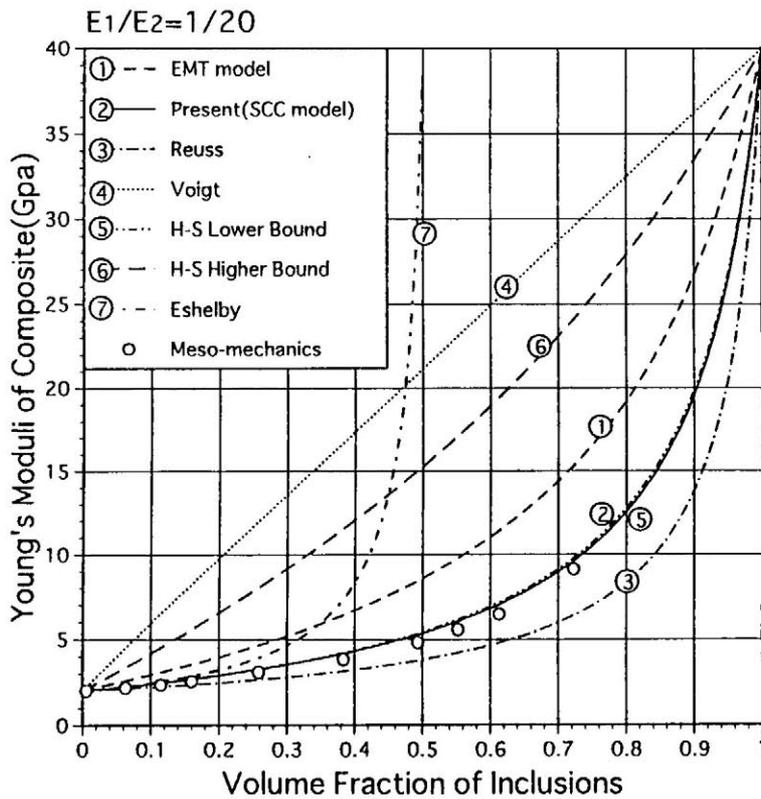


図4-7-9 母相と粒子の剛性比が $E_1/E_2=1/20$ 場合の複合材料巨視的なヤング率

複合材料の相材料の剛性比が巨視的構成則の精度に与える影響を観察するため、母相と介在相のヤング率の比が20、5、2およびそれらの逆数である場合に、本モデルの解析結果をベンチマーク値と比較する。介在物の体積分率が低い場合（11.5%）、および高い場合（72.3%）の二ケースについて、剛性比が1/20から20に互り、巨視的縦弾性係数の結果をそれぞれ図4-7-10と図4-7-11に示す。両図において、両相の材料係数が離れるに従い、各モデルの精度が低下する様子が分かる。ReussとVoigtの結果はベンチマーク値から最も離れている。

図4-7-10の低体積分率の場合には、解析した全剛性比の領域に互ってEMTモデルの式(4-3-3-7)～式(4-3-3-10)で得た結果とSCCモデルの式(4-4-2-8)～式(4-4-2-11)で得た結果はほぼ一致しており、ベンチマーク値ともよい一致を示している。また、三層の粒子構造を持つKernerモデル（付録4-5）も全域に互ってまずよい結果を得ている。この結果よりこの程度の体積分率では、母相/介在相の剛性比が低い場合はVoigtは不適當であるがReussは適していること、剛性比が高い場合はその逆であることが判明する。

図4-7-11に示す介在物の体積分率が高い場合には、各モデルの結果は母相と介在相の弾性係数が隔たるに従って大きく離れるが、SCCモデルの結果は全範に互ってベンチマーク結果と比較的よく一致している。

以上の結果から明らかなように、このような解析理論の数値的な検証を行う場合、母相と介在相の材料係数の差が十分大きいことと、粒子の体積分率が十分高いことが、理論解析の有効性を証明するために要求される。

4.7.5 粒子が空孔と剛体の場合の複合材料巨視的な挙動についての検討

以上に示したのは、母相と介在相のヤング率の比が20倍以下の場合の結果である。介在相の剛性が両極の場合、即ち介在物が空孔と剛体の場合の本モデルの精度についても検討する。解析上、空孔と剛体の介在相を模擬するために、ヤング率は母相と比べて十分かけ離れた数値とし、それぞれ母相の 10^{-20} 倍および 10^{20} 倍と設定した。図4-7-12は、介在相が空孔の場合の空孔率に対する巨視的縦弾性係数の結果を示し、図4-7-13は介在相が剛体の場合の結果を示す。これらの両極の状態においても、体積分率が充分低い場合、EMTモデルの式(4-3-3-7)～式(4-3-3-10)で得た結果はベンチマーク結果と近いが、それ以上では離れる。SCCモデルの式(4-4-2-8)～式(4-4-2-11)で得た結果は、全ての体積分率の範囲でベンチマーク結果と、図4-7-8および図4-7-9と同程度のよい一致

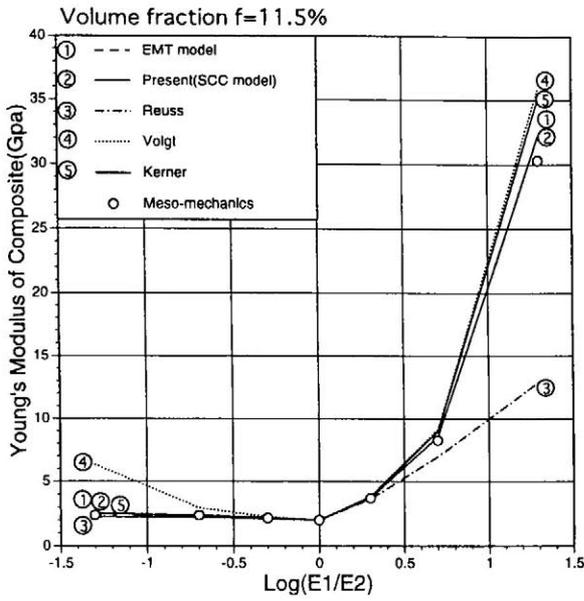


図4-7-10 粒子の体積分率が $f=0.115$ 場合の複合材料巨視的なヤング率

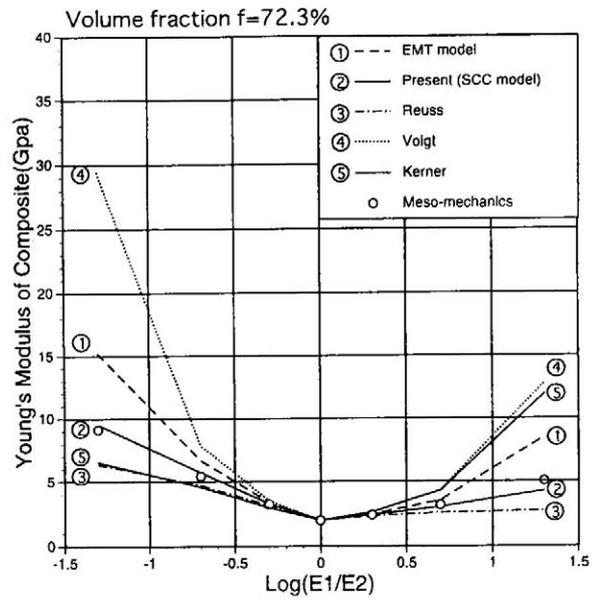


図4-7-11 粒子の体積分率が $f=0.723$ 複合材料巨視的なヤング率

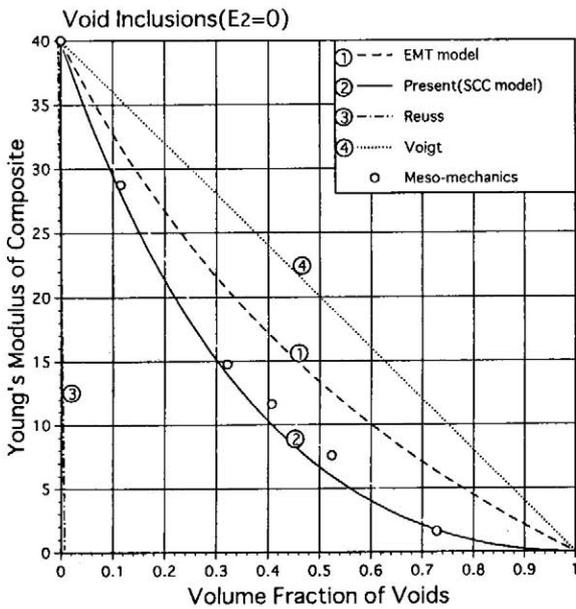


図4-7-12 粒子が空孔の場合の複合材料巨視的なヤング率

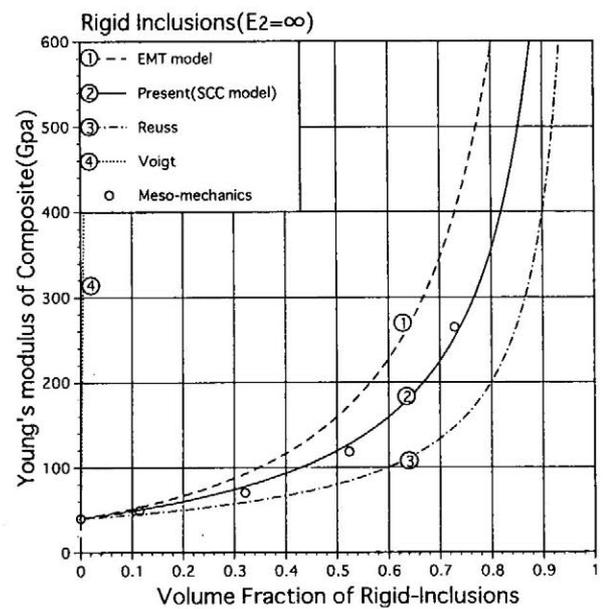


図4-7-13 粒子が剛体の場合の複合材料巨視的なヤング率

ている。

§ 4.8 結言

粒子分散複合材料の巨視的構成則に関する理論モデルの構築とメゾメカニクス有限要素解析を行い、以下に示す結論を得た。

(1) Eshelbyの等価粒子理論とMori-Tanakaの混合則に基づき、閉鎖形で表されるEMTモデルをテンソル形式で定式化した。このモデルにより算定した巨視的な縦弾性係数は、粒子の体積分率が低い場合、もしくは母相と介在相の弾性係数の差が小さい場合、即ち微視的に等価非均質性が低い場合にのみ有効である。既出の粒子分散材料の構成則の多くは、それらの基本的仮定においてEMTモデルと同じである。

(2) 本論文で提案した、粒子の外領域のコンプライアンスを考慮するSCCモデルは、等価粒子理論を平均場に適用するSelf-consistent形の構成則であり。粒子の体積分率が0~100%の領域と、介在相が空孔から剛体まで、即ち介在相と母相の材料剛性比が0~ ∞ の全領域において信頼できる精度を与えるモデルである。

(3) 複合材料の構成則モデルの検証においては、(1)に述べた等価非均質性が比較的高い状態で理論解析の有効性を証明できることが要求される。

(4) 等価非均質性が比較的高い状態では、弾性であっても複合体の微視的な幾何学的条件が複合体の巨視的材料挙動を支配すること実が確認され、しかも非線形域ではこの効果は一層強調される。

(5) 本論文のEMTモデルとSCCモデルは、粒子間の応力の局部的干渉を無視する場合には増分理論による弾塑性問題にも適用できる。

参考文献

- (4.1) Shigetoshi Araki and Kenji Saito, "Micromechanical Analysis of Particle-Reinforced Composites with Interfacial Phenomena(1st Report, Modeling and Analysis of Particle Reinforced Composite by Applying Stereology)", 日本機会学会論文集 (A編)、61巻 594号 (1996-2) ,pp.23-29
- (4.2) Shigetoshi Araki and Kenji Saito, "Micromechanical Analysis of Particle-Reinforced Composites with Interfacial Phenomena (2nd Report, Evaluation of Mechanical Properties

- of Particle Reinforced Composite) ", 日本機学会論文集 (A編)、61 卷 596 号 (1996-4) ,pp.47-54
- (4.3) Yutaka Arimitsu, Kazumi Nishioka, Toyomitsu Sendā, "A study of saint-venant's principle for composite materials by means of internal stress fields", Journal of Applied Mechanicals, March 1995, Vol.62,pp.53-58
- (4.4) R.D.Bhargava and H.C.Radhakrishna, "Elliptic inclusion in orthotropic medium", Journal of the physical society of japan, Vol.19, No.3 March, 1964
- (4.5) B.Budiansky, "On the elastic moduli of some heterogeneous materials", Mech.Phys.Solids, Vol.13, pp.223-227, 1965. Pergamon Press Ltd.
- (4.6) Bernard Budiansky, "Elastic moduli of a cracked solid",Int.J.Solids structures, Vol.12, pp.81-97, 1976, Pergamon Press.
- (4.7) P.G.Charalambides and R.M.Mcmeeking, "Finite element method simulation of crack propagation in a brittle microcracking solid", Mechanics of materials(North-Holland), Vol.6, p71-87, 1987
- (4.8) Richard M.CHRISTENSEN, "Effective properties of composite materials containing voids", Proc.R.Soc.Lond.A(1993)440,pp.461-473
- (4.9) P.R.Dawson, A.Needleman, S.Suresh, "Issues in the finite element modeling of polyphase plasticity", Materials science and engineering (Switzerland), Vol.A175, no.1-2, pp.43-48, Feb.1994
- (4.10) A.P.Divecha, S.G.Fishman and S.D.Karmarkar, "Silicon carbide reinforced aluminum a formable composite", Journal of metals, pp.12-17, Sept. 1981
- (4.11) B.I.Edelson and W.M.Baldwin, JR., "The effect of second phases on the mechanical properties of alloys", Transactions of the ASME, Vol.55, 1962
- (4.12) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proc. of the Royal Society of London, Series A, Vol.241A, pp.376~396, 1957.
- (4.13) Mamtimin GENI, Masanori KIKUCHI and Kazumi HIRANO, "Damage Analysis of particulate-reinforced aluminum alloys", 日本機学会論文集 (A編)、61 卷 590 号 (1995-10) ,pp.164-171
- (4.14) Moriaki Goya, Yoshikasu Higa, Toshiyasu Sueyoshi, Kiyohiro Miyagi, "FEM Analysis of Indentation of Porous Materials by a Rigid Sphere", 日本機学会材料力学部門講演論文

集、Vol. A, pp.255-256, 1996,10,3-4

- (4.15) Zvi Hashin, "Large isotropic elastic deformation of composites and porous media", Int. J. Solids Structures, Vol.21, No.7, pp.711-720, 1985
- (4.16) Zvi Hashin and S.Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol.10, No.7, pp.342-352, 1962
- (4.17) Z.Hashin, S.Shtrikman, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials",J. Mech. Phys. Solids, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- (4.18) Z. Hashin, "On Elastic Behaviour of Fibre Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry", J. Mech. Phys. Solids, 1965, Vol.13, pp.119-134
- (4.19) Zvi Hashin, "Analysis of composite materials2, Journal of Applied Mechanics, Vol.50, pp.481-505, September 1983
- (4.20) Zvi Hashin, "Analysis of cracked laminates: a variational approach",Mechanics of materials, Vol.4, pp.121-136, 1985
- (4.21) Z. Hashin, "Analysis of Composite Materials-A Survey", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, Vol.50, pp.481-505, Sept. 1985.
- (4.22) A. V. Hershey, Dahlgren, VA. "The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals", Journal of Applied Mechanics, Sept., 1954, pp.236-240
- (4.23) R. Hill, "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials", J. Mech. Phys. Solids, 1964, pp.199-212
- (4.24) R. Hill, " Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Plastic Polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, pp.89-101, 1965. Pergamon Press Ltd.
- (4.25) R.Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials", J.Mech.Phys.Solids,1965, Vol.13,pp.213-222
- (4.26) Y.Huang, K.X.Hu, X.Wei and A.Chandra, "A generalized self-consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions", J.Mech.Phys.Solids,1994, Vol.42,No.3,pp.491-504
- (4.27) Y.Huang, K.X.Hu, "A generalized self-consistent mechanics method for solids containing elliptical inclusions", Transactions of the ASME, Vol.62, September 1995, pp.566-572
- (4.28) Y.Huang, K.X.Hu and A.Chandra, "Stiffness evaluation for solids containing dilute distributions of inclusions and microcracks", Journal of Applied Mechanicals, March 1995,

Vol.62,pp.71-77

- (4.29) J.Llorca, A.Needleman, S.Suresh, "An analysis of the effects of matrix void growth on deformation and ductility in metal-ceramic composites", *Acta metall. mater.(USA)*, Vol.39, no.10, p2317-2335, 1991
- (4.30) S.V.Kamat, J.P.Hirth and R.Mehrabian, "Mechanical properties of particulate-reinforced aluminum-matrix composites", *Acta metall.* Vol.37, No.9, pp2395-2402, 1989
- (4.31) METIN KARAYAKA and HUSEYIN SEHITOGLU, "Thermomechanical fatigue of particulate-reinforced aluminum 2xxx-T4", *Metallurgical transactions A*, Vol.22A, pp.697-706, March. 1991
- (4.32) E.H.Kerner, "The elastic and thermo-elastic properties of composite media", *Proc. Phys. Soc.* Lxix,8-B
- (4.33) E.Kroner, "Zur plastischen verformung des vielkristalls", *Acta metallurgica*, Vol.9, February, 1961
- (4.34) D.Kwon and R.J.Asaro, "A study of void nucleation, growth, and coalescence in spheroidized 1518 steel", *Metallurgical transactions A*, Vol.21A, pp.117-134, Jan.1990
- (4.35) A.E.H. Love, "Theory of elasticity", Cambridge University Press, 1927
- (4.36) M.P. Lutz and R.W. Zimmerman, "Effect of the Interphase Zone on the Bulk Modulus of a Particulate Composite", *Journal of Applied Mechanics*, Dec.1996, Vol.63, pp.855-861
- (4.37) T.Mori, K.Tanaka "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta, Metallurgica*, Vol.21, pp. 571-574, May 1973.
- (4.38) Z.A.Moschovidis, T.Mura, "Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method", *Journal of applied mechanics*, *Transactions of the ASME*, p847-852, December 1975
- (4.39) T. Mura, P.C. Cheng "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", *J. of Applied Mechanics*, *Transaction of ASME*, pp.591-594, Dec. 1977.
- (4.40) T.Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
- (4.41) Hasuhide Nakayama, Shigeru Nagaki, Junya Fujimoto, "Plastic Deformation and Evaluation of Local Damage State of Perforated Sheets with Randomly Distributed Holes", *日本機学会論文集 (A編)*、61 卷 604 号 (1996-12) , pp.133-139
- (4.42) A. Needleman, " A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion debonding", *J. of*

Applied Mechanics, Transaction of ASME, Vol.54, pp.525-531, Sept. 1987.

- (4.43) S.R.Nutt and J.M.Duva, "A failure mechanism in Al-SiC composites", Scripta metallurgica, Vol.20, pp.1055-1058, 1986
- (4.45) Reuss, Berücksichtigung der Elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, Z. angew. Math, Mech.,10, pp.266-274, 1930.
- (4.46) Y.-L.Shen, M.Finot, A.Needleman, S.Suresh, "Effective elastic response of two-phase composites", Acta metall. mater.(USA), Vol.42, no.1, p77-97, 1994
- (4.47) Naoki Takano, Masaru Zako, "Microscopic simulation technique for composite materials using the homogenization method based on fixed grid", 日本機械学会論文集 (A編), Vol.61 (A), No.583, 平成7年3月
- (4.48) Naoki Takano, Masaru Zako and Seiichiro Sakata, "Three-dimensional microstructural design of woven fabric composite materials by the homogenization method", 日本機械学会論文集 (A編), Vol.61(A), No.585, 平成7年5月
- (4.49) Naoki Takano, Masaru Zako, "Design procedure for structures using composites based on micro-stress evaluation", 40th CON-EX (強化プラスチック協会), 1995-10
- (4.50) Naoki Takano, Masaru Zako, "Nonlinear analysis of woven fabric composite materials by homogenization method considering microscopic failure", 第24回、FRPシンポジウム講演論文集
- (4.51) Naoki Takano, Masaru Zako, "Analysis of beam-like three-dimensional composite structures by the homogenization method", Proceedings of the thirty-eighth japan congress on materials research, The society of materials science, Japan, Kyoto, 1995
- (4.52) Naoki Takano, Masaru Zako, "Stress analysis of sandwich plate by the homogenization method", Materials science research international, Vol.1, No.2, pp.82-88, 1995
- (4.53) K.Tanaka, T.Mori, "The hardening of crystals by non-deforming particles and fibres", Acta metall. mater.(USA), Vol.18, p931-941, August 1970
- (4.54) G.P.Tandon,G.J.Weng, "A Theory of Particle-Reinforced Plasticity", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, Vol.55, pp.126-135, March 1986.
- (4.55) Minoru Taya and Tsu-Wei Chou, "On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: An application to a hybrid composite", Int. J. Solids Structures Vol.17, pp.553-563, 1981

- (4.56) Keiishiro Tohgo, Tsu-Wei Chou, "Center for composite materials technical report", CCM Report 91-45, (Center for composite materials; Composites manufacturing science laboratory, College of engineering, University of Delaware)
- (4.57) Keiichiro TOHGO, Tetsuya TAGAWA, and Akio OTSUKA, "Analysis of elastic and elastic-plastic deformation behavior of two-phase sintered materials", 日本機械学会論文集 (A編), Vol.53, No.494, 昭 62-10, pp.153-159, 1991.3
- (4.58) Keiichiro Tohgo, G.J.Weng, "A progressive damage mechanics in particle-reinforced metal-matrix composites under high triaxial tension", Journal of engineering materials and technology, Transactions of the ASME, Vol.116, July 1994
- (4.59) Keiichiro Tohgo, Naomori Suzuki, Hitoshi Ishii, "Influence of damage evolution on a crack-tip field in particulate-reinforced composite", The ninth technical conference of the american society for composites, (University of Delaware), Sep.1994
- (4.60) Keiichiro TOGHO, Yoshihide OKAMOTO and Akio OTSUKA, "The behavior of ductile crack initiation from a notch and a crack under model I loading", JSME International Journal, Series I, Vol.31, No.3, 1988
- (4.61) Keiishiro TOGHO, Manabu SAKAGUCHI and Hitoshi ISHII, "Applicability of fracture mechanics in strength evaluation of functionally graded materials", 日本機械学会論文集 (A編)、61 卷 592 号 (1995-12) ,pp.23-31
- (4.62) K.Wakashima, "Macroscopic mechanical properties of composite materials, Part I. Theoretical basis, Part II.Elastic moduli and thermal expansion coefficients", 日本複合材料学会誌、 Part I. pp.119-125, Vol.2-3, 1976, Part II. pp.161-167, Vol.2-4, 1976
- (4.63) K.Wakashima, T. Hirano and M. Niino, "Functionally gradient materials (FGM) architecture: a new type of ceramic-metal assemblage designed for hot structural components", Proc. ESA Symp.: ' Space applications of advanced structural materials", ESTEC, Noordwijk(NL), 21-23 March 1990
- (4.64) G.J. Weng, "The Theoretical Connection between Mori-Tanaka's Theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole Bounds", Int. J. Engng Sci. Vol.28, No.11, pp.1111-1120, 1990.
- (4.65) Y.D. Wu, M.Nakagaki, H.Fukushima,"Study of Elastoplastic Constitutive Relation in Particles Dispersed Material",Proc. Plasticity95, pp.747-750,1995.
- (4.66) Y.H. Zhao, G.P. Tandon, and G.J. Weng, "Elastic Moduli for a Class of Porous Materials",

Acta Mechanica 76, pp.105-130, 1989

- (4.67) Z.Zhong and S.A. Meguid, "On the Eigenstrain Problem of a Spherical Inclusion with an Imperfectly Bonded Interface", Journal of Applied Mechanics, Dec.1996, Vol.63, pp.877-883
- (4.68) Voigt, Lehrbuch. der Kristallphysik, B.G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1910.
- (4.69) 東郷敬一郎, 坂口学, 石井仁, "傾斜機能材料の強度評価における破壊力学の適用性に関する研究", 日本機械学会論文集 (A編), 61巻592号, pp.23-31, 1995.
- (4.70) 中垣ほか, 第8回破壊力シンポジウム講演論文集, pp.165-169, 1995.
- (4.71) 呉亜東, 中垣通彦, "粒子分散複合材料の構成則とその評価", 日本機械学会, M&M96, No.96-10, pp.279-280, 1996.
- (4.72) 坂木 (Tsuneaki Sakaki, Satoru Takahashi), "軸対称の固有歪みによって発生する内部応力の計算法", 日本機械学会 [No.900-86] 材料力学講演会論文集 (90-11-28,29), 豊橋市

付録:

従来の理論により、求めた複合材料の平均体積弾性係数とせん断弾性係数

(4-1) Reuss の構成則

$$\bar{K} = K_1 K_2 / [(1-f) K_2 + f K_1]$$

$$\bar{G} = G_1 G_2 / [(1-f) G_2 + f G_1]$$

(4-2) Voigt' の構成則

$$\bar{K} = (1-f) K_1 + f K_2$$

$$\bar{G} = (1-f) G_1 + f G_2$$

(4-3) Hashin-Shtrikman の上限値、下限値

Hashin-Shtrikman の上限と下限を次のように設定した。

$$\bar{K}_m = K_1 + \frac{f}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-f)}{3K_1 + 4G_1}}$$

$$\bar{K}_n = K_2 + \frac{1-f}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3f}{3K_2 + 4G_2}}$$

ここで、 \bar{K}_m と \bar{K}_n は複合材料の体積弾性係数の上下限值となる。

$$\bar{G}_m = G_1 + \frac{f}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)(1-f)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}}$$

$$\bar{G}_n = G_2 + \frac{1-f}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)f}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}}$$

ここで、 \bar{G}_m と \bar{G}_n は複合材料のせん断弾性係数の上下限值となる。

(4.4) 球状粒子分散複合材料における Eshelby の構成則

$$\bar{K} = \frac{K_1}{1 + \frac{f(K_1 - K_2)}{K_1 + \alpha(K_2 - K_1)}}$$

$$\bar{G} = \frac{G_1}{1 + \frac{f(G_1 - G_2)}{G_1 + \beta(G_2 - G_1)}}$$

α, β は母相材料の Eshelby テンソルであり、球状粒子分散複合材料の場合、次のように与えられる。

$$\alpha = \frac{1 + \gamma_1}{3(1 - \gamma_1)}, \quad \beta = \frac{8 - 10\gamma_1}{15(1 - \gamma_1)}$$

(4.5) 球状粒子分散複合材料における Kerner の構成則

$$\bar{K} = \frac{(1-f)K_1 / (3K_1 + 4G_1) + fK_2 / (3K_2 + 4G_2)}{(1-f) / (3K_1 + 4G_1) + f / (3K_2 + 4G_2)}$$

$$\bar{G} = G_1 \frac{fG_2 / \{(7 - 5\gamma_1)G_1 + (8 - 10\gamma_1)G_2\} + (1-f) / \{15(1 - \gamma_1)\}}{fG_1 / \{(7 - 5\gamma_1)G_1 + (8 - 10\gamma_1)G_2\} + (1-f) / \{15(1 - \gamma_1)\}}$$

第5章

多粒子塑性問題 (LRM法)

要 旨

組成材料の物性値が著しく異なる複合材料は、微視的な構造尺度において非均質性を持ち、それが巨視的な物性に対して顕著な影響を与える。このような複合材料の正確な挙動を知るため、今まで多くの研究者が様々な方法で粒子分散複合材料の構成則に関して研究を行って来ており、いくつかの構成則理論が文献概観の所で既に紹介されている。それらの中で複合材料の介在相の形を考慮しない混合則、Voigt、ReussやHashin-Shtrikmanの理論は弾性問題に対して理論解析の上下限としてよく知られている。Eshelbyの等価介在物理論が紹介されて以来、その数学的な扱い易さから粒子分散複合材料の粒子モデルとしてよく使用されている。それらの中に、Eshelbyの等価介在物理論とMori-Tanakaの平均場混合則に基づいた、Hill、Wakashima、Tandon-Weng、Tohgoらの巨視的な構成則モデルがある。これらのモデルを総称してEMTモデルと呼ぶと、EMTモデルは応力と歪みを相内で平均化し、その上で巨視的な視点から混合則と構成則を求めるモデルといえる。前章に紹介されたモデルもEMTモデルに属する。いくつかの例では弾塑性問題に対しても、相内では均質で応力が一様として取り扱われている。しかし一般に、応力により剛性が変化する弾塑性問題等においては、微視的な非均質性と粒子間の応力干渉のため相内に局所的な非均質化が起き、この時、相材料の平均応力と平均歪みとの関係は均質材料の場合の関係と同じとはならず、特に母相に塑性変形が起きる場合には複合材料の巨視的な特性は大きく影響を受ける。このように相平均された混合則理論に基づく構成則は、実際の複合材料の弾塑性挙動と異なる事が予想される。

この問題につき、本章では応力分布を表現する事により粒子間の応力干渉を取り扱い、前章にて紹介した弾性粒子分散モデルの上に粒子分散複合材料の局所性を表現する局所剛性法、即ちLRM法 (Localized Rigidity Method) を提案して弾塑性構成則を構築した。

§ 5.1 複合材料局所性の影響

粒子分散複合材料中では、一般に母相と介在相材料が不規則に配置されていて応力と歪みの分布も規則性に乏しい。特に塑性の場合に材料係数は応力に依存するので、同じ材料の中でも場所によって特性が異なる可能性が高い。本節ではまず、その局所性の事実とその影響をメゾ・メカニクス解析により観察する。

5.1.1 複合材料の平均応力と平均歪みの再定義

先ず複合材料の各材料相領域を細かく分割する。例えば、母相領域を図5-1-1のように多数の領域に分解し、その中の一つの微小領域中の応力と歪みを均一と仮定し、応力と歪みの関係は §4 に示したように平均的に均質材料に等しいと考える。陰影にて示す微小領域は同じ応力と歪みを有する事を表し、領域 i にて表すとすると、領域 i の母相の応力と歪みは次式を満足する。

$$d\mathbf{g}_i^1 = \mathbf{\Gamma}_i^1 : d\boldsymbol{\sigma}_i^1 \quad (5-1-1-1)$$

添字 1 は母相に関する量であり、 $\mathbf{\Gamma}_i^1$ は微小領域中の材料の弾塑性コンプライアンスを示す。上式の方法係数は応力の履歴に依存するため、応力と歪みは全て増分の形で表す。全体の複合体に対する領域 i ($i=1, 2, \dots, n$) の体積分率は Δc_i で示せば、粒子の体積分率との間に次式の関係がある。

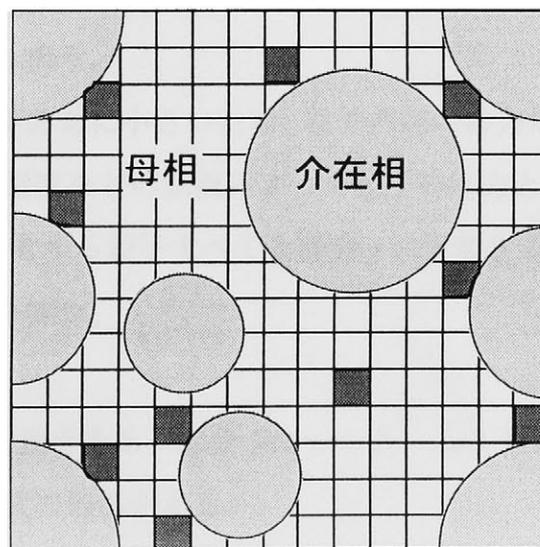


図 5-1-1 母相領域の分割

$$\sum_{i=1}^n \Delta c_i = 1-f \quad (5-1-1-2)$$

ここで、 f は複合体にあるすべての粒子の体積分率であり、 $1-f$ は母相の体積分率である。母相の全領域を亘って平均した応力と歪みで次式に与えられる。

$$d\sigma_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_i^j \quad (5-1-1-3)$$

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\varepsilon_i^j \quad (5-1-1-4)$$

式 (5-1-1-1) を式 (5-1-1-4) に代入すれば、次式を得る。

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i \Gamma_i^j : d\sigma_i^j \quad (5-1-1-5)$$

これらの式を見ると、母相の平均応力と平均歪みの関係を簡単に求めることができず、まず領域 i の体積分率 Δc_i 、応力 $d\sigma_i^j$ 、歪み $d\varepsilon_i^j$ 間の関係を明らかにする必要がある。

粒子を含まない均質母材或いは弾性の場合には、剛性テンソル Γ_i^j は定数であり、 $\Gamma_i^j = \Gamma_1$ とすればよく、式 (5-1-1-5) は

$$d\varepsilon_1 = \Gamma_1 : \left[\frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_i^j \right] \quad (5-1-1-6)$$

となる。その場合、式 (5-1-1-3) と式 (5-1-1-6) により、次式の自明の関係が得られる。

$$d\varepsilon_1 = \Gamma_1 : d\sigma_1 \quad (5-1-1-7)$$

即ち、剛性テンソル Γ_i^j は定数である場合に限り、平均応力と平均歪みの関係は局所の応力状態に依存しない。第4章では相内の平均応力と平均歪みの関係は局所の応力状態に依存しない場合であり、本章は塑性問題即ち、平均応力と平均歪みの関係が局所の応力状態に依存する場合を取り扱う。

介在相粒子のサイズが非常に小さいため、粒子内部の応力は均一と仮定する。しかし、場所、剛性、配列方向、温度などの状況によって粒子の応力と歪みはそれぞれ異なる。ここで、同じ応力と歪みを有する粒子すべてを部分 j に分類する。部分 j に属する粒子の応力と歪みは次の関係式を持つ。

$$d\varepsilon_2^j = \Gamma_2^j : d\sigma_2^j \quad (5-1-1-8)$$

添字 2 は介在相に関する量である。部分 j ($j=1, 2, \dots, m$) に属するすべての粒子の体積分率を Δc_j で表わし、次式の関係がある。

$$\sum_{j=1}^m \Delta c_j = f \quad (5-1-1-9)$$

複合材料の全領域に亘って、粒子の平均応力と平均歪みは次式となる。

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\sigma_2^j \quad (5-1-1-10)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\varepsilon_2^j \quad (5-1-1-11)$$

母相と同じく、非線形問題の場合に複合材料中の粒子の平均応力と平均歪みの関係は局所の応力状態に依存する可能性が十分高く、局所の応力状態を考慮しなければならない。

5.1.2 メゾ・メカニクス解析で複合材料の応力と歪みの局所現象の検討

複合材料の微視的な局所非均質性が起きるメカニズムを詳しく知るため、有限要素法解析による粒子分散複合材料のメゾ・メカニクス・モデル解析を実施した。

二相からなる粒子分散複合材を考え、構成材料のヤング率 E とポアソン係数 γ をそれぞれ次のように仮定する。添え字1および2は、それぞれ母相と介在相を表す。

母相 (Epoxy) : $E_1 = 2 \text{ GPa}$ 、 $\gamma_1 = 0.35$ (5-1-2-1)

介在相 (Silica) : $E_2 = 40 \text{ GPa}$ 、 $\gamma_2 = 0.18$ (5-1-2-2)

母相となる材料は、次式の塑性歪硬化則に従うとする。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + h(\varepsilon_p)^n \quad (5-1-2-3)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ と ε_p は母相の相当応力と相当塑性歪みであり、塑性定数は、

降伏応力 $\sigma_y = 75.85 \text{ Mpa}$ 、

歪み硬化率 $h = 32.18 \text{ Mpa}$ 、

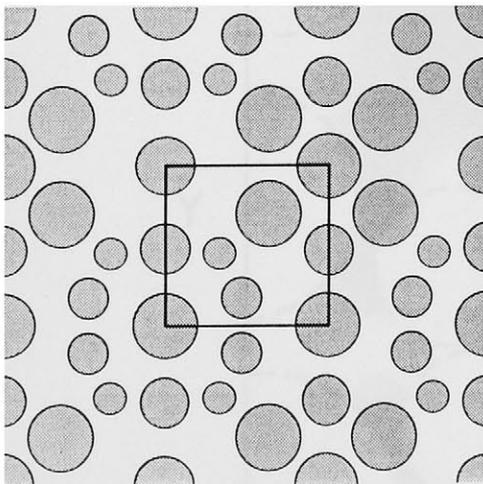


図5-1-2 粒子分散複合材料モデルと参照領域

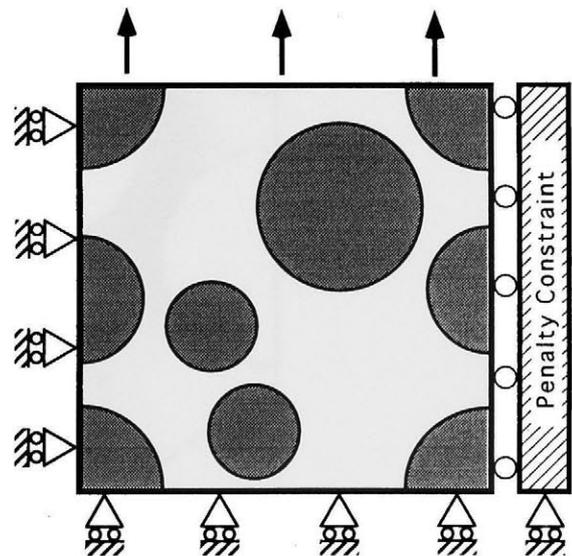


図5-1-3 有限要素法解析による参照領域拘束条件

歪み硬化指数 $n=0.26$ 、

であるとする。メゾ解析モデルとして図5-1-2に示す粒子分散領域を考える。次に図5-1-3のようにその一部をとり、解析参照領域として単軸引き張りの下に、対象、反対称、またはペナルティ拘束による境界条件を施して無限領域として有限要素解析を行った。単粒子の参照領域からなる正方配列の場合には強い異方性が現われるが、粒子をランダム配置した図5-1-3のような解析参照領域モデルはほとんど異方性を持たないパターンである事が示されている。単軸引張りを行う際、変位制御で荷重を与え、平面歪みの条件を加える。

母相内部で非均質に分布する応力と剛性を取り扱うために、母相内部の応力を多数のレベルに分割する事を考える。任意の応力レベル i に属する領域内では応力は一様であり均質であると考え、そこでの応力と歪みの増分は均質材料のもつ弾塑性構成則に従うとする。

$$d\sigma_i^i = D_{ep}^i : d\varepsilon_i^i \tag{5-1-2-4}$$

$$D_{ep}^i = E_i - \frac{E_i \frac{\partial \sigma^i}{\partial \sigma^i} \otimes \frac{\partial \sigma^i}{\partial \sigma^i} E_i}{H^i + \frac{\partial \sigma^i}{\partial \sigma^i} E_i \frac{\partial \sigma^i}{\partial \sigma^i}} \tag{5-1-2-5}$$

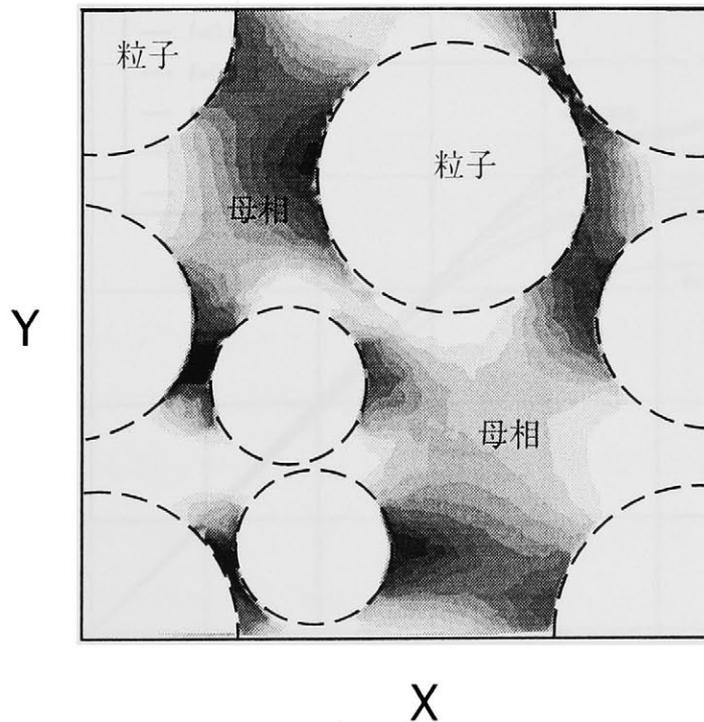


図5-1-4 母相の応力分布

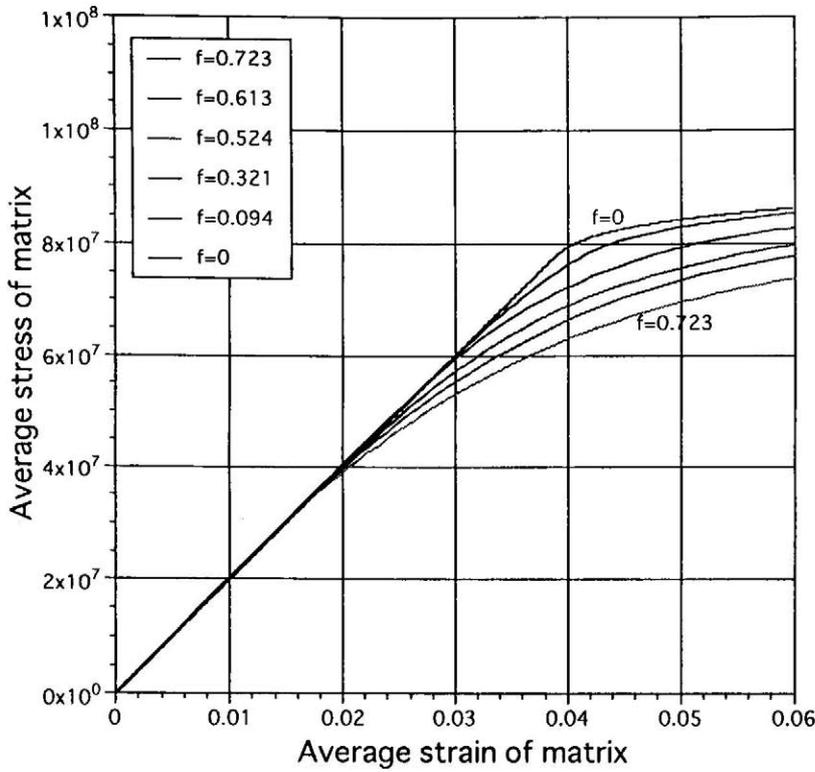


図 5-1-5 母相が塑性材料の場合、母相の平均応力と平均歪みの挙動

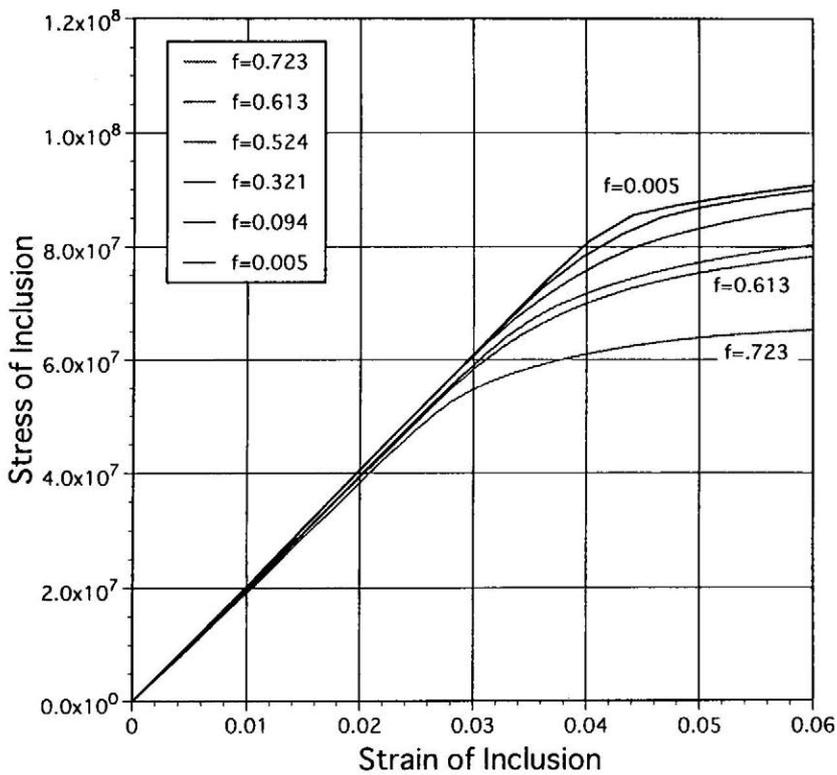


図 5-1-6 介在相が塑性材料の場合、介在相の平均応力と平均歪みの挙動

ここで、 E_i は母相材料の弾性テンソルであり、 σ_i は母相領域*i*の応力、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 H^i は歪み硬化率を表し、次のように定義する。

$$H^i = \frac{d\epsilon_p^i}{d\bar{\sigma}^i} \quad (5-1-2-6)$$

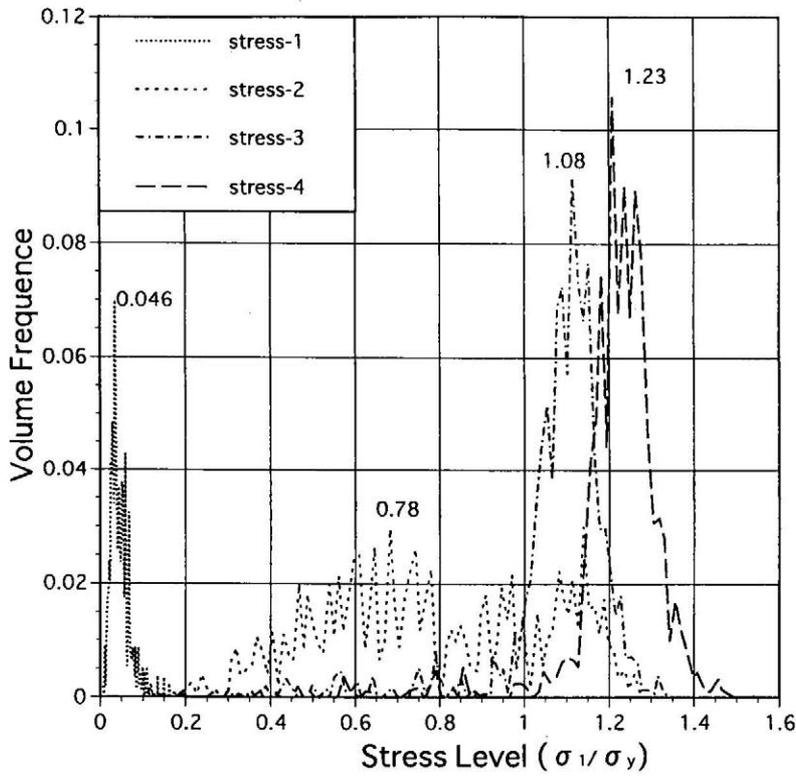
図5-1-4に一つの解析例について、粒子回りの母相域での相当応力分布を表すと無限遠方の外応力は一様に課されているが、干渉による局所的な応力の分布が現れており。また応力集中部と低応力部が、母相と介在相の界面付近に発生している事が分かる。塑性が起きると応力の局所性のゆえに、各相に塑性化による剛性の非均質性が生じ、そのため複合材料の各相の平均的な応力-歪み挙動は、均質材料のそれと比べて著しく異なる。

