

# 整合圧力ポアソン方程式に基づくシェル流体強連成解法の開発\*

石原大輔<sup>\*1</sup>, 鐘井重男<sup>\*2</sup>, 堀江知義<sup>\*1</sup>

## Development of Monolithic Method for Shell-fluid Interaction Based on Consistent Pressure Poisson Equation

Daisuke ISHIHARA<sup>\*3</sup>, Shigeo KANEI and Tomoyoshi HORIE

<sup>\*3</sup> Department of Mechanical Information Science and Technology, Kyushu Institute of Technology,  
680-4 Kawazu, Iizuka-shi, Fukuoka, 820-8502 Japan

This paper describes an efficient monolithic method for shell-fluid interaction problems based on the fluid pressure Poisson equation (PPE). The PPE is derived so as to be consistent with the coupled equation system for the shell-fluid interaction. In the proposed method, the fluid pressure is derived implicitly so as to satisfy the incompressibility constraint and all the other unknown variables except those for the shell are derived explicitly. The coefficient matrix of the PPE is well-conditioned even if the structure is very stiff or heavy compared to the fluid, and even if the ill-conditioned submatrix is generated due to the shell elements. These characteristics are successfully utilized to combine the proposed method with the standard conjugate gradient method. To demonstrate fundamental performances of the proposed method, it is applied to evaluate the vibration characteristics of a thin elastic cantilever plate in a quiescent fluid.

**Key Words:** Fluid-Structure Interaction, Monolithic Method, Shell, Incompressible Viscous Fluid, Pressure Poisson Equation, Conjugate Gradient Method, Finite Element Method

### 1. 序 論

膜構造物は周囲流れとの連成が顕著となりやすいため、その流体構造連成現象を正確に予測し、設計に反映させることが重要となる。本研究では、構造をシェル、流体を非圧縮性粘性流体とし、それらの連成現象を対象とする。流体構造連成法のうち、強連成(monolithic, direct または simultaneous)法は、流体構造境界面における連続・平衡条件を用いて、連成系全体に関する方程式(連成方程式)を構成し、解析する手法である。強連成法は、流体と構造の相互依存性が強い場合でも、安定して性能を発揮することが期待できる<sup>(1)(2)</sup>。しかしながら、(a)流体物性値に比べ、構造物性値が大きい場合、連成方程式の係数行列が悪条件なものとなることが指摘されている<sup>(3)</sup>。さらには、(b)シェル構造の場合、連成方程式の係数行列の構造部分そのものが悪条件となる。反復法を線形化された連成方程式の求解に適用する場合、上述の(a), (b)が問題となるため、その係数行列を良条件のものに改善するための

前処理に関する研究が行われている<sup>(4)(5)</sup>。一方、著者らはこれまで、連成方程式と整合した圧力ポアソン方程式に基づく強連成解法を提案してきた<sup>(7)(8)</sup>。ここで整合とは、圧力ポアソン方程式が原理的に元の連成方程式と同じ解を与える、という意味で用いる。既報(7,8)においては、ソリッド構造の範囲で、問題点(a)に対する提案解法の有効性を示した。しかしながら、シェル構造に関しては、問題点(a)に対する検討を行っていない。また問題点(b)が整合圧力ポアソン方程式の係数行列に悪影響を与えることも考えられる。そこで本研究では、整合圧力ポアソン方程式に基づく流体構造強連成解法をシェル構造に拡張し、上述の強連成法の問題点(a)(b)に対する提案解法の有効性を検討する。

### 2. シェル流体連成方程式

**2・1 連成方程式の導出** 本研究においては、シェル要素の中央面を流体構造連成境界として取り扱う<sup>(9)</sup>。この結果、連成方程式を導出する際のソリッド構造の場合との相違は、並進自由度を流体の速度・加速度との共有自由度、回転自由度を流体との独立自由度として取り扱う点となる。詳細は文献(2)または(7,8)に譲るとして、

\* 原稿受付 2005年5月12日。

<sup>\*1</sup> 正員, 九州工業大学情報工学部(〒820-8502 飯塚市川津680-4)。

<sup>\*2</sup> 九州工業大学大学院機械情報工学科。  
E-mail: ishihara@mse.kyutech.ac.jp

以下では連成方程式の導出の概要のみを示す。有限要素離散化された *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) 表記の非圧縮性粘性流体方程式とシェル構造方程式に、流体構造境界面での連続条件と平衡条件を適用して、流体構造境界面での結合する。この結果、増分形式で表示された連成方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{ii}^f & \hat{\mathbf{M}}_{ic}^f & 0 & -\mathbf{G}_i \\ \hat{\mathbf{M}}_{ci}^f & \hat{\mathbf{M}}_{cc}^f + \hat{\mathbf{M}}_{cc}^s & \hat{\mathbf{M}}_{ci}^s & -\mathbf{G}_c \\ 0 & \hat{\mathbf{M}}_{ic}^s & \hat{\mathbf{M}}_{ii}^s & 0 \\ \gamma\Delta t_T \mathbf{G}_i & \gamma\Delta t_T \mathbf{G}_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}_i^f \\ \Delta \mathbf{a}_c^f \\ \Delta \mathbf{a}_i^s \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{g}_i^f \\ \Delta \mathbf{g}_c^f \\ \Delta \mathbf{g}_i^s \\ \Delta \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで各記号は次の通りである。  $\Delta \mathbf{a}$ : 加速度増分ベクトル,  $\Delta \mathbf{p}$ : 流体圧力増分ベクトル,  $\Delta \mathbf{g}$ : 残差力ベクトル,  $\Delta \mathbf{h}$ : 非圧縮性条件の方程式残差,  $\mathbf{M}$ : 質量行列,  $\hat{\mathbf{M}}$ : 一般化質量行列,  $\mathbf{G}$ : 圧力勾配行列,  $\gamma$ : 一般化形状則の制御パラメータ,  $\Delta t$ : 時間増分, 右側上付き添え字  $f, s, fs$ : それぞれ流体成分, 構造成分および流体構造連成成分, 右側下付き添え字  $i$ : 流体の速度・加速度の独立自由度, 構造の独立自由度(回転自由度), 右側下付き添え字  $c$ : 流体の速度・加速度の共有自由度, 構造の共有自由度(並進自由度), 左側下付き添え字  $T$ : 行列の転置。但し, 式(1)においては, 一般化形状則および *Newmark* 法における変位, 速度と加速度の増分の関係式  $\Delta \mathbf{u} = \beta \Delta t^2 \Delta \mathbf{a}$ ,  $\Delta \mathbf{v} = \gamma \Delta t \Delta \mathbf{a}$  を既に適用している。ここで  $\Delta \mathbf{u}$ : 変位増分ベクトル,  $\Delta \mathbf{v}$ : 速度増分ベクトル,  $\beta$ : *Newmark* 法の制御パラメータである。一般化質量行列の与え方は様々考えられるが本研究においては以下のように与える。流体の移流項・拡散項は既知の流速場で評価する。従って, 流体のクーラン・拡散数条件が課される。一方, 構造のクーラン数条件は通常かなり厳しいため, 構造の内力項は未知の変位場で評価する。この結果, 流体と構造の一般化質量行列はそれぞれ

$$\hat{\mathbf{M}}^f \equiv \mathbf{M}^f, \quad \hat{\mathbf{M}}^s \equiv \mathbf{M}^s + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (2a, b)$$

と与えられる。ここで  $\mathbf{K}$  は(接線)剛性行列であり, 左側下付き添え字  $L$  は行列の対角集中化を表す。

**2・2 時間積分法** 文献(2)または(7,8)に譲るとして, 本研究で用いる時間積分法の概要のみを示す。連成方程式(1)を解くことにより得られる加速度と圧力の増分を用いて時間進行を行うために, 陰解法と陽解法の相互の長所を利用した解法である予測子多重修正子法を用いる。変位, 速度, 加速度および圧力の時刻  $t + \Delta t$  での未知量を時刻  $t$  での既知量を用いて, 予測子