式 (5-1-1-3) と式 (5-1-1-4) に与えられる平均応力と平均歪みの定義に基づいてメゾ解析で得られた母相内での平均相当応力と平均相当歪の結果を、介在物の体積分率 f が0から0.72まで、六つの体積分率の場合の結果を図5-1-5に示す。粒子を含まない均質母相材料の応力-歪みの結果は最も高く、応力が降伏応力 $\sigma_y=75.85\text{Mpa}$ に至って初めて塑性が開始する。

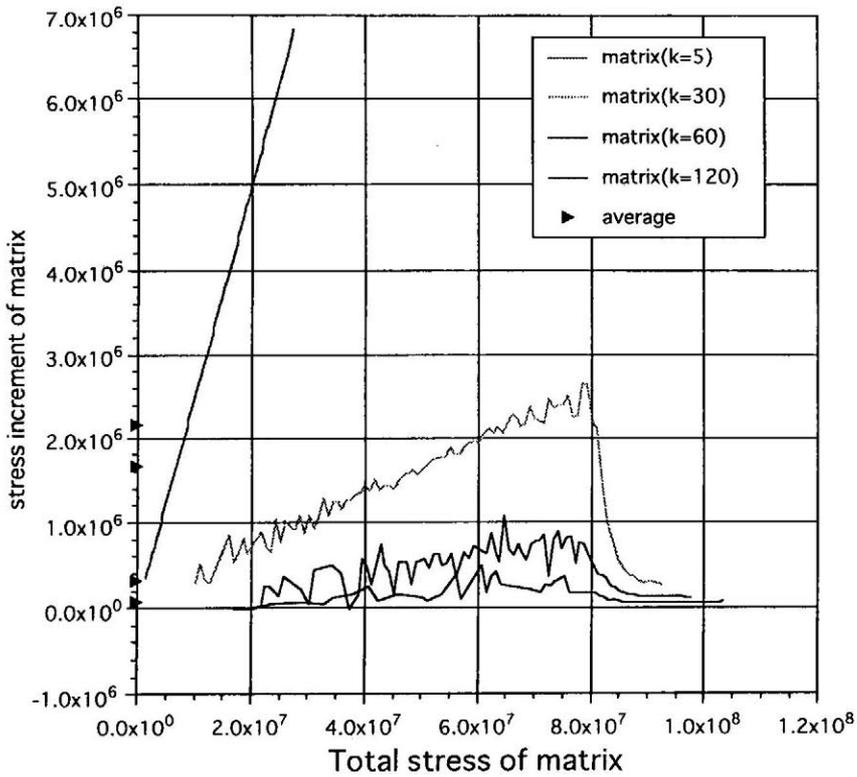
弾性の段階では、介在相の体積分率に関わらず母相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと同じ性質を表す。すなわち、母相の平均的な材料特性は応力分布に依存せずユニークである事が分かる。この事から、複合材料の弾性構成則では相材料を均質材料として取り扱うのが妥当であるという事がいえる。

一方、塑性段階では粒子の体積分率の程度により、塑性挙動は大きく違ってくる。平均応力が均質母相材料の降伏応力点よりずっと低い点においてすでに塑性が開始しており、粒子体積分率が高い複合材料の初期降伏は均質材料のそれよりかなり早く起きている。例えば $f=0.72$ の例では、母相材料の平均応力が均質材の降伏応力の約1/2以下において塑性が開始している。本複合材料の単軸引き張りについて言えば、母相材料の平均降伏強度は介在相の体積分率が増加するに伴い低下する事が分かる。従来のモデル理論では、各相での応力と歪みの平均弾塑性挙動を単一材料のそれと等しいと仮定しているが、図5-1-5に示す結果から明らかなように、複合体の各相材料を均質材料と同様に取り扱うのは、複合材料の本質の理解から大きく外れている。以上のように、複合体中の相材料の平均的な特性は応力分布により変化するといえる。

式 (5-1-2-1)、(5-1-2-2) に示している母相と介在相の材料係数を逆にする、即ち、母相が弾性材料、介在相が弾塑性材料である場合、介在相の体積分率が介在相内部の平均応力-歪みの関係に対する影響を検討する。

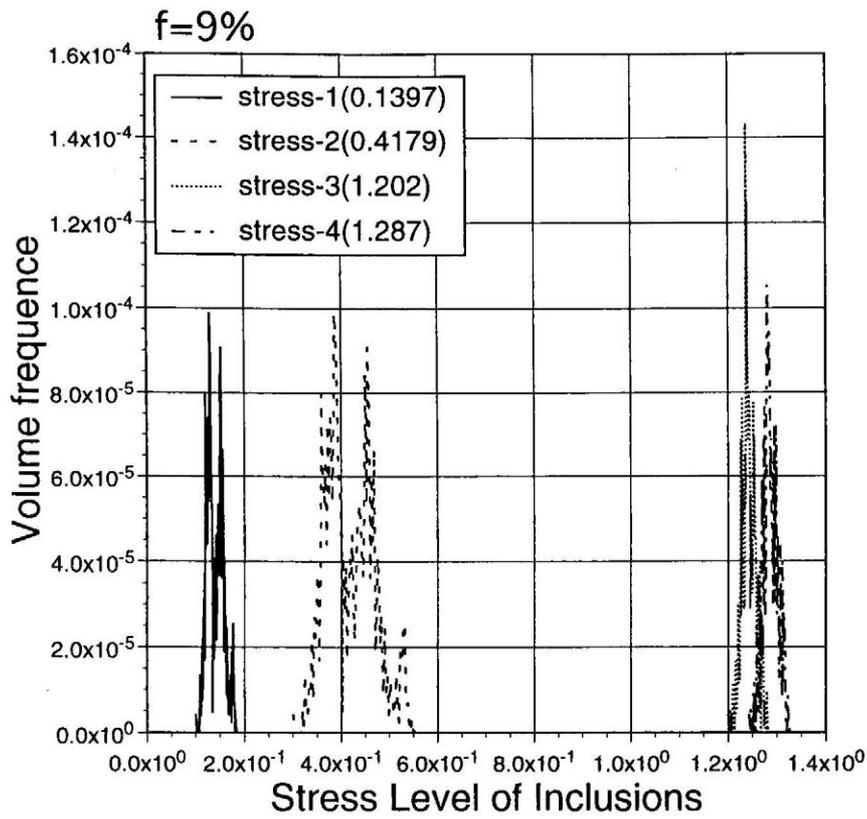


(a) 母相の全応力分布に亘る体積分率頻度の分布

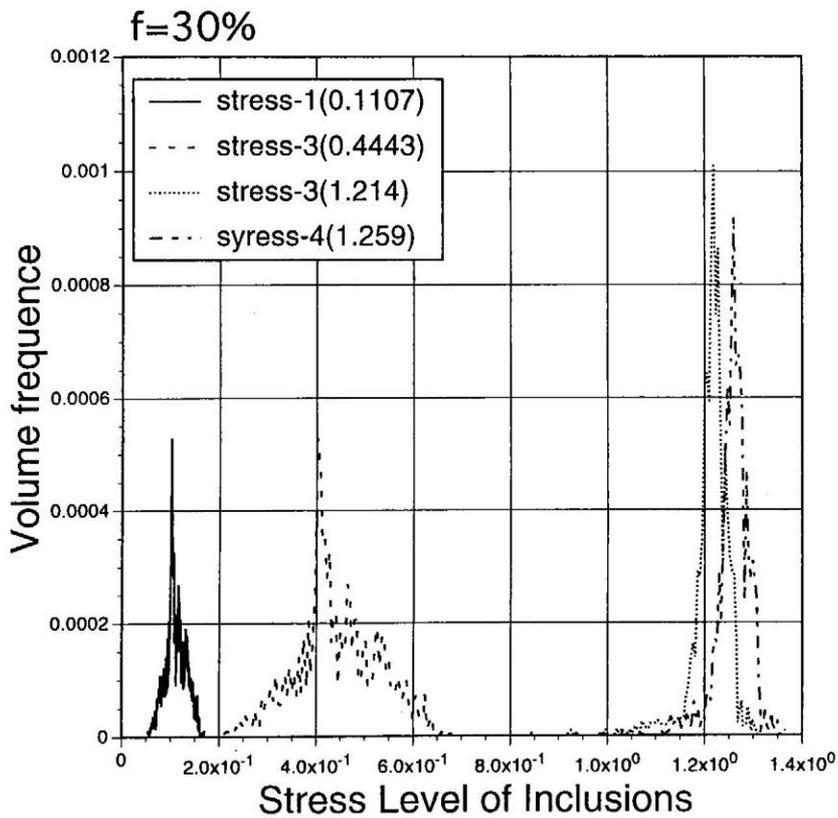


(b) 母相の応力増分と全応力の比

図 5-1-7 母相の全応力分布と応力増分の分布



(c) 母相の全応力分布に亘る体積分率頻度の分布 (f=9%)



(d) 母相の全応力分布に亘る体積分率頻度の分布 (f=30%)

図 5-1-7 母相の全応力分布と応力増分の分布

複合材料の中に、介在相が占める領域の体積分率が0.005、0.094、0.321、0.524、0.613、0.723の場合の結果を図5-1-6に示す。介在相の変形は弾性の段階では、母相と介在相の体積分率に関わらず介在相の平均応力と平均歪みの関係は均質介在相材料の平均応力と平均歪みの関係と同じ性質を表す。しかし、介在相の塑性変形は介在相の体積分率の大きさによって大きく異なる。介在相の体積分率が0.005の場合、単粒子状態に近い、内部応力も第三章の図3-4-4に示しているようにほぼ平均分布しているため、介在相の平均応力と平均歪みの関係は単一の均質材料の応力と歪みの関係に近い。介在相の体積分率が大きくなると、介在相間の干渉は強くなるため、介在相の平均降伏応力は大幅に下がる。

図5-1-5、図5-1-6から、粒子の体積分率は大きい場合、複合材料の母相材料と介在相材料の塑性挙動は単一の均質材料と著しくことなる。単一の均質材料の応力と歪みの関係をそのまま複合材料に適用すれば、大きな誤差が生じる可能性がある。

複合材料の材料係数を式(5-1-2-1)、(5-1-2-2)で示すように表す。複合材料の母相内部の応力はどのように分布しているかを観察するため、有限要素法で計算を行う際、母相に関するすべて要素の積分点の応力とその積分点の占める体積分率のデータを取り、統計手段で処理した結果を図5-1-7に示す。図5-1-7(a)に、粒子の体積分率頻度が $f=0.72$ の粒子モデルにおいて、弾性から塑性段階まで四つの荷重レベルでの母相内の応力分布状態の変化を示す。横軸は降伏応力により無次元化された母相応力レベル、縦軸は応力レベルに対応する発生領域の頻度を体積分率にて表す。応力の分布は正規分布に近い形をしており、平均応力は体積分率が最も高いピーク値において起きている。最も低いレベルStress-1の分布は、全領域が弾性状態の場合の母相応力分布である。荷重レベルStress-2は母相の平均応力が $\sigma_1/\sigma_y=0.78$ の場合の結果を示す。この時、母相の平均応力は降伏応力より十分小さいが、母相領域の一部では既に降伏している。これは図5-1-5に示すように、粒子を含む母相材の平均応力による降伏が均質母相材より早く起きる理由である。Stress-3は母相の平均応力が $\sigma_1/\sigma_y=1.08$ の場合であり、平均応力は降伏応力を越えているが、まだ一部の領域が弾性のままである。Stress-4はほとんどの領域が塑性に入った場合の結果を示し、この時、応力分布幅は平均応力に比して狭くなっている事が分かる。すなわち、塑性領域の拡大に従って、応力は平均化する傾向があるといえる。以上のことから相の平均応力をもって平均的な相の剛性を決定するMori-Tanaka混合則に基づく平均化モデルは不適當である事が分かる。

図5-1-7(b)に各荷重ステップで得た母相の内部の積分点の応力増分と全応力を示す。

横軸は全応力を示す、縦軸は応力増分を示す。

最も左の直線状のカーブは変位制御の第5ステップの場合の結果を示す。この時、母相領域はすべての点で弾性状態であり、すべての点の応力増分と全応力は線形の関係を持っている。即ち、全応力が大きい所の応力増分も大きく、全応力が小さい所の応力増分も小さい。第5ステップの結果のを見ると、母相内部の最大応力は最小応力より約20倍程度大きいことが分かる。

K = 30 は変位制御の第30ステップの場合の結果を示す。この時、母相領域の10%程度の領域が塑性状態に入り、塑性に入った点の応力は大きい。しかし、縦軸に示す応力増分は塑性に入れば急に下がる。これは塑性の場合、応力増分と応力の間で線形の関係が失われるからであるが、弾性の部分は線形を保っている。

K = 60 は変位制御の第60ステップの場合の結果を示す。この時、母相領域の約1/2の領域が塑性状態に入っている。複合材料は第5ステップと同じ変位制御が加えられているが、塑性領域の拡大により、複合材料全体の平均応力の増分は大幅に下がり、塑性状態に入った部分の全応力と応力増分は、第30ステップの場合と同じ現象がある。

K = 120 の線は変位制御の第120ステップの場合の結果を示す。母相領域のほとんどはこの状態で塑性状態に入っている。複合材料の全体平均応力の増分は大幅に下がる。この時、ほとんどの領域は塑性状態であるため、母相内部のほとんどの点の剛性は再び一樣の状態になる。全体平均応力の増分は小さいが、応力増分と全応力は再び線形に近い状態になる。

粒子の体積分率が母相の応力分布に対する影響を観察するため、粒子の体積分率が9%と30%の場合の母相の応力分布をそれぞれ図5-1-7(c)と図5-1-7(d)に示す。横軸は応力レベル、縦軸は応力レベルにおける体積分率頻度を表す。図5-1-7(a)、図5-1-7(c)と図5-1-7(d)を比べて見ると、粒子の体積分率増加するに従って、母相の応力分布が広がる傾向のあることが分かる。

以上より次の事実が明らかとなった。(1)弾性の場合に、応力の増分と全応力は線形の関係を持つ。(2)塑性に入った状態で応力の増分は弾性状態と比べて、大幅に下がる。(3)完全塑性となった状態では応力の増分はほぼ定数である。(4)粒子の体積分率の増加にしたがって、材料の相の応力分布が広がる。

5.1.3 母相と介在相の界面に沿う応力と歪み分布の検討

図5-1-4に示した粒子分散領域のメゾ解析を行って得た結果からは、母相に起きる最小と最大応力が粒子と母相の界面付近で生じる事が判明した。そこで粒子界面付近での応力分布状態を知るため、図5-1-8aに示すような正方配列をもつ参照領域について、図5-1-8bのような要素分割により引き張り解析を行った。弾性の場合に参照点から界面上に外挿した母相側の応力分布を図5-1-9に示す。縦軸は負荷応力で無次元化した相当応力で

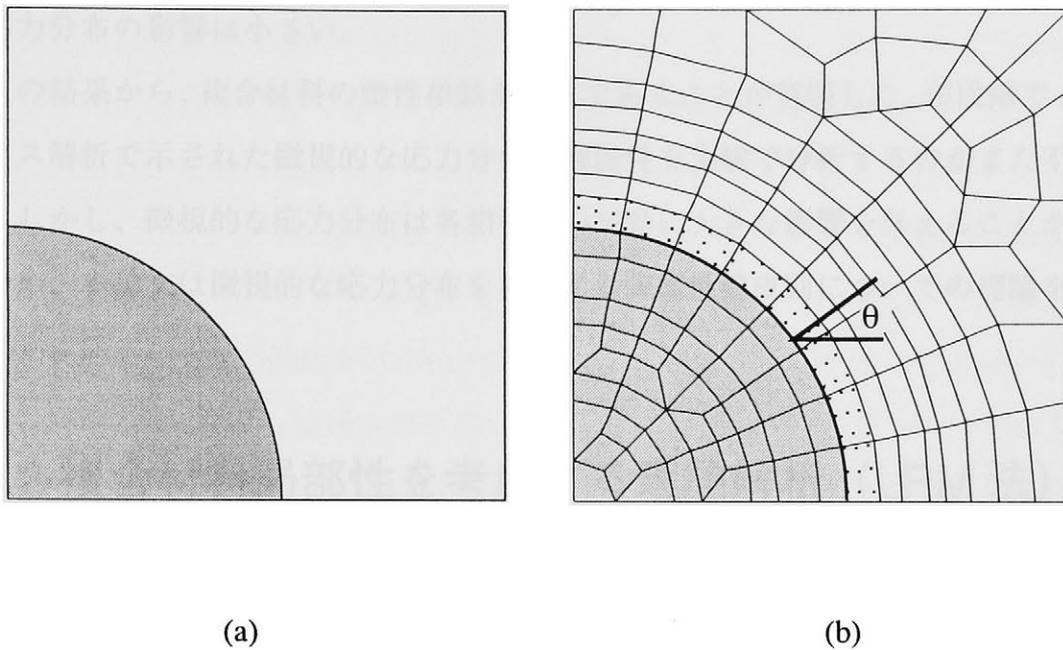


図5-1-8 粒子界面における参照領域と有限要素法解析メッシュ

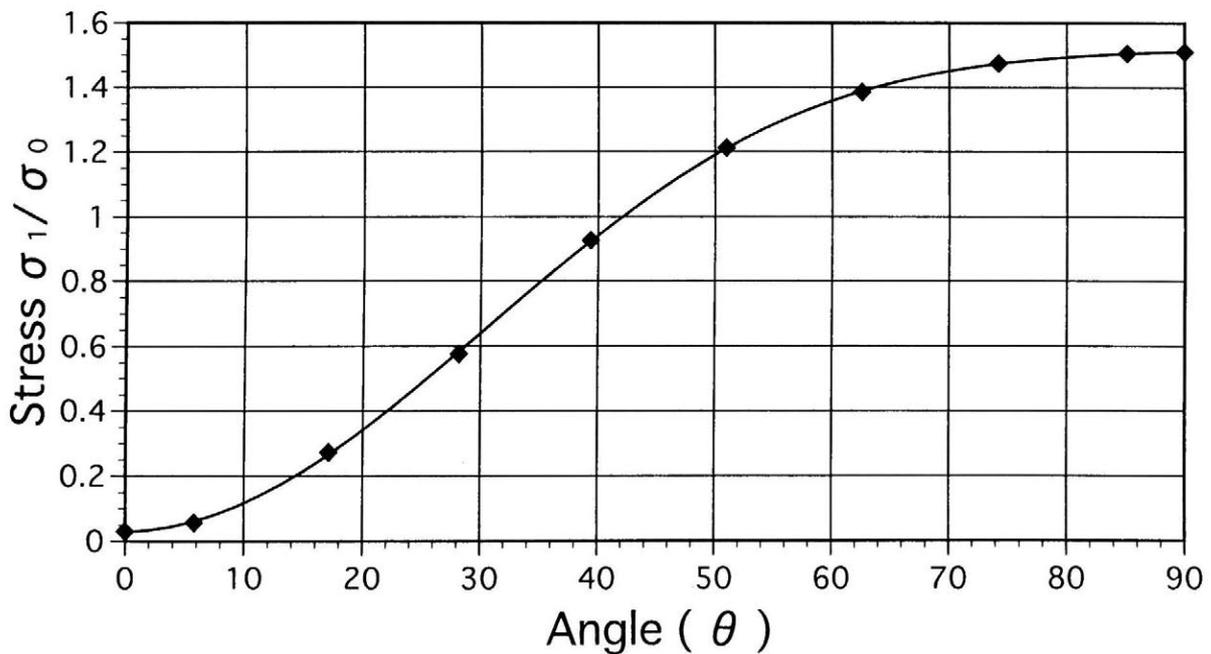


図5-1-9 粒子と母相の界面に沿う母相の応力分布

あり、横軸は界面に沿った角度 θ を示す。応力分布は界面に沿って著しく変化し、最大応力は最小応力の約30倍に達する。この界面に沿った最大-最小応力差となり、母相の全領域に亙る最大-最小応力差となるので、後に示す応力分布幅を、解析解が存在する Mura-Cheng の解から求めることが出来る。

母相と同じように介在相内の応力分布も複合材料の弾塑性挙動に影響を与えるが、粒子は母相に取り囲まれ、それぞれの粒子は全て分離しているため、母相に比べて介在相内の応力分布の影響は小さい。

以上の結果から、複合材料の塑性挙動が複雑であることが判明した。現段階でメゾ・メカニクス解析で示された微視的な応力分布の複雑性を実験で分析するのがまだ不可能である。しかし、微視的な応力分布は各相材料の挙動に大きな影響を与えることが証明されたため、本論文は微視的な応力分布を考慮する弾塑性構成則についての理論を確立する。

§ 5.2 複合材料局所性を考慮する理論解析 (LRM 法)

微視的な応力分布の影響を考慮して複合材料の性質を理論的にモデル化するため、本章で局所剛性法 (LRM 法— Localized Rigidity Method) を提案する。この方法は各相材料

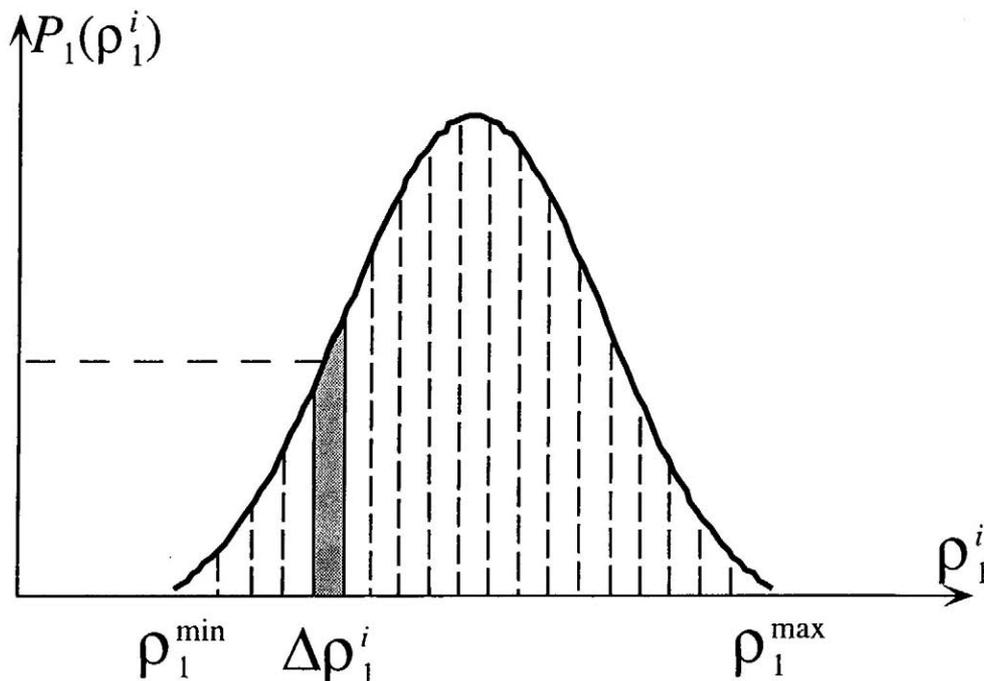


図 5-2-1 体積分率頻度の分布に応力域の分割

内部の局所領域の挙動と各相材料の平均応力-歪みの挙動の違いを明らかにする。各相材料内部の局所領域の挙動の影響をモデル化するため、各相材料の領域の分割する。局所領域の応力と各相材料の平均応力及び複合材料の平均応力との関係を立ち、さらに、LRMモデルの弾塑性構成則を構築する。

5.2.1 母相と介在相の微視的応力と複合材料の巨視的応力

離散化した母相と介在相の平均応力と平均歪みを式 (5-1-1-3)、(5-1-1-4) で定義したが、母相、介在相及び複合材料の間の応力と歪み関係を解明する必要がある。母相と介在相の応力の局所性を正確に表現するため、微視的な応力レベルに従って母相と介在相の応力域を図 5-2-1 に示すように多数の区分に分割し、それぞれの微小応力域を節 5.1.1 で示したように i ($i=1, 2, \dots, n$) および j ($j=1, 2, \dots, m$) 表示する。微小応力域 i に対応する微小な体積領域が母相の中に散在し、 j は粒子単位で同じ応力域をもつ複数の粒子に対応する。母相 i 領域内の平均応力を σ_i^j とし、介在相 j 領域内の平均応力を σ_2^j とする。また微小領域を代表する応力 σ_i^j と σ_2^j の頻度を、母相と介在相上で次式を満たすように、分布関数 $P_1(\rho_i^j)$ と $P_2(\rho_2^j)$ を設定する。

$$\sum_{i=1}^n P_1(\rho_i^j) \Delta\rho_i^j = 1 \quad (5-2-1-1)$$

$$\sum_{j=1}^m P_2(\rho_2^j) \Delta\rho_2^j = 1 \quad (5-2-1-2)$$

微小領域 i と j の無次元化した応力値と応力幅を ρ_i^j と ρ_2^j および $\Delta\rho_i^j$ と $\Delta\rho_2^j$ として、外荷重の増分値に対して次のように定義する。

$$\rho_i^j = \frac{d\sigma_1^j}{d\bar{\sigma}_1}, \quad \Delta\rho_i^j = \Delta\left(\frac{d\sigma_1^j}{d\bar{\sigma}_1}\right) \quad (5-2-1-3)$$

$$\rho_2^j = \frac{d\sigma_2^j}{d\bar{\sigma}_2}, \quad \Delta\rho_2^j = \Delta\left(\frac{d\sigma_2^j}{d\bar{\sigma}_2}\right) \quad (5-2-1-4)$$

微小領域 i と j が占める体積分率を Δc_i と Δc_j とすれば、次のように表す事ができる。

$$\Delta c_i = (1-f) P_1(\rho_i^j) \Delta\rho_i^j \quad (5-2-1-5)$$

$$\Delta c_j = f P_2(\rho_2^j) \Delta\rho_2^j \quad (5-2-1-6)$$

ここで、 f は介在相の体積分率、 $1-f$ は母相の体積分率である。応力を相の全領域に互って平均し、母相と介在相の平均応力を次のように定義する。

$$d\sigma_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_1^i \quad (5-2-1-7)$$

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\sigma_2^j \quad (5-2-1-8)$$

応力平衡条件より、複合材料の巨視応力 $d\sigma_0$ は微視領域の応力増分との間に次の関係がある。

$$d\sigma_0 = \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\sigma_1^i + \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\sigma_2^j \quad (5-2-1-9)$$

ここに、複合材料の巨視応力と局部応力の関係を示した。

5.2.2 母相と介在相の微視的応力の決定

介在相の微視的な応力を求めるため、図5-2-2に示すような等価モデルを考える。実粒子系の一つの粒子に着目すれば、粒子を取り巻く外界の平均的な剛性は当然、粒子の体積分率の増加と共に変化するので、粒子外界の剛性を母相の剛性と同一と仮定するEMTモデルには、その点において無理がある。そこで本論文では、特に粒子間の相互作用の観点から、介在粒子に与えられた固有歪みに対して粒子の外界が応答する平均的なコンプライアンスを自己整合的に決定する混合則、すなわち SCC (Self-consistent Compliance) モデルを用いる。

図5-2-2aに示すような外応力を受ける実粒子分散複合体の微視的な領域の中の一つの

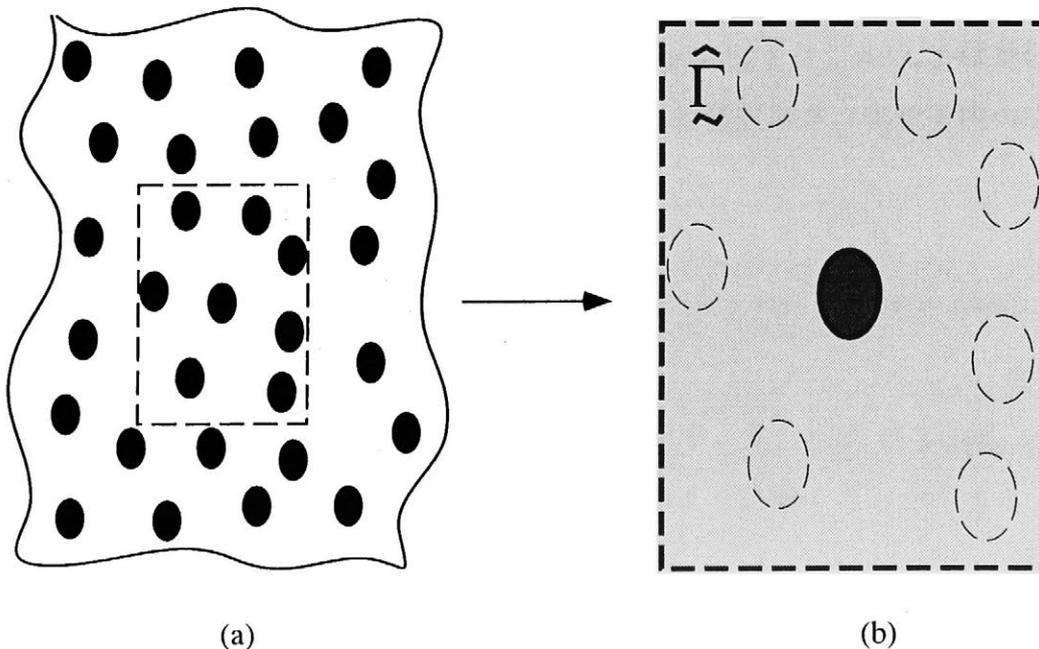


図5-2-2 局所領域にある粒子における SCC モデルの等価介在物法

粒子に着目し、この粒子が複合体の巨視的なコンプライアンスに等しいコンプライアンス $\hat{\Gamma}$ を持つ均質媒体中にあると考える。この複合体に等価させるモデルとして、図5-2-2bに示すように均質媒体 $\hat{\Gamma}$ の中に一つの等価粒子を考える。この仮想粒子に固有歪を与える事により、実粒子との間に歪および応力において次式に示すような等価関係を樹立する事ができる。

$$d\sigma_{eqv} = d\sigma_2^j \quad (5-2-2-1)$$

$$d\varepsilon_{eqv} = d\varepsilon_2^j \quad (5-2-2-2)$$

ここで、 $d\sigma_{eqv}$ と $d\varepsilon_{eqv}$ は等価粒子の応力と歪みであり、 $d\sigma_2^j$ と $d\varepsilon_2^j$ は介在相粒子の応力と歪みである。固有歪みを持つ等価粒子の応力 - 歪み関係は次式によって表される。

$$d\varepsilon_{eqv} = \hat{\Gamma} : d\sigma_{eqv} + d\varepsilon^* \quad (5-2-2-3)$$

等価体において、固有歪み $d\varepsilon^*$ を課したため、等価粒子の応力と歪みは全体の平均値との間に食い違いをひき起こすと考えられ、その差をそれぞれ、 $d\varepsilon^c$ とする。

$$d\sigma_{eqv} = d\sigma_0 + d\sigma^c \quad (5-2-2-4)$$

$$d\varepsilon_{eqv} = d\varepsilon_0 + d\varepsilon^c \quad (5-2-2-5)$$

本モデルの等価体に Eshelby の等価介在物理論を適用すれば、食い違い応力と歪みを、固有歪みを用いて次式のように表すことができる。

$$d\sigma^c = \hat{E}_0 : d\varepsilon^* \quad (5-2-2-6)$$

$$d\varepsilon^c = \hat{S} : d\varepsilon^* \quad (5-2-2-7)$$

$$\hat{E}_0 = \hat{E} : (\hat{S} - I) \quad (5-2-2-8)$$

ここで、 \hat{E} は複合材料の平均弾性テンソル、 \hat{S} は平均 Eshelby テンソル⁽⁴⁾、 I は単位テンソルである。微小領域の内部では状態がほぼ均一であると仮定でき、実粒子内の応力と歪みの関係、

$$d\varepsilon_2^j = \Gamma_2^j : d\sigma_2^j \quad (5-2-2-9)$$

を用いれば、式 (5-2-2-1)、(5-2-2-2)、(5-2-2-3) と式 (5-2-2-9) より次式が得られる。

$$d\varepsilon^* = (\Gamma_2^j - \hat{\Gamma}) : d\sigma_{eqv} \quad (5-2-2-10)$$

上において、 Γ_2^j は微小領域 j のコンプライアンスを示す。さらに式 (5-2-2-4)、(5-2-2-6) と式 (5-2-2-10) から、等価性を満たす固有歪みを次のように解くことができる。

$$d\varepsilon^* = A_0^j : d\sigma_0 \quad (5-2-2-11)$$

$$A_0^j = [(\Gamma_2^j - \hat{\Gamma})^{-1} - \hat{E}_0]^{-1} \quad (5-2-2-12)$$

得られた固有歪みを式 (5-2-2-4) に用い、応力の等価条件を考慮すれば、実粒子内の応

力と複合材の平均応力との関係は次式となる。

$$d\sigma_2^i = (I \otimes I + A_0^i : \hat{E}_0) : d\sigma_0 \quad (5-2-2-13)$$

式 (5-2-2-13) を式 (5-2-1-8) に代入すれば、介在相の平均応力は次のように表される。

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} B_0 : d\sigma_0 \quad (5-2-2-14)$$

$$B_0 = \sum_{j=1}^n \Delta c_j (I \otimes I + A_0^j : \hat{E}_0) \quad (5-2-2-15)$$

また母相の平均応力は次式のように求められる。

$$d\sigma_1 = \frac{1}{1-f} (I \otimes I - B_0) : d\sigma_0 \quad (5-2-2-16)$$

図5-1-6からも明らかなように、応力分布の範囲は相応力平均値と共に変化する。母相の応力分布範囲の最小と最大応力増分値、 $d\sigma_1^{\min}$ と、は母相の任意領域の応力値の上下限となる。

$$d\sigma_1^{\min} \leq d\sigma_1^i \leq d\sigma_1^{\max} \quad (5-2-2-17)$$

また、応力 $d\sigma_1^i$ と平均応力との関係を次式のように分布によって表せば、

$$d\sigma_1^i = G^i d\sigma_1 \quad (5-2-2-18)$$

式 (5-2-2-16) と式 (5-2-2-18) より、微視領域の応力を巨視的応力の関数として求めることが出来る。

$$d\sigma_1^i = C_0^i : d\sigma_0 \quad (5-2-2-19)$$

$$C_0^i = \frac{1}{1-f} G^i : (I \otimes I - B_0) \quad (5-2-2-20)$$

上式中関数 G^i については後節で定義する。

5.2.3 複合材料の巨視的構成則

まず、母相と介在相の微視的応力と巨視的応力との関係をモデル化する。応力はメゾ領域で分布し弾塑性材料剛性は非均質性を持つが、微小領域は十分小さく、その中で応力と剛性は均一であり、応力と歪みの関係は均質な組成材料と同じであると考えられる。従って、式 (5-2-2-9) と同様に母相の微小領域でも応力-歪み関係式を次のように表す。

$$d\varepsilon_1^i = \Gamma_1^i : d\sigma_1^i \quad (5-2-3-1)$$

母相と介在相の平均歪みは、式 (5-2-1-7)、(5-2-1-8) と同様に

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\varepsilon_1^i \quad (5-2-3-2)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{f} \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\varepsilon_2^j \quad (5-2-3-3)$$

によって定義する。また、複合材料の巨視的歪みを各相の歪みから次の関係によって平均化すれば、

$$d\varepsilon_0 = (1-f) d\varepsilon_1 + f d\varepsilon_2 \quad (5-2-3-4)$$

式 (5-2-3-2)、(5-2-3-3)、(5-2-3-4) より

$$d\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n \Delta c_i d\varepsilon_1^i + \sum_{j=1}^m \Delta c_j d\varepsilon_2^j \quad (5-2-3-5)$$

となる。式 (5-2-2-9) と (5-2-3-1) を式 (5-2-3-5) に代入すれば全体の平均歪みは次のようになる。

$$d\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n \Delta c_i \Gamma_1^i : d\sigma_1^i + \sum_{j=1}^m \Delta c_j \Gamma_2^j : d\sigma_2^j \quad (5-2-3-6)$$

これに式 (5-2-2-13) と (5-2-2-18) を用いれば、複合材料の巨視的な増分構成則が次の形で得られる。

$$d\varepsilon_0 = \hat{\Gamma} : d\sigma_0 \quad (5-2-3-7)$$

$$\hat{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \Delta c_i \Gamma_1^i : C_0^i + \sum_{j=1}^m \Delta c_j \Gamma_2^j : (I \otimes I + A_0^j : \hat{E}_0) \quad (5-2-3-8)$$

式 (5-2-3-8) は、右辺に未知数 $\hat{\Gamma}$ 自身を含む自己整合 (Self-consistent) 形式となっているの

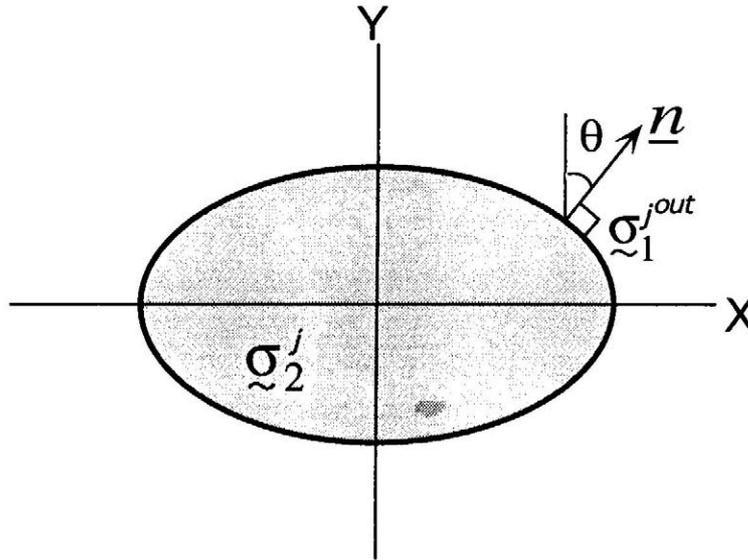


図 5-3-1 粒子の界面上での幾何学

で、 $\hat{\Gamma}$ は反復計算により求める必要がある。その場合、初期値としてReussまたはVoigtモデルによる混合則を用いるのが適している。

$$\text{Reuss: } \hat{\Gamma} = \sum_{i=1}^m \Delta c_i \Gamma_1^i + \sum_{j=1}^m \Delta c_j \Gamma_2^j \quad (5-2-3-9)$$

$$\text{Voigt: } \hat{\Gamma} = \left[\sum_{i=1}^m \Delta c_i \Gamma_1^{i-1} + \sum_{j=1}^m \Delta c_j \Gamma_2^{j-1} \right]^{-1} \quad (5-2-3-10)$$

本モデルはSCCモデルを用いていて、粒子を取り巻く外領域の剛性に介在相の体積分率の変化が考慮されているので体積分率が高い場合にも、また介在相と母相の剛性比が著しく異なる弾塑性問題に対しても、式(5-2-3-8)は極めて精度のよい構成則を与える事ができる。

弾性の場合には材料物性値は定数であるので、分布を考えずに母相と介在相領域内部の平均値のみで取り扱えば、母相と介在相の平均応力は

$$\sigma_1 = [I \otimes I - f \hat{E}_0 : A_0 / (1-f)] : \sigma_0 \quad (5-2-3-11)$$

$$\sigma_2 = [I \otimes I + \hat{E}_0 : A_0] : \sigma_0 \quad (5-2-3-12)$$

となる。但し、

$$A_0 = [(L_2 - \hat{L})^{-1} - \hat{E}_0]^{-1} \quad (5-2-3-13)$$

であり、 \hat{L} は複合材料の平均弾性コンプライアンス、 L_1 および L_2 はそれぞれ母相と介在相の弾性コンプライアンスを表し、複合材料の構成関係式は次式となる。

$$\varepsilon_0 = \hat{L} : \sigma_0 \quad (5-2-3-14)$$

$$\hat{L} = (1-f)L_1 + fL_2 + f(L_2 - L_1) : \hat{E}_0 : A_0 \quad (5-2-3-15)$$

弾性の場合には、体積弾性係数とせん断弾性係数に分離すればスカラ計算の取り扱いが可能となり、式(5-2-3-15)から \hat{L} をより簡単に求めることが出来る。上式は第4章の式(4-4-3-7)と等しい。式(5-2-3-8)は実は式(4-4-3-7)の適用範囲を拡大したものであり、第4章のSCCモデルと本章のLRMモデルとの繋がりが明確になった。

§ 5.3 複合材料応力分布に関する理論解析

複合材料の応力分布は非常に複雑であり、すべての応力分布に通用する理論式を開発する事は極めて難しいので具体的な問題に対して、分布関数を打ち立てることにする。本節においては二次元単軸引っ張り問題について理論解析を行う。

5.3.1 分布関数の導入

無数な粒子がランダムに分布している複合材料の中で微小応力領域も十分のランダム性を持っている事が予想されている。そのため、本モデルではメゾ局所的な非均質性を表すため、母相内の応力レベル ρ_i^j の体積分率の頻度を次式に示す正規分布の形で表す。

$$P_i(\rho_i^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\phi} e^{-\frac{1}{2\phi^2}(\rho_i^j-1)^2} \quad (5-3-1-1)$$

ここで ϕ は分散パラメータであり、 ρ_i^j は式 (5-2-1-3) の定義により次式のように示される。

$$\rho_i^j = \frac{d\sigma_i^j}{d\sigma_i} \quad (5-3-1-2)$$

本節で粒子は塑性変形が行わないため、粒子に関する応力分布を考慮しない。正規分布の統計理論から、母相に分布する応力の内、99.7%は次式の関係を満たすと考える事ができる。

$$(1 - 3\phi) \leq \rho_i^j \leq (1 + 3\phi) \quad (5-3-1-3)$$

これより、無次元化した母相の最小および最大応力の増分と分散値の関係を近似的に表せる。

$$\rho_i^{\min} = (1 - 3\phi) \quad (5-3-1-4)$$

$$\rho_i^{\max} = (1 + 3\phi) \quad (5-3-1-5)$$

5.3.2 粒子界面での母相応力分布

節5.1.2で述べたように、母相の最大と最小応力は通常、材料の界面で発生する。塑性化するに従い、無次元化された応力 ρ_i の分布幅は狭くなる傾向があるが、弾性的場合は分布形態は変わらず、しかも相対的な分布幅が広くなる。ここでは小規模降伏を想定し、弾性の応力分布を基本として、単軸引き張りの場合を一つの例として本モデルに用いる分散パラメータを求める。周囲が平均化された媒体の中にある図5-3-1のような一つの粒子 j を考えれば、Mura-Chengの単軸引っ張りを受ける無限媒体の中にある楕円体単粒子の回りの応力解を利用することが出来、母相側粒子界面の応力分布はTandon-Wengより次式で求められる。

$$d\sigma_{ij}^{j\text{out}} = d\sigma_{2ij}^j - \hat{E}_{ijkl} (\hat{E}_{pqmn} d\epsilon_{mn}^* M_{kp} n_q n_l - d\epsilon_{kl}^*) \quad (5-3-2-1)$$

ここで、

$$\hat{E}_{ijkl} = \hat{L}_{ijkl}^{-1} \quad (5-3-2-2)$$

$$M_{kr} = \frac{1}{\hat{G}} \left[\delta_{kr} - \frac{n_k n_r}{2(1-\gamma)} \right] \quad (5-3-2-3)$$

であり、 n_i は界面の外法線ベクトル成分である。また、 \hat{G} および γ はそれぞれ複合体のせん断弾性係数およびポアソン比の Self-consistent 平均値である。

二次元単軸引き張りに対しては、式 (5-2-2-11) から固有歪みは次式となる。

$$d\varepsilon^* = \left\{ \frac{(a_1 + 2\gamma a_2)}{a\hat{E}} d\sigma_{x_0}, \frac{(a_3 - 2\gamma a_4)}{a\hat{E}} d\sigma_{x_0}, 0 \right\}^T \quad (5-3-2-4)$$