により予測する。次に連成方程式(1)の求解により求めた加速度と圧力の増分を用いて, 時刻  $t + \Delta t$  における加速度, 速度, 変位と圧力を修正子により修正する。修正子による加速度, 速度, 変位と圧力の修正は各時刻ステップ内に反復ステップを設けて複数回行う。構造の運動に伴い, 流体領域のメッシュを制御する必要がある。本研究では, 流体領域を解析領域, 境界面における構造変位を基本境界条件として, *Laplace* 方程式を解き, その解をメッシュ移動量として与える。またメッシュ移動速度はメッシュ移動量の増分を解析の時間刻みで除したものとする。

**2・3 従来の強連成法** 連成方程式(1)を直接解く通常の強連成法では1章で述べた問題点が生じる。問題点(a)に関しては, 構造と流体の一般化質量行列の成分間に大きな差が生じることで係数行列が悪条件なものとなる。問題点(b)に関しては, 構造の剛性行列の並進と回転自由度成分の値の差が大きいため, 連成方程式(1)の構造部分そのものが悪条件なものとなる。後者については4・1節でさらに述べるとして, ここでは前者についてさらに考察する。簡単のため, 連成方程式(1)の係数行列中の部分行列をスカラー成分で置き換えた以下の4行4列の行列を考える。

$$\begin{bmatrix} \hat{m}^f & \hat{m}^f & 0 & -g \\ \hat{m}^f & \hat{m}^f + \hat{m}^s & \hat{m}^s & -g \\ 0 & \hat{m}^s & \hat{m}^s & 0 \\ \gamma\Delta t g & \gamma\Delta t g & 0 & g_c \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここでスカラー成分  $m, g$  はそれぞれ質量行列, 圧力勾配行列に対応する。またスカラー成分  $g_c$  は後述の数値計算例で導入する *PSPG* 項に由来する行列に対応する。その他の記号は連成方程式(1)と同じとする。最初に前処理を施さない場合について考察する。行列(3)を  $\hat{m}^f$  で除して以下の行列を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\kappa_1 \\ 1 & R & R & -\kappa_1 \\ 0 & R & R & 0 \\ \gamma\Delta t \kappa_1 & \gamma\Delta t \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

但し, 構造と流体の一般化質量行列の成分の比  $R \equiv \hat{m}^s / \hat{m}^f$  を導入し, さらに  $R \gg 1$  より  $1+R \approx R$  と近似している。また  $\kappa_1 = g / \hat{m}^f$ ,  $\kappa_2 = g_c / \hat{m}^f$  である。構造の物性値のみ変化させる場合, 行列(4)中で変化するパラメータは  $R$  のみとなる。そこで  $\kappa_1 = \kappa_2 = \gamma = 1$ ,  $\Delta t = 10^5$  と固定し,  $R = 10^3, 10^5, 10^7, 10^9$  と変化させたときの行列(4)の条件数を具体的に計算すると,  $R$  の変化に

対し  $5.46 \times 10^3$ ,  $5.46 \times 10^5$ ,  $5.46 \times 10^7$ ,  $5.46 \times 10^9$  と与えられ、条件数と  $R$  の変化の仕方が一致しながら行列の条件が悪化することが判る。次に前処理として対角スケーリングを施した場合について考察する。対角スケーリングを施すと行列(3)は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{R} & 0 & -\kappa \\ 1/\sqrt{R} & 1 & 1 & -\kappa/\sqrt{R} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \gamma\Delta t\kappa & \gamma\Delta t\kappa/\sqrt{R} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。但し、上述の  $R$  を導入し、さらに  $R \gg 1$  より  $1+R \sim R$ ,  $1+1/R \sim 1$  と近似している。また  $\kappa = g/(\hat{m}^f g_0)^{1/2}$  である。構造の物性値のみ変化させる場合、行列(5)中で変化するパラメータは  $R$  のみとなる。そこで  $\kappa = \gamma = 1$ ,  $\Delta t = 10^5$  と固定し、 $R = 10^3$ ,  $10^5$ ,  $10^7$ ,  $10^9$  と変化させたときの行列(5)の条件数を具体的に計算すると、 $R$  の変化に対し  $4.00 \times 10^3$ ,  $4.00 \times 10^5$ ,  $4.00 \times 10^7$ ,  $4.00 \times 10^9$  と与えられる。従って、対角スケーリングを施しても、条件数と  $R$  の変化の仕方が一致しながら行列の条件が悪化することが判る。以上から、簡単化した連成方程式の係数行列(3)において、前処理を施さない場合および前処理として対角スケーリングを施す場合に、その悪条件の指標として構造と流体の一般化質量行列の成分間の比  $R$  を用いることができる。

### 3. 整合圧力ポアソン方程式に基づくシェル流体強連成解法

本章では、著者らにより提案されてきた整合圧力ポアソン方程式に基づく流体構造強連成解法<sup>(7,8)</sup>をシェル構造の場合に拡張する。最初に連成方程式(1)からシェル回転自由度を縮約し、流体自由度のみに関する方程式を得る。すなわち連成方程式(1)の第3行より、

$$\Delta \mathbf{a}_i^f = \hat{\mathbf{M}}_{ii}^{f-1} \{ \Delta \mathbf{g}_i^f - \hat{\mathbf{M}}_{ic}^f \Delta \mathbf{a}_c^f \} \quad (6)$$

を得る。式(6)を連成方程式(1)の第2行に代入して整理することにより、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{f*} & -\mathbf{G} \\ \gamma\Delta t_T \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a}^f \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{g}^{f*} \\ \Delta \mathbf{h} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

を得る。ここで  $\mathbf{M}^{f*}$ ,  $\Delta \mathbf{a}^f$ ,  $\Delta \mathbf{g}^{f*}$  を次式で定義する。

$$\mathbf{M}^{f*} \equiv \begin{bmatrix} {}^L \mathbf{M}_{ii}^f & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_{cc}^f \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{cc}^{fs} \equiv {}^L \mathbf{M}_{cc}^f + (\hat{\mathbf{M}}_{cc}^f - \hat{\mathbf{M}}_{ci}^f \hat{\mathbf{M}}_{ii}^{f-1} \hat{\mathbf{M}}_{ic}^f) \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{a}^f \equiv {}^T \{ \Delta \mathbf{a}_i^f, \Delta \mathbf{a}_c^f \}, \quad \Delta \mathbf{g}^{f*} \equiv {}^T \{ \Delta \mathbf{g}_i^f, \Delta \bar{\mathbf{g}}_c^f \} \quad (10a, b)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{g}}_c^{fs} \equiv \Delta \mathbf{g}_c^{fs} - \hat{\mathbf{M}}_{ci}^f \hat{\mathbf{M}}_{ii}^{f-1} \Delta \mathbf{g}_i^f \quad (11)$$

流体単独の場合の方程式と比べ、式(7)は自由度が同じで代数的構造も形式的に同じであるものの、流体構造連成効果を正確に含むことに注意する。ここで式(7)の求解において、数値流体解析の分野でよく行うように<sup>(1)</sup>、非圧縮性条件(式(7)第2行)を満足するように流速場を求めるようにすることで、圧力ポアソン方程式

$$\gamma\Delta t_T [\mathbf{G}_{iL} \mathbf{M}_{ii}^{f-1} \mathbf{G}_{iT} + \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{M}}_{cc}^{f-1} \mathbf{G}_c] \Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{h} - \gamma\Delta t_T \mathbf{G}_{iL} \mathbf{M}_{ii}^{f-1} \Delta \mathbf{g}_i^f - \gamma\Delta t_T \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{M}}_{cc}^{f-1} \Delta \bar{\mathbf{g}}_c^{fs} \quad (12)$$

を得る。式(7)第1行中の加速度増分は式(12)で得た圧力増分を用いて、次式により得る。

$$\Delta \mathbf{a}^f = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a}_i^f \\ \Delta \mathbf{a}_c^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^L \mathbf{M}_{ii}^{f-1} \mathbf{G}_{iT} \Delta \mathbf{p} + {}^L \mathbf{M}_{ii}^{f-1} \Delta \mathbf{g}_i^f \\ \bar{\mathbf{M}}_{cc}^{f-1} \mathbf{G}_c \Delta \mathbf{p} + \bar{\mathbf{M}}_{cc}^{f-1} \Delta \bar{\mathbf{g}}_c^{fs} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