上式の、 a_1 、... の詳細については次のように示す。

$$a_1 = (\hat{S}_{1111} + \hat{S}_{2233} - 1) + \frac{G_2}{G_2 - \hat{G}} + \frac{2(G_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} \quad (5-3-2-5)$$

$$a_2 = \hat{S}_{1122} + \frac{(G_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} \quad (5-3-2-6)$$

$$a_3 = -\hat{S}_{2211} - \frac{(G_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} \quad (5-3-2-7)$$

$$a_4 = \hat{S}_{1111} - 1 + \frac{G_2}{G_2 - \hat{G}} + \frac{(\mu_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} \quad (5-3-2-8)$$

$$\begin{aligned} a = & -\frac{(G_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} - (\hat{S}_{1111} + \hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233}) \frac{\hat{G}}{G_2 - \hat{G}} \\ & - [\hat{S}_{1111}(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233}) - 2\hat{S}_{1122}\hat{S}_{2211}] - \frac{(G_2 \hat{K} - \hat{G} K_2)}{3(G_2 - \hat{G})(K_2 - \hat{K})} \\ & \{3 - 2(\hat{S}_{1111} - 1) + (\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233} - 1) - 2(\hat{S}_{1122} + \hat{S}_{2211})\} \end{aligned} \quad (5-3-2-9)$$

\hat{S}_{1111} 、... は粒子分散複合材料の平均的な Eshelby テンソルである。式 (5-3-2-4) を式 (5-2-2-13) に適用して一つの粒子 j が持つ応力が求められる。

$$d\sigma_2^j = \{q_1 d\sigma_{x_0}, q_2 d\sigma_{x_0}, 0\}^T \quad (5-3-2-10)$$

式 (5-3-2-10)、(5-3-2-1) から界面に沿った母相の応力が次式のように計算できる。

$$d\sigma_{x_1}^{j,out} = \left[q_1 + \frac{\cos^2 \theta}{1-\gamma^2} \{p_1 \cos^2 \theta + p_2 (\gamma + \sin^2 \theta)\} \right] d\sigma_{x_0} \quad (5-3-2-11)$$

$$d\sigma_{x_1}^{j,out} = \left[q_2 + \frac{\sin^2 \theta}{1-\gamma^2} \{p_1 \cos^2 \theta + p_2 (\gamma + \sin^2 \theta)\} \right] d\sigma_{x_0} \quad (5-3-2-12)$$

$$d\sigma_{x_1}^{j,out} = 0 \quad (5-3-2-13)$$

上式において、最小と最大応力はそれぞれ $\theta = 0$ および $\theta = \pi/2$ の位置で発生し、それらの

相当応力値は

$$d\bar{\sigma}_1^{jout} \Big|_{\theta=0} = g_1 d\bar{\sigma}_1 \quad (5-3-2-14)$$

$$d\bar{\sigma}_1^{jout} \Big|_{\theta=\pi/2} = g_2 d\bar{\sigma}_1 \quad (5-3-2-15)$$

となる。ここで、

$$g_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(q_1 - \frac{p_1 + \hat{\gamma} p_2}{1 - \hat{\gamma}^2} - q_2 \right)^2 + \left(q_1 - \frac{p_1 + \hat{\gamma} p_2}{1 - \hat{\gamma}^2} \right)^2 + (q_2)^2 \right]} \quad (5-3-2-16)$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(q_1 - \frac{p_2}{1 - \hat{\gamma}} - q_2 \right)^2 + (q_1)^2 + \left(\frac{p_2}{1 - \hat{\gamma}} + q_2 \right)^2 \right]} \quad (5-3-2-17)$$

であり、 q_1 、 q_2 、 p_1 および p_2 の詳細を次のように示す。

$$q_1 = 1 + \frac{1}{(1 + \gamma_1)(1 - 2\gamma_1)} [b_1 p_1 + 2b_2 p_2] \quad (5-3-2-18)$$

$$q_2 = \frac{1}{(1 + \gamma_1)(1 - 2\gamma_1)} [b_3 p_1 + (b_4 + b_5) p_2] \quad (5-3-2-19)$$

$$p_1 = (a_1 + 2\hat{\gamma} a_2) / a \quad (5-3-2-20)$$

$$p_2 = (a_3 - \hat{\gamma} a_4) / a \quad (5-3-2-21)$$

$$b_1 = 2\hat{\gamma} \hat{S}_{2211} + (1 - \hat{\gamma})(\hat{S}_{1111} - 1) \quad (5-3-2-22)$$

$$b_2 = \hat{\gamma}(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{2233} - 1) + (1 - \hat{\gamma})\hat{S}_{1122} \quad (5-3-2-23)$$

$$b_3 = \hat{\gamma}(\hat{S}_{1111} - 1) + \hat{S}_{2211} \quad (5-3-2-24)$$

$$b_4 = \hat{\gamma}(\hat{S}_{1122} + \hat{S}_{2233}) + (1 - \hat{\gamma})(\hat{S}_{2222} - 1) \quad (5-3-2-25)$$

$$b_5 = \hat{\gamma}(\hat{S}_{2222} + \hat{S}_{1122} - 1) + (1 - \hat{\gamma})\hat{S}_{2233} \quad (5-3-2-26)$$

5.3.3 応力分布に関するパラメタ

さて、母相応力の分散パラメータ ϕ は式 (5-3-1-4)、(5-3-1-5) から次式のように表す事が出来る。

$$\phi = \frac{\rho_1^{\max} - \rho_1^{\min}}{6} \quad (5-3-3-1, 65)$$

式 (5-3-2-14)、(5-3-2-15) で表される一つの粒子の回りの最小と最大応力の寄与率を体積分率 Δc_j を以て表す。すべての粒子の材料は同じであり、また形状も相似であるので、全

粒子に対して式 (5-3-2-14)、(5-3-2-14)、(5-3-3-1) より分散値は次式のようにになる。

$$\phi = \frac{f |g_1 - g_2|}{6} \tag{5-3-3-2}$$

母相応力域 i の応力増分は、剛性およびその時の相当応力の変化を考慮して、平均値とリンクする。

$$d\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 \tag{5-3-3-3}$$

これにより、式 (5-2-2-18) 中の関数 G' が決まる。

§ 5.4 理論解析例

解析対象として、粒子分散複合材料の単軸引っ張り問題を考える。母相と介在相の材料特性は、最初に示したものと同一であり、この解析例では母相にのみ塑性化が許され、介在相は弾性を保つとする。塑性変形が起きる母相の応力領域を図5-2-1に示すように有限個数に分割し、ここでは100等分して計算すると、その結果により計算の結果の精度が

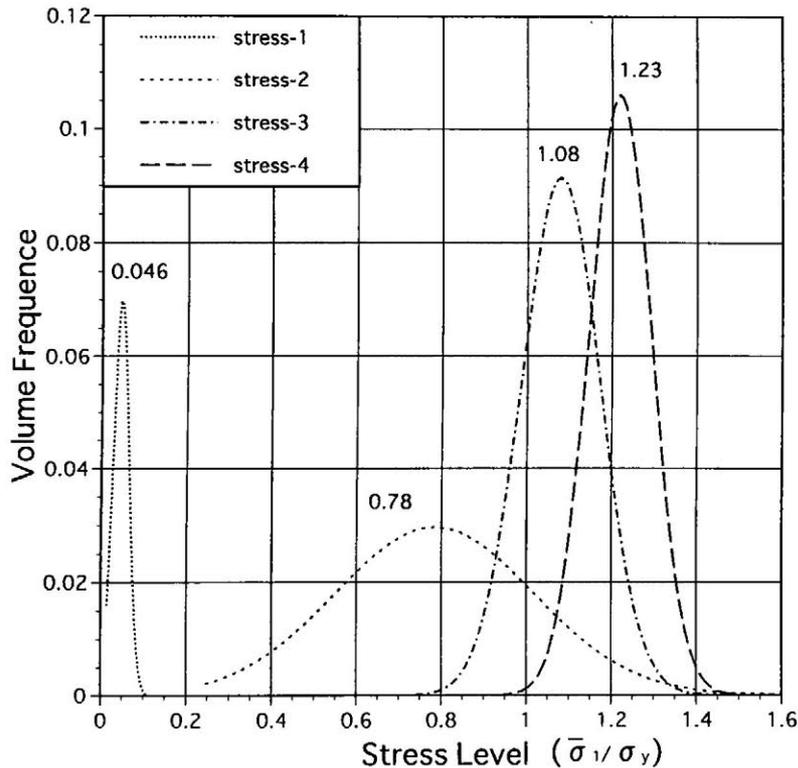


図 5-4-1 母相応力分布に亘る体積分率頻度の理論解析結果

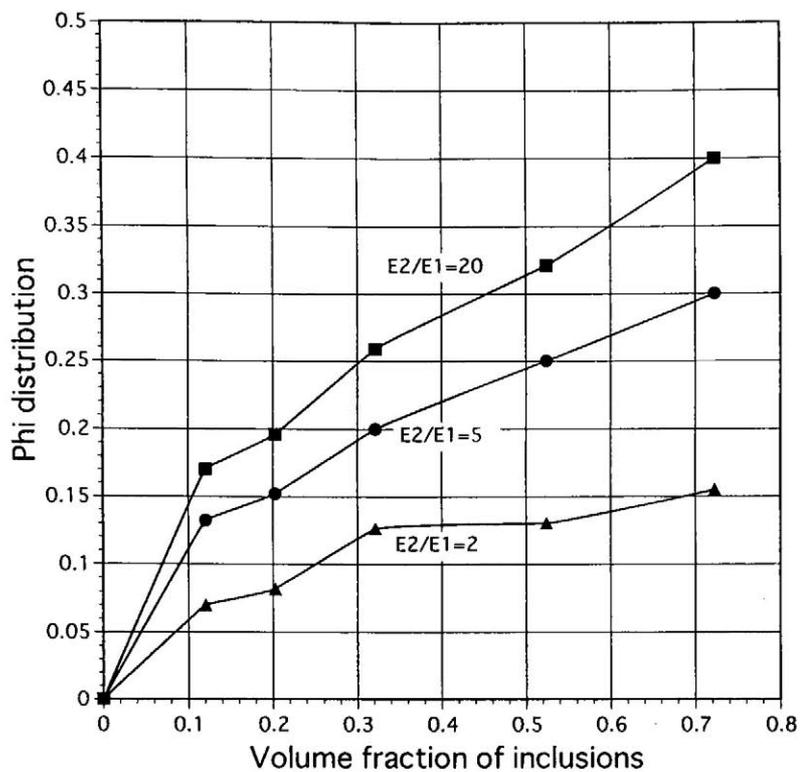


図 5-4-2 有限要素法により求めた ϕ

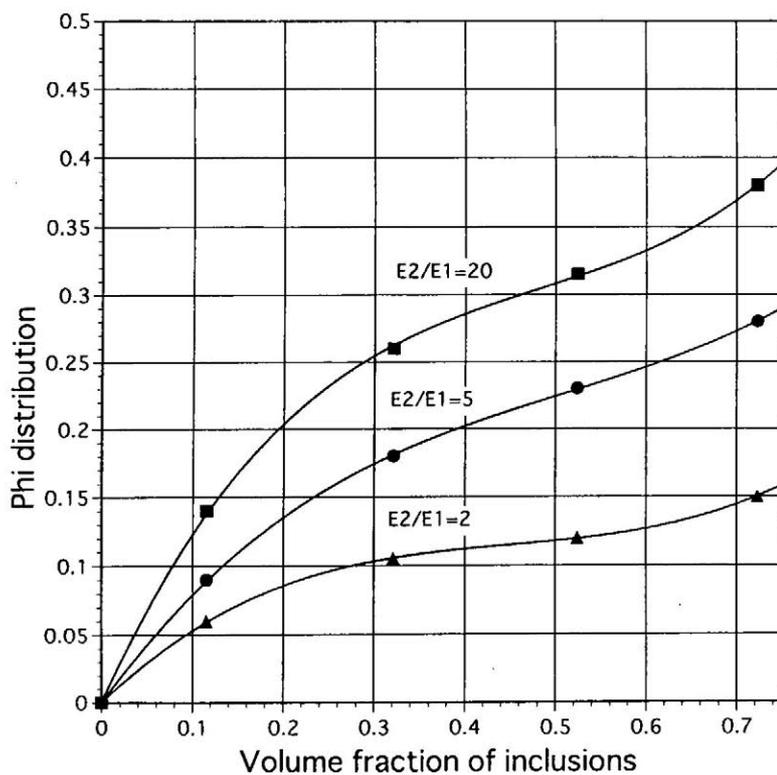


図 5-4-3 理論解析に基づく得た ϕ

高いだけでなく、計算時間の節約もできる。以下に示す本モデルの結果を粒子分散材の無限領域のメゾ解析結果を参照値として比較するが、本モデルにはメゾ解析からのデータが一切含まれていないモデルであることを明記しておきたい。

5.4.1 応力分布

図5-1-6に示した粒子分散領域のメゾ解析と同じ条件で計算した本モデルの母相相当応力の分布状態を、四つの応力レベルについて式 (5-3-1-1) で計算した結果を図5-4-1に示す。式 (5-3-1-1) のパラメタ ϕ は式 (5-3-3-2) で決定される。図中に示す数字は降伏応力で無次元化したそれぞれの場合の母相の平均応力値を表すが、定量的にも定性的にも図5-1-6の各応力レベルにおける結果とよく一致している。

5.4.2 応力分布に関するパラメタ ϕ

次に、介在相と母相の縦弾性係数比を20、5、2とする三つの場合について弾性計算した母相応力の分散値の結果を、広範囲の介在相体積分率に対して示す。図5-4-2はメゾ解析から得られた母相応力分布の結果を正規分布関数により最小2乗近似にて処理した分散値の結果を表す。一方、図5-4-3は式 (5-3-3-2) により求めた本モデルの ϕ の結果であり、三つの剛性比について両者を比較すると、本モデルに用いる ϕ は解析した範囲でメゾ解析に近い結果を与える事が分かる。

5.4.3 複合材料の巨視的な弾塑性挙動

本モデルの検証において最も興味深いのは、複合材料の巨視的な構成則挙動である。本論文では介在相の体積分率が11%から72%の間の7つの場合について、本LRMモデルの結果をメゾ解析結果と比較し検討する。

図5-4-4に、11%の場合の巨視的な軸応力と歪みの結果を示す。図中、“T-W”は第二章で紹介した塑性材料の平均応力と歪みの関係を非線形弾性均質材料に等価させる方法を利用するTandon-Wengのモデルによる構成則(付録5-1)で計算した結果である。“Averaged”は本モデルで、相内で応力の分布を考えず、平均値を取るだけの式(5-2-3-15)で取り扱った例である。“Present”は本LRMモデルの式(5-2-3-8)、(5-3-1-1)と(5-3-3-2)を用いて算定した結果を示す。この程度の体積分率は各モデルの結果は近い。しかし、図5-4-5に示す72%の場合の結果を見ると、“Averaged”の結果は微視局所的な塑性化を許

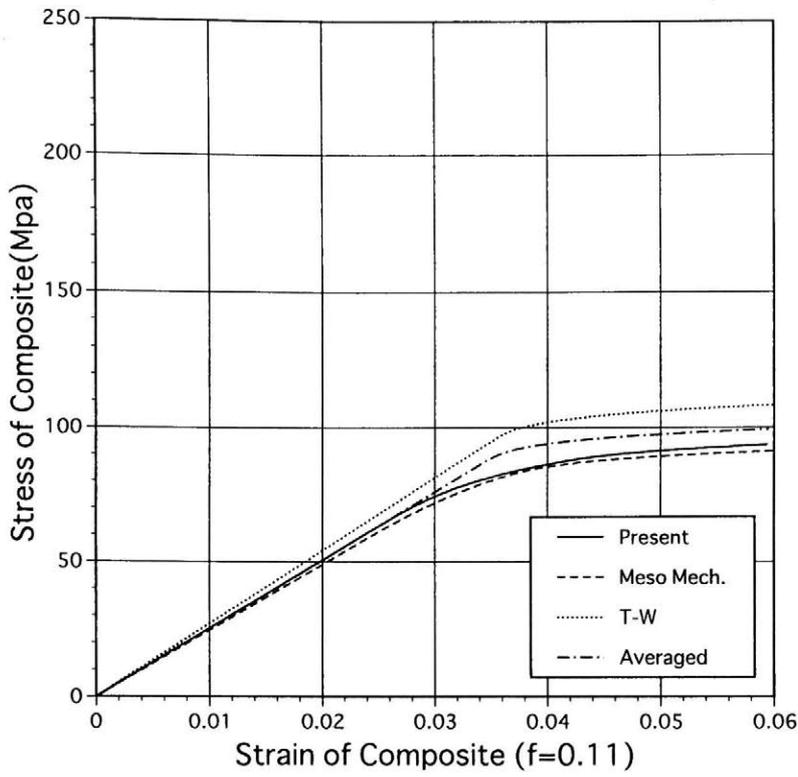


図 5-3-5 複合材料の巨視的な応力-歪み関係における各理論の比較 ($f=0.11$)

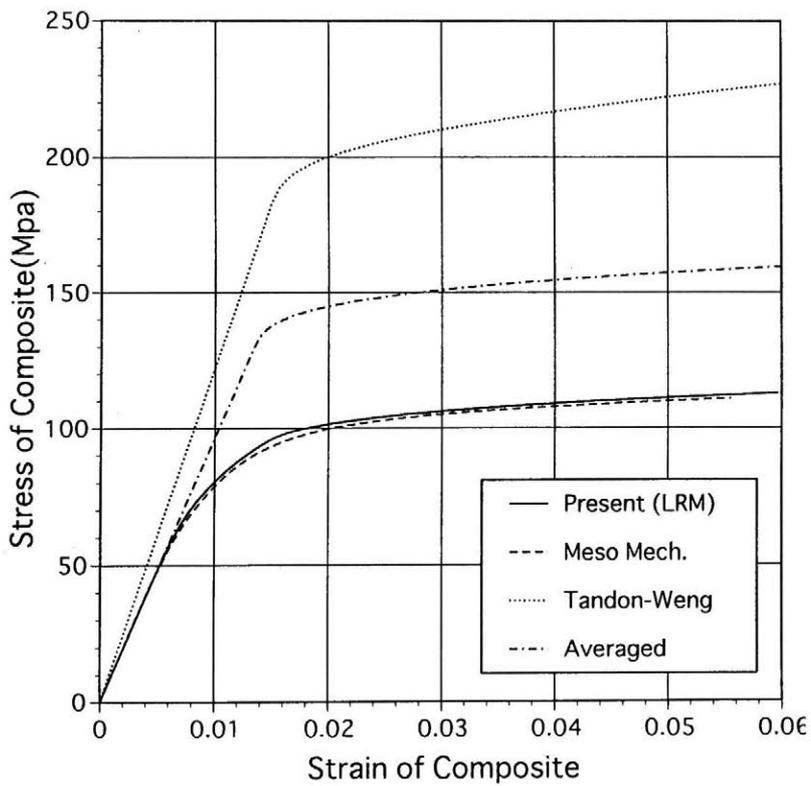


図 5-3-6 複合材料の巨視的な応力-歪み関係における各理論の比較 ($f=0.72$)

さないため、降伏開始点はかなり遅れ、それだけ実際より応力が高くなっていることが分かる。そこで、自己整合的な混合則を使うことにおいては本LRMモデルと同じであるので、弾性では本モデルと一致しており、また塑性の歪み硬化の傾きもほぼ一致している。ところが、Mori-Tanakaの平均場理論の混合則に基づく "T-W" の結果では、両相の弾性係数比がかなり違う場合、弾性時ですでに本モデルとの差が現れており、また、塑性化に分布を考えないため、本モデルの結果から大きく外れて応力が高い。一方、LRMモデルの式 (5-2-3-8)、(5-3-1-1) と (5-3-3-2) を用いて算定した実線の結果は計算した全範囲において、参照値と大変よく一致している。粒子の体積分率が低い時 (例えば11%) は、"T-W" の結果を含めて4者の結果間の差異は余り生じない。その理由は、粒子間の応力干渉がそれ程強くないため、塑性化による材料の非均質性が顕著に現れないからである。

図5-4-7には、粒子介在相の体積分率が次の7つの場合について参照値と比較し、LRMモデルを検証する。

$$f = 0.11, 0.2, 0.32, 0.4, 0.52, 0.61, 0.72$$

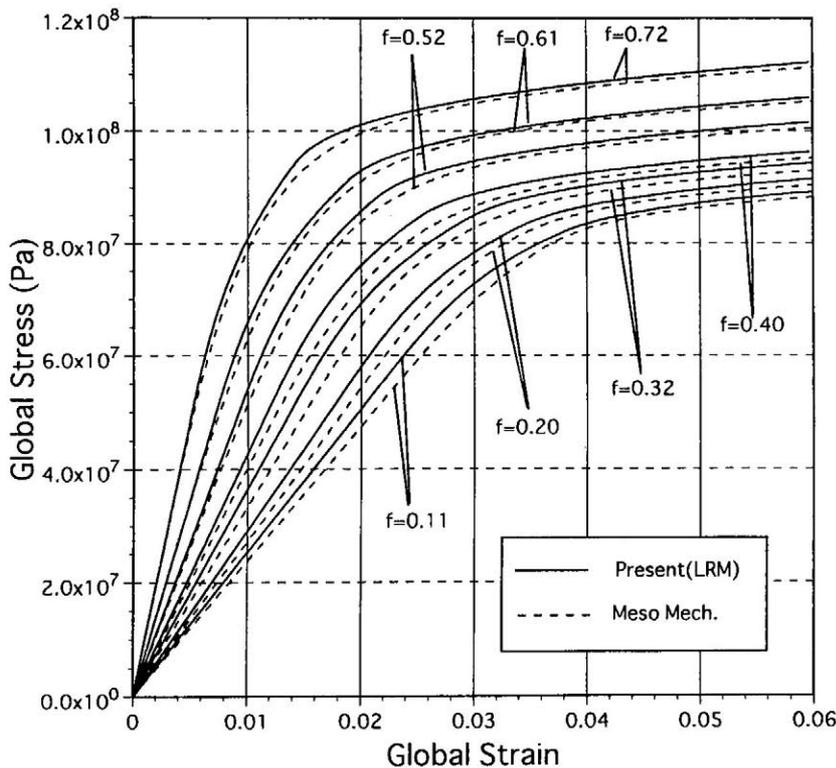


図 5-3-7 粒子体積分率の変化における複合材料の巨視的な応力-歪み関係の比較

実線は本LRMモデルの結果、点線はメゾ・メカニクス解析の参照値を示す。いずれの場合も両者の間によい一致が見られ、広い体積分率における本モデルの信頼性が示されている。なお、これ以上の体積分率に対しても本LRMモデルの計算は可能であるが、メゾ解析モデルは稠密パックに近い状態となり、FEM計算より制限された。

§ 5.5 結言

(1) 本章では、自己整合コンプライアンス・モデルに基づき、複合材料の各相内の応力分布を考慮した巨視的構成則を構築した。

(2) 弾性の場合には、各相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと同じであり、複合材料の巨視的な特性は相内の微視的な応力分布に依存しない。

(3) 塑性の場合には各相の平均応力と平均歪みの関係は均質材のそれと大きく異なり、複合材料の巨視的な特性は相内の微視的な応力分布に依存する。また、分布を考えない構成則は参照値から大きく離れ、特に介在相の体積分率が高くなれば一層顕著となる。

(4) 一方、微視的な応力分布をモデル化した本構成則は弾性および塑性に亙る全範囲において、また粒子の体積分率の値に関わらず参照値とよく一致している。

(5) 弾塑性以外においても損傷など、応力分布がメゾ領域的な剛性の非均質性を惹き起こす現象は、多くの複合材料に存在すると予想される。ここに紹介した統計分布を用いるモデル化手法は、それぞれの持つ微視的な現象の特質を考慮して他の非線形複合材料にも応用できる。

参考文献

- (5.1) M.Berveiller and A.Zaoui, "An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals", *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.26, p325-344, 1979
- (5.2) H.J.Bohm, F.G.Rammerstorfer, E.Weissenbek, "Some simple models for micromechanical investigations of fiber arrangement effects in MMCs", *Computational materials science* (Elsevier), Vol.1, P177-194, 1993
- (5.3) Y.J.M.Brechet, P.Dawson, J.D.Embury, C.Gsell, S.Suresh, H.-R.Wenk, "Recommendations on modeling polyphase plasticity: conclusions of panel discussions", *Materials science and*

- engineering (Switzerland), Vol.A175, NO.1-2, pp.1-5, Feb. 1994
- (5.4) P.G.Charalambides and R.M.Mcmeeking, "Finite element method simulation of crack propagation in a brittle microcracking solid", Mechanics of materials(North-Holland), Vol.6, p71-87, 1987
- (5.5) P.R.Dawson, A.Needleman, S.Suresh, "Issues in the finite element modeling of polyohase plasticity", Materials science and engineering (Switzerland), Vol.A175, no.1-2, pp.43-48, Feb.1994
- (5.6) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", Proc. of the Royal Society of London, Series A, Vol.241A, pp.376~396, 1957.
- (5.7) Zvi Hashin, "Analysis of composite materials², Journal of Applied Mechanics, Vol.50, pp.481-505, September 1983
- (5.8) R. Hill, " Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Plastic Polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, pp.89-101, 1965. Pergamon Press Ltd.
- (5.9) R.Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials", J.Mech.Phys.Solids,1965, Vol.13,pp.213-222
- (5.10) E.Kroner, "Zur plastischen verformung des vielkristalls", Acta metallurgica, Vol.9, February, 1961
- (5.11) T.Mori, K.Tanaka "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions", Acta, Metallurgica, Vol.21, pp. 571-574, May 1973.
- (5.12) T. Mura, P.C. Cheng "The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion", J. of Applied Mechanics, Transaction of ASME, pp.591-594, Dec. 1977.
- (5.13) T.Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
- (5.14) Hasuhide Nakayama, Shigeru Nagaki, Junya Fujimoto, "Plastic Deformation and Evaluation of Local Damage State of Perforated Sheets with Randomly Distributed Holes", 日本機学会論文集 (A編)、61 卷 604 号 (1996-12) , pp.133-139
- (5.15) S.R.Nutt and J.M.Duva, "A failure mechanism in Al-SiC composites", Scripta metallurgica, Vol.20, pp.1055-1058, 1986
- (5.16) Y.P. Qiu, G.J.Weng, "A Theory of Plasticity for Porous Materials and Particle-Reinforced Composites", J. of Applied Mechanics, Vol.59, pp.261-268, June 1992.
- (5.17) K.Takahashi and Tsu-Wei Chou, "Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composite

- with interfacial debonding", *Metallurgical Transactions A*, Vol.19A, pp.129-135, Jan.1988
- (5.18) Naoki Takano, Masaru Zako, "Microscopic simulation technique for composite materials using the homogenization method based on fixed grid", *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.61 (A), No.583, 平成7年3月
- (5.19) Naoki Takano, Masaru Zako, "Nonlinear analysis of woven fabric composite materials by homogenization method considering microscopic failure", 第24回、FRPシンポジウム講演論文集
- (5.20) G.P.Tandon, G.J.Weng, "A Theory of Particle-Reinforced Plasticity", *J. of Applied Mechanics; Transaction of ASME*, Vol.55, pp.126-135, March 1986.
- (5.21) G.P.Tandon, G.J.Weng, "Stress Distribution in and Around Spheroidal Inclusions and Voids at Finite Concentration", *J. of Applied Mechanics*, Vol.53, pp.511-518, Sept.1986.
- (5.22) Keiichiro TOHGO, Tetsuya TAGAWA, and Akio OTSUKA, "Analysis of elastic and elastic-plastic deformation behavior of two-phase sintered materials", *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.53, No.494, 昭62-10, pp.153-159, 1991.3
- (5.23) K.Wakashima and T.Mori, "Elastic and inelastic behavior of composites with multidirectionally oriented ellipsoidal reinforcements", *Proceedings of the 8th Riso international symposium on metallurgy and materials science*, pp543-548, Sept.1-11, 1987
- (5.24) Y.D. Wu, M.Nakagaki, H.Fukushima, "Study of Elastoplastic Constitutive Relation in Particles Dispersed Material", *Proc. Plasticity95*, pp.747-750, 1995.

付録：

(5-1) Tandon-Weng の弾塑性構成則

Tandon-Weng は塑性材料である母相の平均応力と非歪みの構成関係を非線形均質弾性材料に等価させ、非線形均質弾性材料のヤング率とポアソン係数は次のように与えられる。

$$E_0^s = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{\epsilon^p}{\sigma_y + h(\epsilon^p)^n}} \quad (a)$$

$$\nu_0^s = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu_1\right) \frac{E_0^s}{E_1} \quad (b)$$

ここで、 E_0^s 、 ν_0^s は非線形弾性等価材料のヤング率とポアソン係数である。 σ_y は母相材料の

降伏応力、 ϵ^p は相当塑性歪み、 h と n は母相材料の塑性係数である。 E_1 と ν_1 は母相材料のヤング率とポアソン係数である。式 (a)、(b) により、母相の等価材料の体積弾性係数とせん断弾性係数を次のように求めることができる。

$$K_0^s = \frac{E_0^s}{3(1-2\nu_0^s)} \quad (c)$$

$$G_0^s = \frac{E_0^s}{2(1+\nu_0^s)} \quad (d)$$

ここで、 K_0^s と G_0^s は等価母相材料のヤング率とポアソン係数を示す。

Tandon-Weng の理論によって、複合材料の弾塑性構成則を次のような体積弾性係数とせん断弾性係数で表す。

$$\frac{K_0^s}{K_1} = 1 + \frac{f(K_2 - K_1)}{(1-f)\alpha_0^s(K_2 - K_1) + K_1} \quad (e)$$

$$\frac{G_0^s}{G_1} = 1 + \frac{f(G_2 - G_1)}{(1-f)\beta_0^s(G_2 - G_1) + G_1} \quad (f)$$

ここで、 K_2 と G_2 は介在相材料のヤング率とポアソン係数を示す。球状粒子分散複合材料の α_0^s 、 β_0^s は次のように与えられる。

$$\alpha_0^s = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu_0^s}{1 - \nu_0^s} \quad (g)$$

$$\beta_0^s = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_0^s}{1 - \nu_0^s} \quad (h)$$

第6章

短繊維分散強化材料

要 旨

短繊維分散複合材料とはチョップド繊維(短く切った繊維)よりなる複合材料であり、複合材料の中では繊維と繊維が直接接触せず、それぞれ独立的に母相の中に分散した複合材料である。

短繊維分散複合材料は広い領域で使われている。例えば、宇宙船は大気圏突入時、空力加熱により千度以上の高温になる機首及び主翼の前縁部に炭素繊維とグラファイト母材の複合材料である強化カーボン・カーボン材が使われている。このような短繊維複合材料は軽量で、優れた耐熱性と遮熱性を持つ。また、航空機は安全性、快適性、経済性の向上、さらに燃料消費の大幅な低減を目指して、機体構造や翼の設計において最先端のカーボン繊維とエポキシ樹脂の複合材料、改良アルミニウム合金などの積極的な採用し、大幅な軽量化をもたらした。これらの繊維複合材料は繊維がランダムに配列されているものが多く、そのため、本章ではランダムに配列された繊維複合材料を中心に理論モデルを構築する。

第二章で紹介したように繊維分散複合材料に関する従来の理論はほとんどMori-Tanakaの混合則を用いて開発したものであるため、繊維の間に存在する剛性の干渉を考慮していない。HillとHashinは同一方向に並んでいる繊維複合材料について、異方性弾性理論を応用した。一般により複雑なランダム配列された繊維複合材料の構成則についてHill、Hashin、Tandon-WengとHatta-Tayaなどが理論研究を行った。Tandon-WengとHatta-Tayaらは介在相の外部領域を力学的に母相と同じ特性を持っているものと仮定して、Mori-Tanakaの混合則を利用して構成則を立てた。繊維の体積分率が大きい場合、また、繊維と母相の剛性比が大きい場合は粒子の場合と同様に、Mori-Tanakaの混合則を用いて開発した理論式の精度が低くなる問題がある。

本章では繊維の体積分率、繊維と母相の剛性比の全範囲に亘って、精度のよい構成則を開発する事を目的とする。

第四章で開発したSCCモデルは介在相の間の干渉による剛性を考慮するため、精度がよいモデルであることを証明した。ここでもSCCモデルを利用し、繊維分散複合材料の混合則と構成則を導出する。従来の理論と比較するため、繊維の配列方向、アスペクト比、剛性比などの影響について理論解析を行う。さらに、従来の理論と本研究で開発したモデルの結果を検証するため、二次元問題に関するメゾ・メカニクス解析も行い、三者の比較検討を行う。

§ 6.1 短繊維分散複合材料の弾性構成則

第六章で検討する短繊維複合材料は織物様な繊維強化複合材料と異なる、個々の繊維はそれぞれ独立している。短繊維複合材料の代表的なものにミクロンのオーダーのウィスカー状にして金属と混合し、HIP (Hot Isostatic Press) にて高温・高圧焼結した強化材である。ウィスカーは単結晶体であって理想強度を持ち、载荷能力を向上させる働きをする。マイクロオーダーで粉体混合するその製造過程において必然的に、ウィスカーの配向はランダムとする。

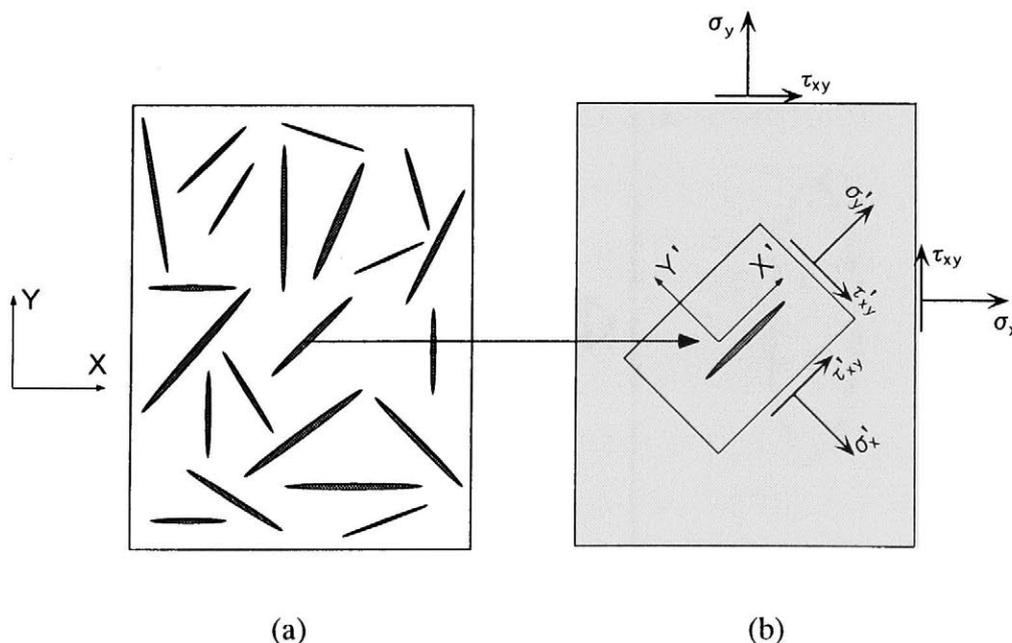


図 6-1-1, 平均化した複合体に含まれている参照繊維

6.1.1 繊維介在相に関する SCC 等価モデルの適用

繊維介在物は幾何学的に細く、粒子介在物と比べて、方向性が強いため、配向性の影響を考慮しなければならない。複合材料の中にランダムに配列されている繊維介在相の模式図を図 6-1-1a に示す。繊維の配置、配向、寸法は任意であると仮定する。繊維介在相の応力は配向性によって依存すると考え、同じ方向に配列しているすべての繊維は性能が等しいと仮定する。すなわち、一つの繊維の特性を理解すれば、同じ方向のすべての繊維の特性をそれによって代表することができると思う。図 6-1-1a に繊維複合材料の単繊維を長楕円によって示す。任意方向の介在物の挙動が複合材料剛性の変化に及ぼす影響を検討するため、一つの繊維に着目し、その外部領域を平均剛性と同様な均質媒体であるとする。この複合体について等価介在物理論を用い、図 6-1-1b に示す均質媒体中に存在する仮想粒子場に等価させる。特定方向に配列されている繊維の軸方向に従って図 6-1-1b に示すような局所座標を設定する。 σ_x 、 σ_y 、 σ_{xy} は基本座標下での応力量であり、 σ'_x 、 σ'_y 、 σ'_{xy} は局所座標下での応力を示す。

6.1.2 局所座標下での繊維介在物に関する応力-歪み混合則

図 6-1-1b に示す局所座標系の参照領域をとり、図 6-1-2a に示す。図 6-1-2a に示されて

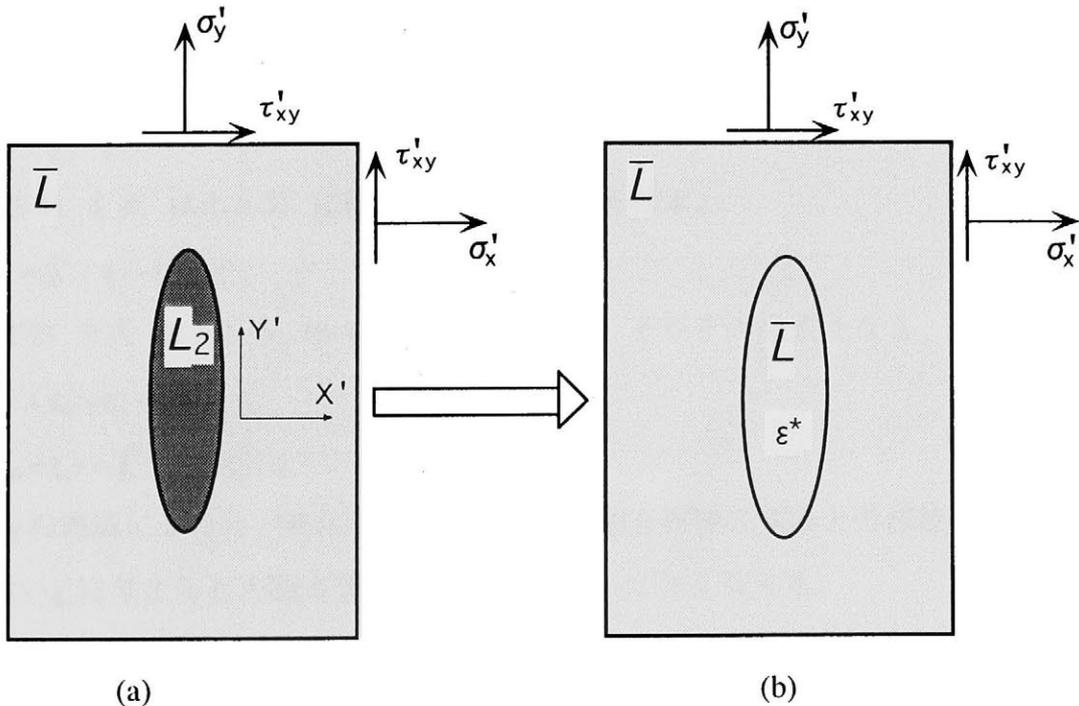


図 6-1-2 局部座標下での等価介在物法

いる繊維介在物の応力を求めるため、第四章に述べたSCCモデルによる等価介在物法を繊維介在物に適用する。即ち、図6-1-2aの繊維介在物の粒子の外部領域の平均媒体の剛性は複合材料の平均剛性と同じ。図6-1-2bに示す平均媒体と同じ剛性の等価介在物に適切な固有歪み ε^* を与える事より、図6-1-2aの実介在物と図6-1-2bの等価介在物の間に等価関係を樹立した。

図6-1-2bに示す等価介在物が固有歪みを有するため、等価介在物の応力、歪みは周囲の均質等価媒体の応力-歪みと異なり、次のように表すことができる。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_i \quad (6-1-2-1)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_i \quad (6-1-2-2)$$

σ_2 と ε_2 は繊維介在物の応力と歪み、 σ_0 と ε_0 は複合体の平均応力と平均歪み、 σ_i と ε_i はそれぞれ複合体平均値と繊維介在物間の応力と歪みの食い違いである。

先ず、等価関係を満足する実粒子または等価粒子の応力と歪みに関する構成式は次のように与えられる。

$$\sigma_2 = E_2 : \varepsilon_2 \quad (6-1-2-3)$$

複合体は巨視的に等方均質であると仮定し、局所系の複合体の平均応力と平均歪みには次の関係が成り立つ。

$$\sigma_0 = \hat{E} : \varepsilon_0 \quad (6-1-2-4)$$

ここで、 \hat{E} は複合体の巨視的な弾性材料マトリクスである。図6-1-2bに示す等価介在物は固有歪みを含むため、その応力と歪みは次のように表す事ができる。

$$\sigma_2 = \hat{E} : (\varepsilon_2 - \varepsilon^*) \quad (6-1-2-5)$$

式(6-1-2-3)を式(6-1-2-5)に代入すれば、次式を得る。

$$E_2 : \varepsilon_2 = \hat{E} : (\varepsilon_2 - \varepsilon^*) \quad (6-1-2-6)$$

式(6-1-2-2)を式(6-1-2-5)、(6-1-2-6)に用いると、それぞれ次式となる。

$$\sigma_2 = \hat{E} : (\varepsilon_0 + \varepsilon_i - \varepsilon^*) \quad (6-1-2-7)$$

$$E_2 : (\varepsilon_0 + \varepsilon_i) = \hat{E} : (\varepsilon_0 + \varepsilon_i - \varepsilon^*) \quad (6-1-2-8)$$

Eshelbyの理論によると、固有歪みを含む均質等価介在物の歪みと外部媒体の平均歪みの食い違い ε_i は与えられた固有歪みにより次のように与えられる。

$$\varepsilon_i = \hat{S} : \varepsilon^* \quad (6-1-2-9)$$

ここで、 \hat{S} は複合体の平均Eshelbyテンソル、具体的な表現式を付録6-1に示す。式(6-1-2-8)と式(6-1-2-9)とから、未知数の固有歪みを解いて次のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}_0 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (6-1-2-10)$$

ここで

$$\mathbf{A}_0 = [\mathbf{E}_2 : (\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_2)^{-1} : \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{E}}_0]^{-1} \quad (6-1-2-11)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{E}} : (\mathcal{I} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (6-1-2-12)$$

式 (6-1-2-4) により、式 (6-1-2-10) は次のように表す事ができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-2-13)$$

式 (6-1-2-13) と式 (6-1-2-9) を式 (6-1-2-7) に代入すると、介在相の応力は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \hat{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \hat{\mathbf{E}}_0 : \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-2-14)$$

式 (6-1-2-4) により、式 (6-1-2-14) は次のように表す事ができる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \hat{\mathbf{E}}_0 : \mathbf{A}_0] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-2-15)$$

局所系の介在相応力は、複合体の平均応力値を従って式 (6-1-2-15) により、表す事が出来る。

6.1.3 局所座標における応力の総座標への変換

図6-1-3に示す局所座標における複合体の応力と基準座標における複合体の応力は座標変換式により、次のように表される。

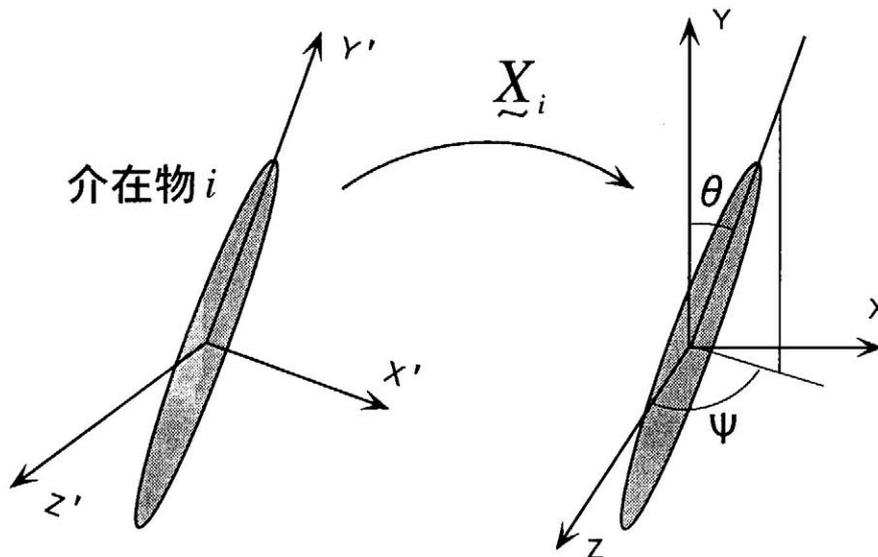


図 6-1-3 局所座標と基準座標における座標変換

$$\sigma_0^i = X_i : \sigma_0 \quad (6-1-3-1)$$

ここで、基準座標における特定方向の繊維介在物に関するものをすべて添字 (i) で表す。式 (6-1-3-1) の X_i は本座標から局部座標への応力変換テンソルである。式 (6-1-3-1) を式 (6-1-2-15) に代入すれば、局部座標における繊維介在物の応力は次のように表す事が出来る。

$$\sigma_2 = [I \otimes I + \hat{E}_0 : A_0] : X_i : \sigma_0 \quad (6-1-3-2)$$

繊維介在物応力の局所座標から基準座標への変換式は次のように与えられる。

$$\sigma_2^i = X_i^{-1} : \sigma_2 \quad (6-1-3-3)$$

ここで、 σ_2^i は基準座標における特定方向の繊維介在物の平均応力である。式 (6-1-1-2) を式 (6-1-1-3) に代入すれば、次式を得る。

$$\sigma_2^i = B^i : \sigma_0 \quad (6-1-3-4)$$

ここで

$$B^i = X_i^{-1} : [I \otimes I + \hat{E}_0 : A_0] : X_i \quad (6-1-3-5)$$

6.1.4 繊維介在相の平均応力

同様な方向に配列されているすべての介在物は以上の式を満足すると仮定し、平均則により介在相の応力は次式を満足する。

$$\sigma_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n \Delta c_2^i \sigma_2^i \quad (6-1-4-1)$$

ここで、 Δc_2^i は i 方向に配列されている介在物の体積分率を表し、次式の関係を満たす。

$$\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i = f \quad (6-1-4-2)$$

式 (6-1-3-5) を式 (6-1-4-1) に代入すれば、

$$\sigma_2 = \frac{1}{f} \left(\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i B^i \right) : \sigma_0 \quad (6-1-4-3)$$