元の連成方程式(1)と同じ解を与えるという意味で、式(12)を整合圧力ポアソン方程式と呼ぶ。ここでその係数行列は、既報(7,8)で示すように正定値対称性を有する。以上から、整合圧力ポアソン方程式に基づくシェル流体強連成解法が得られ、その求解手順は以下のようにならめられる；

**Step1** 式(12)により流体圧力増分  $\Delta \mathbf{p}$  を得る、

**Step2** 流体圧力増分  $\Delta \mathbf{p}$  を式(13)の右辺に代入して、流体加速度増分  $\Delta \mathbf{a}^f$  を得る、

**Step3** 流体加速度増分  $\Delta \mathbf{a}^f$  の共有自由度成分  $\Delta \mathbf{a}_c^f$  を式(6)の右辺に代入して、シェル回転自由度の加速度増分  $\Delta \mathbf{a}_i^f$  を得る。

提案解法の解析の流れを図1に示す。整合圧力ポアソン方程式(12)中に密行列(9)の逆行列が現れる。後述のように(12)はCG法により解かれるが、提案解法の実装では、(12)の求解の前に予め(9)に改訂コレスキー法の分解を施しておき、CG法の各反復において

$\bar{\mathbf{M}}_{cc}^{f-1} \mathbf{G}_c \Delta \mathbf{p}$  を  $\bar{\mathbf{M}}_{cc}^f \mathbf{x} = \mathbf{G}_c \Delta \mathbf{p}$  の解  $\mathbf{x}$  として求めることで計算の効率化を図っている。

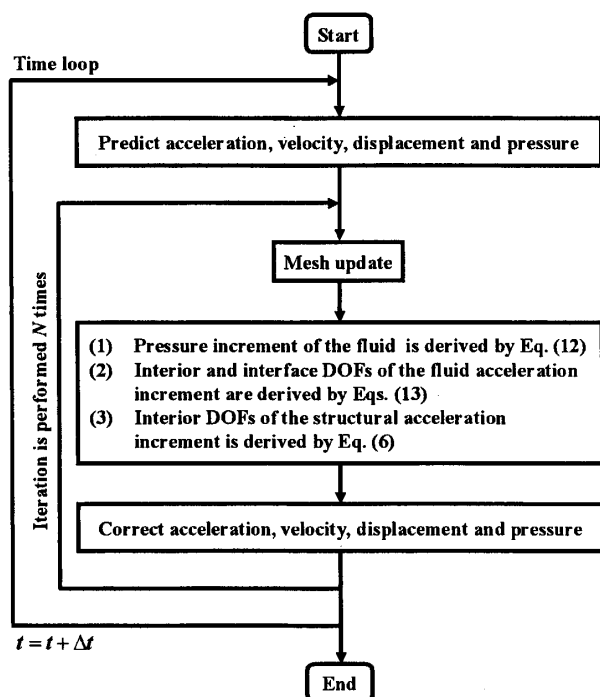


Fig. 1 Flow chart of the analysis procedure of the proposed method.

#### 4. 整合圧力ポアソン方程式の特徴

**4・1 シェルの並進自由度に関するシュアコンプリメント行列** シェル剛性行列においては、成分の値が並進自由度と回転自由度で大きく異なるため、悪条件なものとなる。例えば、図2の片持ち板の寸法のオーダーを  $l, w, h \rightarrow l'=10 \times l, w'=10 \times w, h'=10 \times h \rightarrow \dots$  と変化させると、剛性行列の並進自由度成分はオーダー変化の1乗、回転自由度成分はオーダー変化の3乗、並進回転自由度成分はオーダー変化の2乗に比例して値が変わる。この結果、シェルの一般化質量行列(2b)も悪条件となる。ここで整合圧力ポアソン方程式(12)においては、シェル構造に由来する行列として、その一般化質量行列(2b)の並進自由度に関するシュアコンプリメント(行列(9)の括弧内)のみが現れる。上述のシェルの一般化質量行列(2b)が悪条件となる原因を考慮すると、その並進自由度に関するシュアコンプリメントは良条件のものに変更されていることが期待され、ひいては悪条件なシェルの一般化質量行列の影響が整合圧力ポアソン方程式(12)において低減されることにつながる。以下では、シェルの剛性行列に比べ、その並進自由度に関するシュアコンプリメントが良条件のものに変更されていることを数値的に確認する。図2の片持ち板の曲げ問題に対して、板の寸法  $l, w, h$  を0.01倍、0.1倍、1倍、10倍、...と変化させ、シェルの平衡方程式(Case1)とそれに回転自由度