となる。

複合体における応力の平均則は次式に与えられる。

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (6-1-4-4)$$

式 (6-1-4-3) を式 (6-1-4-4) に代入して母相の平均応力を解くと、母相の平均応力は次のように求められる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-f} [I \otimes I - \left(\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i B^i \right)] : \sigma_0 \quad (6-1-4-5)$$

式 (6-1-4-3) 及び (6-1-4-5) はそれぞれ基準座標系の平均介在相応力、平均母相応力と複合体応力との関係式である。

6.1.5 繊維分散複合材料の構成則

複合材料歪みの平均則は次式に与えられるとする。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1-f)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + f\boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (6-1-5-1)$$

母相と介在相材料それぞれの弾性構成則は次式で表される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (6-1-5-2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (6-1-5-3)$$

ここで、 $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{E}_1^{-1}$ は母相の弾性コンプライアンス、 $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{E}_2^{-1}$ は繊維介在相の弾性コンプライアンスである。式 (6-1-4-3)、(6-1-4-5) を式 (6-1-5-2)、(6-1-5-3) に代入して、母相と介在相の平均歪みが次のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1-f} \boldsymbol{L}_1 : [\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - (\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i \boldsymbol{B}^i)] : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-5-4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{f} \boldsymbol{L}_2 : (\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i \boldsymbol{B}^i) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-5-5)$$

式 (6-1-5-4)、(6-1-5-5) を式 (6-1-5-1) に代入して、複合材料の平均歪みと平均応力の関係を次のように得た。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-1-5-6)$$

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}_1 : [\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - (\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i \boldsymbol{B}^i)] + \boldsymbol{L}_2 : (\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i \boldsymbol{B}^i) \quad (6-1-5-7)$$

式 (6-1-1-31) は未知数 $\bar{\boldsymbol{L}}$ を両辺に含む Selfconsistent 形で表される非線形テンソル方程式である。これを収束計算により解く場合、以前と同じように初期値を与える必要がある。また繊維分散複合材料の場合、繊維のヤング率が高いため、複合材料の剛性の初期値を Voigt 構成則により与える方が望ましい。

§ 6.2 母相の局所性を考慮する繊維分散複合材料の構成則

繊維分散複合材料の繊維材料と比べて、母相材料の剛性と塑性降伏点は低い場合が多い。外荷重の増加によって、母相の塑性変形が発生する可能性は高い。しかし、著者の知る限り、今まで、短繊維分散複合材料の塑性挙動に関する論文はまだ存在しない。本章では、第五章に示した理論と同様のモデルを用い、繊維分散複合材料の塑性挙動に

ついて検討する。

ここで、繊維は弾性材料、母相が塑性材料と仮定する。弾性材料の場合に微視的な応力分布は材料巨視的な性能に影響を与えないため、繊維に関する微視的な応力分布を考える必要がない。第四章で取り扱ったようにによって、塑性材料の場合には微視的な応力分布は複合材料の巨視的な特性に大きな影響を与えるため、本節で母相の微視的な応力分布を考慮する。

先ず、複合材料の母相領域を多数の微小領域に分解する。微小領域中の応力と歪みは均一と仮定し、応力と歪みの関係は均質材料と同様と考える。そのため、任意の微小領域 l の内部で母相平均応力増分と平均歪み増分は次式を満足する。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\Gamma}_l' : d\boldsymbol{\sigma}_l \quad (6-2-1-1)$$

ここで、母相材料の材料係数は応力に依存するため、応力と歪みを増分で表す。 $\boldsymbol{\Gamma}_l'$ は微小領域中の材料の弾塑性コンプライアンスを示す。

微小領域 l の体積分率を $\Delta c_l'$ で表せば、微小領域の体積分率は次式を満足する。

$$\sum_{l=1}^m \Delta c_l' = 1 - f \quad (6-2-1-2)$$

ここで、 $1 - f$ は母相の体積分率である。母相の全領域に亘って平均した応力と歪みは次式を満足する。

$$d\boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{l=1}^m \Delta c_l' d\boldsymbol{\sigma}_l \quad (6-2-1-3)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{l=1}^m \Delta c_l' d\boldsymbol{\varepsilon}_l \quad (6-2-1-4)$$

式 (6-2-1-1) を式 (6-2-1-4) に代入すれば、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{l=1}^m \Delta c_l' \boldsymbol{\Gamma}_l' : d\boldsymbol{\sigma}_l \quad (6-2-1-5)$$

を得る。塑性変形の場合に上式の弾塑性コンプライアンス $\boldsymbol{\Gamma}_l'$ は定数ではないため、母相の平均応力と平均歪みの間に式 (6-1-1-27) に与えられるような構成則を直接に求める事ができず、微小領域の応力と全母相の平均応力の関係を求めなければならない。よって以前と同じように、微小領域の体積分率頻度と応力レベルの関係を次ように定義する。

$$\Delta c_l' = (1-f) P_l(\rho_l') \Delta \rho_l' \quad (6-2-1-6)$$

上式の ρ_l' は微小領域の無次元化した応力であり、 $P_l(\rho_l')$ は微小領域の体積分率に関する分布関数である。無次元化した応力は式 (5-2-1-3) に定義される。式 (6-2-1-6) を式 (6-2-1-2)

に代入すれば、微小領域の体積分率に関する分布関数は次式を満足する事が分かる。

$$\sum_{i=1}^n P_i(\rho_i') \Delta \rho_i' = 1 \quad (6-2-1-7)$$

母相微小領域の体積分率に関する分布関数と母相の平均応力が分かれば、母相の応力を決定する事ができるが、母相の平均応力を求めるため、介在相の平均応力を知る必要がある。繊維介在相は弾性材料であるので、前に与えられる介在相の応力に関する混合則を増分の形に直せば、そのまま用いる事ができる。そのため、繊維介在相の平均応力増分は次のように表す事ができる。

$$d\sigma_2 = \frac{1}{f} \left(\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i B^i \right) : d\sigma_0 \quad (6-2-1-8)$$

ここで、

$$B^i = X_i^{-1} : [I \otimes I + \hat{E}_0 : A_0^p] : X_i \quad (6-2-1-9)$$

である。また複合材料の弾塑性マトリクスに対して、

$$A_0^p = [E_2 : (\hat{D} - E_2)^{-1} : \hat{D} - \hat{E}_0]^{-1} \quad (6-2-1-10)$$

となる。ここで、 \hat{D} は複合材料の弾塑性マトリクスであるが、未知数として半復計算により解がなければならず、よい収束を得るため、適当な初期値を与える必要がある。

外荷重が変化する場合、複合材料の巨視的な平均応力の変化及び各相材料の応力の変化について、複合材料の応力平衡条件は次のように表せる。

$$d\sigma_0 = (1-f) d\sigma_1 + f d\sigma_2 \quad (6-2-1-12)$$

式 (6-2-1-8) を上式に代入して解くと、母相の平均応力増分が次のように得られる。

$$d\sigma_1 = \frac{1}{1-f} [I \otimes I - \left(\sum_{i=1}^n \Delta c_2^i B^i \right)] : d\sigma_0 \quad (6-2-1-13)$$

この様に、母相の平均応力増分と複合材料の巨視的な平均応力増分との関係が決定された。この時、母相の応力分布関数を導入して、微視領域の応力分布状態と複合材料の巨視的な挙動との関係を解析することができる。

弾塑性変形が起こる場合、複合材料の平均歪み増分と各相材料の平均歪み増分に関する平均則を次のように与える。

$$d\varepsilon_0 = (1-f) d\varepsilon_1 + f d\varepsilon_2 \quad (6-2-1-14)$$

繊維介在物は弾性材料であるため、材料係数は応力に依存せず、平均応力増分と平均歪み増分の間に弾性変形と等しい関係を持っているので、繊維の弾性構成則に関する式 (6-1-1-28) を増分形にすれば、繊維介在物の平均応力増分と平均歪み増分に関する構成則を

次のように得る。

$$d\varepsilon_2 = L_2 : d\sigma_2 \quad (6-2-1-15)$$

式 (6-2-1-5) と式 (6-2-1-15) を式 (6-2-1-14) に代入して、次式を得る。

$$d\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^m \Delta c_i' \Gamma_i' : d\sigma_i' + f L_2 : d\sigma_2 \quad (6-2-1-16)$$

又、式 (6-2-1-8) を上式に代入すれば、繊維分散複合材料の平均歪みは次のようなる。

$$d\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^m \Delta c_i' \Gamma_i' : d\sigma_i' + L_2 : \left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' B^i \right) : d\sigma_0 \quad (6-2-1-17)$$

母相の局所微視的な応力増分と母相の平均応力増分の間関係を次のように定義することができる。

$$d\sigma_i' = H^i : d\sigma_i \quad (6-2-1-18)$$

式 (6-2-1-13) を式 (6-2-1-18) に代入すれば、次式となる。

$$d\sigma_i' = \frac{1}{1-f} H^i : [I \otimes I - \left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' B^i \right)] : d\sigma_0 \quad (6-2-1-19)$$

上式において母相の微視的な応力増分と複合材料の巨視的な平均応力増分の関係が求められた。式 (6-2-1-19) を式 (6-2-1-17) に用い、複合材料の平均歪み増分と平均応力増分に関する構成則は最終的に以下のように決定することができる。

$$d\varepsilon_0 = \hat{\Gamma} : d\sigma_0 \quad (6-2-1-20)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{1-f} \left[\sum_{i=1}^m \Delta c_i' \Gamma_i' : H^i \right] : [I \otimes I - \left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' B^i \right)] + L_2 : \left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' B^i \right) \quad (6-2-1-21)$$

上式は、繊維分散複合材料に関して母相が弾塑性変形が起こる場合の構成則を示し、少々複雑な形ではあるが充分算定可能な式である。式 (6-2-1-21) の $\left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' B^i \right)$ の部分は繊維の配列分布に関する項で、 $\left(\sum_{i=1}^m \Delta c_i' \Gamma_i' : H^i \right)$ の部分は母相の微視的な応力分布に関する項である。数値計算においては、問題に応じて繊維の配列分布関数及び母相の微視的な応力分布関数を与える必要がある。

§ 6.3 弾性問題における理論解析例と結果

第六章のモデルを検討するため、繊維分散複合材料の二次元問題について理論モデルによる数値計算を行う。ここで、すべての繊維介在物は x-y 平面内に配列していると仮定し、繊維がランダム方向に分布しているとする。繊維分散複合体に対して二次元単軸引

張りを加える。引っ張り方向は Y 方向と仮定する。繊維の配列方向を表すため、繊維軸方向と Y 方向の夾角は θ で表示する。

6.3.1 材料係数値と座標変換テンソル

母材のヤング率とポアソン係数は次のよう与えられる。

$$E_1 = 2 \text{ GPa}, \quad \gamma_1 = 0.35 \quad (6-3-1-1)$$

繊維と母相の剛性比による影響を観察するため、繊維のヤング率は次の五ケースについて行った。ポアソン係数は一定とする。

$$E_2 = 4 \text{ GPa}, 20 \text{ GPa}, 40 \text{ GPa}, 200 \text{ GPa}, 2000 \text{ GPa}, \quad \gamma_2 = 0.18 \quad (6-3-1-2)$$

夾角 θ は次の条件を満足する。

$$-\psi \leq \theta \leq \psi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2 \quad (6-3-1-3)$$

二次元問題について、局所座標における複合体の平均応力 σ'_0 と規準座標における複合体の平均応力 σ_0 は座標変換式により、次のように表される。

$$\sigma'_0 = X_i : \sigma_0 \quad (6-3-1-4)$$

ここで、応力とをベクトル化し、次のように設定する。

$$\sigma'_0 = \{ \sigma'_{x_0} \quad \sigma'_{y_0} \quad \sigma'_{xy_0} \}^T \quad (6-3-1-5)$$

$$\sigma_0 = \{ \sigma_{x_0} \quad \sigma_{y_0} \quad \sigma_{xy_0} \}^T \quad (6-3-1-6)$$

座標変換テンソルは次式に与えられる。

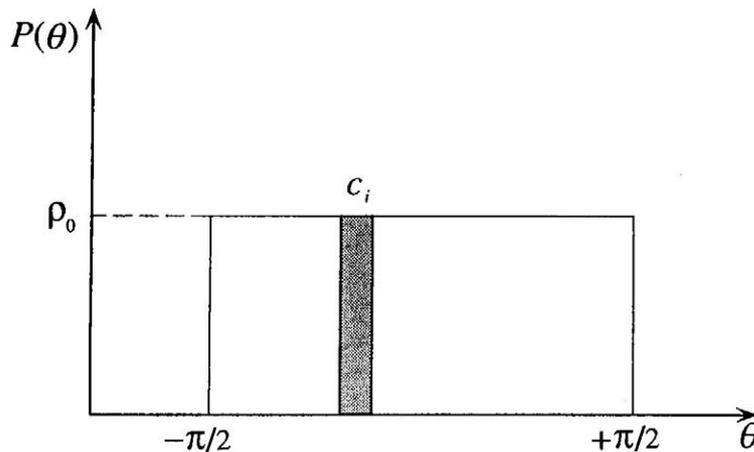


図 6-3-1 一様分布場合の体積分率頻度と配列方向

$$X_0 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta \sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta \sin\theta \\ -\cos\theta \sin\theta & \cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (6-3-1-7)$$

計算の初期値は voigt モデルにより、任意に次のように定義する。

$$L = \left[(1-f) L_1^{-1} + f L_2^{-1} \right]^{-1} \quad (6-3-1-8)$$

6.3.2 一様分布の場合

繊維介在物の配向分布に関する最も代表的な分布関数は図6-3-1に示されている一様分布であり、式(6-1-4-1)に示す繊維の配向に関する体積分率の関数は次のように与えられる。

$$\Delta c_2^i = \rho(\theta) \Delta\theta \quad (6-3-2-1)$$

ここで、

$$P(\theta) = \rho_0 \quad (6-3-2-2)$$

完全ランダムに分布している繊維分散複合材料の場合、繊維は全方向に分布しているの

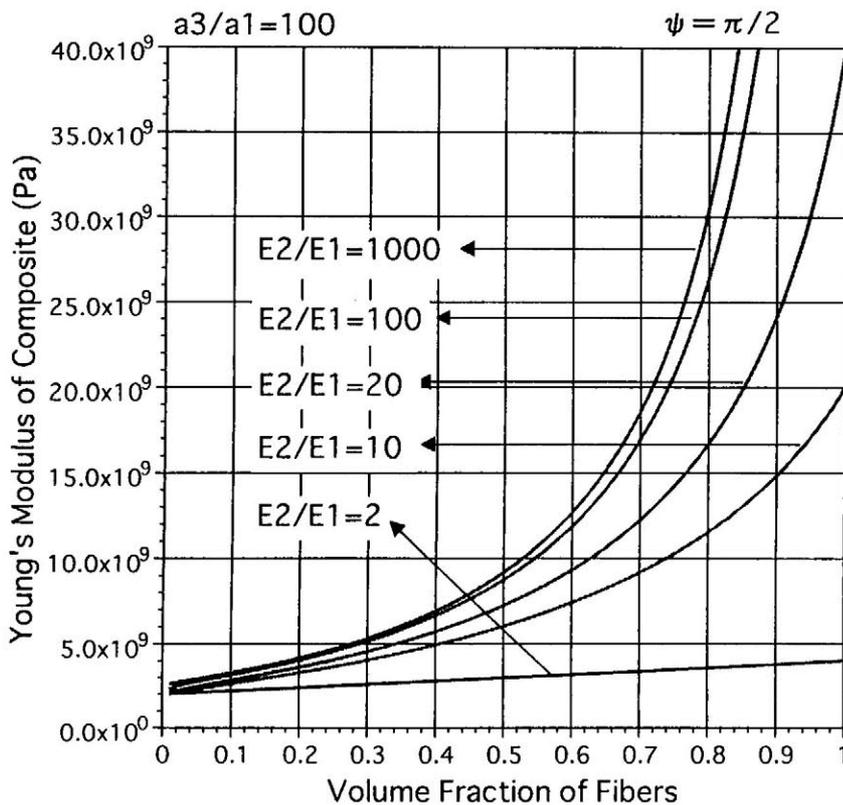


図 6-3-2 繊維が全方向に平均分布している複合材料の剛性に関する本モデルの結果

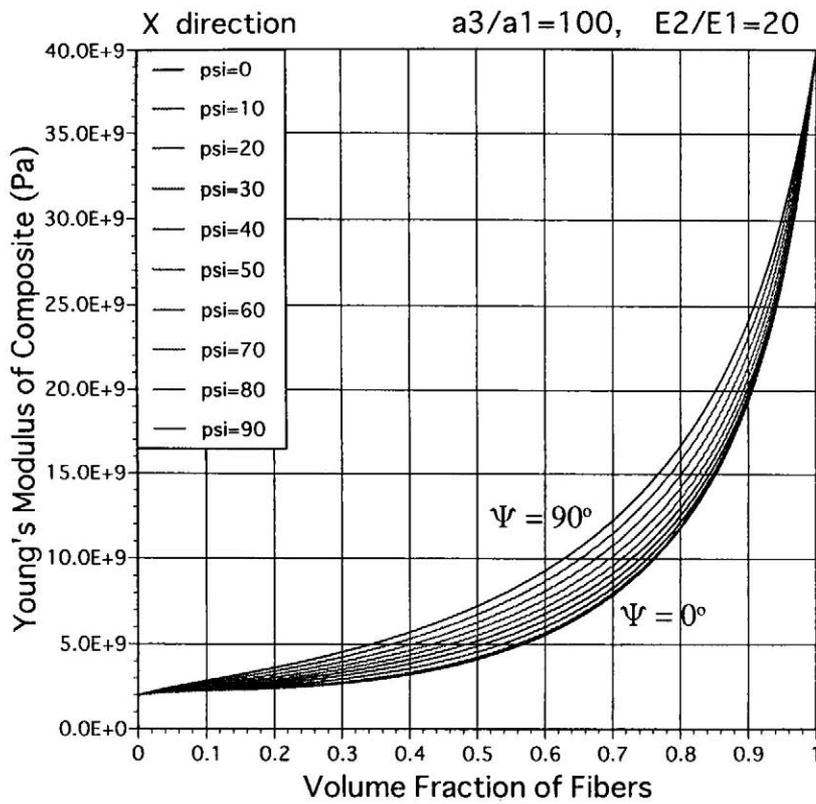


図 6-3-3 X 方向のヤング率

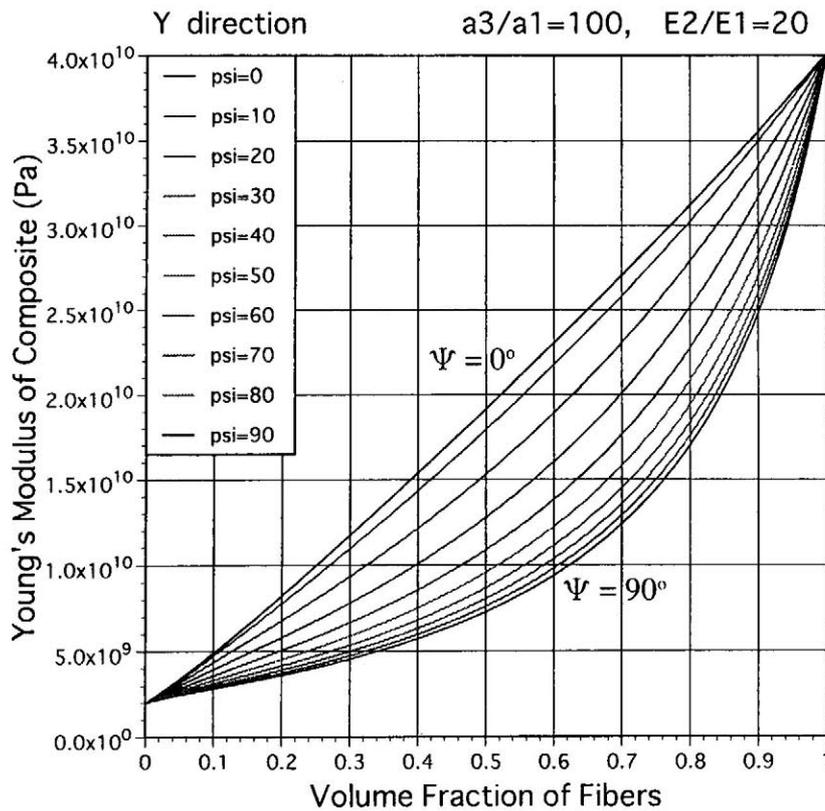


図 6-3-4 Y 方向のヤング率

で、 $\varphi = \pi/2$ 。又どの方向にも配向している繊維の量は同じである。そのため、完全ランダムに分布している繊維分散複合材料は巨視的に等方性を持つ事が分かる。即ち、Y方向の剛性とX方向の剛性は等しい。しかし、 $\psi < \pi/2$ の場合、複合材料の等方性は失われる。

繊維が全方向に一様分布している複合材料の剛性について、式(6-3-2-1)、(6-3-2-2)を本モデルの式(6-1-5-7)に代入して計算した結果を図6-3-2に示す。繊維の軸方向の長さ a_3 と断面の直径 a_1 の比であるアスペクト比 (Aspect ratio) が $a_3/a_1=100$ であるが、繊維が全方向に一様分布しているため、 $\psi = \pi/2$ 、また繊維のヤング率と母相のヤング率の比が $E_2/E_1=2, 10, 20, 100, 1000$ とする。

図6-3-2の横軸は繊維介在相の体積分率を示し、縦軸は複合体の平均剛性を示す。繊維が全方向に一様分布しており、複合体は巨視的に等方性を有するため、全方向の剛性が等しい。

体積分率が30%以下、又繊維のヤング率と母相のヤング率の比が100倍以上の場合、複合材料の剛性はあまり変わらない事が分かる。繊維のヤング率と母相のヤング率の比が非常に大きい場合、母相の方は比較的柔らかいので、複合材料に対する影響が大きいので、繊維の体積分率が低ければ、複合材料に対する繊維の強化効果はあまり顕著ではない。そのため、図6-3-2に示す繊維のヤング率と母相のヤング率の比が100と1000の場合の結果が極めて近い。

次に、繊維の配列方向が集中性を持つ複合材料の剛性について検討する。そこで、繊維アスペクト比は $a_3/a_1=100$ とし、繊維のヤング率と母相のヤング率の比が $E_2/E_1=20$ とする。配列方向に関するパラメタ ψ は $0 \sim \frac{\pi}{2}$ の間に変化させ、複合材料の剛性の変化を観察する。ここで、複合材料が方向配列範囲は $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ とする場合、Y方向とX方向の剛性をそれぞれ図6-3-3と図6-3-4に与える。縦軸は複合材料のヤング率を示し、横軸は繊維の体積分率を示すが、これら二つの図を比較すれば、繊維の配向性はX方向に比し、荷重軸方向の複合材料の剛性にに大きい影響を与える事が分かる。

パラメタ $\psi = 90^\circ$ の場合、図6-3-3のX方向のヤング率と図6-3-4のY方向のヤング率は等しい。パラメタ ψ の増加に従って、図6-3-3に示す複合材料のX方向の剛性も増加する。しかし、6-3-4に示す複合材料のY方向の剛性は大幅に小さくなる。

パラメタ $\psi = 0^\circ$ の場合、すべての繊維がY方向と平行している。図6-3-4に示す複合材料のY方向の剛性は繊維の体積分率比例関係を持っている事が分かるが、横方向、即ち

X方向のヤング率は繊維の体積分率に比例していない。

6.3.3 正規分布の場合

平均分布の場合の結果を示したが、次に図6-3-5に示す正規分布について検討する。正規分布場合の分布関数は次のように与えられている。

$$\Delta c_i = \rho(\theta) \Delta\theta \quad (6-3-3-1)$$

ここで、

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\phi} e^{-\frac{\theta^2}{2\phi^2}} \quad (6-3-3-2)$$

$$\phi = \frac{\Psi}{3} \quad (6-3-3-3)$$

正規分布の場合には方向によって配列している繊維の密度は異なり、複合材料の剛性は方向性が現れる。

ここで、繊維アスペクト比が $a_3/a_1=100$ 、パラメタ $\Psi=90^\circ$ として、繊維と母相の材料係数は式(6-1-2-1)、式(6-1-2-2)と等しいとする。複合材料のX方向のヤング率とY方向のヤング率について、正規分布における式(6-3-3-1)～(6-3-3-3)を式(6-1-5-7)に代入し、計算した結果を図6-3-6と図6-3-7に示す。縦軸は複合材料のヤング率、横軸は繊維の体積分率を示す。Y方向のヤング率はX方向のヤング率に比べて高く、複合材料の異方性が著しく現れる。

正規分布と平均分布を比較するため、繊維アスペクト比 $a_3/a_1=100$ 、パラメタ $\Psi=90^\circ$ 、

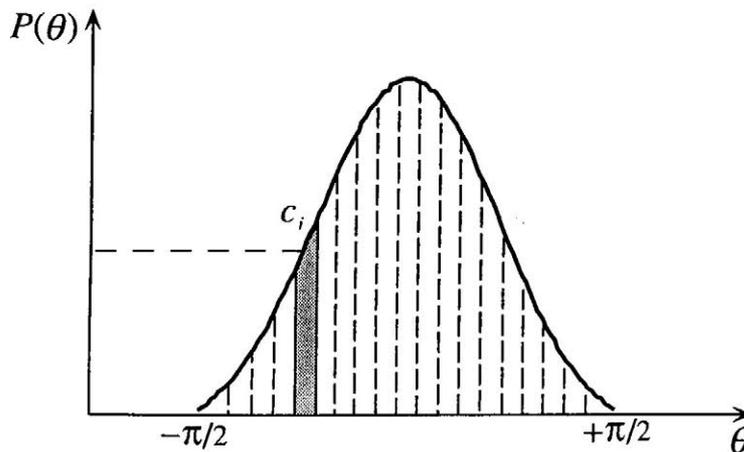


図 6-3-5 正規分布場合の体積分率頻度と配列方向

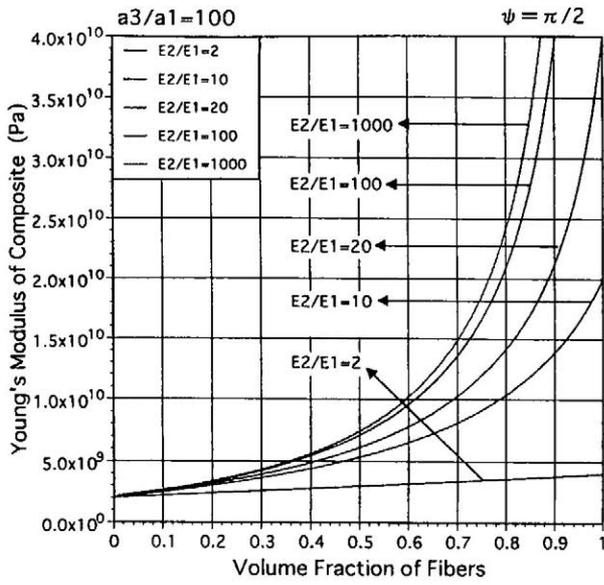


図 6-3-6 正規分布場合の X 方向のヤング率

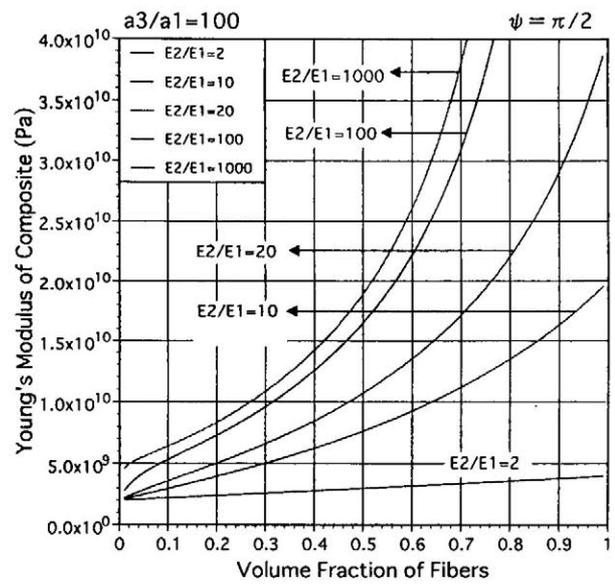


図 6-3-7 正規分布場合の Y 方向のヤング率

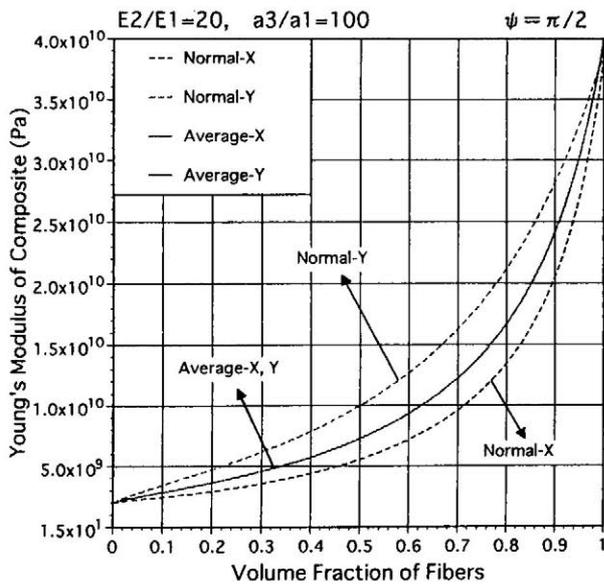


図 6-3-8 介在相と母相の剛性比は 20 の場合の平均分布と正規分布で計算した結果

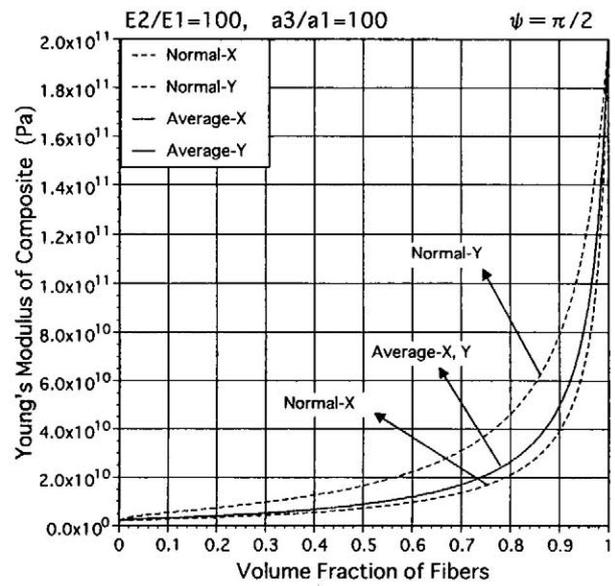


図 6-3-9 介在相と母相の剛性比は 100 の場合の平均分布と正規分布で計算した結果

母相と繊維のヤング率が $E_1 = 2 \text{ GPa}$ 、 $E_2 = 40 \text{ GPa}$ 及び $E_1 = 2 \text{ GPa}$ 、 $E_2 = 200 \text{ GPa}$ の場合について検討する。正規分布と一様分布モデルで計算した結果を図6-3-8、図6-3-9に示す。縦軸は複合材料のヤング率を示し、横軸は繊維の体積分率を示す。"Normal" は正規分布の結果で、"Average" は一様分布の結果である。"X" と "Y" は X 方向と Y 方向の事を示す。図6-3-8は繊維と母相のヤング率比が20の場合の結果を示す、図6-3-9は繊維と母相のヤング率比が100の場合の結果を示す。

実線で示す一様分布の場合、X方向とY方向のヤング率が同じなので、二つの結果が重なっている。しかし、点線で示す正規分布の結果の場合、繊維がY方向に集中する傾向があるため、Y方向のヤング率は大きく、逆にX方向のヤング率は小さい。

6.3.4 Tandon-Weng の理論との比較

繊維分散複合材料の弾性係数について、かつてTandon-Weng (付録6-2) はMori-Tanakaの混合則を用いて、理論解析を行った。ここで、二次元平面歪み単軸引っ張りについて、本モデルで解析した結果とTandon-Wengモデル及びメゾ・メカニクス解析で解析した結果を比較する。メゾ・メカニクス解析を行う場合の参照領域、メッシュと境界条件を§6.4に具体的に示す。

繊維の配列分布は式(6-3-2-2)に与える一様分布と仮定し、又、繊維アスペクト比 $a_3/a_1 = 100$ 、パラメタ $\Psi = 90^\circ$ 即ち全方向に分布しているとする、母相と繊維のヤング率がそれぞれ $E_1 = 2 \text{ GPa}$ 、 $E_2 = 40 \text{ GPa}$ 及び $E_1 = 2 \text{ GPa}$ 、 $E_2 = 200 \text{ GPa}$ 場合について、得た結果を図6-3-10、図6-3-11に示す。

縦軸は複合材料のヤング率、横軸は繊維の体積分率である。図6-3-10は繊維と母相のヤング率比が20の場合の結果、図6-3-11は繊維と母相のヤング率比が100の場合の結果を示す。点線はTandon-Wengの結果、実線は本モデルの式(6-1-5-7)で計算した結果、シンボルはメゾ・メカニクス解析の結果である。

繊維と母相のヤング率比が20倍、100倍の場合の結果を見ると、体積分率が低い場合、繊維材料の剛性の増加による複合材料の剛性の増加は顕著ではないことが分かる。Tandon-Wengの結果の曲線の形はほとんど変わらないが、本モデルで得た結果の曲線の形は繊維と母相のヤング率比の変化によって変化する。本モデルの結果はTandon-Wengの結果と著しく異なるが、繊維と母相のヤング率比が大きい場合に一層二つモデルの結果は大きく異なる事が分かる。この事はTandon-Wengのモデルの基本を、Mori-Tanakaの

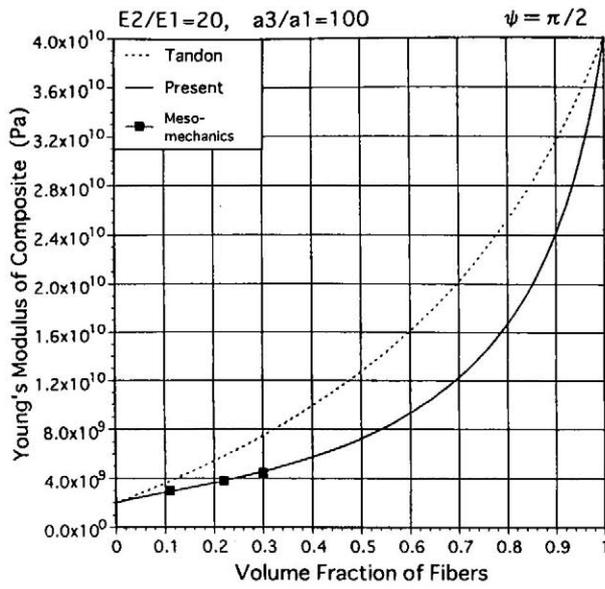


図 6-3-10 一様分布について本モデルと Tandon-Weng モデルの結果の比較：
繊維と母相の剛性比が 20 の場合

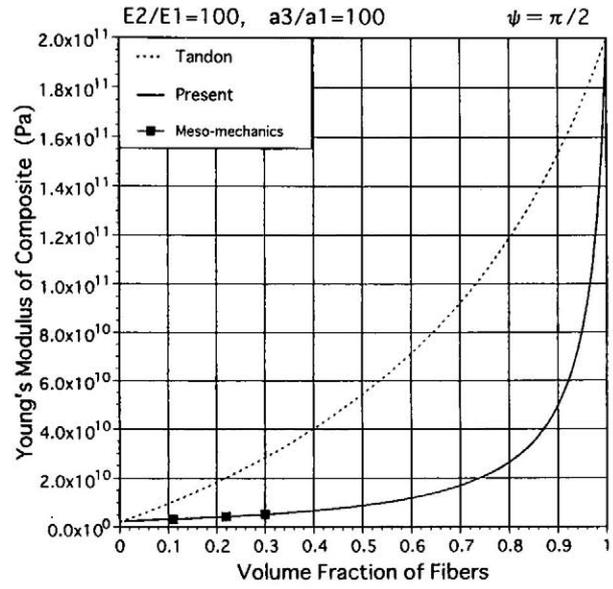
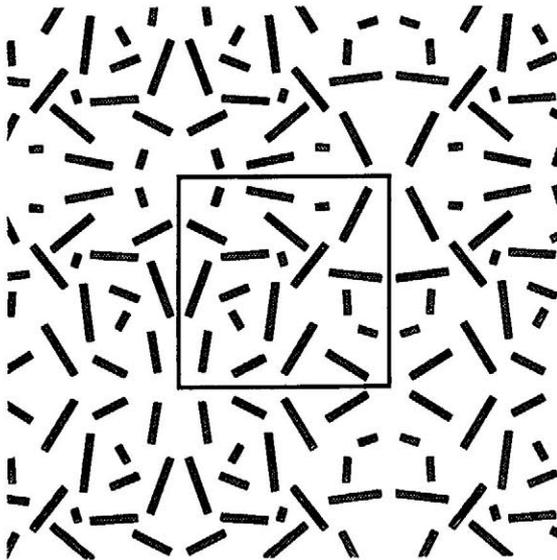
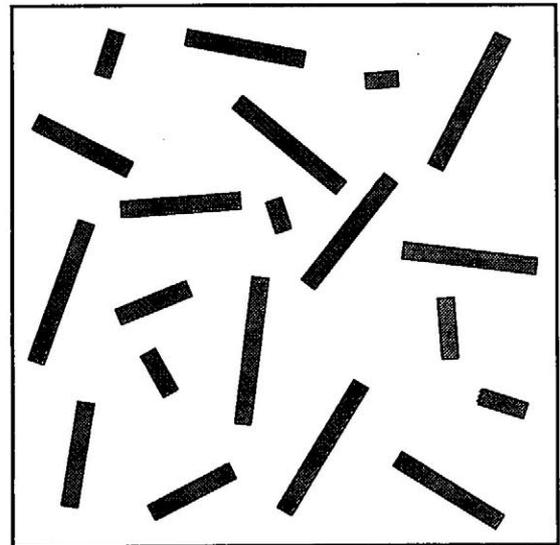


図 6-3-11 一様分布について本モデルと Tandon-Weng モデルの結果の比較：
繊維と母相の剛性比が 100 の場合



(a)



(b)

図 6-4-1 無限に広がる短繊維分散複合材料と有限要素法解析参照領域

混合則においている為である。そこで、真偽を確かめるため行ったメゾ・メカニクス解析の結果を見ると、繊維と母相のヤング率比が20倍、100倍の二つのケースについて、体積分率が11%、22%、30%の場合のメゾ・メカニクス解析を行って得たメゾ解析の参照値は Tandon-Weng の結果より本モデルの結果とよい一致している事が分かった。

§ 6.4 メゾ・メカニクス解析による数値計算解析結果

理論解析の結果を検証するため、メゾ・メカニクス解析を実施した。図6-4-1aに示す有限要素法解析モデルは十分なランダム性を持ち、無限に広い母材の中に繊維が分散した解析領域を表す。この繊維分散モデルは、短繊維の長さ、方向と位置をランダムに配置したものである。その一部を取り、図6-4-1bに示すような有限要素法によるメゾ・メカニクス解析の参照領域とする。繊維の体積分率は11.04%である。図6-4-2aに示すのは有限要素法解析参照領域におけるメッシュである、このメッシュに対して、周期無限境界条件を課し、単軸引っ張りをを行った。

実際に使われる材料と同じように母相、介在相にはそれぞれオーステナイト系ステンレス、チタン合金 ($Ti-6Al-4V$) を用いる。それぞれの材料係数を次の表に示す。

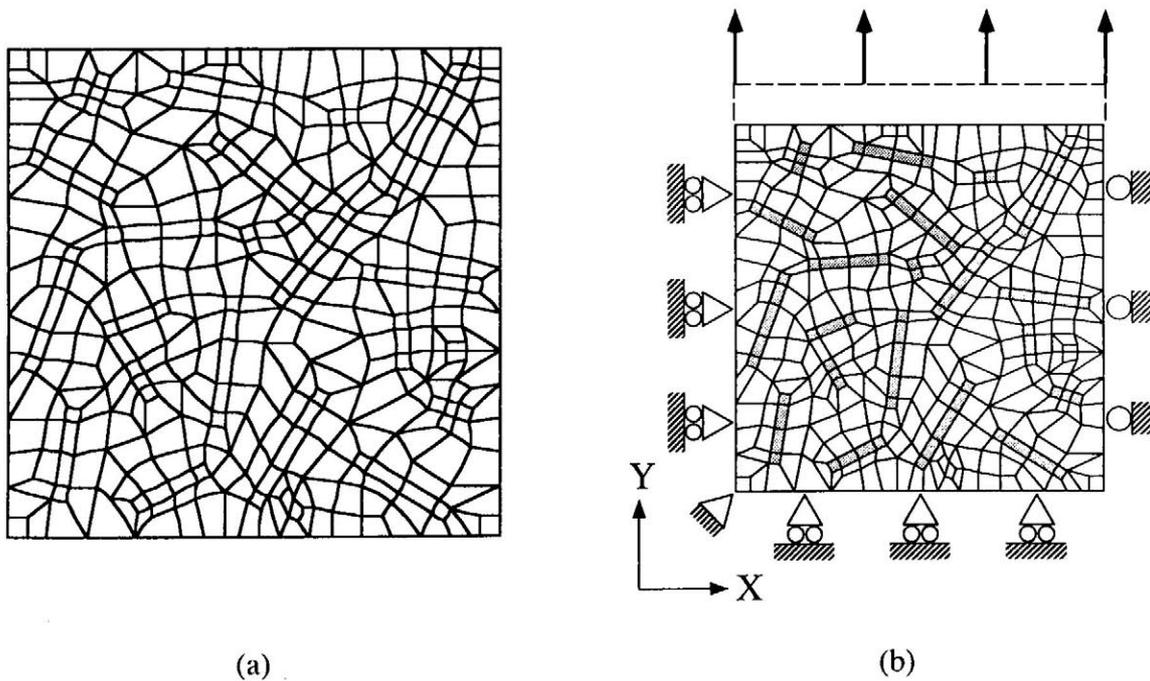


図6-4-2有限要素法解析参照領域におけるメシと y 軸方向単軸引っ張りの解析条件モデル

	ヤング率 [GPa]	ポアソン比	引っ張り強さ [MPa]	降伏応力 [MPa]
オーステナイト系 ステンレス	196	0.3	572.8	220.5
チタン合金	107.276	0.2975	1020.33	937.881

6.4.1 メゾ・メカニクス解析参照領域について

図6-4-2bのように解析参照領域に y 軸方向単軸引っ張りを行うに際し、条件は平面応力状態、変位制御により負荷する。拘束条件は、右端にペナルティー法による無限拘束条件を施し、材料上側に変位制御による荷重を負荷する。また、x 軸方向単軸引っ張りの場合には材料右側と材料上側の条件が入れ換わる。

メゾメカニクス解析で得た X 方向と Y 方向に関する複合材料巨視的な平均応力 - 平均歪みの曲線を図 6-4-3 と図 6-4-4 に示す。各図において縦軸は応力、横軸は歪みを表し、"matrix" と "whisker" はそれぞれ複合材料内の母相、介在相の平均応力であり、"total" は複合材料のマクロな応力を示している。点線は各ステップごとの母相、繊維をつないだものである。各ステップのマクロな応力は母相応力、繊維の応力を体積分率で内分した点となった。今回の結果によりマクロな応力が体積分率に比例する線形混合則が成立することが、同様な結論が得られることがわかった。

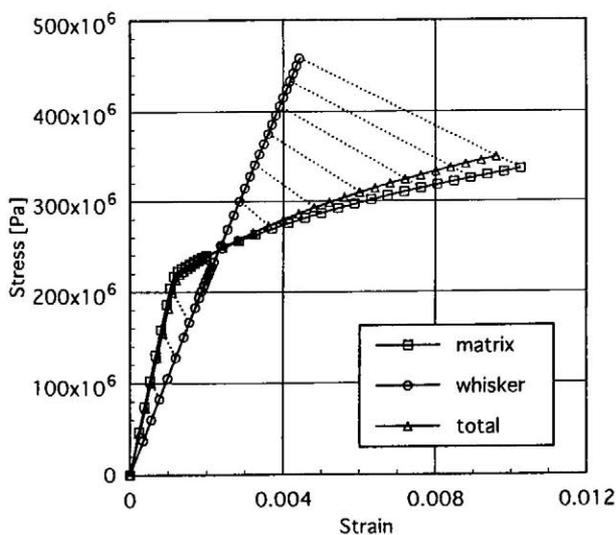


図6-4-3 x 軸方向単軸引っ張りの x 方向応力 - ひずみ線図

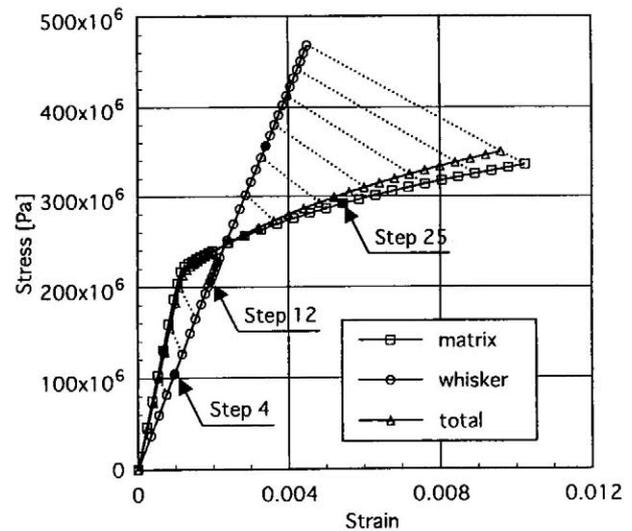


図6-4-4 y 軸方向単軸引っ張りの y 方向応力 - ひずみ線図

X、Y両軸方向に引っ張った結果はほぼ一致したので材料中の繊維の方向性に偏りがなくランダムに配置されていることが確認できた。

6.4.2 メゾ・メカニクス解析の結果と理論解析結果の比較

上の解析に使われているメゾメカニクス解析参照領域の方向性がない事が証明されたため、全方向に一様分布している繊維分散複合材料のメゾメカニクス解析モデルとして用いる事ができる。理論解析結果と比較するため、メゾ・メカニクス解析を行う時、次のような材料係数を用いる。

$$\text{母相 (Epoxy)}: \quad E_1 = 2 \text{ GPa}, \quad \gamma_1 = 0.35 \quad (6-4-2-1)$$

$$\text{介在相 (Silica)}: \quad E_2 = 40 \text{ GPa}, \quad \gamma_2 = 0.18 \quad (6-4-2-2)$$

添え字1および2は、それぞれ母相と介在相を表す。母相となる材料は、次式の塑性歪硬化則に従うとする。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y + h(\epsilon_p)^n \quad (6-4-2-3)$$

$\bar{\sigma}$ と ϵ_p は母相の相当応力と相当塑性歪みであり、塑性パラメータは、

$$\begin{aligned} \text{降伏応力} \quad \sigma_y &= 75.85 \text{ Mpa}, \\ \text{歪み硬化率} \quad h &= 32.18 \text{ Mpa}, \\ \text{歪み硬化指数} \quad n &= 0.26, \end{aligned} \quad (6-4-2-4)$$

であるとする。介在相は塑性変形が起きないと仮定する。

ここで、二次元平面歪み問題について、メゾ・メカニクス解析と理論解析を行う。理論解析を行う際、繊維の配列方向に関する分布関数について、図6-4-5に示されているような一様分布と正規分布を選択し、繊維体積分率をメゾ・メカニクス解析の場合と同じ、11.04%と設定する。又図6-4-5に示す繊維の配列方向とY軸の夾角に関する分布範囲は $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ とする場合、それぞれ計算したY軸の剛性を図6-4-6に示す。図の横軸は複合材料の平均歪み、縦軸は複合材料の平均応力である。

図6-1-6aは一様分布の場合の結果を示す。最上位曲線は $\psi = 0^\circ$ の際の結果であり、最下位実曲線は $\psi = 90^\circ$ の際の結果である。その間に順に $\psi = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ の際の結果を示す。点線はメゾ・メカニクス解析の結果である。理論解析 $\psi = 90^\circ$ 場合、複合体の繊維は全方向に一様分布していると考え。弾性段階の理論解析の結果はメゾ・メカニクス解析の結果とほとんど一致している。

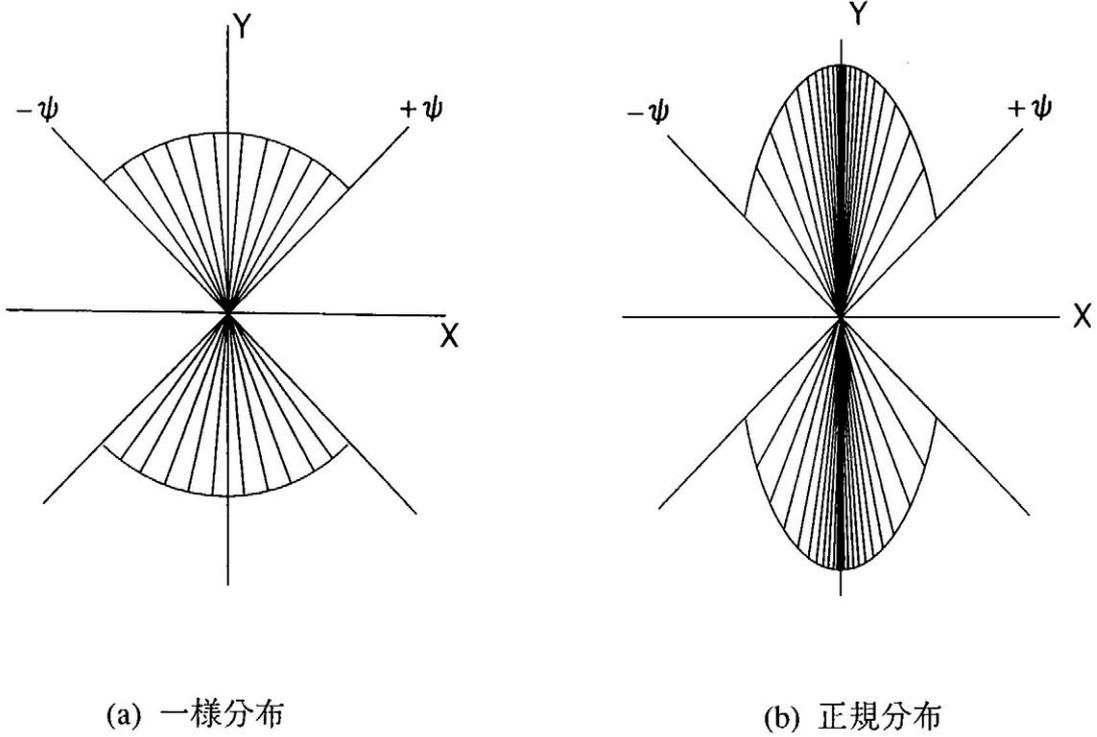


図6-4-5 繊維の配列方向に関する一様分布と正規分布

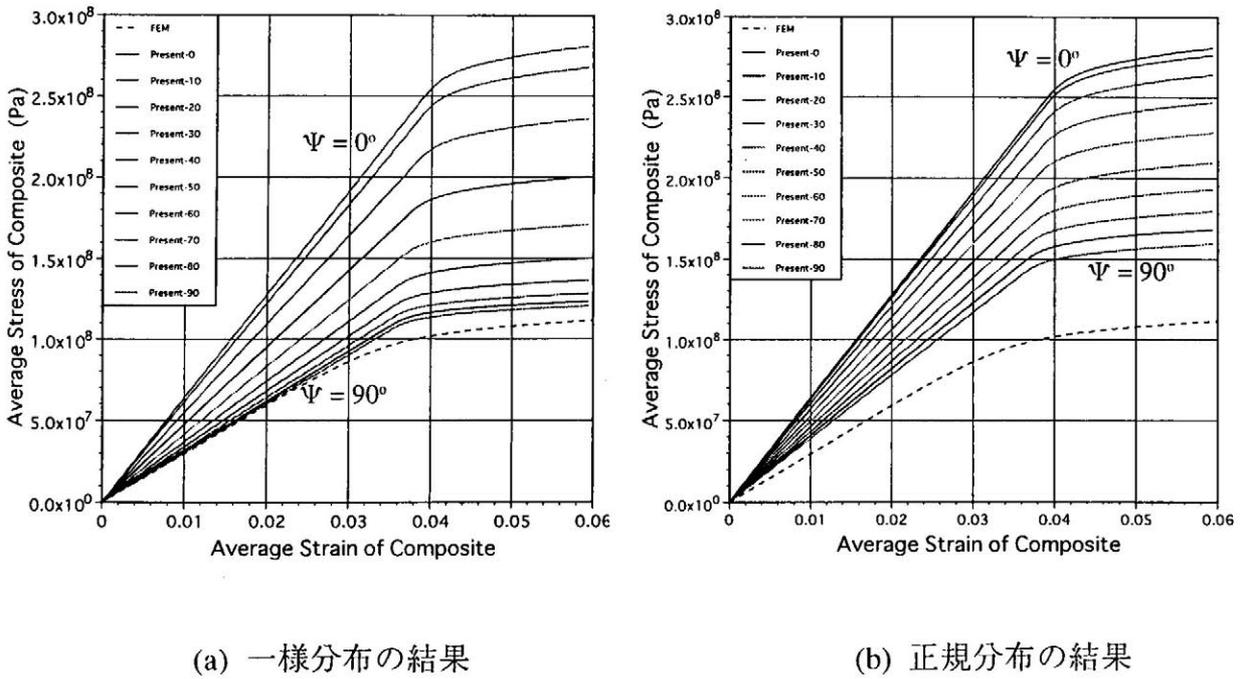


図6-4-6 メゾ・メカニクス解析の結果と一様分布と正規分布により得た理論解析の結果 (体積分率 11.04%)

図6-4-6bは正規分布の場合の結果を示す。図6-4-6aと同じように上から下まで順に $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ の際の結果を示す。点線は $\psi = 90^\circ$ と等しいメゾ・メカニクス解析の結果を示している。正規分布の場合に図6-4-5bに示すように、繊維の分布に集中性があり、複合体の方向性が一様分布している複合体よりも顕著である。そのため、 $\psi = 90^\circ$ 時でも、理論解析で得たY方向の剛性はメゾ・メカニクス解析の結果より大きい。

図6-4-6aに示す $\psi = 90^\circ$ 場合、理論解析結果の塑性降伏点はメゾ・メカニクス解析結果の塑性降伏点より高い。その理由は、本解析では第五章のような微視的な応力分布を考慮する解析方法をとっていないからである。理論解析とメゾ・メカニクス解析が塑性降伏点に関する違いは繊維の体積分率の増加にしたがって大きくなる事が予想される。この事は微視的な応力分布を考慮する事によって解決される。

§ 6.5 短繊維クラスタ分散強化材料における弾性構成則

§6.2で検討した繊維分散複合材料の繊維の配向がランダムに分布しているが、繊維の体積分率は一様分布している。実際の繊維分散複合材料は創成過程において図6-6-1に示すように島状に、繊維が分布する、いわゆるクラスタを形成する場合がある。本節では

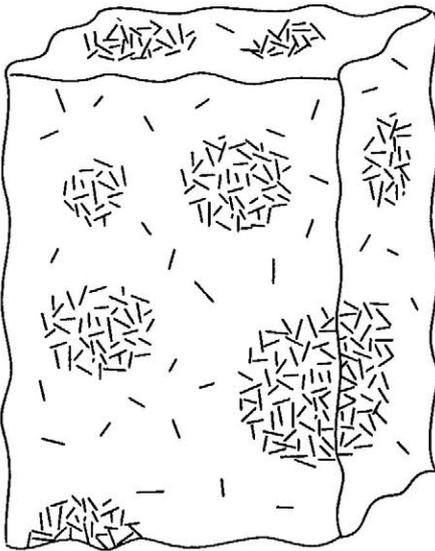


図6-5-1 体積分率が非一様分布している短繊維クラスタ分散複合材料

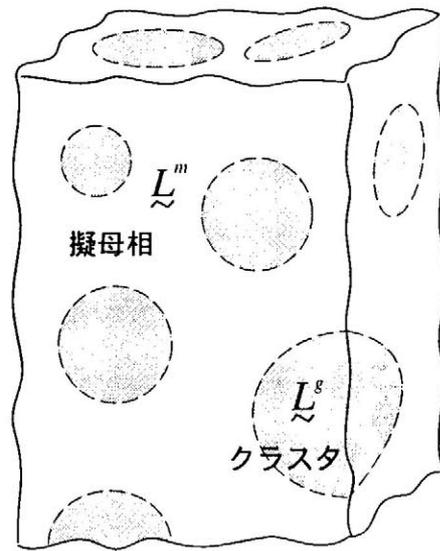


図6-5-2 体積分率が非一様分布している短繊維クラスタ分散複合材料の解析モデル

繊維の配向がランダム、密度がメゾ・レベルで変化する短繊維クラスタ介在相分散複合材料についてその構成則を立てる。

6.5.1 擬母相とクラスタ介在相の定義

まず、図6-5-1の短繊維分散複合材料を図6-6-2に示すようにモデル化し、繊維の密度が高い所をクラスタ (Cluster) 介在物とし、繊維の密度が低い所を擬 (Pseudo) 母相とする。擬母相とクラスタ介在相を添字 "m" と "g" で表す。そのため、擬母相とクラスタ介在相の弾性コンプライアンスを L^m と L^g とし、擬母相とクラスタ介在相の体積分率を f^m と f^g とする。ここで、擬母相とクラスタ介在相の体積分率は次式を満たす。

$$f^m + f^g = 1 \quad (6-6-1-1)$$

また、擬母相中の繊維介在物と母相の体積分率を f_2^m と $1 - f_2^m$ とし、クラスタ介在相の繊維介在物と母相の体積分率を f_2^g と $1 - f_2^g$ とする。

擬母相媒体とクラスタ介在相媒体を配向がランダムに分布している繊維分散複合体と考える。しかし、擬母相或いはクラスタ介在相である局所の複合体の特性は異なるため、理論解析を行う際、それぞれの剛性を求める必要がある。

6.5.2 クラスタ介在相と擬母相に関する混合則

図6-5-1に示している短繊維クラスタ介在相即ちクラスタ介在相の剛性における解析は § 6.3 に与えられ、次のように表す事ができる。

$$\epsilon_0^g = L^g : \sigma_0^g \quad (6-6-2-1)$$

$$L^g = L_1 : [I \otimes I - (\sum_{i=1}^n c_i^g B_i^g)] + L_2 : (\sum_{i=1}^n c_i^g B_i^g) \quad (6-6-2-2)$$

ここで、"g"は短繊維の塊に関する事を示す、 L^g は短繊維クラスタ介在相の平均コンプライアンスを表す。 L_1 と L_2 は母相と繊維のコンプライアンスである。式(6-6-2-2)の c_i^g は短繊維クラスタ介在相内部の特定方向に配列している繊維の体積分率を示す。 B_i^g も繊維の配列に関する関数であり、次のように与えられる。

$$B_i^g = X_i^{g-1} : [I \otimes I + E_0^g : A_0^g] : X_i^g \quad (6-6-2-3)$$

上式の X_i^g は特定方向に配列している繊維に関する局所座標と基準座標の変換テンソルである。 E_0^g は繊維分散クラスタ介在相の平均Eshelby拘束テンソルであり、次式で表される。

$$\underline{E}_0^s = \underline{E}^s : (\underline{S}^s - \underline{I} \otimes \underline{I}) \quad (6-6-2-4)$$

A_0^s は等価条件を満たす均質等価介在物の持つ固有歪みのテンソル量で、次のように与えられる。

$$A_0^s = [\underline{E}_2 : (\underline{E}^s - \underline{E}_2)^{-1} : \underline{E}^s - \underline{E}_0^s]^{-1} \quad (6-6-2-5)$$

繊維クラスタ介在相内部の平均応力を $\underline{\sigma}_0^s$ で表せば、任意方向に配列している繊維の応力は § 6.3 の解析により、

$$\underline{\sigma}_2^{i,s} = \underline{B}_i^s : \underline{\sigma}_0^s \quad (6-6-2-6)$$

となる。すべての繊維の応力を平均すると、次のようになる。

$$\underline{\sigma}_2^s = \frac{(\sum_{i=1}^n c_i^s \underline{B}_i^s) : \underline{\sigma}_0^s}{\sum_{i=1}^n c_i^s} \quad (6-6-2-7)$$

繊維クラスタ介在相内部の母相領域の平均応力は次のように与えられる。

$$\underline{\sigma}_1^s = \frac{[\underline{I} \otimes \underline{I} - (\sum_{i=1}^n c_i^s \underline{B}_i^s)] : \underline{\sigma}_0^s}{1 - \sum_{i=1}^n c_i^s} \quad (6-6-2-8)$$

クラスタ介在相の場合と同じ方法で、図6-6-1に示す擬母相の構成則と混合則における理論混合則は § 6.3 より、次のように表す事ができる。

$$\underline{\epsilon}_0^m = \underline{L}^m : \underline{\sigma}_0^m \quad (6-6-2-9)$$

$$\underline{L}^m = \underline{L}_1 : [\underline{I} \otimes \underline{I} - (\sum_{j=1}^k c_j^m \underline{B}_j^m)] + \underline{L}_2 : (\sum_{j=1}^k c_j^m \underline{B}_j^m) \quad (6-6-2-10)$$

ここで、" m " は擬母相に関する事を示す、 \underline{L}^m は擬母相の平均コンプライアンスを表す。式(6-6-2-10)の c_j^m は短繊維クラスタ介在相内部の i 方向に配列している繊維の体積分率を示す。 \underline{B}_j^m は擬母相内部の繊維の配列に関する関数であり、次のように与えられる。

$$\underline{B}_j^m = \underline{X}_j^{m-1} : [\underline{I} \otimes \underline{I} + \underline{E}_0^m : \underline{A}_0^m] : \underline{X}_j^m \quad (6-6-2-11)$$

上式の \underline{X}_j^m は繊維の配向に関する局所座標と基準座標の変換テンソルである。 \underline{E}_0^m は擬母相の平均 Eshelby 拘束テンソルで、次式で表される。

$$\underline{E}_0^m = \underline{E}^m : (\underline{S}^m - \underline{I} \otimes \underline{I}) \quad (6-6-2-12)$$

A_0^m は等価条件を満たす均質等価介在物の持つ固有歪みのテンソルで、次のように与えられる。

$$\underline{A}_0^m = [\underline{E}_2 : (\underline{E}^m - \underline{E}_2)^{-1} : \underline{E}^m - \underline{E}_0^m]^{-1} \quad (6-6-2-13)$$

擬母相内部の平均応力は $\underline{\sigma}_0^s$ で表せば、 i 方向に配列している繊維の応力は § 6.3 より、

$$\underline{\sigma}_2^{j,m} = \underline{B}_j^m : \underline{\sigma}_0^m \quad (6-6-2-14)$$

となる。 $\underline{\sigma}_0^m$ は擬母相内の平均応力である。擬母相内部のすべての繊維の応力を平均すると、次式のようになる。

$$\underline{\sigma}_2^m = \frac{(\sum_{j=1}^k c_j^m \underline{B}_j^m) : \underline{\sigma}_0^m}{\sum_{j=1}^k c_j^m} \quad (6-6-2-15)$$

擬母相内部の母相領域の平均応力は次のように与えられる。

$$\underline{\sigma}_1^m = \frac{[\underline{I} \otimes \underline{I} - (\sum_{j=1}^k c_j^m \underline{B}_j^m)] : \underline{\sigma}_0^m}{1 - \sum_{j=1}^k c_j^m} \quad (6-6-2-16)$$

6.5.3 短繊維クラスタ介在相分散複合材料に関する混合則

図 6-5-2 のクラスタ介在相の平均応力を $\underline{\sigma}_0^s$ で示す。4.4.3 での SCC モデルに基づく理論展開より、クラスタ介在相と擬母相平均応力 $\underline{\sigma}_0^s, \underline{\sigma}_0^m$ は次のようになる。

$$\underline{\sigma}_0^s = [\underline{I} \otimes \underline{I} + \underline{\bar{E}}_0 : \underline{\bar{A}}_0] : \underline{\sigma}_0 \quad (6-6-3-1)$$

$$\underline{\sigma}_0^m = \left[\underline{I} \otimes \underline{I} - \frac{f^s}{f^m} \underline{\bar{E}}_0 : \underline{\bar{A}}_0 \right] : \underline{\sigma}_0 \quad (6-6-3-2)$$

ここで、 $\underline{\sigma}_0$ は複合材料の巨視的な平均応力である。 $\underline{\bar{E}}_0$ は複合材料の巨視的な平均 Eshelby 拘束テンソルであるが、 $\underline{\bar{E}}_0$ と $\underline{\bar{A}}_0$ はすでに次式によって与えられている。

$$\underline{\bar{E}}_0 = \underline{\bar{E}} : (\underline{\mathcal{S}} - \underline{I} \otimes \underline{I}) \quad (6-6-3-3)$$

$$\underline{\bar{A}}_0 = \left[(\underline{L}_2 - \underline{\bar{L}})^{-1} - \underline{\bar{E}}_0 \right]^{-1} \quad (6-6-3-4)$$

式 (6-6-3-3) の $\underline{\bar{E}}$ と $\underline{\mathcal{S}}$ は複合材料の平均剛性と平均 Eshelby テンソルであり、 $\underline{\bar{L}}$ は求めるべき複合体のコンプライアンスである。式 (6-6-3-1) を式 (6-6-2-7)、(6-6-2-8) に代入すると、両式は次のようになる。

$$\sigma_2^s = \frac{(\sum_{i=1}^n c_i B^i) : [I \otimes I + \bar{E}_0 : \bar{A}_0] : \sigma_0}{\sum_{i=1}^n c_i} \quad (6-6-3-5)$$

$$\sigma_1^s = \frac{[I \otimes I - (\sum_{i=1}^n c_i B^i)] : [I \otimes I + \bar{E}_0 : \bar{A}_0] : \sigma_0}{1 - \sum_{i=1}^n c_i} \quad (6-6-3-6)$$

また、式 (6-6-3-2) を式 (6-6-2-15)、(6-6-2-16) に代入すると、両式は次のようになる。

$$\sigma_2^m = \frac{(\sum_{j=1}^k c_j^m B_j^m) : [I \otimes I - \frac{f^s}{f^m} \bar{E}_0 : \bar{A}_0] : \sigma_0}{\sum_{j=1}^k c_j^m} \quad (6-6-3-7)$$

$$\sigma_1^m = \frac{[I \otimes I - (\sum_{j=1}^k c_j^m B_j^m)] : [I \otimes I - \frac{f^s}{f^m} \bar{E}_0 : \bar{A}_0] : \sigma_0}{1 - \sum_{j=1}^k c_j^m} \quad (6-6-3-8)$$

複合材料とクラスタ、擬母相間の平均歪みの間には次の関係があるとする事ができる。

$$\epsilon_0 = f^m \left[\sum_{j=1}^k c_j^m \epsilon_2^m + (1 - \sum_{j=1}^k c_j^m) \epsilon_1^m \right] + f^s \left[\sum_{i=1}^n c_i^s \epsilon_2^s + (1 - \sum_{i=1}^n c_i^s) \epsilon_1^s \right] \quad (6-6-3-9)$$

ここで、 ϵ_2^m と ϵ_2^s はそれぞれ擬母相とクラスタ介在相内部の繊維介在相の平均歪みである。
 ϵ_1^m と ϵ_1^s はそれぞれ擬母相とクラスタ介在相介在相内部の母相材料相の平均歪みである。

本節では弾性変形のみを取り扱い、弾性の場合の材料係数は定数として、擬母相内の母相と繊維の平均応力と平均歪みの構成則を次のように示す。

$$\epsilon_1^m = L_1 : \sigma_1^m \quad (6-6-3-10)$$

$$\epsilon_2^m = L_2 : \sigma_2^m \quad (6-6-3-11)$$

また、クラスタ球状粒子内部の母相材料と繊維の平均応力と平均歪みの構成則を次のように示す。

$$\epsilon_1^s = L_1 : \sigma_1^s \quad (6-6-3-12)$$

$$\epsilon_2^s = L_2 : \sigma_2^s \quad (6-6-3-13)$$

さらに、複合材料の全体平均歪みと平均応力の巨視的な関係を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (6-6-3-14)$$

式 (6-6-1-10) ~ (6-6-1-14) を式 (6-6-1-9) に代入して、

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{\sigma}_0 = & f^m \left[\sum_{j=1}^k c_j^m \boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2^m + (1 - \sum_{j=1}^k c_j^m) \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1^m \right] \\ & + f^s \left[\sum_{i=1}^n c_i^s \boldsymbol{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2^s + (1 - \sum_{i=1}^n c_i^s) \boldsymbol{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1^s \right] \end{aligned} \quad (6-6-3-15)$$

となる。また、式 (6-6-3-5)、(6-6-3-6)、(6-6-3-7)、(6-6-3-8) を上式に代入して、式 (6-6-3-14) に関する複合材料の巨視的な構成則は次のように求められた。

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{L}} = & \{ f^m \boldsymbol{L}_2 : (\sum_{j=1}^k c_j^m \boldsymbol{B}_j^m) + f^m \boldsymbol{L}_1 : [I \otimes I - (\sum_{j=1}^k c_j^m \boldsymbol{B}_j^m)] \} : [I \otimes I - \frac{f^s}{f^m} \bar{\boldsymbol{E}}_0 : \bar{\boldsymbol{A}}_0] \\ & + \{ f^s \boldsymbol{L}_2 : (\sum_{i=1}^n c_i^s \boldsymbol{B}_i^s) + f^s \boldsymbol{L}_1 : [I \otimes I - (\sum_{i=1}^n c_i^s \boldsymbol{B}_i^s)] \} : [I \otimes I + \bar{\boldsymbol{E}}_0 : \bar{\boldsymbol{A}}_0] \end{aligned} \quad (6-6-3-16)$$

式 (6-6-3-16) によりコンプライアンスの計算を行う時、先ず、擬母相材料とクラスタ介在相内部の繊維の配向に関する分布関数を決定する。そして、SCCモデルの場合と同じように収束計算を行い、複合材料の巨視的なコンプライアンスを求めることができる。

6.5.4 短繊維クラスタ介在相分散複合材料に関する理論モデルの解析

構築した構成則で短繊維クラスタ介在相分散複合材料材料の挙動について理論モデルの数値解析を行う。図6-6-1に示す短繊維クラスタ介在相分散複合材料材料の中で繊維が全方向にランダム配列していると仮定する。そのため、図6-6-1に示す擬母相とクラスタ介在相は等方性を持つと考える。

解析には、実際の材料を用い、材料係数を次の通りとする。

母相 (オーステナイト系ステンレス)

$$\text{ヤング率: } 107.3 \text{ GPa} \quad \text{ポアソン係数: } 0.2975 \quad (6-6-4-1)$$

介在相 (チタン合金)

$$\text{ヤング率: } 196.0 \text{ GPa} \quad \text{ポアソン係数: } 0.3 \quad (6-6-4-2)$$

まず、比較する目的において、複合材料の内部の繊維が一様に分布している場合、即ち、§ 6.1の式 (6-1-5-7) で記述される平均剛性の結果を図6-6-1に示す。繊維の体積分率

の増加にしたがって、繊維分散複合材料の剛性も単調に増加する。母相と介在相の剛性が余り変わらないため、結果は直線に近い。剛性比の影響については後節に委ね、本節では繊維の密度の分布を検討する。

次に繊維の密度の分布の影響について検討する。まず、クラスタ介在相の内部の繊維の密度を高く設定すると同時に、擬母相の内部の繊維の密度を小さく設定する。ここで、四つのケースについて検討する。

$$\textcircled{1} \quad f_2^s = 0.8, \quad f_2^m = 0 \quad (6-6-4-3)$$

$$\textcircled{2} \quad f_2^s = 0.8, \quad f_2^m = 0.1 \quad (6-6-4-4)$$

$$\textcircled{3} \quad f_2^s = 0.8, \quad f_2^m = 0.2 \quad (6-6-4-5)$$

$$\textcircled{4} \quad f_2^s = 0.8, \quad f_2^m = 0.3 \quad (6-6-4-6)$$

クラスタ介在相と擬母相の内部の繊維が全方向に平均分布していると仮定する。式(6-6-4-3)～式(6-6-4-6)をそれぞれ式(6-6-3-16)に用いて、数値計算した結果を図6-6-2に示す。横軸はクラスタ介在相の体積分率、縦軸は複合材料の巨視的ヤング率を示す。クラスタ介在相の内部では繊維の密度が一定であるが、仮想の内部に繊維の密度を変化させれば、得られた複合材料の巨視的な剛性も変化する。

クラスタ介在相の体積分率が100%になる場合、四つの結果は当然同じ点に収束する。

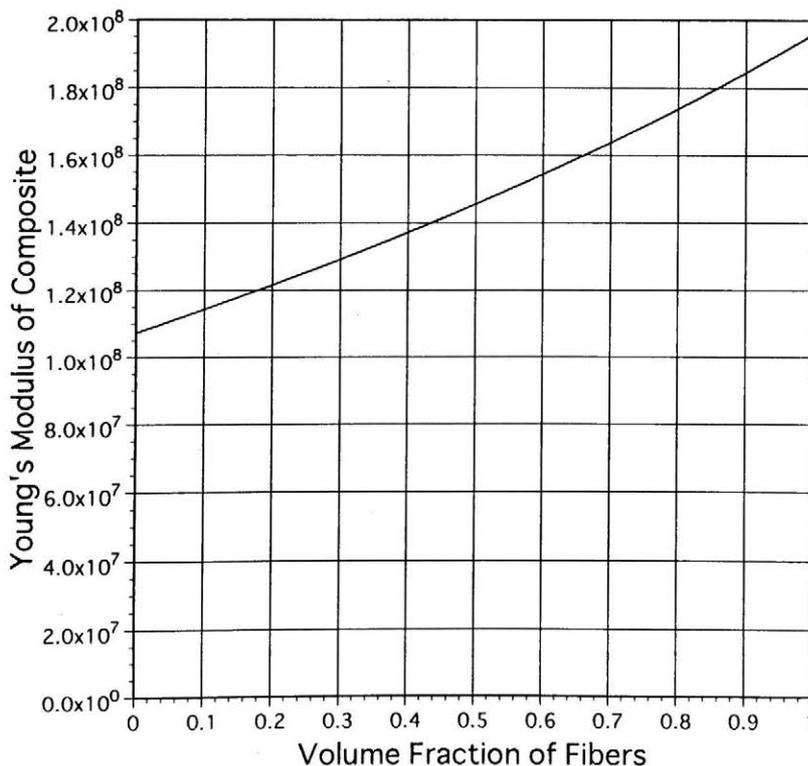


図 6-5-3 繊維の密度一様分布している場合の複合材料の平均弾性係数

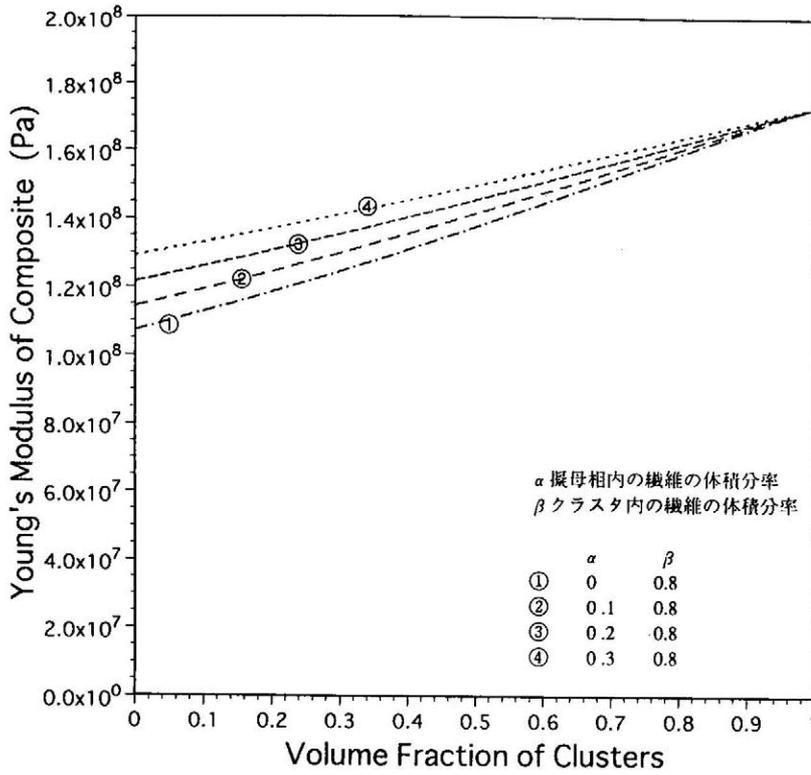


図 6-5-4 $E^s > E^m$ の場合の繊維クラスタ分散複合材料の剛性

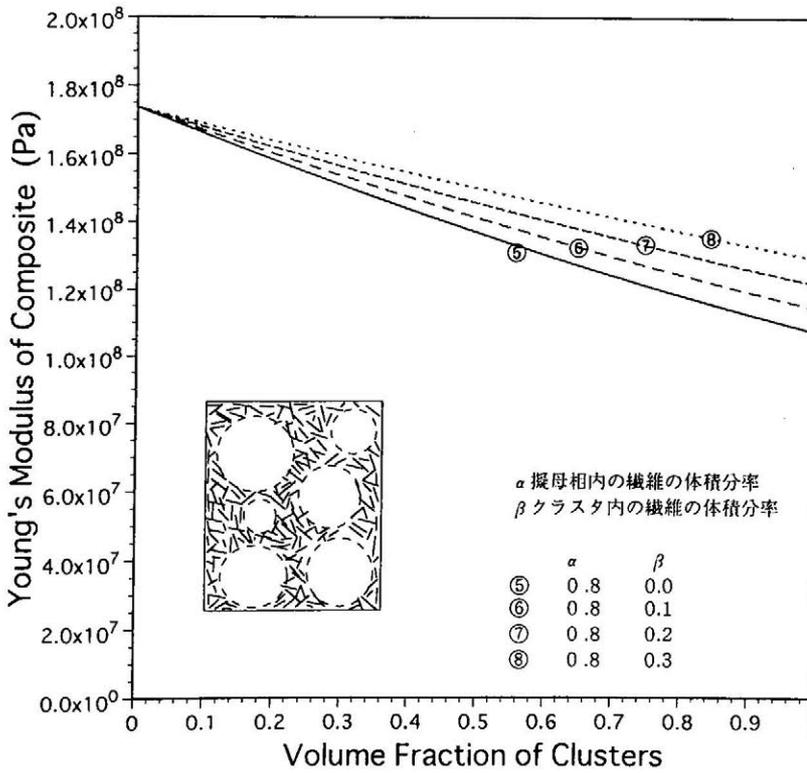


図 6-5-5 $E^s < E^m$ の場合の繊維クラスタ分散複合材料の剛性

この時、図6-5-3に示す複合材料の結果と比較すれば、繊維の密度が0.8で、一様分布している場合の結果と等しいことが分かる。

式(6-6-4-3)～(6-6-4-6)に示すクラスタ介在相と擬母相の繊維の密度を逆にして、次のように与える。

$$\textcircled{5} \quad f_2^s = 0.0, \quad f_2^m = 0.8 \quad (6-6-4-7)$$

$$\textcircled{6} \quad f_2^s = 0.1, \quad f_2^m = 0.8 \quad (6-6-4-8)$$

$$\textcircled{7} \quad f_2^s = 0.2, \quad f_2^m = 0.8 \quad (6-6-4-9)$$

$$\textcircled{8} \quad f_2^s = 0.3, \quad f_2^m = 0.8 \quad (6-6-4-10)$$

⑤、⑥、⑦、⑧の場合に対して、数値解析を行い、得た結果を図6-6-3に示す。ここで、擬母相の内部の繊維の密度が一定であるため、クラスタ介在相の体積分率が0の場合、四つの結果は同じである。この始点から、クラスタ介在相の体積分率の増加に従って、四つの結果は分離して行く。

図6-5-4と図6-5-5に示した複合材料で、クラスタ介在相の体積分率が同じでも、複合材料のすべての繊維の体積分率が異なる。

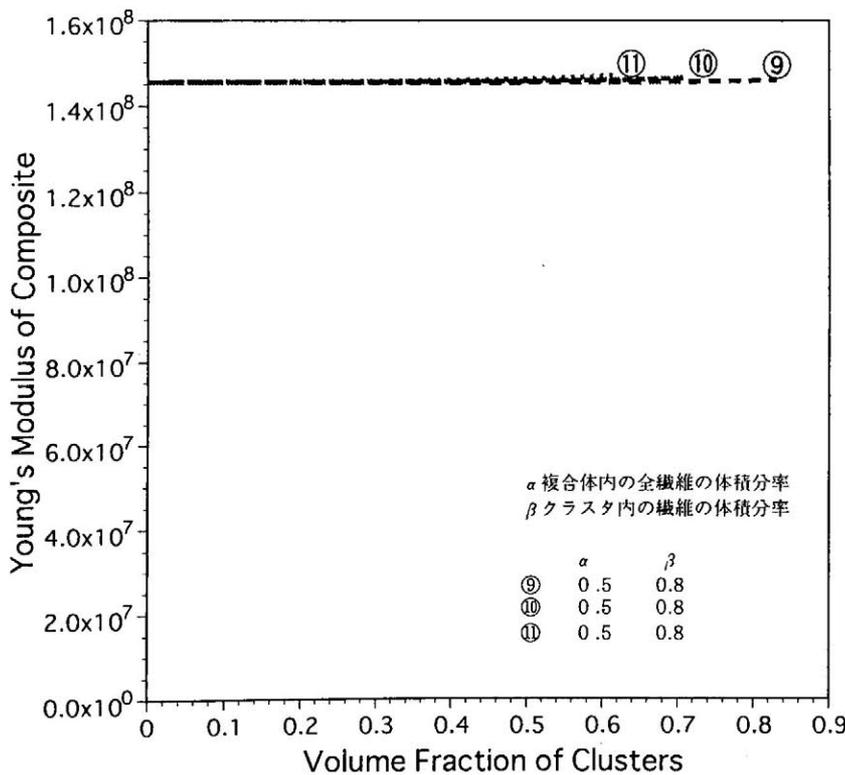


図6-5-6 繊維クラスタ分散複合材料の剛性 ($E_2/E_1 = 1.832$)

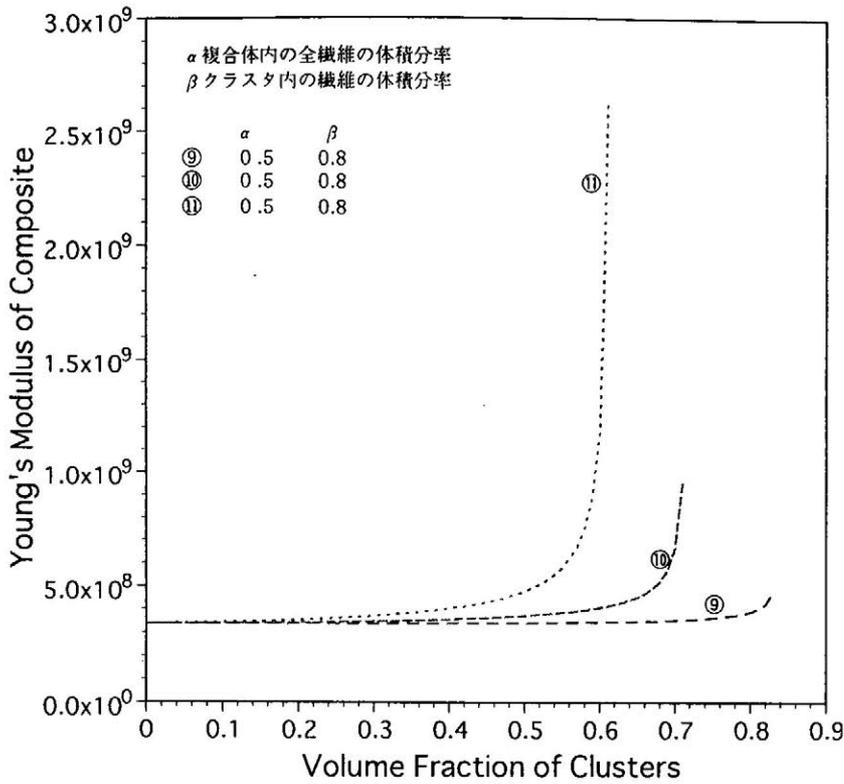


図 6-5-7 繊維クラスタ分散複合材料の剛性 ($E_2 / E_1 = 18.32$)

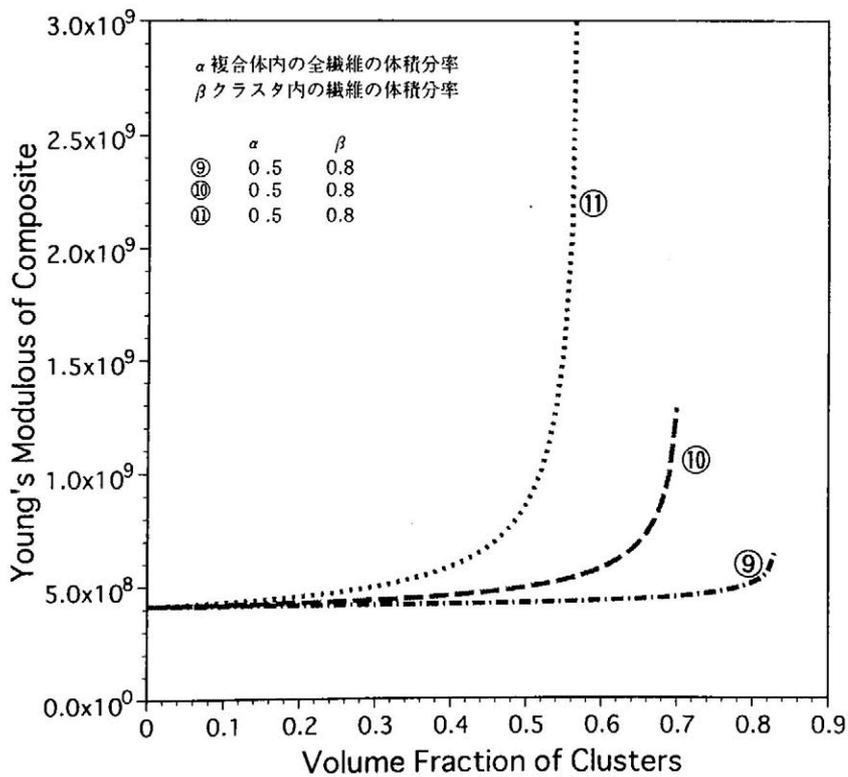


図 6-5-8 繊維クラスタ分散複合材料の剛性 ($E_2 / E_1 = 183.2$)

次に、複合材料のすべての繊維の体積分率が一定の場合に、繊維の密度の変化が複合材料の巨視的な挙動に与える影響を検討する。擬母相内部及びクラスタ介在相内部の繊維の体積分率と複合材料の繊維の全体積分率の間に次の関係がある。

$$f_2^m f^m + f_2^s f^s = f^c \quad (6-6-4-11)$$

ここで、 f^c は複合材料の内部にあるすべての繊維の体積分率である。

式 (6-6-4-11) に示す体積分率について次のように設定する。

$$\textcircled{9} \quad f^c = 0.4, \quad f_2^s = 0.8, \quad f^s = 0 \sim 1 \quad (6-6-4-12)$$

$$\textcircled{10} \quad f^c = 0.4, \quad f_2^s = 0.7, \quad f^s = 0 \sim 1 \quad (6-6-4-13)$$

$$\textcircled{11} \quad f^c = 0.4, \quad f_2^s = 0.6, \quad f^s = 0 \sim 1 \quad (6-6-4-14)$$

式 (6-6-1-1) を式 (6-6-4-11) に代入すれば、擬母相内部の繊維の体積分率を次の様に求められる。

$$f_2^m = \frac{f^c - f_2^s f^s}{1 - f^s} \quad (6-6-4-16)$$

式 (6-6-4-12) ~ 式 (6-6-4-14) において計算を行う場合、次式を満足するように f^s 、 f^m を設定しなければならない。

$$0 \leq \frac{f^c - f_2^s f^s}{1 - f^s} \leq 1 \quad (6-6-4-17)$$

式 (6-6-4-1) と式 (6-6-4-2) の材料係数を用い、式 (6-6-4-12)、(6-6-4-13)、(6-6-4-14) に示す三つのケースについて計算した結果を図6-5-6に表す。複合材料の内部の繊維の体積分率が定数であり、介在相と母相の剛性比が低い場合、繊維の密度の分布が変わっても、複合材料の剛性は殆ど変わらない。

しかし、式 (6-6-4-2) に示している繊維のヤング率を10倍に拡大し、同じ計算を行って得た結果を図6-5-7に表す。横軸の体積分率の増加にしたがって、三つのケースについて計算した結果は大きく離れることが分る。また、クラスタ介在相の内部の繊維の体積分率と複合材料の繊維の平均体積分率との差が大きい場合、複合材料の挙動と一様分布している繊維分散複合材料との相違も著しくなることが分かる。

さらに、式 (6-6-4-2) に示す繊維のヤング率を100倍を拡大し、同じ計算を行って得た結果を図6-5-8に表す。横軸の体積分率の増加にしたがって、三つのケースについて計算した結果はもっと大きく離れることが分かる。

繊維の体積分率を定数と設定した場合の図6-5-6、図6-5-7、図6-5-8の結果を比較してみると、クラスタ介在相の繊維の体積分率が複合材料の平均体積分率に近い+の場合、ク

クラスタ介在相の繊維の体積分率が擬母相に近い場合、複合材料の剛性の変化は小さい。しかし、クラスタ介在相の繊維の体積分率が複合材料の平均体積分率と大きく異なる場合、クラスタ介在相の増加によって、複合材料の挙動が大きく変わる。

§ 6.6 結 言

第四章で提案したSCCモデルに基づいて短繊維分散複合材料に関する理論構成則を構築した。繊維分散複合材料の二次元問題について、理論解析で得た結果を従来の理論と比較した。また、繊維分散複合材料の二次元問題について、メゾ・メカニクス解析で得た結果と理論解析で得た結果を比較し、その精度を検証した。第六章の理論解析とメゾ・メカニクス解析で得た結果をまとめ、以下のような結論を得た。

(1) 全方向にランダムに分布している繊維分散複合材料の結果は等方性を有する。第六章で検討した平面問題の場合、X方向とY方向の剛性が等しい。

(2) 繊維の分布範囲が限定されている場合、また、繊維の分布が一様分布ではない場合、繊維分散複合材料の等方性が失われ、異方性が現れる。二次元問題の場合、繊維の配列分布によって、X方向とY方向の剛性が変化する。

(3) 短繊維分散複合材料に関する理論解析の結果により、本論文モデルで得た結果はMori-Tanakaの混合則により求めた従来の理論の結果と大きく異なる。従来のモデルと相違は繊維と母相の剛性比が大きくなる場合、拡大することが分かる。

(4) メゾ・メカニクス解析を行う場合、用いる短繊維分散複合材料の参照領域が等方性を有することを証明した。この参照領域について行ったメゾ・メカニクス解析の結果は第六章で構築した構成則で得た結果と比べると、繊維が全方向に平均分布している場合に関する理論解析の結果は弾性段階でメゾ・メカニクス解析の結果と一致している。

(5) 短繊維分散複合材料の中で塑性変形が発生する場合、第五章の粒子分散複合材料と同様に、微視的な応力分布は複合材料全体の性能に大きな影響を与えることが分かった。繊維分散複合材料の微視的な応力分布の影響を数学的に表現し解決することが可能である。

(6) 複合材料の性能は繊維の体積分率に依存するが、また繊維クラスタの分布によっても変化する。即ち、繊維の体積分率を知るだけで、複合材料の巨視的挙動を決定することができず、繊維の密度の偏りも考慮する必要がある。

参照文献

- (6.1) J.R.Brockenbrough, S.Suresh, H.A.Wienecke, "Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape", *Acta metall. mater.(USA)*, Vol.39, no.5, pp.735-752, May 1991
- (6.2) J.R.Brockenbrough, S.Suresh, "Plastic deformation of continuous fiber-reinforced metal-matrix composites: effects of fibers shape and distribution", *Scripta metallurgica et materialia (USA)*, Vol.24, pp.325-330, Feb.1990
- (6.3) J.D. Eshelby, "The Determination of the Elastic field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems", *Proc. of the Royal Society of London, Series A*, Vol.241A, pp.376~396, 1957.
- (6.4) R. Hill, "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, 1964, pp.199-212
- (6.5) Hiroshi Hatta, Minoru Taya, "Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite", *J. Appl. Phys. (American Institute of Physics)*, Vol.58 (7), pp.2478-2486, October 1985
- (6.6) S.C.Lin, T.Mura, M.Shibata and T.Mori, "The working-hardening behavior of anisotropic media by non-deforming particles of fibers", *Acta metall.* Vol.21, p505-516, April 1973
- (6.7) Masamichi Kawai, "Formulation of inelastic constitutive model for fiber-reinforced composite materials", *日本機械学会論文集 (A編)*, Vol.60, No.578, 1994-10
- (6.8) A.J. Levy, "The Effective Dilatational Response of Fiber-Reinforced Composites with
- (6.9) Nonlinear Interface", *Journal of Applied Mechanics*, June.1996, Vol.63, pp.357-364
- Hiroshi NAKANISHI, Toshio FURUKAWA, "Elastic analysis of modeled fiber-reinforced composite material by finite difference method", *日本機械学会論文集 (A編)*, 61 卷 591 号 (1995-11), pp.78-83
- (6.10) S.R.Nutt and A.Needleman, "Void nucleation at fiber ends in Al-SiC composites", *Scripta metallurgica*, Vol.21, pp.705-710, 1987
- (6.11) John R.Pachalis, Tsu-Wei Chou, "Modeling of creep of Misaligned short-fiber reinforced ceramic composites", *Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME*, Vol.59, pp.27-31, March 1992
- (6.12) P.W.M. Perters and E.Martin and P.Pluvinage, "Influence of porosity and fibre coating on

- engineering elastic moduli of fibre-reinforced ceramics (SiC/SiC)", Composite 26, pp.108-114, 1995
- (6.13) K.Takahashi and Tsu-Wei Chou, "Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composite with interfacial debonding", Metallurgical Transactions A, Vol.19A, pp.129135, Jan.1988
- (6.14) Y.Takao, M.Taya, "The effect of variable fiber aspect ratio on the stiffness and thermal expansion coefficients of a short fiber composite", Journal of composite materials (Technomic Publish Co.,Inc.), Vol.21, P140-156, Feb. 1987
- (6.15) Naoki Takano, Masaru Zako and Seiichiro Sakata, "Three-dimensional microstructural design of woven fabric composite materials by the homogenization method", 日本機械学会論文集 (A編), Vol.61(A), No.585, 平成7年5月
- (6.16) Naoki Takano, Masaru Zako, "Nonlinear analysis of woven fabric composite materials by homogenization method considering microscopic failure", 第24回、FRPシンポジウム講演論文集
- (6.17) Y.Takao and M.Taya, "Thermal expansion coefficients and thermal stresses in an aligned short fiber composite with application to a short carbon fiber/aluminum", Transaction of the ASME, Vol.52, pp.806-810, Dec.1985
- (6.18) G.P. Tandon and G.J. Weng, "Average Stress in the Matrix and Effective Moduli of Randomly Oriented Composites", Composite Science and Technology 27, 1986, pp.111-132
- (6.19) M. Taya and T. Mura, "On Stiffness and Strength of an Aligned Short-fiber Reinforced Composite Containing Fiber-End Cracks Under Uniaxial Applied Stress", Journal of Applied Mechanics, June.1981, Vol.48, pp.361-367
- (6.20) K.Wakashima and T.Mori, "Elastic and inelastic behavior of composites with multidirectionally oriented ellipsoidal reinforcements", Proceedings of the 8th Riso international symposium on metallurgy and materials science, pp543-548, Sept.1-11, 1987

付録：

(6-1) 繊維介在物に関する Eshelby テンソル ($\alpha = a_1 / a_2$ 、 $a_1 \gg a_2 = a_3$)

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 0 & S_{1133} \\ S_{2211} & S_{2222} & 0 & S_{2233} \\ 0 & 0 & 2S_{1212} & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & 0 & S_{3333} \end{bmatrix} \quad \text{或いは} \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & 2S_{1212} \end{bmatrix}$$

$$g = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \left\{ \cos^{-1} \alpha - \alpha(1-\alpha^2)^{1/2} \right\}$$

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left\{ 1 - 2\gamma + \frac{3\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} - \left[1 - 2\gamma + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right] g \right\}$$

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\gamma)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \left[1 - 2\gamma - \frac{9}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} - \left[1 - 2\gamma + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\gamma)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\gamma)} \left[\frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - (1 - 2\gamma) \right] g$$

$$S_{1122} = S_{1133} = -\frac{1}{2(1-\gamma)} \left\{ 1 - 2\gamma + \frac{1}{\alpha^2 - 1} - \left[1 - 2\gamma + \frac{3}{2(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2323} = S_{3232} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} + \left[1 - 2\gamma - \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ 1 - 2\gamma - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\gamma - \frac{3(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \right] g \right\}$$

本モデルで計算を行う場合、複合材料の平均Poisson係数 γ の初期値は次のように決められる。

$$\gamma = (1-f)\gamma_1 + f\gamma_2$$

(6-2) Tandon-Weng の理論式

繊維が全方向に平均分布している分散複合材料の二次元問題について、Tandon-Wengのモデルにより複合材料のヤング率は次のように与えられる。

$$\hat{E} = \frac{E_1}{1 + f p_{11}}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 p_{11} = & \frac{1 + \gamma_1}{1 + f(b_1 - b_2)} \\
 & \times \left\{ \frac{2(a_1 + a_2 - a_3) + a_4 + a_5 a}{16a} - \frac{1}{4[2S_{1212} + G_1 / (G_2 - G_1)]} \right\} \\
 & - \frac{(1 - \gamma_1)(1 + f b_5) + 2f \gamma_1 b_3}{2 f^2 b_3 b_4 - (1 + f b_5)[1 + f(b_1 + b_2)]} \frac{2(a_1 - a_2 + a_3) + a_4 + a_5 a}{8a} \\
 & + \frac{(1 - \gamma_1) f b_4 + \gamma_1 [1 + f(b_1 + b_2)]}{2 f^2 b_3 b_4 - (1 + f b_5)[1 + f(b_1 + b_2)]} \frac{-2 a_2 + a_4 - a_5 a}{4a}
 \end{aligned}$$

$$a_1 = 6(K_2 - K_1)(G_2 - G_1)(S_{2222} + S_{2233} - 1) - 2(K_1 G_2 - K_2 G_1) + 6K_2(G_2 - G_1)$$

$$a_2 = 6(K_2 - K_1)(G_2 - G_1)S_{1133} + 2(K_1 G_2 - K_2 G_1)$$

$$a_3 = -6(K_2 - K_1)(G_2 - G_1)S_{3311} - 2(K_1 G_2 - K_2 G_1)$$

$$a_4 = 6(K_2 - K_1)(G_2 - G_1)(S_{1111} - 1) + 2(K_1 G_2 - K_2 G_1) + 6G_2(K_2 - K_1)$$

$$a_5 = 1 / [S_{3322} - S_{3333} + 1 - G_2(G_2 - G_1)]$$

$$\begin{aligned}
 a = & 6(K_2 - K_1)(G_2 - G_1)[2S_{1133}S_{3311} - (S_{1111} - 1)(S_{3322} + S_{3333} - 1)] \\
 & + 2(K_1 G_2 - K_2 G_1)[2S_{1133} + S_{3311}] + (S_{1111} - S_{3322} - S_{3333}) \\
 & - 6K_2(G_2 - G_1)(S_{1111} - 1) - 6G_2(K_2 - K_1)(S_{2222} + S_{2233} - 1) - 6K_2 G_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & (1 / 16a) \{ 2a_3(6S_{1122} + S_{2222} + S_{2233} - 1) \\
 & + a_4[3(S_{2222} + S_{2233} - 1) + 2S_{1122}] + 3a_5 a(S_{2222} - S_{2233} - 1) \\
 & + 2a_1[3(S_{1111} - 1) + S_{2211}] - 2a_2(S_{1111} + 3S_{2211} - 1) \\
 & - 4a(2S_{1212} - 1) / [2S_{1212} + G_1 / (G_2 - G_1)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 = & (1 / 16a) \{ 2a_3[2S_{1122} + 3(S_{2222} + S_{2233} - 1)] \\
 & + a_4(6S_{1122} + S_{2222} + S_{2233} - 1) + a_5 a(S_{2222} - S_{2233} - 1) \\
 & + 2a_1(S_{1111} + 3S_{2211} - 1) - 2a_2[S_{2211} + 3(S_{2211} - 1)] \\
 & - 4a(2S_{1212} - 1) / [2S_{1212} + G_1 / (G_2 - G_1)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 = & (1 / 4a) \{ -2a_2(S_{1111} + S_{2211} - 1) + a_4(2S_{1122} + S_{2222} + S_{2233} - 1) \\
 & - a_5 a(S_{2222} - S_{2233} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_4 = & (1 / 4a) \{ 2(a_1 - a_2) S_{2211} - 1) + 2(a_3 + a_4)(S_{2222} + S_{2233} - 1) \\
 & - a_5 a(S_{2222} - S_{2233} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_5 = & (1 / 2a) \{ -2a_2 S_{2211} + a_4(S_{2222} + S_{2233} - 1) \\
 & + a_5 a(S_{2222} - S_{2233} - 1)
 \end{aligned}$$

第7章

機能性複合材料の熱伝導と熱膨張

要 旨

最近、粒子（或いは繊維）分散複合材料は電子材料としてよく使われており、複合材料の熱物理的な挙動は研究者達の注目を集めている。安定している熱伝導における温度勾配、熱流量と熱伝導率の関係は歪み、応力と弾性係数の関係に数学的に似ているので、第四章で紹介した複合材料の応力-歪みに関する理論解析の場合と同様に取り扱う事ができる。本章では等価介在物法に基づく整合形式の熱伝導率と熱膨張率に関する構成則を開発し、またメゾ・メカニクス数値計算解析により理論モデルの検証を行う。

§ 7.1 粒子分散複合材料の熱伝導率

7.1.1 単粒子の熱伝導問題

母相と介在相は等方性を持つ材料である場合、粒子がランダムに分散している複合材料も巨視的に等方性を持つと仮定することができる。母相と介在相の熱伝導率をそれぞれ λ_j^1 、 λ_j^2 で表し、複合材料巨視的な熱伝導率を $\hat{\lambda}_j$ で示せば、均質母相材料の熱伝導則は次のように与えられる。

$$q_i^1 = -\lambda_j^1 T_j^1 \quad (7-1-1-1)$$

ここで、" j " ($j=1, 2, 3$) は座標 x_j 方向に対する微分 $\partial/\partial x_j$ を示し、 q_i^1, T_j^1 はそれぞれ母相中 x_j 方向の熱流量、温度勾配を表す。母相材料の内部の温度勾配は平均している状態と仮定すれば、介在相の中でも温度勾配が一様と考えられる。介在相材料の熱伝導構成則も次

のようになる。

$$q_i^2 = -\lambda_{ij}^2 T_j^2 \quad (7-1-1-2)$$

q_i^2, T_j^2 はそれぞれ介在相中の熱流量、温度勾配であり、無限母相媒体の中に存在する一つの介在相の温度勾配と母相の温度勾配との差を T_j' で表し、次のように定義する。

$$T_j' = T_j^2 - T_j^1 \quad (7-1-1-3)$$

式 (7-1-1-3) を式 (7-1-1-2) に代入すると、

$$q_i^2 = -\lambda_{ij}^2 (T_j^1 + T_j') \quad (7-1-1-4)$$

となる。等価介在物理論に基づいて、非均質粒子は固有温度勾配を持つ均質粒子に等価することができ、等価関係は次のように表される。

$$\lambda_{ij}^1 (T_j^2 - T_j') = \lambda_{ij}^2 T_j^2 \quad (7-1-1-5)$$

ここで、 T_j' は等価関係を満たす固有温度勾配であり、式 (7-1-1-3) を用いて、式 (7-1-1-5) は次のように表される。

$$\lambda_{ij}^1 (T_j^1 + T_j' - T_j') = \lambda_{ij}^2 (T_j^1 + T_j') \quad (7-1-1-6)$$

式 (7-1-1-6) の左辺は固有温度勾配を有する母相と同じ均質材を持つ仮想粒子における熱流束であり、Eshelby の理論により、母相と介在相温度勾配差 T_j' は均質介在相の持つ固有温度勾配 T_j^* との間に次の関係を満足する。

$$T_j' = \omega_{ij} T_j^* \quad (7-1-1-7)$$

ω_{ij} は2階のEshelbyテンソルである(付録7-1)。式 (7-1-1-7) を式 (7-1-1-6) に代入して解くと、固有温度勾配は次のように求められる。

$$T_j^* = R_{ij} T_j^1 \quad (7-1-1-8)$$

$$R_{ij} = [(\lambda_{ij}^{2-1} - \lambda_{ij}^{1-1})^{-1} - \lambda_{ik}^1 (\omega_{kl} - \delta_{kl})]^{-1} \lambda_{ij}^1 \quad (7-1-1-9)$$

上式の添字"-1"はinverseの意味を表し、 δ_{ij} はKroneckerのデルタである。式 (7-1-1-3) と式 (7-1-1-7) によって、介在物内部の温度勾配は次のように表される。

$$T_j^2 = T_j^1 + \omega_{ij} T_j^* \quad (7-1-1-10)$$

式 (7-1-1-8) を式 (7-1-1-10) に代入すると、介在物内部の温度勾配は次のように求められる。

$$T_j^2 = T_j^1 + \omega_{ij} R_{jk} T_k^1 \quad (7-1-1-11)$$

均質母相材料中の平均温度勾配が T_j^1 である場合、介在相中の温度勾配は上式に与えられる。

7.1.2 多粒子分散複合材料の熱伝導率

複合材料の巨視的な特性は等方性を持つと仮定し、複合材料の平均的な熱伝導率は次のように表すことができる。

$$\hat{q}_i = -\hat{\lambda}_{ij} \hat{T}_{,j} \quad (7-1-2-1)$$

$\hat{q}_i, \hat{T}_{,j}$ はそれぞれ複合材料中の x_j 方向に関する平均熱流束、平均温度勾配で、 $\hat{\lambda}_{ij}$ は複合材料の平均熱伝導率である。

平均熱伝導率 $\hat{\lambda}_{ij}$ を求めるために、粒子また母相内部の温度勾配を求める必要がある。従来のモデルは粒子内部の温度勾配を求める場合、一つの粒子周りの媒体の熱伝導率が母相の熱伝導率と同じであると仮定しており、複合体の粒子密度の影響を考慮していない。また、式 (7-1-1-3) に定義されている粒子内部の温度勾配と母相内部の平均温度勾配の差について、従来のモデルは単粒子問題における Eshelby 理論の式 (7-1-1-7) をそのまま利用している。粒子の体積分率が小さい場合には複合体実体と母相の熱伝導率は近いと言えるが、粒子の体積分率が大きい場合、複合材料中の任意一つの粒子の周りの平均的媒体の平均熱伝導率は母相材料と異なる。粒子周りの媒体から一つの粒子に対する影響は著しくなることを考慮しなければならない。そのため、単粒子の場合に導かれた粒子中の温度勾配に関する混合則を再検討する必要がある。

そこで、複合材料中の任意の一つの粒子中の温度勾配を求めるため、図7-1-1に示すよ

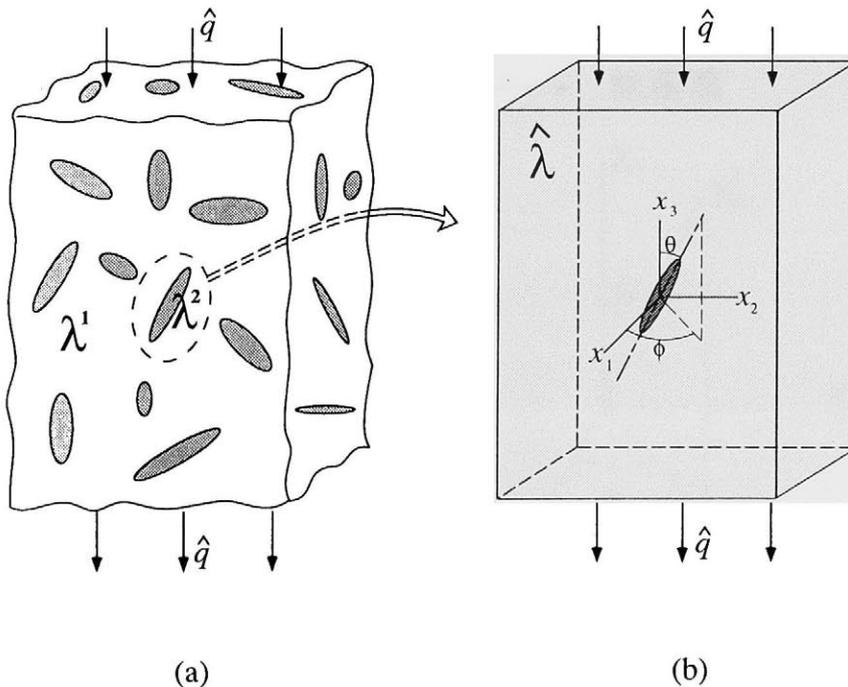


図 7-1-1 粒子分散複合伝導体と理論解析モデル

うなモデルを考える。図7-1-1aの複合体中の一つの粒子に注目し、それを図7-1-1bの様な平均媒体の中に想定する仮想単粒子に等価する。図7-1-1bの平均媒体の熱伝導率は図7-1-1aの巨視的な平均熱伝導率と同じと仮定する。従来のモデルと比べて、このモデルでは粒子周りの媒体の熱伝導率の変化の影響も考慮することができ、また多粒子問題を単粒子理論で解くことができる。

図7-1-1bに示すように、 x_1, x_2, x_3 座標で、参照粒子の長径軸の方向を θ と ϕ で表す。楕円体粒子の三つの軸方向に局所座標 x'_1, x'_2, x'_3 をとり、 x'_3 軸を長軸とする。図7-1-1bに示す平均媒体の熱伝導率とEshelbyテンソルを $\hat{\lambda}_{ij}, \hat{\omega}_{ij}$ で表す。平均媒体は等方性材料と仮定されるため、熱伝導率とEshelbyテンソルは局所座標下でも $\hat{\lambda}_{ij}, \hat{\omega}_{ij}$ となり、局所座標下で粒子の熱伝導率は次のように表される。

$$q_i^* = -\lambda_{ij}^2 T_j^* \tag{7-1-2-2}$$

粒子の温度勾配と平均媒体温度勾配の食い違い T_j^* は

$$T_j^* = T_j^{**} - \hat{T}_j \tag{7-1-2-3}$$

と定義する。平均媒体と同じ性能を持ち、固有温度勾配を有する等価粒子は実粒子に等価するの等価条件は

$$\lambda_{ij}^2 (\hat{T}_j + T_j^*) = \hat{\lambda}_{ij} (\hat{T}_j + T_j^* - T_j^{**}) \tag{7-1-2-4}$$

とな。式 (7-1-2-4) は全節の式 (7-1-1-6) と同じ形であり、均質単粒子の理論によって、

$$T_j^* = \hat{\omega}_{ij} T_j^{**} \tag{7-1-2-5}$$

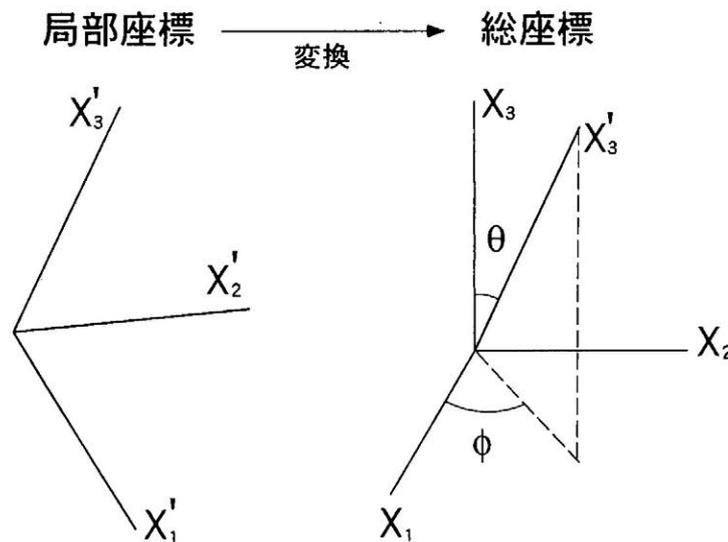


図7-1-2 局所座標における微分と総座標における座標変換

と書ける。 $\hat{\omega}_{ij}$ は複合材料の平均Eshelby 2階テンソルであり、熱伝導問題の場合、 $\hat{\omega}_{ij}$ は粒子の形だけに依存するため、単粒子と多粒子を問わず適用できる。即ち、 $\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$ となる。式(7-1-2-5)を式(7-1-2-4)に代入して、解くと、固有温度勾配は次のように求められる。

$$T_j^* = \hat{R}_{ij} \hat{T}_j^* \quad (7-1-2-6)$$

$$\hat{R}_{ij} = [(\lambda_{ii}^{2-1} - \hat{\lambda}_{ii}^{-1})^{-1} - \hat{\lambda}_{ik} (\hat{\omega}_{kl} - \delta_{kl})]^{-1} \hat{\lambda}_{ij} \quad (7-1-2-7)$$

式(7-1-2-3)と式(7-1-2-5)により、粒子の温度勾配は次のように表される。

$$T_j^2 = \hat{T}_j^* + \hat{\omega}_{ij} T_j^* \quad (7-1-2-8)$$

式(7-1-2-6)を式(7-1-2-8)に代入して、

$$T_j^2 = (\delta_{ij} + \hat{\omega}_{ik} \hat{R}_{kj}) \hat{T}_j^* \quad (7-1-2-9)$$

式(7-1-2-9)に局所座標下で粒子の温度勾配と平均媒体の温度勾配の関係は与えられた。式(7-1-2-9)を式(7-1-1-11)と比べると、形は似ているものの本質は全く違っており、一方は母相に含まれる粒子の温度勾配決定式、他方は複合体に含まれる粒子の温度勾配決定式である。図7-1-2に示す局所座標における微分と規準座標における微分の間に次の関係がある。

$$\partial / \partial x_i = \chi_{ij} \partial / \partial x_j \quad \text{及び} \quad \partial / \partial x_i' = \chi_{ij}^{-1} \partial / \partial x_j \quad (7-1-2-10)$$

式(7-1-2-10)に示す変換式に基づいて、規準座標下で式(7-1-2-9)は次のような表現となる。

$$T_j^2 = \chi_{ij} (\delta_{jl} + \hat{\omega}_{jk} \hat{R}_{kl}) \chi_{lm}^{-1} \hat{T}_m^* \quad (7-1-2-11)$$

ここで、座標変換テンソル χ_{ij} は局所座標方向に関する θ と ϕ の関数であるため、 T_j^2 も θ と ϕ の関数となる。三次元問題の場合に座標変換テンソル χ_{ij} は次のようになる。

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi & \cos\phi & \sin\theta \sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7-1-2-12)$$

二次元問題、即ち $\phi=0$ の場合に座標変換テンソル χ_{ij} は次のようになる。

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7-1-2-13)$$

体積 V_D の複合体の任意の方向に配向された楕円体粒子の平均温度勾配は次のように定義できる。

$$\langle T_j^2 \rangle = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n T_j^2(\theta, \phi) \Delta c_i \quad (7-1-2-14)$$

$$\Delta c_i = \Delta \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{\pi} \rho(\theta, \phi) d\theta d\phi \right) \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \Delta c_i = f \quad (7-1-2-15)$$

ここで、 $\rho(\theta, \phi)$ は方向 (θ, ϕ) に配列する粒子の体積分率頻度を表す分布関数である。式(7-1-2-11)にある複合体の平均温度勾配は方向に依存しないので、式(7-1-2-14)に代入すれば、McCauley bracket を従って次式のように表すことができる。

$$\langle T_j^2 \rangle = Q_{ij} \hat{T}_j \quad (7-1-2-16)$$

$$Q_{ij} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n \chi_{im} (\delta_{mi} + \omega_{mk} \hat{R}_{ki}) \chi_{ij}^{-1} \Delta c_i \quad (7-1-2-17)$$

複合体の平均温度勾配は次のように定義する。

$$\hat{T}_j = (1-f) \langle T_j^1 \rangle + f \langle T_j^2 \rangle \quad (7-1-2-18)$$

式(7-1-2-14)を上式に代入すれば、母相の平均温度勾配は次式となる。

$$\langle T_j^1 \rangle = \frac{1}{(1-f)} [\hat{T}_j - f \langle T_j^2 \rangle] \quad (7-1-2-19)$$

式(7-1-2-16)より。

$$\langle T_j^1 \rangle = \frac{1}{(1-f)} [\delta_{ij} - f Q_{ij}] \hat{T}_j \quad (7-1-2-20)$$

複合体の熱伝導平衡則により、次式が成り立つ

$$\hat{q}_i = (1-f) q_i^1 + f q_i^2 \quad (7-1-2-21)$$

複合体と各相の導体材料の熱伝導則を式(7-1-2-21)に代入して

$$\hat{\lambda}_{ij} \hat{T}_j = (1-f) \lambda_{ij}^1 \langle T_j^1 \rangle + f \lambda_{ij}^2 \langle T_j^2 \rangle \quad (7-1-2-22)$$

となる。さらに、式(7-1-2-19)と式(7-1-2-20)を上式に代入すると、次式を得る。

$$\hat{\lambda}_{ij} \hat{T}_j = \lambda_{ij}^1 [\delta_{ij} - f Q_{ij}] \hat{T}_j + f \lambda_{ij}^2 Q_{ij} \hat{T}_j \quad (7-1-2-23)$$

式(7-1-2-23)から、複合材料の平均熱伝導率は次のように求める。

$$\hat{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}^1 + f (\lambda_{ij}^2 - \lambda_{ij}^1) Q_{ij} \quad (7-1-2-24)$$

上式より、粒子の体積分率が0の場合は、 $\hat{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij}^1$ となって複合体の熱伝導率は母相と同じとなる。複合体の熱伝導率 $\hat{\lambda}_{ij}$ が式(7-1-2-7)中の R_{ij} に含まれ、式(7-1-2-24)は $\hat{\lambda}_{ij}$ について非線形方程式となるので収束計算を行う必要がある。式(7-1-2-24)のテンソル Q_{ij} は粒子の配列の分布関数に依存するので、簡単な表現形で表すことはできない。

7.1.3 数値計算解析 (1) ー球状粒子分散複合熱導体

母相と介在相が等方性を有する場合に、母相と介在相に関する λ_{ij}^1 、 λ_{ij}^2 は次のように表すことができる。

$$\lambda_{ij}^1 = \lambda^1 \delta_{ij} \quad (7-1-3-1)$$

$$\lambda_{ij}^2 = \lambda^2 \delta_{ij} \quad (7-1-3-2)$$

さらに球状粒子複合体の場合には介在相は方向性がなく、又、複合体の巨視的な平均性能も等方性を持つので、複合体の巨視的な平均熱伝導率と拘束テンソルをそれぞれ次のように表す。

$$\hat{\lambda}_{ij} = \hat{\lambda} \delta_{ij} \quad (7-1-3-3)$$

$$\hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega} \delta_{ij} \quad (7-1-3-4)$$

式 (7-1-3-1) ~ (7-1-3-4) を式 (7-1-2-7) に代入して、次式を得る。

$$R_{ij} = R \delta_{ij} \quad (7-1-3-5)$$

$$R = \frac{\hat{\lambda} - \lambda^2}{\lambda^2 - (\hat{\lambda} - \lambda^2)(\hat{\omega} - 1)} \quad (7-1-3-6)$$

式 (7-1-3-5) を式 (7-1-2-16)、(7-1-2-17) に代入して、介在相の平均温度勾配を次のように求められる。

$$\langle T_j^2 \rangle = Q_{ij} \hat{T}_j \quad (7-1-3-7)$$

$$Q_{ij} = (1 + \hat{\omega} R) \delta_{ij} \quad (7-1-3-8)$$

式 (7-1-3-1)、(7-1-3-2) と (7-1-3-8) を式 (7-1-2-24) に代入し、式 (7-1-3-3) を用いれば、複合体の巨視的な平均熱伝導率は次のように求めることができる。

$$\hat{\lambda} = \lambda^1 + f(\lambda^2 - \lambda^1) Q \quad (7-1-3-9)$$

$$Q = (1 + \hat{\omega} R) \quad (7-1-3-10)$$

以上の式から、球状粒子分散複合材料の熱伝導率は次のように簡単な形で表すことができる。

$$\hat{\lambda} = \lambda^1 + \frac{f(\lambda^2 - \lambda^1) \hat{\lambda}}{\lambda^2 - (\hat{\lambda} - \lambda^2)(\hat{\omega} - 1)} \quad (7-1-3-11)$$

上式で複合材料の熱伝導率を求める収束計算で、初期値を与えて、収束まで反復計算を行う。収束判定は前ステップの結果との差が要求されている範囲中に落入った時を持って停止する。

数値計算において、母相と介在相の熱伝導率比を十分大きく採るため、20倍を設定する、即ち、 $\lambda^2 / \lambda^1 = 20$ 。球状粒子の場合に Eshelby テンソルは $\hat{\omega} = 1/3$ である。

まず、式 (7-1-3-11) による数値計算を行う場合の収束性を調べる。収束効果は初期値に依存する可能性があり、これを観察するため、四つの初期値を次のように与える。

$$\hat{\lambda} = \lambda^1 \quad (7-1-3-12)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda^2 \quad (7-1-3-13)$$

$$\hat{\lambda} = (1-f)\lambda^1 + f\lambda^2 \quad (\text{Voigt}) \quad (7-1-3-14)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda^1 k^2}{(1-f)\lambda^2 + f\lambda^1} \quad (\text{Reuss}) \quad (7-1-3-15)$$

収束判定を次のように与えられる。

$$\left| \frac{\hat{\lambda}^n - \hat{\lambda}^{n-1}}{\hat{\lambda}^{n-1}} \right| \leq 10^{-5} \quad (7-1-3-16)$$

即ち、 n ステップの結果と $n-1$ ステップの結果の誤差は 10^{-5} より小さくなれば、収束計算を終えるとする。

粒子の体積分率 f は 10%~90% の範囲で変化させ、四つの初期値を与えることにより計算した結果を図 7-1-3、7-1-4、7-1-5、7-1-6 に示す。横軸は収束するまでの計算の回数を示し、縦軸は各ステップで計算した複合材料の熱伝導率比 $\hat{\lambda}_{33}/\lambda^1$ の結果を示す。球状粒子分散複合材料の熱伝導率は巨視的に等方性を持つと考え、 $\hat{\lambda}_{33}$ は図 7-1-1 に示す x_3 方向の熱伝導率、 λ^1 は母相の熱伝導率である。

四つの図より、計算結果は単調に最終値に収束することが分かる。 λ^1 、Reuss 初期値は最終値より小さく、 λ^2 、Voigt 初期値は最終値より大きい。初期値のいかんに関わらず、結果はすべて同じ最終値に収束する。

多数のケースを観察するため、介在相と母相の熱伝導率比が $\lambda^2/\lambda^1 = 10, 20, 50, 100$ の場合について理論式による複合材料の熱伝導率を検討した。

図 7-1-7 に式 (7-1-3-11) で解析した結果を示す。横軸は粒子の体積分率を示し、縦軸は収束した熱伝導率の結果を示す。粒子の体積分率が 20% 以下の場合には粒子と母相の熱伝導率比の複合材料全体の熱伝導率に対する影響は小さく、複合材料の熱伝導率はほとんど母相に依存している。ところが、粒子の体積分率が 20% を越えると、粒子の影響は著しくなり、介在相の熱伝導の負担率は粒子の体積分率及び熱伝導率とほぼ比例している。そのため、粒子の体積分率が小さい場合には、粒子外域の平均性能が母相と等しいと仮定する従来の説は信頼できる。しかし、粒子の体積分率が大きい場合に、粒子の外領域の平均特性が母相と等しいという仮定に基づく理論解析結果は精度は低い。

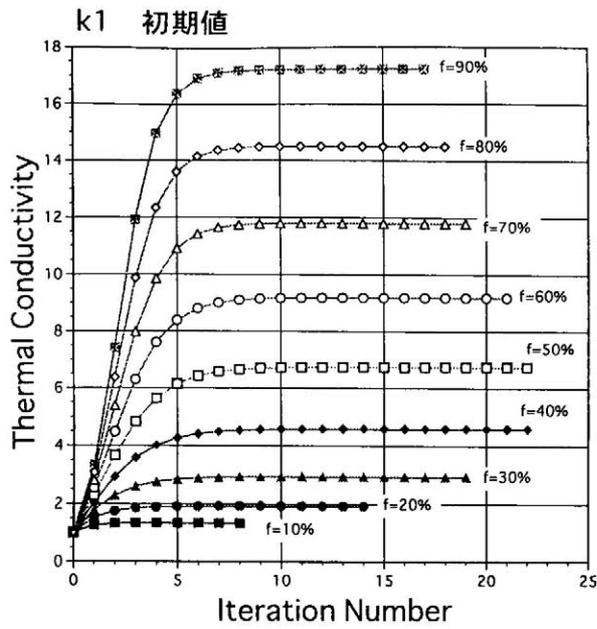


図 7-1-3 K1 初期値により収束状況

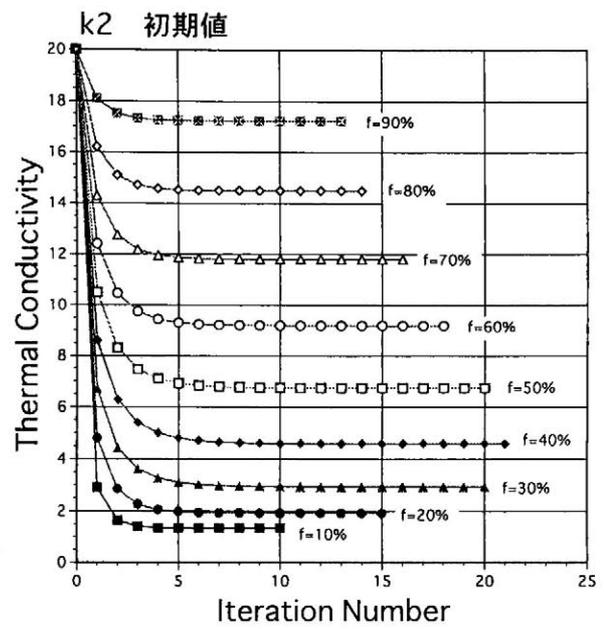


図 7-1-4 K2 初期値により収束状況

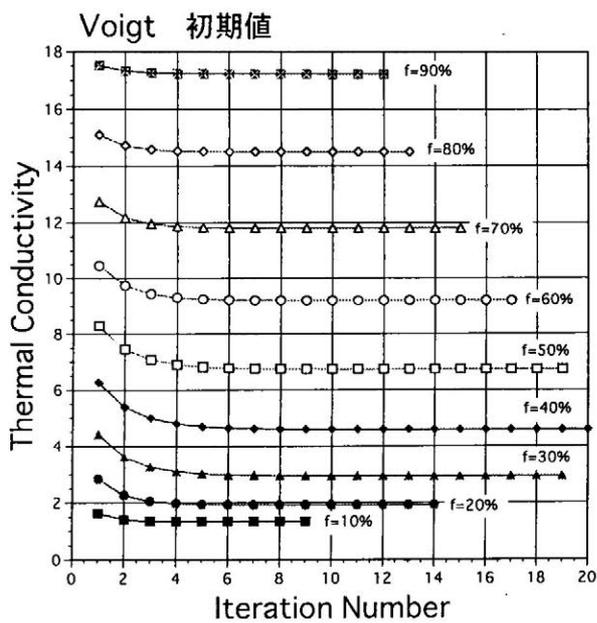


図 7-1-5 Voigt 初期値により収束状況

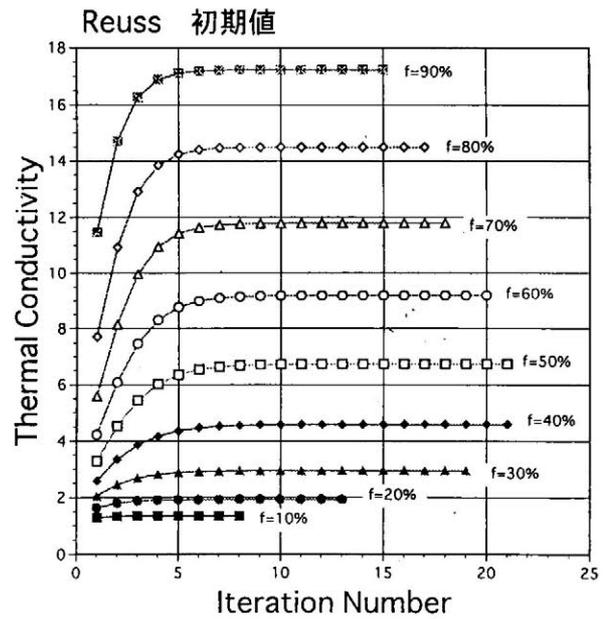


図 7-1-6 Reuss 初期値により収束状況

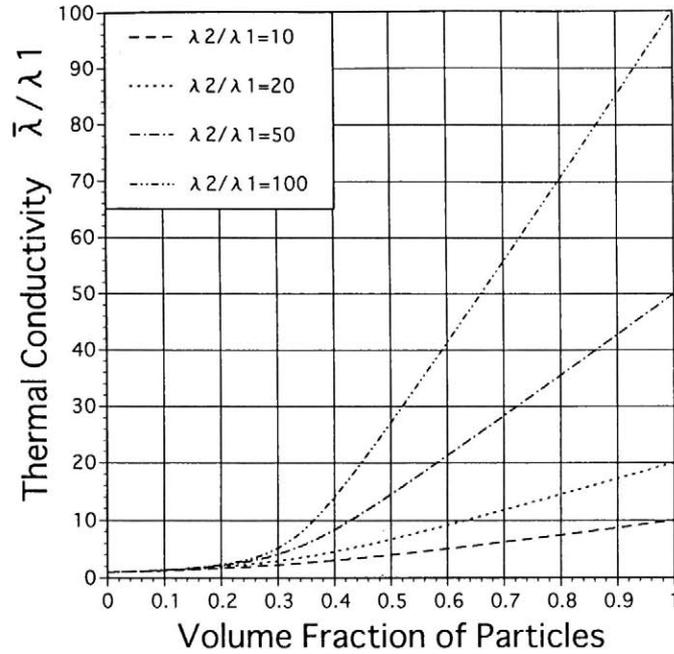


図 7-1-7 球状粒子分散複合材料の熱伝導率

式 (7-1-3-11) の精度を検討するため、§ 7.4 では従来の理論の解析により得た結果とメゾ・メカニクス解析で得た結果をそれぞれと比較することを行った。式 (7-1-3-11) で得た結果はメゾ・メカニクス解析で得た結果と一致する事を § 7.4 で証明した。

7.1.4 数値計算解析 (2) 繊維分散複合熱導体

宇宙船、ロケットなどの機体によく使われる繊維分散複合導熱材料で繊維はランダムに配列されているが、熱伝導率は基材料に比べ、より高い。繊維介在物は球状粒子と異なり、幾何学的に細長く、同じ体積分率でも、占める領域の範囲が広いため、繊維介在物は球状粒子介在物より複合体の熱伝導率に与える影響が大きいと考えられる。したがって、繊維介在物の幾何学的形状と配列方向も全体の熱伝導率に大きな影響を与えると予想される。

(a) 一様分布の場合

繊維分散複合導熱材料について、Hatta-Taya は理論解析を行い、粒子の熱勾配を求める場合に、粒子の外部媒体の平均熱伝導率が母相と同じと仮定した。このように仮定した粒子の外部媒体の熱伝導率は実際より低いため、Hatta-Taya が求めた複合材料全体の熱伝

導率は実際より低くなる可能性がある。

本論文のモデルを Hatta-Taya のモデル (付録7-2) と比較するため、二次元問題について数値計算を行った。繊維介在相の体積分率を0から100%まで変化させ、介在相と母相の熱伝導率比が $\lambda^2/\lambda^1 = 10, 20, 50, 100$ 、また、繊維のアスペクト比が $a_3/a_1 = 10, 50, 100, 1000$ の場合を選んだ。繊維の配向性に関する座標変換テンソル χ_{ij} は式 (7-1-2-13) に与えられ、繊維とY軸の夾角として定義されている方向変数 θ は $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ を満足するとする。

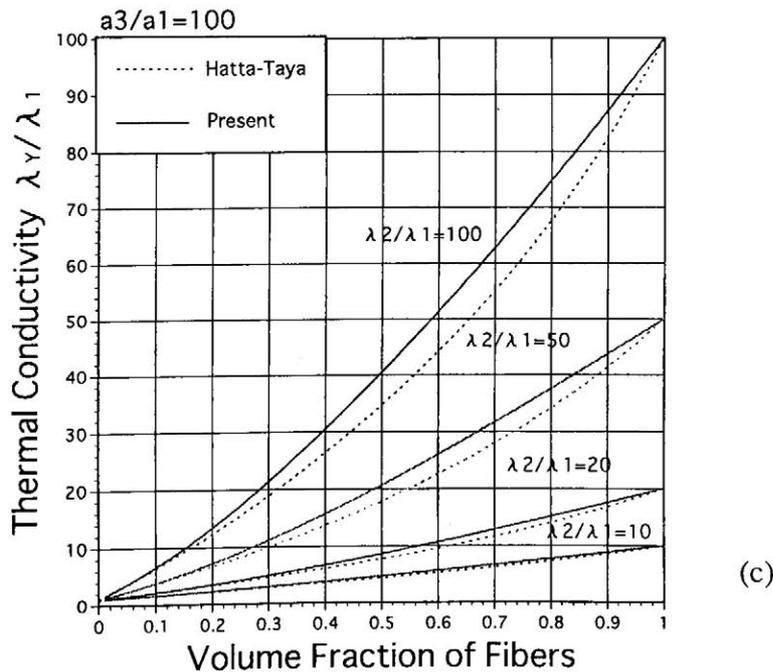
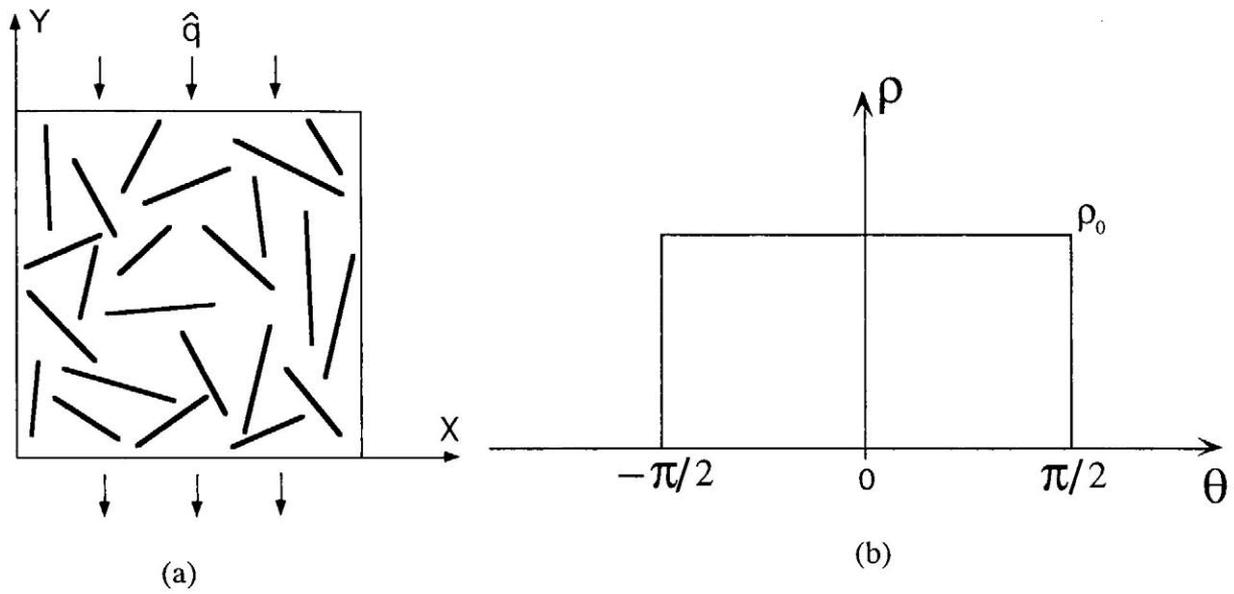


図7-1-8 本モデルと Hatta-Taya モデルで計算した繊維分散複合材料の熱伝導率の比較

先ず、図7-1-8aに示すような複合材料の熱伝導率の二次元問題について検討する。図7-1-8aに示す複合材料は巨視的に等方性を持っていると仮定すると、XとY方向の熱伝導率は等しい。計算を行う時、X、Y方向の熱伝導率を求める。図7-1-8aに示すような完全ランダムに配列している複合材料を考え、方向変数 θ は図7-1-8bに示すように $-90^\circ \sim +90^\circ$ 全方向の範囲内で一様分布しているとする。即ち、式(7-1-2-15)の体積分率頻度分布関数を次のように設定する。

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad \rho = \frac{f}{2\pi\alpha} = \text{定数} \quad (7-1-4-1)$$

$$n = 100 \quad (7-1-4-2)$$

$$\Delta c_i = \frac{f}{100} \quad (7-1-4-3)$$

繊維のアスペクト比が $a_3/a_1 = 100$ である場合、式(7-1-4-3)を式(7-1-2-24)に代入して計算した本モデルの結果と Hatta-Taya のモデルで計算した結果を図7-1-8cに示す。図7-1-8cの縦軸は複合材料のY方向の熱伝導率と母相の熱伝導率の比を示し、横軸は繊維の体積分率を表す。図7-1-8aに与えられた複合材料は巨視的に等方性を持つため、X方向の熱伝導率はY方向の熱伝導率に等しいが、ここではX方向の熱伝導率を省略する。図7-1-8から次のことが分かる。

(a) 球状粒子分散複合材料と比べて、繊維分散複合材料の場合に、繊維の体積分率が低い時も繊維の熱伝導率は全体の熱伝導率に大きな影響を与える。また、球状粒子分散複合材料と比べて、繊維分散複合材料の全体の熱伝導率が大きいことが分かった。

(b) 本モデルで計算した結果は Hatta-Taya モデルで計算した結果より大きい。なぜなら、本モデルは粒子の温度勾配を求める時、粒子周りの平均媒体の熱伝導率が母相と異なり、複合材料の熱伝導率と等しいと仮定するからである。

(c) 繊維と母相の熱伝導率比が低い時、本モデルの結果と Hatta-Taya モデルの結果の差は小さい。繊維と母相の熱伝導率比が大きくなるにしたがって、本モデルの結果と Hatta-Taya モデルの結果の差も大きくなる。

実際に、複合材料の介在相と母相の熱伝導率比 λ^2/λ^1 は1000倍になる場合があり、例えば、アルミニウム基に含まれている介在相がガラス綿の場合、介在相の熱伝導率が極めて低い。その時母相と介在相の熱伝導率比は $\lambda^2/\lambda^1 = 1000 \sim 2000$ である。ここで、介在相と母相の熱伝導率比 λ^2/λ^1 が $1/1000$ 倍から1000倍までを変化させ、複合材料の熱伝導率を検討する。

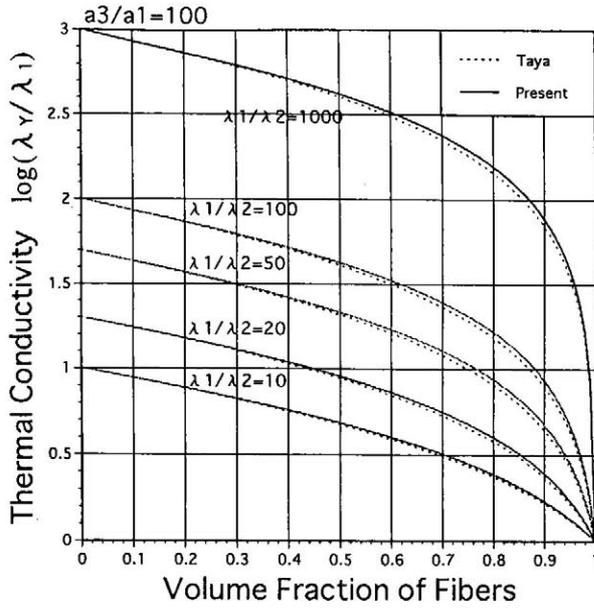


図7-1-9 $\lambda^2 < \lambda^1$ の場合、複合材料の熱伝導率

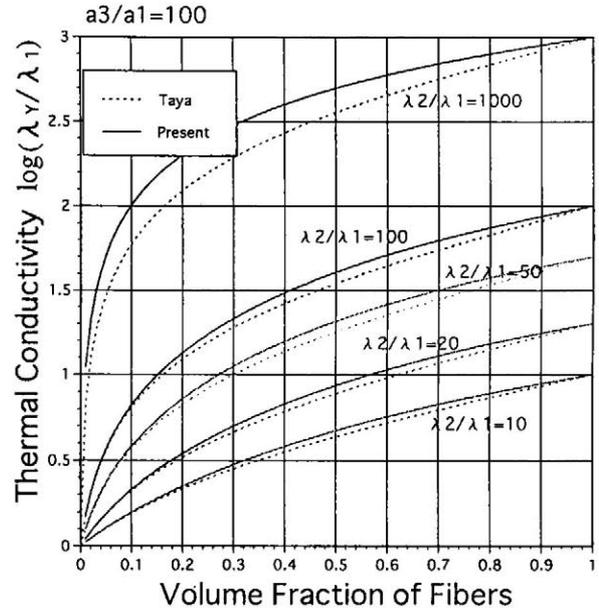


図7-1-10 $\lambda^2 > \lambda^1$ の場合、複合材料の熱伝導率

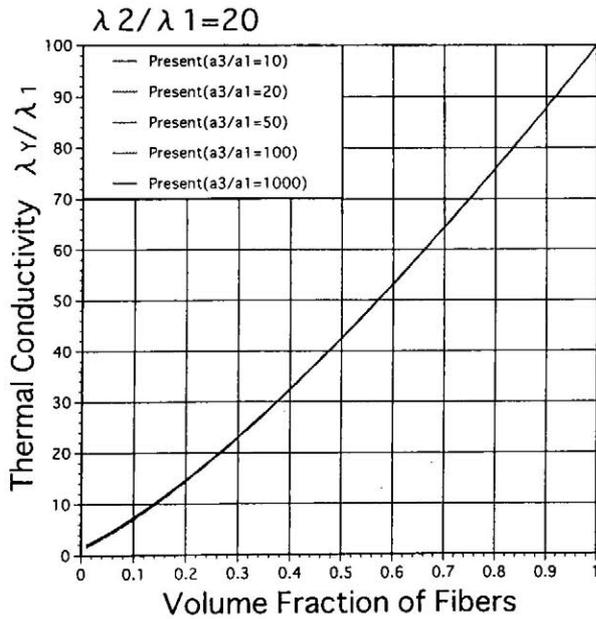


図7-1-11 繊維のアスペクト比を変化させ、本モデルに基づいて計算した結果

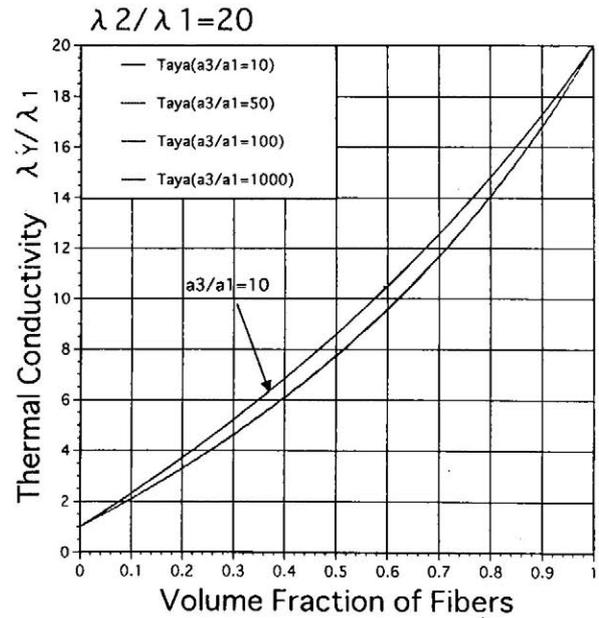


図7-1-12 繊維のアスペクト比を変化させ、Hatta-Taya モデルに基づいて計算した結果

母相の熱伝導率が介在相より大きい場合 ($\lambda^2 < \lambda^1$) の結果を図7-1-9に示し、母相の熱伝導率が介在相より小さい場合 ($\lambda^2 > \lambda^1$) の結果を図7-1-10に示す。横軸は介在相の体積分率を表す。違う熱伝導率比の場合の結果をはっきり確認するため、図の縦軸は複合材料の熱伝導率を対数表示した結果を示す。実線は本モデルで計算した結果を表し、点線は Hatta-Taya モデルで計算した結果を表す。母相の熱伝導率が介在相より大きい場合 ($\lambda^2 > \lambda^1$)、本モデルの結果は Hatta-Taya モデルの結果と近いが、母相の熱伝導率が介在相より小さい場合 ($\lambda^2 < \lambda^1$) には本モデルの結果と Hatta-Taya モデルの結果の相異は熱伝導率比の増加にしたがって、大きくなるのがわかる。

繊維のアスペクト比は複合材料の性能に影響を与える可能性があるので、熱伝導率にどのような影響を与えるか関心と呼ぶ。繊維のアスペクト比の影響を検討するため、介在相と母相の熱伝導率比が $\lambda^2 / \lambda^1 = 20$ の場合に、繊維のアスペクト比が $a_3 / a_1 = 10, 50, 100, 1000$ について本モデルで計算した結果と Hatta-Taya モデルで計算した結果をそれぞれ図7-1-11と図7-1-12に示す。

本モデルで計算した熱伝導率は図7-1-11に示されているが、図7-1-12に示されている Hatta-Taya モデルで計算した熱伝導率と比べて、繊維のアスペクト比の変化に対して敏感でない結果を得た。Hatta-Taya モデルで計算した熱伝導率はアスペクト比が10倍の時、少しずれているが、アスペクト比が50以上になると、区別できなくなることが分かる。このような計算結果から、繊維アスペクト比が10倍以上の場合には繊維分散複合材料の熱伝導率は、繊維アスペクト比にほとんど依存しないことが分かる。(粒子のアスペク

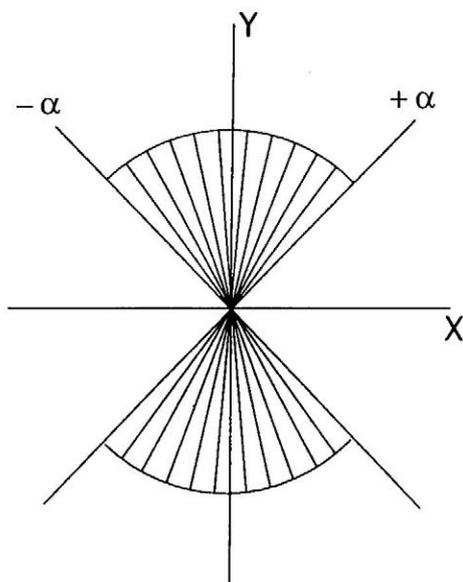


図7-1-13 繊維の分布範囲 (一様分布)

ト比が10以下の場合には、繊維と考えないので、ここでは検討しない。)

以上、繊維がランダムに配列している複合材料の熱伝導率について検討したが、つぎに複合材料の繊維配列が方向性を持つ場合を考え、複合材料の熱伝導率に対するその影響について検討する。複合材料の繊維配列は見取り図7-1-13に示す。 α は繊維配列方向係数 θ の最大幅である、即ち、式(7-1-2-13)に関する方向係数 θ は $-\alpha \leq \theta \leq +\alpha$ を満足する。そこで、繊維は

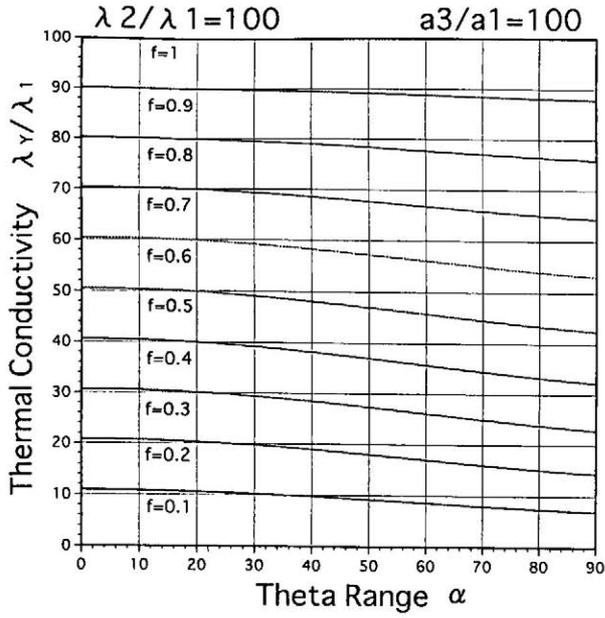


図 7-1-14 α の変化による Y 方向の熱伝導率

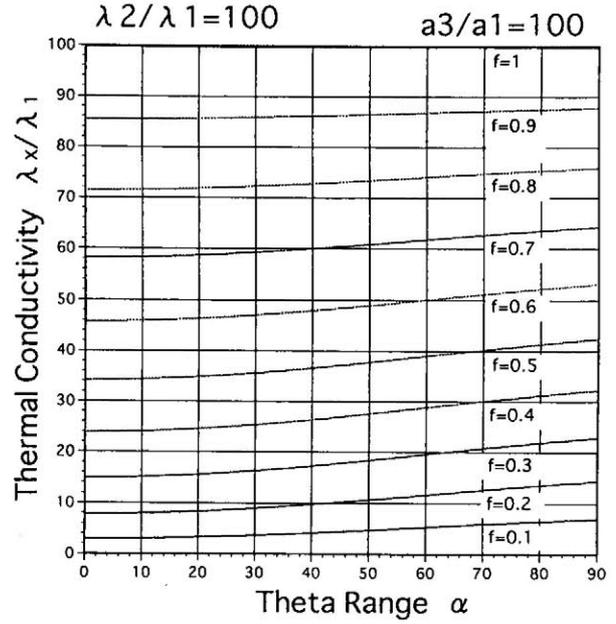


図 7-1-15 α の変化による X 方向の熱伝導率

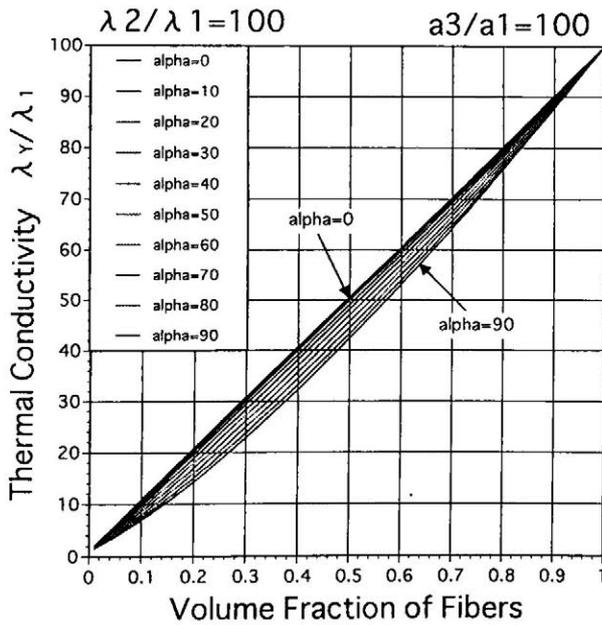


図 7-1-16 α が異なる場合に繊維の体積分率の変化による Y 方向の熱伝導率

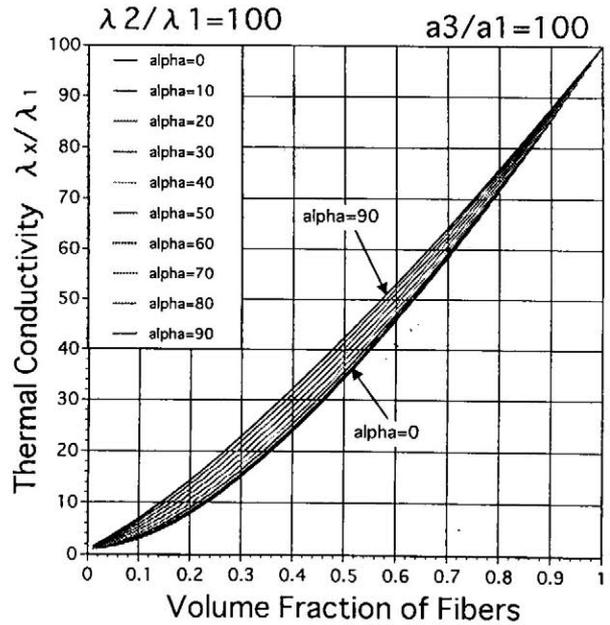


図 7-1-17 α が異なる場合に繊維の体積分率の変化による X 方向の熱伝導率

ア

$-\alpha \leq \theta \leq +\alpha$ の間に一様分布していると仮定する。

繊維が図7-1-13に示すように分布している複合材料の熱伝導率は方向性を持つため、Y方向とX方向の熱伝導率が異なる。繊維介在相と母相の熱伝導率比が $\lambda^2/\lambda^1 = 100$ で、又繊維アスペクト比も $a_3/a_1 = 100$ である場合の複合材料Y方向とX方向の熱伝導率について、本モデルで計算したY方向の結果を図7-1-14に示し、X方向の結果を図7-1-15に表す。横軸は繊維配列方向係数 θ の幅 α を示す。二つの図の縦軸は複合材料Y方向の熱伝導率 \hat{k}_y 及びX方向の熱伝導率 \hat{k}_x を母相の熱伝導率によってノーマライズした値を示す。繊維の体積分率は0.1から1までを変化させ、それぞれ体積分率について、 α に関する熱伝導率の変化曲線10本を図7-1-14と図7-1-15に示す。

$\alpha = 0$ 度の場合、すべての繊維は図7-1-14のY軸と平行しており、同じ体積分率でY方向の熱伝導率 \hat{k}_y は最も大きく、X方向の熱伝導率 \hat{k}_x は最も小さい。

配列方向係数の幅 α の増加に従って、Y方向の熱伝導率は小さくなると同時に、X方向の熱伝導率は大きくなる。 $\alpha = 90$ 度の場合、繊維は完全ランダムに分布していて、複合材料は巨視的に異方性を失い、複合材料Y方向とX方向の熱伝導率は等しくなる。

体積分率が小さい時、配列方向係数の幅 α の変化によって複合材料の熱伝導率も大きく変化する。例えば、体積分率 $f=0.1$ の場合にY方向或いはX方向の熱伝導率は2倍ほど変化するが、体積分率が大きくなると、複合材料の熱伝導率の幅 α による変化は小さくなる。

繊維配列方向の幅 α をパラメタとして、複合材料のY方向の熱伝導率の繊維の体積分率による変化が図7-1-16に示されている。縦軸は複合材料のY方向の熱伝導率と母相の熱伝導率の比を示し、横軸は繊維の体積分率を表す。 $\alpha = 0$ 度の場合に、すべての繊維はY方向に平行して分布しているため、複合材料のY方向の熱伝導率は体積分率に対し直線になっており、 α の増加にしたがって、複合材料のY方向の熱伝導性能が低下することが分る。

複合材料のX方向の熱伝導率に関する結果を図7-1-17に表す。X方向の熱伝導率はY方向の熱伝導率と異なって、 $\alpha = 0$ 度の場合に体積分率に対し直線となっていない。図7-1-17から複合材料のX方向の熱伝導性能が α により増加することが分かる。

また繊維分散複合材料の剛性に関する図6-1-7及び図6-1-8と比べて、繊維配列方向変化の影響が小さいことが分かる。

(b) 正規分布の場合

繊維が一様分布する以外に正規分布で配列する場合を考える。正規分布の場合に繊維の方向によって、図7-1-18に示すように繊維の密度が方向により一様でない、 $\alpha = \pi/2$ の時にも複合材料は異方性を持ち、Y方向に集中するとする。図7-1-18に示す正規分布がY軸に対称と仮定すれば、繊維の体積分率に関する分布関数と繊維の体積分率 f は次式を満足しなければならない。

$$\sum_{i=1}^{100} \rho(\theta) \left(-\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{100}\right) = f \tag{7-1-4-4}$$

ここで、 $\rho(\theta)$ は繊維配列分布に関する体積分率の頻度である。式(7-1-4-1)を満足する正規分布を次のように定義する。

$$\rho(\theta) = \frac{f}{\sqrt{2\pi} \varphi} e^{-\frac{(\theta - \pi/2)^2}{\varphi^2}} \tag{7-1-4-5}$$

上式において、パラメタ φ を決定する必要がある。統計理論によると、99.7%の確率を満たす φ は次のように与えられる。

$$\varphi = \alpha/3 \tag{7-1-4-6}$$

二次元問題について式(7-1-2-17)に示す Q_{ij} は次のように求められる。

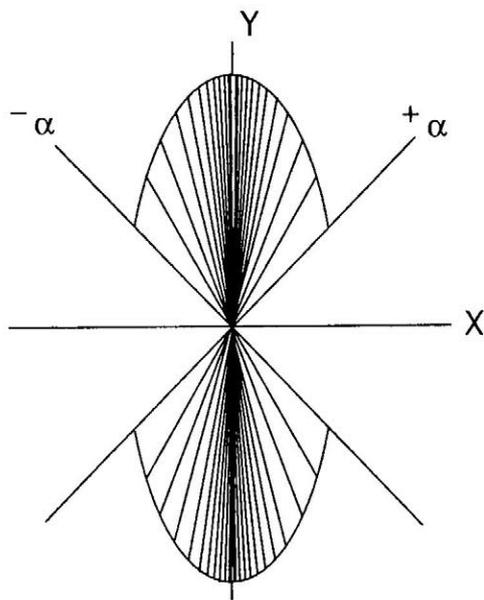


図7-1-18 繊維の正規分布範囲

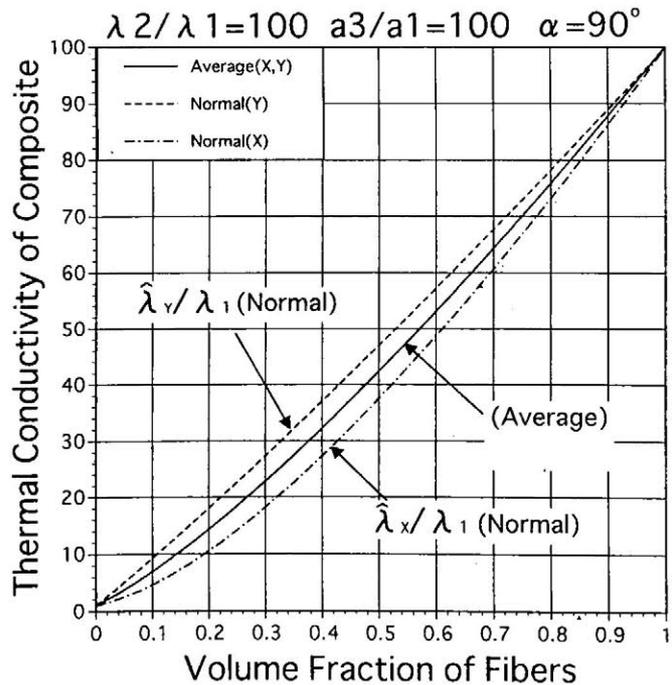


図7-1-19 正規分布と一様分布の比較

$$Q_{ij} = \frac{1}{100 \sqrt{2\pi} \varphi} \sum_{i=1}^{100} \chi_{im} (\delta_{mi} + \omega_{mk} \hat{R}_{kl}) \chi_{ij}^{-1} e^{-\frac{(\theta - \pi/2)^2}{\varphi^2}} \quad (7-1-4-7)$$

式 (7-1-4-4) を理論式 (7-1-2-24) に用いて、複合体熱伝導率の計算を行うことができる。

繊維と母相の熱伝導率が $\lambda^2 / \lambda^1 = 100$ 、繊維のアスペクト比が $a_3 / a_1 = 100$ 又繊維の分布幅が $\alpha = \pi/2$ の場合について計算した結果を図 7-1-19 に示す。横軸は繊維の体積分率を、縦軸は複合材料の巨視的な熱伝導率を示す。Average は一様分布を表し、Normal は正規分布を表す。また一様分布の場合に、Y 方向と X 方向の熱伝導率は等しく、実線により示す。点線は正規分布の場合の X 方向と Y 方向の熱伝導率を示す。繊維は Y 方向分布の方が高いため、Y 方向の熱伝導率は X 方向の熱伝導率より高い。

§ 7.1 の理論熱伝導構成則の式 (7-1-2-24) に基づいて理論解析を行う際、第四章の SCC モデルのように複合材料の巨視的な熱伝導率は未知数として扱い、そのため収束計算をする必要がある。理論解析の結果により、本モデルの理論式には優れた収束性があることが分かる。繊維分散複合材料について、本モデルで計算した熱伝導率は従来の Hatta-Taya のモデルで計算した熱伝導率より高いことが分かった。繊維の幾何学の形状に関するパラメタの中、繊維のアスペクト比が複合材料の熱伝導率に対する影響は非常に小さく、繊維の配列方向は複合材料の熱伝導率に対して影響が大きい。また繊維の配列方向に関する体積分率の分布は複合材料の熱伝導率に対して大きな影響がある。

§ 7.2 粒子分散複合材料の熱膨張

複合材料の熱膨張挙動はいろいろな分野で注目されている。例えば、電子集積回路や電子部品は発熱のため、複合材料の熱膨張特性は微電子集積回路などの設計にとって重要な役割を演じている。特にマルチチップ (multichip) モジュール (module) は高い密度で集積するように設計されている、また、電子集積回路中でよく使われている材料は金属性材料が最も多く、高い熱伝導性と熱膨張性を備えているので、材料の熱膨張挙動を正しく知る必要がある。

7.2.1 粒子分散複合材料の自由熱膨張率理論

自由熱膨張とは、複合材料に外荷重を掛けられていない時、温度の変化により膨張することである。ここでは、粒子分散複合材料の場合において、粒子が同じ形であると仮

定する、そのため、すべての粒子は等しい熱膨張挙動を行うと考えられるので、一つの挙動を分析すれば、他の粒子を代表することができる。

先ず、複合材料の各相材料の熱膨張率は等方性を持つと仮定すると、自由熱膨張率は次のように示されている。

$$\zeta^1 = \alpha_1 \Delta T^1 I \quad (7-2-1-1)$$

$$\zeta^2 = \alpha_2 \Delta T^2 I \quad (7-2-1-2)$$

ここで、 ζ^1 と ζ^2 は温度の変化で生じた母相と介在相の自由膨張歪み、 α_1 と α_2 は母相と介在相の熱膨張係数、 ΔT^1 と ΔT^2 は母相と介在相の初期温度による温度変化値である。 I はKroneckerデルタである。複合材料は静的な温度変化をし、温度の変化速度は非常に緩やかと考えられ、このような条件下で母相と介在相の初期温度と温度変化値が同じと仮定することができる。

$$\Delta T^1 = \Delta T^2 = \Delta T \quad (7-2-1-3)$$

自由状態の均質材料媒体はすべての微小領域が同時に同じ膨張率で膨張し、材料内部では応力が生じない。しかし、非均質材料の場合、材料によって熱膨張率が異なるため、熱膨張のバランスが崩れて、内部応力が生じる。粒子分散複合材料の場合に、例えば、母相の熱膨張率が低く、粒子の熱膨張率が高い場合に、粒子が母相より大きく膨張する傾向があるが、複合材料に含まれている粒子介在物は周りの媒体に拘束され、自由に膨張できないため、圧縮応力が生じる。この熱変化で生じた粒子の応力と複合材料全体の平均熱膨張歪みおよびとの関係を検討する必要がある。

ここで、検討する問題は弾性に限り、局所微視的な応力と歪み分布を考慮しないので、母相と粒子の応力-歪みはそれぞれの平均値で表される。熱弾性理論では、均質材料の歪みは熱膨張歪み及び機械歪みからなる。粒子分散複合材料の粒子に関して、温度変化で生じた非弾性歪みと粒子の全歪み、全応力の間には次の関係がある。

$$\sigma_2 = E_2 : (\epsilon_2 - \zeta^2) \quad (7-2-1-4)$$

式(7-2-1-4)の E_2 は粒子介在相材料の弾性マトリクス、 σ_2 と ϵ_2 は介在相の全応力と全歪みである。 ζ^2 は温度の変化で生じた介在相の自由膨張歪みで、温度変化との関係は式(7-2-1-2)に与えられる。式(7-2-1-2)を上式に代入すれば、

$$\sigma_2 = E_2 : (\epsilon_2 - \alpha_2 \Delta T^2 I) \quad (7-2-1-5)$$

となる。均質母相材料について、介在相材料と同じように熱混合則を満足すると仮定すると、温度変化で生じた歪みと応力は次の関係を満足する。

$$\sigma_1 = E_1 : (\epsilon_1 - \zeta^1) \quad (7-2-1-6)$$

又式 (7-2-1-1) を式 (7-2-1-6) に代入すれば、次式を得る。

$$\sigma_1 = E_1 : (\epsilon_1 - \alpha_1 \Delta T^1 I) \quad (7-2-1-7)$$

式 (7-2-1-4) と式 (7-2-1-6) は均質介在相材料また均質母相材料における構成則である。

均質材料と比べて、複合材料の各相材料剛性と熱膨張率が異なるが、温度が変化する場合、材料内部で応力が生じる。外荷重がない場合でも、材料内部に応力が発生し、この応力は残留応力となる。

介在相の歪みと複合材料全体の平均歪みの食い違いを表すため、次のように定義する。

$$\epsilon^c = \epsilon_2 - \bar{\epsilon} \quad (7-2-1-8)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}$ は複合材料の平均熱膨張歪みである。本論文の基本として、開発した粒子の外域媒体に関する平均性能の影響を考慮するSCCモデルに基づく等価介在物方法の等価条件を本問題に対しては次のように表すことができる。

$$E_2 : (\epsilon^c + \bar{\epsilon} - \zeta^2) = \hat{E} : (\epsilon^c + \bar{\epsilon} - \zeta^2 - \epsilon^*) \quad (7-2-1-9)$$

上式の左辺は温度の変化で生じた実粒子内部の応力を示し、 $\epsilon^c + \bar{\epsilon}$ は粒子全歪みであり、 $\epsilon^c + \bar{\epsilon} = \epsilon_2$ を満足する。上式の右辺は複合材料と同じ剛性を持ち、固有歪みを有する均質等価粒子の応力を示す。実粒子とことなり、均質等価粒子は固有歪みを含み、その応力は式 (7-2-1-9) 右辺のように与えられる。

ここでは、複合材料の自由熱膨張率を求めるため、複合体に外荷重をかけていない。均質等価粒子の応力と歪みにおける Eshelby の等価介在物理論により、次式が成り立つ。

$$\epsilon^c = \hat{\mathcal{S}} : (\zeta^2 + \epsilon^* - \bar{\epsilon}) \quad (7-2-1-10)$$

上式の $\hat{\mathcal{S}}$ は複合材料の平均Eshelbyテンソルであり、 $\zeta^2 + \epsilon^*$ は均質等価粒子の全固有歪みである。均質等価粒子の全固有歪みから複合材料の平均歪みを引いた歪み $\zeta^2 + \epsilon^* - \bar{\epsilon}$ は均質等価粒子の有効固有歪みとなる。式 (7-2-1-10) を式 (7-2-1-9) に代入して解くと、固有歪み ϵ_m^* は次のように求められる。

$$\epsilon^* = N^* : [\zeta^2 - \bar{\epsilon}] \quad (7-2-1-11)$$

$$N^* = \{ [(\hat{E} - E_2) : (\hat{\mathcal{S}} - I \otimes I)]^{-1} : E_2 - I \otimes I \}^{-1} \quad (7-2-1-12)$$

式 (7-2-1-8)、(7-2-1-10)、(7-2-1-11) より介在相の歪みは次のように表すことができる。

$$\epsilon_2 = [\hat{\mathcal{S}} + \hat{\mathcal{S}} : N^*] : \zeta^2 + [I \otimes I - \hat{\mathcal{S}} - \hat{\mathcal{S}} : N^*] : \bar{\epsilon} \quad (7-2-1-13)$$

上式は粒子の全歪みと複合材料及び粒子の熱膨張歪みの関係を示しているが、複合材料の平均熱膨張率 $\bar{\epsilon}$ はここではまだ未知数である。

自由熱膨張の場合に、温度変化により複合材料の体積が膨張するが、複合材料の巨視的な平均応力は0である。そのため、母相と粒子介在相の応力は次式に示される平衡条件を満足する。

$$\hat{\sigma} = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 = 0 \quad (7-2-1-14)$$

母相と粒子の応力を表す式 (7-2-1-4)、(7-2-1-6) を上式に代入すれば、複合材料の平衡方程式は

$$(1-f)E_1 : (\varepsilon_1 - \zeta^1) + fE_2 : (\varepsilon_2 - \zeta^2) = 0 \quad (7-2-1-15)$$

となる。また、複合材料の歪み平均則により、複合材料の平均歪み、即ち複合材料の自由熱膨張歪みは次のように与えられる。

$$\hat{\varepsilon} = (1-f)\varepsilon_1 + f\varepsilon_2 \quad (7-2-1-16)$$

式 (7-2-1-13)、(7-2-1-15)、(7-2-1-16) から、温度変化で生じた複合材料巨視的な平均歪みは次のようになる。

$$\hat{\varepsilon} = [E_1 + f(E_2 - E_1) : (I \otimes I - \hat{S} - \hat{S} : N^*)]^{-1} : \{(1-f)E_1 : \zeta^1 + fE_2 : \zeta^2 + f(E_1 - E_2) : (\hat{S} + \hat{S} : N^*) : \zeta^2\} \quad (7-2-1-17)$$

式 (7-2-1-1)、(7-2-1-2)、(7-2-1-3) を上式に代入すれば、複合材料の平均的な熱膨張率は次式によって与えられる。

$$\hat{\varepsilon} = Q \Delta T \quad (7-2-1-18)$$

$$Q = [E_1 + f(E_2 - E_1) : (I \otimes I - \hat{S} - \hat{S} : N^*)]^{-1} : \{(1-f)E_1 \alpha_1 + fE_2 \alpha_2 + f(E_1 - E_2) : (\hat{S} + \hat{S} : N^*) \alpha_2\} \quad (7-2-1-19)$$

SCCモデルに基づいて得た複合材料の熱膨張率に関する式 (7-2-1-19) は複合材料の剛性に依存することが強調され、熱的な混合理論だけで求められるものではない。実際の応用においては、第四章の4.4.2の複合材料の平均剛性 \hat{E} を求めた上で用いるものである。この点において従来の理論と比べて、大きく異なる所である。以前 Wakashima、Tayaらのモデルで求めた熱膨張率は複合材料の平均的剛性に依存せず、複合材料の熱膨張率と複合材料の剛性構成則はそれぞれ独立して求められる。その理由は Wakashima、Tayaらの理論は介在物の外部領域の特性が母相の特性と等しいと仮定しているためである。しかし、複合材料内部介在物の膨張挙動は両相の剛性と粒子密度によって決まる周りの複合材料の平均剛性によって必ず牽制されること実から、むしろ複合材料の平均剛性の働

きを考慮する本モデルは複合材料の実際に近いと考えられる。

7.2.2 球状粒子分散複合材料の熱膨張率に関する理論モデル

球状粒子分散複合材料の場合、複合体は巨視的等方体であるため、独立な弾性係数は2個、熱膨張係数は1個となる。又、自由熱膨張は複合体のせん断剛性に依存しなく、体積弾性係数だけに依存するため、母相と介在相及び複合体のスカラ量の体積弾性係数を式(7-2-1-19)に代入すれば、複合体の熱膨張係数を次のように表すことができる。

$$\alpha = \frac{(1-f)K_1\alpha_1 + fK_2\alpha_2 + f(K_1 - K_2)\hat{S}_\alpha(1+N^*)\alpha_2}{K_1 + f(K_2 - K_1)(1 - \hat{S}_\alpha - \hat{S}_\alpha N^*)} \quad (7-2-2-1)$$

$$N^* = \frac{(\hat{K} - K_2)(\hat{S}_\alpha - 1)}{K_2 - (\hat{K} - K_2)(\hat{S}_\alpha - 1)} \quad (7-2-2-2)$$

ここで、 \hat{K} は複合体の平均体積弾性係数である、第四章に与えられている構成則を上式に用いることができる。 \hat{S}_α は複合体の平均 Eshelby パラメタで、次のように与えられる。

$$\hat{S}_\alpha = \frac{1 + \gamma}{3(1 - \gamma)} \quad (7-2-2-3)$$

複合体の Poisson 係数は次のように求めることができる。

$$\gamma = \frac{3\hat{K} - 2\hat{G}}{6\hat{K} - 2\hat{G}} \quad (7-2-2-4)$$

となる。式(7-2-2-13)を式(7-2-2-3)に代入すれば、Eshelby パラメタを得ることができる。

A. 従来の理論との結果の比較

球状粒子分散複合材料の熱膨張率についての、従来の最も代表的なモデルは若島のモデルハ(付録7-4)である。それと比較するため、若島の数値計算例と等しい材料係数を用い、母相と介在相に関する材料係数を次のように設定する。

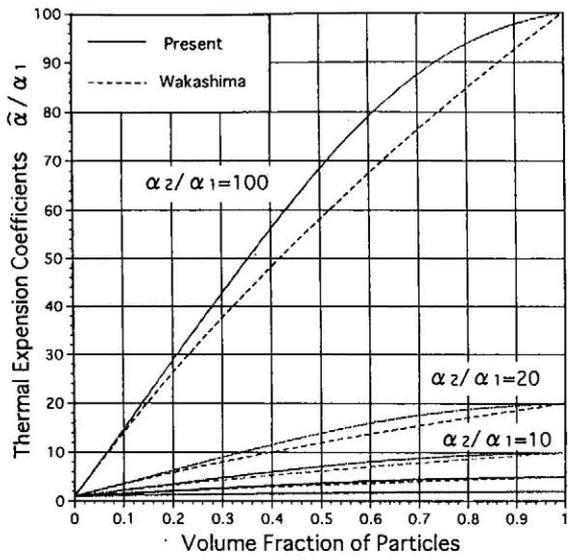
母相 (Epoxy):

$$\text{ヤング率} \quad E_1 = 300 \text{ kg/mm}^2 \quad \text{ポアソン係数} \quad \gamma_1 = 0.36 \quad (7-2-2-5)$$

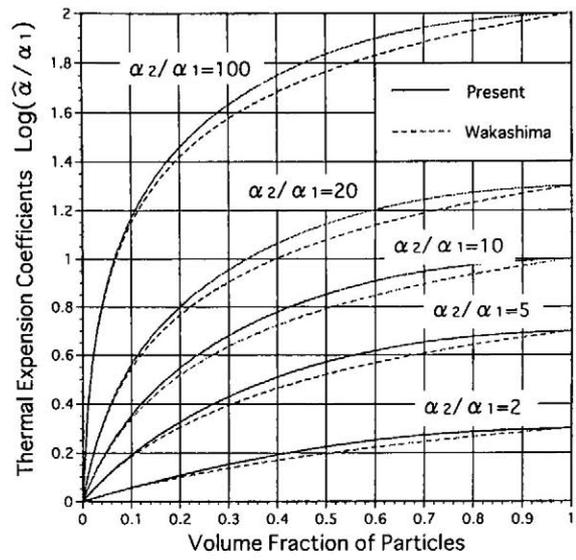
介在相 (Glass)

$$\text{ヤング率} \quad E_2 = 7000 \text{ kg/mm}^2 \quad \text{ポアソン係数} \quad \gamma_2 = 0.23 \quad (7-2-2-6)$$

粒子と母相の熱膨張率の比が2、5、10、20、100倍の場合について計算を行い、その結

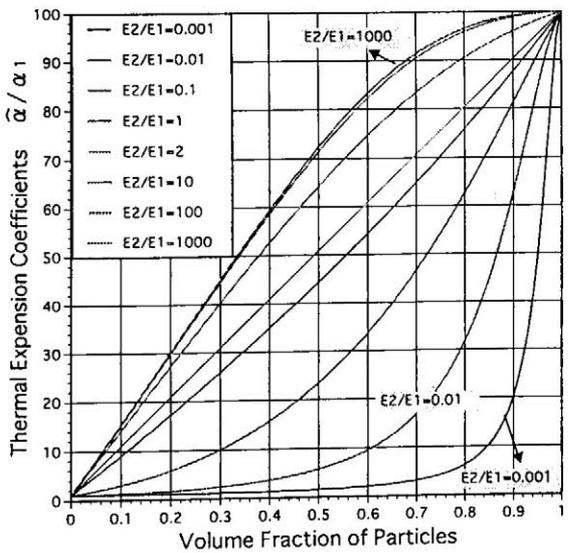


(a)

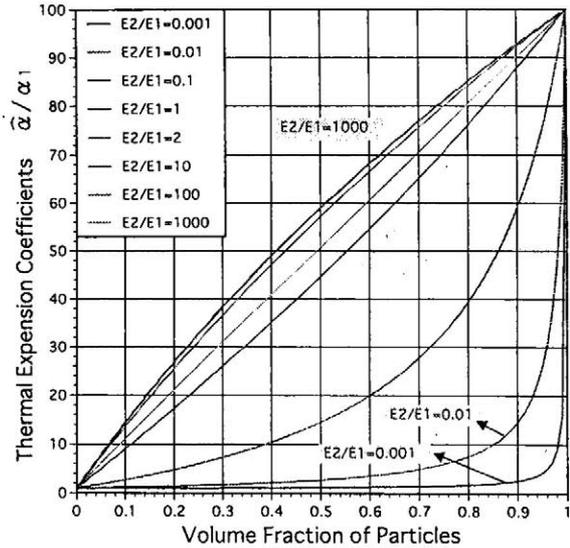


(b)

図 7-2-1 球状粒子の熱膨張率について本モデルの式 (7-2-2-1) で計算した結果と Wakashima モデルで得た結果の比較



(a) 本モデルの結果



(b) Wakashima モデルの結果

図 7-2-2 球状粒子分散複合材料の熱伝導率に対する剛性の影響について本モデルの式 (7-2-2-1) と Wakashima モデルで得た熱膨張率の比較

果を図7-2-1aに示す。横軸は粒子の体積分率を示し、縦軸は複合材料の熱膨張率と母相の熱膨張率の比を示す。実線は本モデルの式(7-2-2-1)で計算した結果、点線はWakashimaモデルの結果である。曲線は、順次粒子と母相の熱膨張率の比が2、5、10、20、100倍の場合の結果を示す。図7-2-1aに示した結果から、本モデルの結果は粒子の体積分率が低い時、Wakashimaモデルの結果に近く、粒子の体積分率が高い場合、本モデルの結果はWakashimaモデルの結果より高い値を与えることが分かる。

図7-2-1aで粒子と母相の熱膨張率の比が低い場合、結果を見きわめにくいいため、図7-2-1aの縦軸の結果を対数化し、その結果を図7-2-1bに示す。図7-2-1bより、粒子と母相の熱膨張率の比が低い場合と高い場合の両者の違いは大体同じ程度の比率であることが分かる。

B、剛性の影響

介在相と母相の熱膨張率がわかっているだけでは複合材料の熱膨張率を決定できない。それは、複合材料の熱膨張率は各相材料の弾性係数にもよるからである。ここで、その剛性の影響を解析する。

母相の材料係数は式(7-2-2-5)と同じように与えられ、介在相のポアソン係数も式(7-2-2-6)と同じとする。しかし、介在相のヤング率は次のように変化させた場合について検討する。

$$E_2 = 0.001E_1, 0.01E_1, 0.1E_1, E_1, 2E_1, 10E_1, 100E_1, 1000E_1 \quad (7-2-2-7)$$

また、介在相と母相の熱膨張率の比を100倍とする。

介在相と母相の剛性比の多数のケースについて、本モデルの式(7-2-2-1)で計算した結果を図6-3-2aに、Wakashimaモデルで計算した結果を図6-3-2bに示す。横軸は粒子の体積分率を示し、縦軸は複合材料の熱膨張率と母相の熱膨張率の比を示す。下から上までそれぞれの曲線は粒子と母相の熱膨張率の比が順次、 $E_2 = 0.001E_1, 0.01E_1, 0.1E_1, E_1, 2E_1, 10E_1, 100E_1, 1000E_1$ の場合の結果を示す。

介在相と母相の剛性比が同じ場合を比較すれば、本モデルの結果はWakashimaモデルの結果と比べ、高いことが分かる。これは、粒子の膨張挙動の理論で本モデルは他粒子の剛性に対する影響も考慮しているからである。ところが、Wakashimaモデルは他粒子の剛性の影響を考慮しておらず、結果においての粒子が複合材料の粒子熱挙動に対する影響を大きく反映していない。

7.2.3 一方向繊維分散複合材料の熱膨張率に関する理論解析

従来の理論と比べるため、繊維はすべて平行に配列していると仮定する。かつて、繊維分散複合材料の熱膨張率について、Takao-Taya (付録7-5) は Mori-Tanaka の理論に基づいて解析を行った。Takao-Taya の結果、また本研究の結果においても、繊維のアスペクト比の分布は繊維分散複合材料の性能に余り影響を与えないため、ここでは、すべての繊維のアスペクト比は同じと仮定する。

Takao-Taya 理論の結果と比較するため、数値計算において、Takao-Taya の論文に用いられた材料係数をそのまま使い、次のように表すことにする。

母相 (6061Al):

ヤング率: $E_1 = 68.3 \text{ Gpa}$

ポアソン係数: $\gamma_1 = 0.33$ (7-2-3-1)

熱膨張率: $\alpha_1 = 23.6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

介在相 (SiC Wisker)

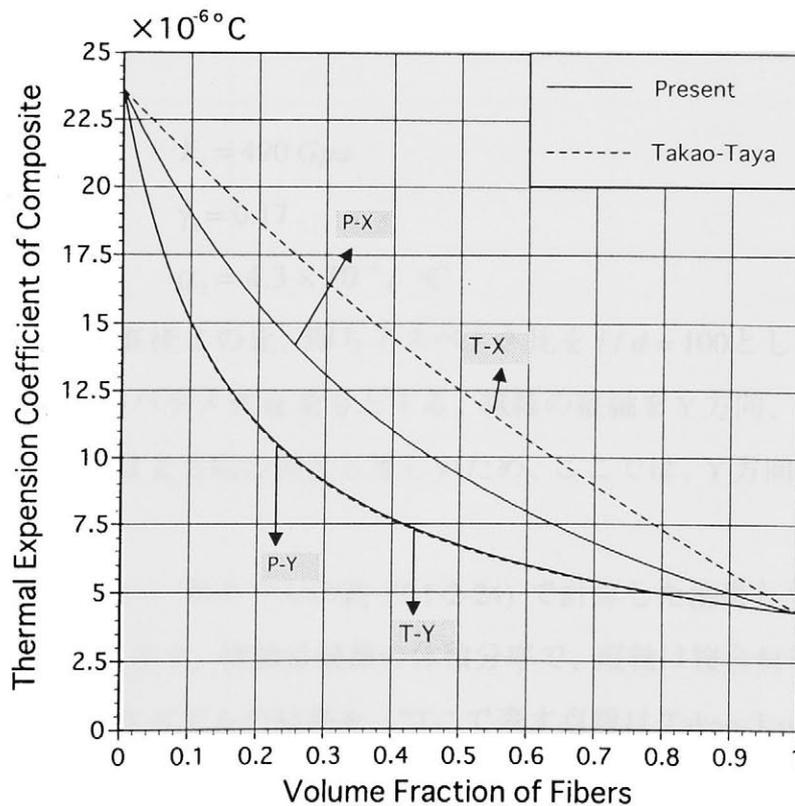


図 7-2-3 一方向繊維分散複合材料の熱伝導率に対する剛性の影響について
本モデルと Takao-Taya モデルで得た熱膨張率の比較

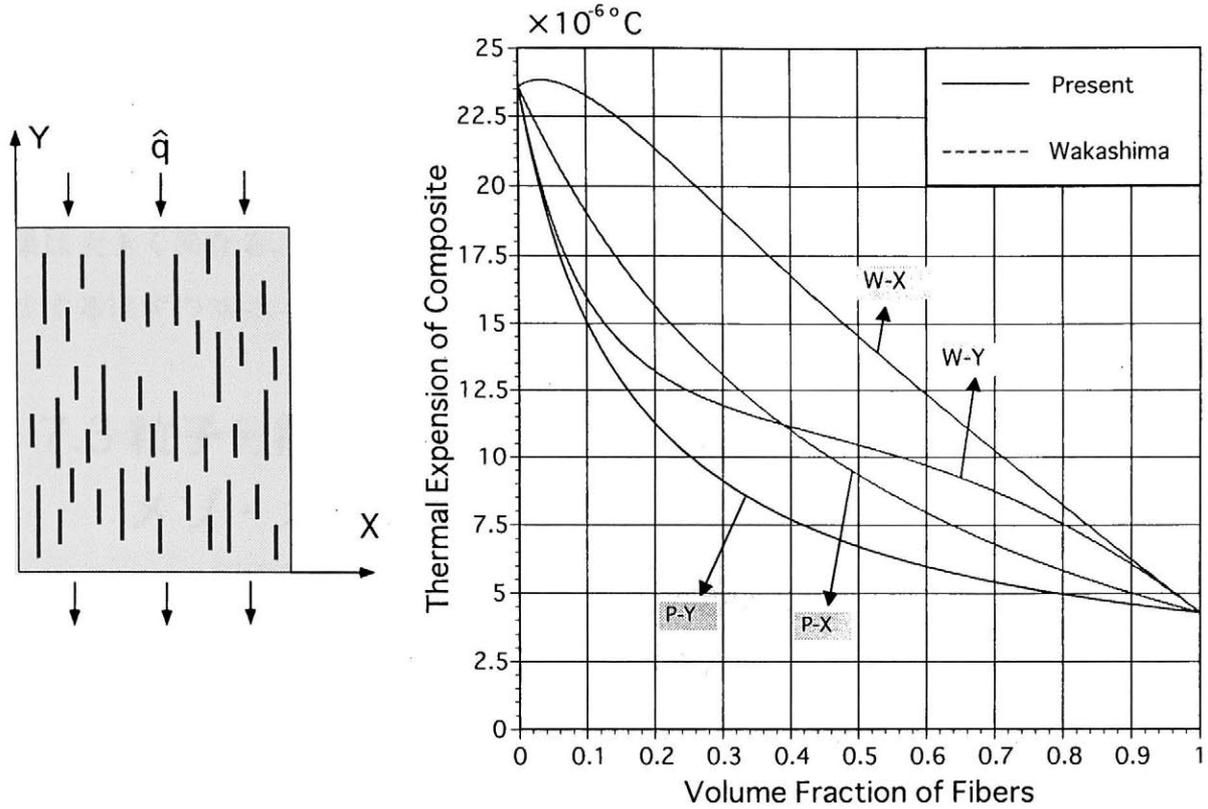


図 7-2-4 一方向繊維分散複合材料の熱伝導率に対する剛性の影響について
本モデルと Wakashima モデルによる得た熱膨張率の比較

ヤング率: $E_2 = 490 \text{ Gpa}$

ポアソン係数: $\gamma_2 = 0.17$ (7-2-3-2)

熱膨張率: $\alpha_2 = 4.3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

繊維介在物の長さ l と直径 d の比、即ちアスペクト比を $l/d = 100$ とし、繊維の配向範囲に関する式 (7-1-4-1) のパラメタ α を 0 とする。繊維の縦軸を Y 方向、直交軸をは X、Z とする。X 方向の性質は Z 方向の性質と等しいため、ここでは、Y 方向、X 方向の熱膨張率について検討する。

以上の材料係数を用い、本モデルの式 (7-1-2-24) で計算した結果と Takao-Taya モデルで得た結果を図 7-2-3 に示す。横軸は繊維の体積分率で、縦軸は複合材料の熱膨張率を示す。"P-" で表す実線は本モデルの結果を、"T-" で表す点線は Takao-Taya の結果を表す。

Y 方向の熱膨張率について、本モデルと Takao-Taya モデルで得た結果はほとんど同じである。それに比べて、X 方向の熱膨張率の場合、本モデルで得た結果は Takao-Taya モデルで得た結果と大きく離れていることが分かる。

一方向繊維分散複合材料の熱膨張率に関して、Wakashima (付録7-4) も Mori-Tanaka の歪み混合則を構成則を開発している。本モデルと Wakashima モデルで計算した結果を図 7-2-4 に示す。"P" で表す実線は本モデルの結果を、"W" で表す点線は Wakashima の結果を表す。X 方向の熱膨張率と Y 方向の熱膨張率に関する本モデルと Wakashima モデルの結果は大きく異なる。Wakashima の結果には不自然な曲線挙動が現れている。即ち、単調減少するはずの W-X 曲線が、低体積分率が 0 近辺で局所的に増加している。

§ 7.3 粒子分散複合材料の熱伝導率に関する メゾ・メカニクス解析

表 1：母相と介在相の熱伝導率

(単位： 10^{-6} °C)

温度 (°C)	母相 (チタニウム)	介在相 (セラミックス)
0	5.741	1.776
50	6.591	1.79
100	7.441	1.804
150	8.291	1.82
200	9.141	1.835
250	9.991	1.852
300	10.84	1.868
350	11.69	1.886
400	12.54	1.904
450	13.39	1.922
500	14.24	1.942
550	15.09	1.961
600	15.94	1.982
650	16.79	2.0
700	17.64	2.024
750	18.49	2.046
800	19.34	2.089
850	20.19	2.092
900	21.04	2.116
950	21.89	2.14
1000	22.74	2.166
1050	23.59	2.191
1100	24.44	2.217
1150	25.29	2.244
1200	26.14	2.271

第七章で構築した理論熱伝導構成則を検証するため、粒子分散複合材料の二次元熱伝導問題についてメゾ・メカニクス解析を行う。実際の複合材料の熱伝導率は温度に依存し、その温度変化に従って大きく変わる。数値計算をする時、温度分布の熱伝導率に対する影響を考慮する必要がある。§ 7.1で理論解析を行う際、粒子と比べて十分大きく、複合材料にとって十分小さい参照複合体において温度が一様分布していると仮定した。そのため、ここではメゾ・メカニクス解析における温度、熱伝導率の結果を平均化して、理論解析の結果と比較する。

7.3.1 メゾ・メカニクス解析に関するデータ

メゾ・メカニクス解析を行う際、使われる複合材料の母相材料と介在相材料の熱伝導率を表1に示している。

メゾ・メカニクス解析を行う際、球状粒子分散複合材料の一部分を取り、参照領域とする。この参照領域に対して作った有限要素法メッシュは図7.3.1に示されている。陰の部分は介在相であり、陰でない部分は母相である。粒子の半径と粒子を選ぶことによって、粒子の体積分率を調節することができ、そのため、粒子の体積分率が4%から72%まで調

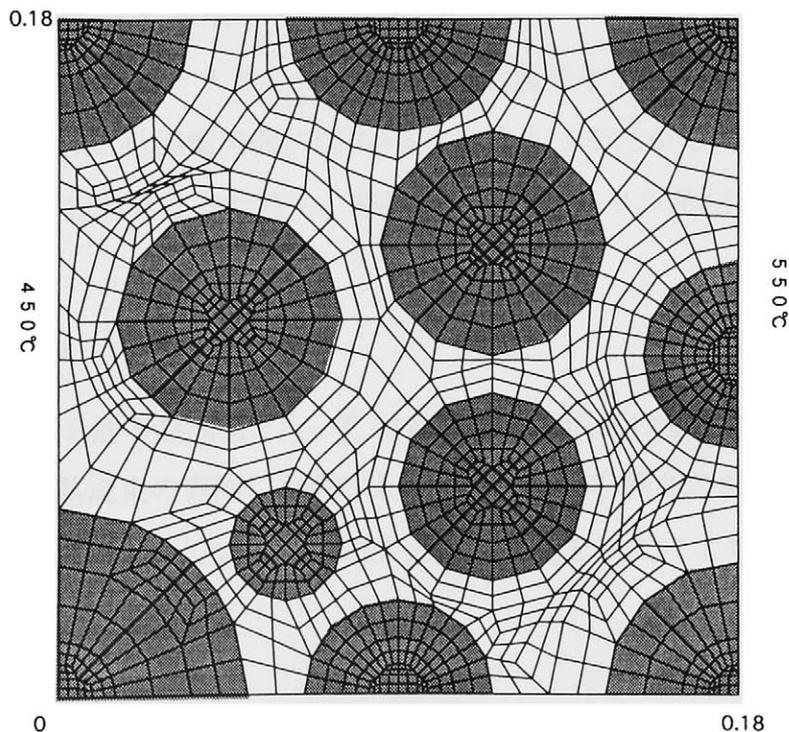


図 7-3-1 メゾ・メカニクス解析参照領域と有限要素法のメッシュ

節することができる。

図7-3-1に示す参照領域の条件を次のように与える。

* 正方形部材において、左端を450°C、右端を550°Cの定温とする。

* 部材の上下端を断熱又は無限領域を形成する対称境界とする。

* 時刻0の場合、全参照領域の温度を500°Cである

* 正方形部材の縦と横の長さは0.18とする。ここで、粒子のサイズと部材のサイズの相対値だけが必要なので、部材の縦と横の長さを無次元とする。

7.3.2 参照領域の内部の温度分布

図7-3-1に示す参照領域では粒子の体積分率が49.34%である。熱衝撃を加えた後、参照領域の下端の境界面の温度の変化を時間経過が 1×10^{-6} 秒、11.21秒、4100秒と9100秒の場合の結果を図7-3-2に示す。横軸は観察点のX軸における座標、縦軸は観察点の温度である。4100秒以降の温度分布には殆ど変化がなく、温度分布はほぼ定常状態となった。温度勾配が一定でないのは、参照領域の熱伝導率の非均質性によるものである。図7-3-1に示すように下側参照面の左側から、順に介在相、母相、介在相、母相、介在相と材質が分布する。

7.3.3 メゾ・メカニクス解析による熱伝導率

有限要素法におけるメゾ・メカニクス解析で熱伝導率を求める際、熱流束を算定する参照面をとり、高温側と低温側の間に図7-3-3に示すような三つの太線によって表す。参照領域内部の温度が定常となった時の、参照領域に関するメゾ熱伝導率は次式に表される。

$$Q = -\bar{\lambda} \frac{T_b - T_a}{l} A \quad (7-3-3-1)$$

ここで、 Q は参照面を通る熱流量、 $T_b - T_a$ は高温側と低温側の温度差、 l は高温側と低温側の間の距離、 A は熱流束の方向に垂直なる左側面或いは右側面の面積、 $\bar{\lambda}$ は平均熱伝導率である。図7-3-3に示されている参照面を通る熱流量を次式により求める。

$$Q = \int_{\tau} q \, ds \quad (7-3-3-2)$$

ここで、 ds は参照面の面積要素、 q は参照面の単位面積を通過する熱流束、 τ は参照面の全領域を示す。参照面の単位面積に接する単位体積の領域におけるFourier熱伝導率は次

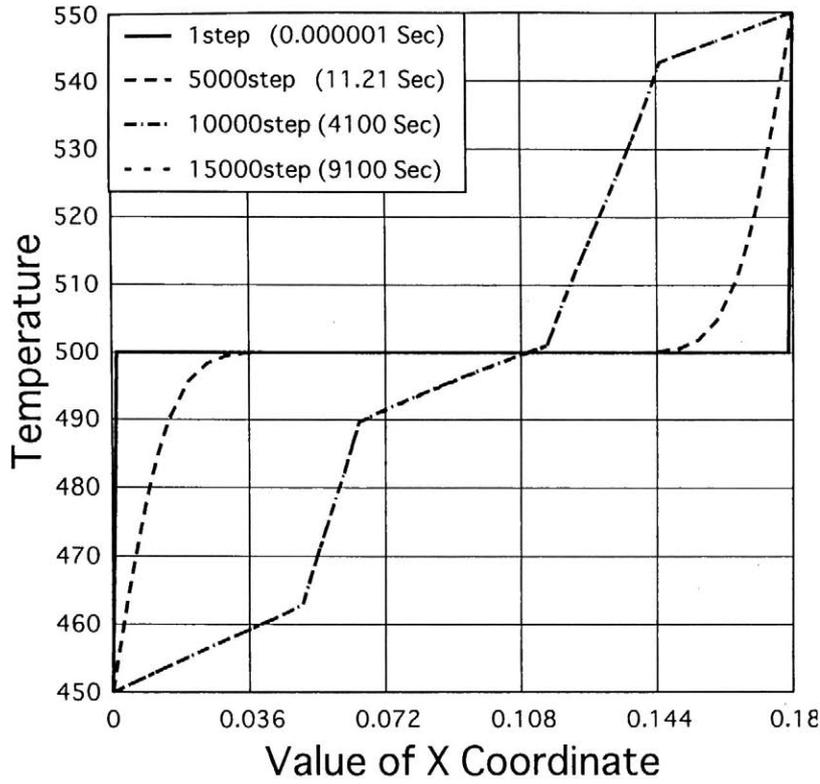


図 7-3-2 時間の変化による温度分布

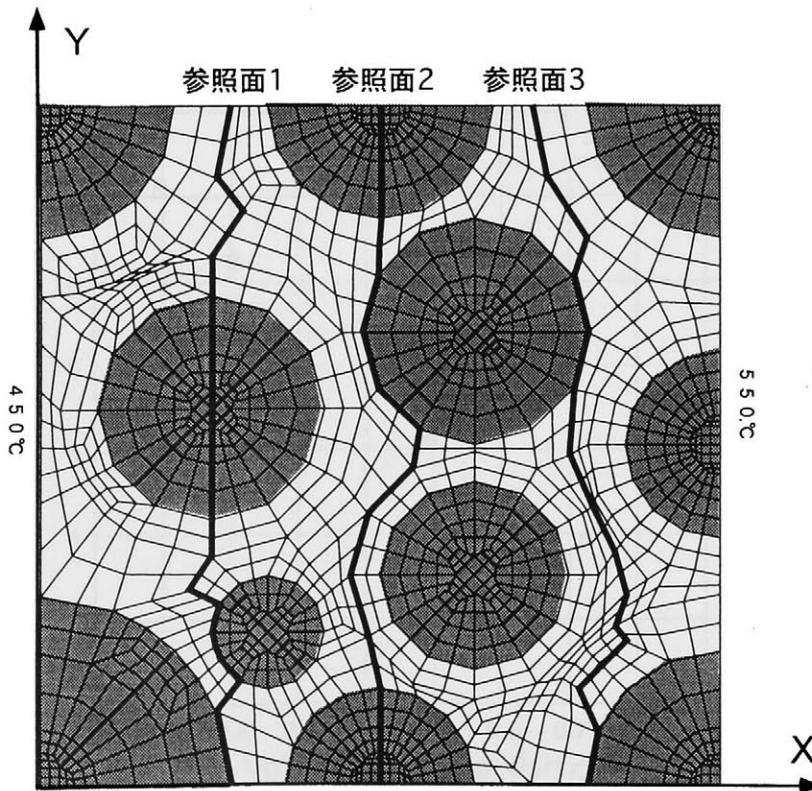


図 7-3-3 熱伝導率を検討する場合の参照面

のように与えられる。

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \tag{7-3-3-3}$$

n は参照面の局所的な単位法線ベクトルであり、その方向の温度勾配は、次式により求められる。

$$\frac{\partial T}{\partial n} = (n_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + n_y \frac{\partial N_j}{\partial y}) \phi_j \tag{7-3-3-4}$$

ここで、 n_x と n_y はベクトル n の X 方向と Y 方向における成分、 ϕ_j は要素の節点温度、 N_j は内挿関数（形状関数）である。式 (7-3-3-3)、(7-3-3-4) を式 (7-3-3-2) に代入して、次式を得る。

$$Q = \int_{\tau} -\lambda (n_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + n_y \frac{\partial N_j}{\partial y}) \phi_j ds \tag{7-3-3-5}$$

一つの有限要素に対し、式 (7-3-3-5) は次のようになる。

$$Q = \sum_{i=1}^n -\lambda_i (\cos \theta_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + \sin \theta_i \frac{\partial T_i}{\partial y}) W d\xi d\eta \tag{7-3-3-5}$$

ここで、 i は参照面に接する要素の積分点数を表し、 λ_i と T_i はそれぞれ積分点の熱伝導率

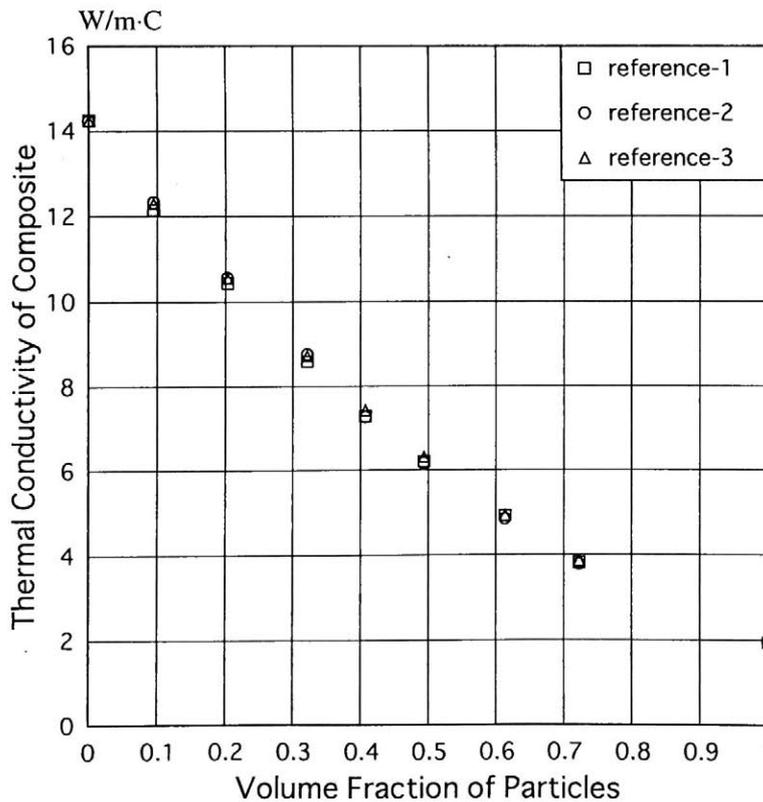


図 7-3-4 三つの参照面により得た平均熱伝導率

と温度、 θ は積分経路の傾き、 $W d\xi d\eta$ は要素の積分要素である。

式 (7-3-3-5) で得た Q 値を式 (7-3-3-1) の左辺に代入して解くと、複合材料マクロの平均熱伝導率を求めることができる。以上の計算式によって得た結果を図7-3-4に示す。横軸は粒子介在相の体積分率、縦軸は複合材料の平均熱伝導率である。図7-3-4では粒子の体積分率が0%、9.44%、20.3%、32.1%、40.7%、49.3%、72.3%の場合の結果を示している。□点は参照面1の結果、○点は参照面2の結果、△点は参照面3の結果を示すが、それらは互いによく一致しており、領域の温度分布が定常になっていることを示している。

§ 7.4 理論解析の結果とメゾ・メカニクス解析による結果の比較

第七章で粒子分散複合材料について熱伝導率と熱膨張率の理論構成則を構築したが、理論構成則の信頼性を確認するためメゾ・メカニクス解析との比較が必要がある。

そこで、球状粒子分散複合材料について検討し、理論解析においても、複合材料内部の温度状態は定常であると仮定する。複合材料に関する材料係数を実材料データより次

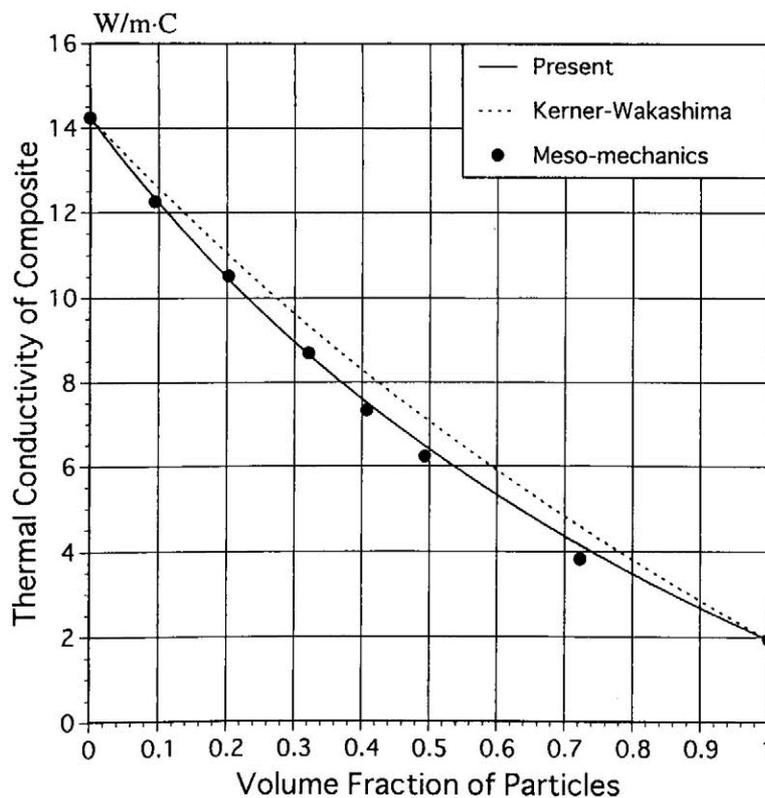


図7-4-1 三つの参照面により得た平均熱伝導率

のように与えられる。

母相 (チタニウム)

温度：500 °C 熱伝導率： $\lambda^1 = 14.24 \text{ W/m}\cdot\text{C}$

介在相 (セラミックス)

温度：500 °C 熱伝導率： $\lambda^2 = 1.942 \text{ W/m}\cdot\text{C}$

第七章の理論により粒子分散複合体の巨視的な平均熱伝導率は次式のようにになる。

$$\hat{\lambda} = \lambda^1 + \frac{f(\lambda^2 - \lambda^1)\hat{\lambda}}{\lambda^2 - (\hat{\lambda} - \lambda^2)(\omega - 1)} \quad (7-4-1-1)$$

球状粒子分散複合材料の二次元問題の場合、Eshelbyテンソルのスカラー平均値 ω は次のようになる。

$$\omega = 0.5 \quad (7-4-1-2)$$

式 (7-4-1-1) の右辺の巨視的な熱伝導率 $\hat{\lambda}$ の初期値を次式のようにとる。

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda^1 \lambda^2}{(1-f)\lambda^2 + f\lambda^1} \quad (7-4-1-3)$$

これらの解析により計算した結果を図7-4-1に示す。横軸は粒子の体積分率、縦軸は複合材料の熱伝導率を示す。実線 (Present) は本モデル、破線は Kerner-Wakashima モデル、FEM データはメゾ・メカニクス解析によるそれぞれの結果である。球状分散複合材料の場合、Kerner モデルの結果と Wakashima モデルの結果は等しく、二つのモデルの結果を一つの曲線で示す。

Kerner-Wakashima モデルに比べ、本モデルにより算定した結果はメゾ・メカニクス解析の示す結果とほぼ一致していることが分かる。

§ 7.5 結 言

Self-consistent 型式をとる本モデル構成則は、介在相の体積分率の関数となる粒子周りの材料特性を考慮しており、従来のモデルに比べより合理的といえる。また、精度においてもメゾ解析の結果と比べて従来モデルよりも高い。一方、繊維分散複合材料については、繊維の配列方向と分布は複合材料の熱伝導率に対して大きな影響を与える。

複合材料の巨視的な熱伝導率を求める本理論則では複合材料の熱伝導率を未知数として取り扱う SCC モデルを使用する。そのため、収束計算をする必要がある。本モデル理

論の結果は優れた収束性を呈している。球状粒子分散複合材料は等方性を持ち、粒子の体積分率が小さい時は、粒子の熱伝導率は巨視的な熱伝導率に対する影響が小さい。繊維のアスペクト比が複合材料の熱伝導率に及ぼす影響は非常に小さく、繊維の配列方向の複合材料の熱伝導率に対する影響は大きい。また繊維の配列方向に関する体積分率の分布も複合材料の熱伝導率に対して大きな影響を与える。

参考文献

- (7.1) R.J.Arenault and M.Taya, "Thermal residual stress in metal matrix composite", *Acta metall.* Vol.35, No.3, pp.651-659, 1987
- (7.2) James G. Boyd and Dimitris C. Lagoudas, "Thermomechanical Response of Shape Memory Composites", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol.5, May 1994
- (7.3) Hiroshi Hatta, Minoru Taya, "Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite", *J. Appl. Phys. (American Institute of Physics)*, Vol.58 (7), pp.2478-2486, October 1985
- (7.4) METIN KARAYAKA and HUSEYIN SEHITOGLU, "Thermomechanical fatigue of particulate-reinforced aluminum 2xxx-T4", *Metallurgical transactions A*, Vol.22A, pp.697-706, March. 1991
- (7.5) T.Nakamura, S.Surech, "Effects of thermal residual stresses and fiber packing on deformation of metal-matrix composites", *Acta metall. mater. (USA)*, Vol.41, no.6, p1665-1681, 1993
- (7.6) Ronald P.Nimmer, "Fiber-matrix interface effects in the presence of thermally induced residual stresses", *Journal of composites technology & research*, pp.65-75, 1990 by the American Society for Testing and materials
- (7.7) Y.-L.Shen, A.Needleman, and S.Suresh, "Coefficients of thermal expansion of metal-matrix composites for electronic packaging", *Metallurgical and materials transactions*, Vol.25A, p839-850, April 1994
- (7.8) Y.Takao, M.Taya, "The effect of variable fiber aspect ratio on the stiffness and thermal expansion coefficients of a short fiber composite", *Journal of composite materials (Technomic Publish Co.,Inc.)*, Vol.21, P140-156, Feb. 1987
- (7.9) Y.Takao and M.Taya, "Thermal expansion coefficients and thermal stresses in an aligned short fiber composite with application to a short carbon fiber/aluminum", *Transaction of the*

ASME, Vol.52, pp.806-810, Dec.1985

- (7.10) K.Wakashima and H.Tsukamoto, "Micromechanical approach to the thermomechanics of ceramic-metal gradient materials", Proceedings: The first international symposium, FGM, Sendai, pp.19-29, Sendai, 1990
- (7.11) 若島健司, "複合材料の巨視的力学特性, Part II 弾性係数および熱膨張係数", 日本複合材料学会誌, Vol.2-4, pp161-167, 1976.
- (7.12) 野田 (Naotake Noda, Tomoaki Tsuji), "傾斜機能円筒の定常熱応力 (Steady thermal stresses in a hollow cylinder of functionally gradient)", 日本機械学会 [No.900-86] 材料力学講演会論文集 (90-11-28,29), 豊橋市
- (7.13) 古川 (Toshio Furukawa, Hiroshi Nakanishi), "中空円筒の一般化された熱弾性問題 (Generalized Thermoelasticity for a circular hollow cylinder)", 日本機械学会 [No.900-86] 材料力学講演会論文集 (90-11-28,29), 豊橋市
- (7.14) 須見 (Naobumi Sumi, Yoshimoto Itoh), "衝撃加熱を受ける複合中空円筒の動的熱応力 (Dynamic thermal stresses in a bonded composite hollow circular cylinder)", 日本機械学会 [No.900-86] 材料力学講演会論文集 (90-11-28,29), 豊橋市

付録：

(7-1) Eshelby 2 階テンソル (ω_{ij} , $\hat{\omega}_{ij}$)

熱伝導における単粒子場合と多粒子場合の Eshelby 2 階テンソルは等しいため ($\hat{\omega}_{ij} = \omega_{ij}$)、ここで、 ω_{ij} の表現式だけを与えておく。

熱伝導における楕円介在物の Eshelby 2 階テンソルは次のように定義されている。

$$\hat{\omega}_{ij} = \frac{a_1 a_2 a_3}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^\infty \left(\frac{x_1^2}{a_1^2 + r} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + r} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + r} \right) \frac{1}{\Delta(r)} dr$$

ここで、 a_1, a_2, a_3 は楕円の三つの半径である。 $\Delta(r)$ は次式に与えられる。

$$\Delta(r) = \sqrt{(a_1^2 + r)(a_2^2 + r)(a_3^2 + r)}$$

式 (7-1-a) から、次式を得た。

$$\hat{\omega}_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

$$\hat{\omega}_{ii} = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^\infty \frac{1}{(a_i^2 + r) \Delta(r)} dr$$

粒子の形によって、 $\hat{\omega}_{ii}$ は次のように与えられる。

(a) 球状 ($a_1 = a_2 = a_3$)

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = \hat{\omega}_{33} = \frac{1}{3}$$

(b) 楕円筒 ($a_3 \rightarrow \infty$)

$$\hat{\omega}_{11} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad \hat{\omega}_{22} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \hat{\omega}_{33} = 0$$

(c) ペニー (penny) ($a_1 = a_2 \gg a_3$)

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = \frac{\pi a_3}{4 a_1}, \quad \hat{\omega}_{33} = 1 - \frac{\pi a_3}{2 a_1}$$

(d) 偏円 ($a_1 = a_2 > a_3$)

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = \frac{a_1^2 a_3}{2 (a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} \left\{ \cos^{-1} \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_3}{a_1} \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} \right)^{1/2} \right\}$$

$$\hat{\omega}_{33} = 1 - 2 \hat{\omega}_{22}$$

(e) 繊維 ($a_1 = a_2 < a_3$)

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = \frac{a_1^2 a_3}{2 (a_3^2 - a_1^2)^{3/2}} \left\{ \frac{a_3}{a_1} \left(\frac{a_3^2}{a_1^2} - 1 \right)^{1/2} - \cosh^{-1} \frac{a_3}{a_1} \right\}$$

$$\hat{\omega}_{33} = 1 - 2 \hat{\omega}_{22}$$

(7-2) 繊維分散複合材料に関する Hatta-Taya の熱伝導率 (文献5)

二次元熱伝導問題について、繊維($a_1 = a_2 < a_3$)が全方向、一様分布している場合、Hatta-Taya の熱伝導率は次のように与えられる。

$$\hat{\lambda}_{11} = \hat{\lambda}_{33} = \lambda^1 \left\{ 1 + \frac{f(\lambda^2 - \lambda^1) [(\lambda^2 - \lambda^1)(S_{11} + S_{33}) + 2\lambda^1]}{2(\lambda^2 - \lambda^1)^2(1-f)S_{11}S_{33} + \lambda^1(\lambda^2 - \lambda^1)(2-f)(S_{11} + S_{33}) + 2\lambda^1\lambda^1} \right\}$$

$$S_{11} = S_{22} = \frac{a_1^2 a_3}{2 (a_3^2 - a_1^2)^{3/2}} \left\{ \frac{a_3}{a_1} \left(\frac{a_3^2}{a_1^2} - 1 \right)^{1/2} - \cosh^{-1} \frac{a_3}{a_1} \right\}, \quad S_{33} = 1 - 2 S_{11}$$

(7-3) 球状粒子分散複合材料に関する Wakashima の熱伝導率

$$\hat{\lambda} = \lambda' + \frac{f}{1/(\lambda^2 - \lambda') + (1-f)/3\lambda'}$$

(7-4) 若島の熱膨張率

(a) 球状粒子分散複合材料の熱膨張率

母相と介在相は等方性を持つ均質材料と仮定する、若島の球状粒子分散複合材料の熱膨張率は次のように与えられる。

$$\hat{\alpha} = (1-f)\alpha_1 + f\alpha_2 + f(1-f)(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{K_2 - K_1}{(1-f)K_1 + fK_2 + (3K_1K_2/4G_1)}$$

ここで、 α_1 と α_2 はそれぞれ母相と介在相の熱膨張率、 K_1 と K_2 はそれぞれ母相と介在相の体積弾性係数、 G_1 と G_2 はそれぞれ母相と介在相のせん断弾性係数である。

(b) 一方向繊維分散複合材料の熱膨張率

繊維が一方向に分散しており、複合材料の熱膨張率に関して繊維軸方向と横方向は異なるため、それぞれの熱膨張率を与える必要がある。

* 繊維方向の熱膨張率

$$\hat{\alpha}_l = (1-f)\alpha_1 + f\alpha_2 + f(1-f)(\alpha_2 - \alpha_1) \left[\frac{C-D}{AC-BD} E_2 - 1 \right]$$

* 横方向の熱膨張率

$$\hat{\alpha}_t = (1-f)\alpha_1 + f\alpha_2 + f(1-f)(\alpha_2 - \alpha_1) \left[\frac{A-B}{AC-BD} E_2 - 1 \right]$$

ここで、 E_2 は介在相のヤング率である、パラメタ A、B、C、D は次ように与えられる。

$$A = (1-f) \frac{2\gamma_1\gamma_2 G_2 + 2(1-2\gamma_2)G_1}{1-\gamma_1} + 2f(1-\gamma_2)G_2$$

$$B = (1-f) \frac{\gamma_1 G_2 + (1-2\gamma_2)\gamma_1 G_1}{1-\gamma_1} + 2f\gamma_2 G_2$$

$$C = (1-f) \frac{G_2 + (1-2\gamma_2)G_1}{1-\gamma_1} + 2fG_2$$

$$D = (1-f) \frac{2\gamma_2 G_2 + 2(1-2\gamma_2)\gamma_1 G_1}{1-\gamma_1} + 4f\gamma_2 G_2$$

ここで、 G_1 と G_2 はそれぞれ母相と介在相のせん断弾性係数である。 γ_1 と γ_2 はそれぞれ母相と介在相のポアソン係数である。

(7-5) Takao-Taya の熱膨張率

Takao-Tayaの理論で熱膨張率を求める場合、熱膨張率をテンソルで表す。Takao-Tayaの理論によると、先ず、複合材料の平均歪みを次式に基づいて求めることとされる。

$$\begin{aligned} & \{ I \otimes I - f (\mathcal{S} - I \otimes I) : [(E_2 - E_1) : (\mathcal{S} - I \otimes I) + E_2]^{-1} : (E_2 - E_1) \} \bar{\epsilon} \\ & = -f (\mathcal{S} - I \otimes I) : [(E_2 - E_1) : (\mathcal{S} - I \otimes I) + E_2]^{-1} : E_2 : (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

ここで、 \mathcal{S} は母相材料のEshelbyテンソルである。 E_1 と E_2 はそれぞれ母相と介在相の弾性マトリクスであり、 $\bar{\epsilon}$ は複合材料の平均歪みである。それらを次式を代入すると、複合材料の熱膨張率を求めることができる。

$$\alpha = \alpha_1 - f [(E_2 - E_1) : (\mathcal{S} - I \otimes I) + E_2]^{-1} : [(E_2 - E_1) : \bar{\epsilon} - E_2 : (\alpha_2 - \alpha_1)]$$

α_1 と α_2 はそれぞれ母相と介在相の熱膨張率マトリクスであり、等方性を持つ均質材料の場合、それぞれ次のように表すことができる。

$$\alpha_1 = \alpha_1 I$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 I$$

第8章

結 論

本研究において、粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の弾塑性挙動と熱挙動について、理論構成則の構築及びメゾ・メカニクスモデルによる解析を行った。メゾ・メカニクス解析より、複合材料の微視的な現象から巨視的な挙動まで観察し、微視的な現象と巨視的な挙動の間の関連性に注視して力学的なモデルと理論構成則を構築した。

(1)

第1章は序論であり、本論文の概要について述べた。本研究の位置づけを行うため、第2章では、本分野の論文調査を行い、従来モデル理論の不備な点を指摘し、本研究の目的を定義した。本研究において重要な点は、不備な点の多い従来のいくつかのモデルは、その検証の述もなく、広く複合材料の分野で使用されているという事実である。このような複合材料の技術分野に本論文は一石を投じた。

Mori-Tanakaの混合則を用いる従来の理論は、粒子分散複合材料、または繊維分散複合材料の弾性構成則を構築する際、本論文と同様に等価介在物法に基づいて介在相の応力と歪みを求めている。しかし、Mori-Tanakaの混合則理論は、粒子の数が増えることによって当然起きるべき生じた粒子の周囲の剛性の変化を考慮していない。粒子の周囲の剛性の変化を考慮するモデルとしてSelf-consistency理論が開発された。しかし、従来のself-consistency理論は、介在相と母相の応力や歪みの食い違い及び介在相と母相のそれぞれの粒子状態が果たす微視的な役割について全く無視して複合材料の構成則を立ててしまっている。微視構造が複合体の性能を制御する機能性材料においてはこの条件を受け入れるのは難しい。また、従来のすべての理論は複合材料の各相材料の平均応力と平均歪みの関係を、平均的には均質材料における応力-歪み関係と同じように取り扱って差支えないとしている。この事は材料の剛性が変化しない弾性の場合には受け入れられる

が、損傷やクリープ、塑性などが起きる場合のように剛性が応力の関数となる非線形の場合には受け入れ難い。即ち、複合材料内部の微視的応力分布が複合材料の巨視的な弾塑性挙動に与える影響を考慮していない。そのため、従来の理論は粒子の体積分率が低い場合、また介在相と母相の剛性の違いが大きい場合、精度が低く、複合材料の構成則として適用出来る条件は大幅に限定されている。

そこで、本論文では粒子分散複合材料と繊維分散複合材料について介在相の体積分率の全範囲即ち、0から100%まで、また介在相と母相剛性比の全範囲(0から ∞)に亘って、精度の良い構成則を開発するため、研究を行った。

本論文では複合材料について、単粒子の挙動から、母相の中に多数の粒子が存在する複合材料の弾塑性挙動と熱挙動までの理論構成則を構築した。

(2)

第3章では、複合材料の粒子分散理論モデルの基本となる単粒子の挙動について解明し、Eshelbyの等価介在物法に基づいて、無限領域に包含される非均質粒子の応力と歪みについて表現式を導出した。また、単粒子の内部と周りの実際の応力分布状況をメゾ・メカニクス解析で解明した。得られた知見即ち、粒子内の応力の一様性はEshelbyの仮定を立証し正統化させた事は本研究の土台を固める重要な事実でもある。また、粒子周りの応力の分布は、多数の粒子が散在する複合材料の微視から巨視までの範囲を包括する本論文の弾塑性構成則と熱構成則にとって、基本的な論拠として大切な事である。

(3)

第4章では、複合材料の弾性構成則について行った理論構築を示す。まず参照のため、粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の弾性問題について、Eshelbyの等価理論とMori-Tanakaの混合則に基づく体系的モデルの一般化として、テンソル表示によるEMTモデルの構成則を構築した。そして、本論文の中心課題の一つである、Mori-Tanakaの混合則に代わる混合則を提案し、それによって可能となる、粒子の周囲の剛性の変化、介在相と母相の応力-歪みの食い違い、また介在相と母相のそれぞれの役割の規定などの総合的な影響を考慮するSCCモデル自己整合コンプライアンス・モデルを構築した。SCCモデルは等価粒子理論を平均場理論に適用するSelf-consistency形の構成則であり、粒子体積分率の全範囲において、また介在相と母相の材料剛性比が $0\sim\infty$ の全領域において信頼で

きる精度を与える理論である、メゾ解析によっても他のモデルとの比較の上でその精度が検証された。SCCモデルは粒子の体積分率が低い場合に対して、粒子の周囲の剛性を母相と等しいと仮定すれば、EMTモデルに帰着する。概して言えば、本論文のSCCモデルは従来の理論の短所を埋め、それらが果たし得なかった範囲にまで構成則の能力を拡張した。また第4章ではSCCモデルを構築傍、SCCモデルの考え方を利用して他に二つのモデルも構築し、紹介した。

(4)

弾性の場合、複合材料の介在相と母相の平均応力と平均歪みの挙動は複合材料内部の微視的な応力分布に依存しないため、複合材料の平均応力と平均歪みの厳密な混合則即ち、SCCモデルを用いれば充分である。しかし、塑性変形が発生する場合、微視的な応力分布は複合材料内部の局所剛性を大幅に変化させ、複合材料の巨視的な特性に大きな影響を与える。微視的な応力分布を考慮せずその平均応力-歪みの間で均質体構成則を用いる従来のモデルを塑性問題に展開するのが難しい。

第5章では、まず、メゾ・メカニクス解析で粒子分散複合材料内部の微視的な応力分布を明らかにした上で、微視的な応力分布を表す事の出来る数学的なモデルを構築した。さらに、SCCモデルに基づき、複合材料の各相内の応力分布を考慮した巨視的構成則を構築した。

理論解析とメゾ・メカニクス解析の結果により、微視的な応力分布を考慮してモデル化した第5章の構成則は、弾性および塑性に互る全範囲において、また粒子の体積分率の値に関わらず参照値とよく一致する事が確認された。弾塑性以外においても損傷など、応力分布がメゾ領域的な剛性の非均質性を惹き起こす現象は、多くの複合材料に存在すると予想される。第5章で紹介した統計分布を用いるモデル化手法は、それぞれの持つ微視的な現象の特質を考慮して他の非線形複合材料にも応用できる。

(5)

第6章では、さらに短繊維分散複合材料の理論構成則について開発を行った。繊維介在物が粒子介在物と異なり、配置や配向の分布は複合材料の特性に顕著な影響を与える。本研究では任意方向に配列している繊維に対して局所座標系で等価介在物法を用いて等価し、更にSCCモデルによって応力と歪みに関する混合則を作り上げた。また、繊維の

配向分布については統計分布を用いてモデル化した。

繊維分散複合材料の二次元問題についてメゾ・メカニクス数値計算解析を行い、本理論構成則と比較した。本論文の理論の結果はMori-Tanakaの混合則に基づく従来の理論の結果と異なるが、メゾ・メカニクス解析で得た結果とよい一致を得ている事が分かった。また、本理論より、繊維の配向とその配向の分布は繊維分散複合材料の特性に与える影響が大きい事が判明した。それと比べて、繊維のアスペクト比は繊維分散複合材料の性能に与える影響が非常に小さい。

(6)

第7章では、粒子分散複合材料と繊維分散複合材料について構築した複合体構成則を発展させ、熱伝導と熱膨張問題の構成則を示す。理論解析とメゾ・メカニクス解析の結果によると、繊維の配向と配向分布は複合材料の熱挙動にも与える影響が大きい。本論文で構築した熱伝導と熱膨張構成則は従来のモデルに比べより合理的といえ、また精度においてもメゾ・メカニクス解析の結果と比べる、従来モデルよりも高く、総合的に充分信頼出来る複合材料の構成則モデルであるといえる。

本論文では粒子分散複合材料と繊維分散複合材料の弾塑性挙動と熱挙動について研究を行った。従来の理論の不合理性を回避した新しいモデル(SCCとLRM)を提案し、理論構成則を構築した。数値解析により本論文の理論構成則は精度、計算時間の節約、適用可能範囲などの点では従来の理論より大きく改善された。

本論文の今後の展開については提案したSCCモデルとLRMモデルをもっと複雑の現象また損傷、クリープ、剥離、粒子の流動性などの現象を持つ問題へと展開することや、知的材料への応用研究をさらに展開することが今後の研究の目標である。理論研究の重要な部分として、今後は実験及び3次元のメゾ解析から検証を行うことも重要な課題である。

謝 辞

本研究を行うあたり、助言ならびにご指導くださった中垣通彦教授に心より感謝の意を表します。私の今後の研究生活に多くの示唆を与えていただいただけでなく、物事の考え方など参考にさせていただきました。また多くの研究発表会に参加させて頂き、実際の学術研究の経験をさせていただきました。博士後期過程の3年間、中垣通彦教授の下で研究を行えた事を幸せに思います。

またお忙しいなか、私のために多くの時間に割いて頂き、本論文の審査をしてくださった田中博喜教授、鈴木裕教授、東條角治教授そして堀江知義助教授に心から感謝いたします。

研究面に助言をしてくださいました佐賀大学の萩原世也助教授にお礼申し上げます。そして3年間をともに研究をした多くの大学院生、学部生の皆さんの御助力により、充実した研究生活を送り、本論文を完成することができましたことを心よりお礼申し上げます。

また、私が九州工業大学大学院で博士課程の研究に没頭していた三年間、生活また精神面において献身的に支えてくれた愛妻、堀尾直子に特別の感謝と込め、この論文を捧げます。同時に物心両面から励まして下さった両親呉玉麟、張淑蓉及び堀尾直通、静江御夫婦にも心から感謝の意を表します。