の縮約を施した方程式(Case2)を対角スケーリング前処理付きCG(SCG)法により解き、両者の反復回数を比較する。ここで反復回数は係数行列の条件数に依存して変化するため、その良し悪しの指標となる。ここで解析条件を以下のように設定する。(a)寸法  $l, w, h$  と曲げ変位のオーダー変化が同じであるように、理論解に基づき面外分布荷重を設定する、(b)要素分割の仕方を一致させる、ここで用いる要素はMITCシェル要素<sup>(3)</sup>とし、メッシュは節点数55、要素数40とする、(c)反復計算の収束判定は残差ノルムが  $10^{-6}$  以下となる場合とする。その結果、図3のように寸法のオーダー変化にかかわらず、Case2の場合のSCG法の反復回数はほぼ一定であり、Case1よりも少なかった。従って、元のシェル剛性行列に比べ、並進自由度に関するシュアコンプリメントが良条件のものであることが確認された。以上により、提案解法において、1章で述べた問題点(b)の影響が低減されていると考えられる。

#### 4・2 流体と構造の物性値の相違による係数行列成分間の値の差の低減

流体と構造の物性値の差が大きい場合、構造と流体の一般化質量行列の成分に大きな差が生じる。文献(3)で指摘されているように、また2・3節で考察したように、この差に起因して連成方程式(1)の条件が悪化すると考えられる。ソリッド構造の範囲で既報(7,8)では、整合圧力ポアソン方程式の係数行列中で、その差の影響が低減されて係数行列が良条件となることを示した。ここではシェル構造の場合でも、その差の影響が低減されることを理論的に示す。簡単のため、流体と構造の一般化行列を対角集中化された質量行列とする。また図4に示す有限要素モデル( $\circ$ は変位または速度の補間点、 $\times$ は圧力の補間点、シェル板厚は単位長さ)を対象とする。このとき整合圧力ポアソン方程式(12)の係数行列は

$$\frac{4}{\rho^f} \begin{bmatrix} f(R) & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & f(R) & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 6 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

と与えられる。但し、行列(14)の行番号(または列番号)は、図4において括弧付きの整数で示す要素番号と対応する。また  $\rho^f$  は流体質量密度であり、特性関数  $f(R)$  は次式のように導出される。

$$f(R) \equiv 3 + \frac{3}{1+R} \dots \dots \dots (15)$$

ここで構造の一般化質量行列も対角集中化された質量行列としたことにより、構造と流体の一般化質量行列の成分の比  $R$  が流体質量密度  $\rho^f$  に対する構造質量密度  $\rho^s$  の比で与えられる。

$$R = \rho^s / \rho^f \quad (16)$$

関数  $f(R)$  の第2項において、 $R$  が分母側に現れる理由は、整合圧力ポアソン方程式(12)の係数行列の第2項において、流体に由来する行列  $\mathbf{L}\mathbf{M}_\alpha^f$  と構造に由来する行列  $\hat{\mathbf{M}}_\alpha^s - \hat{\mathbf{M}}_\alpha^s \hat{\mathbf{M}}_\alpha^{s-1} \hat{\mathbf{M}}_\alpha^s$  の和の逆行列をとることによる。図5に示すように、関数  $f(R)$  の値は3.0から6.0の間にあり、係数行列(14)中で構造と流体の一般化質量行列の成分の差の影響が低減され、特にこの場合、優対角行列となることが判る。

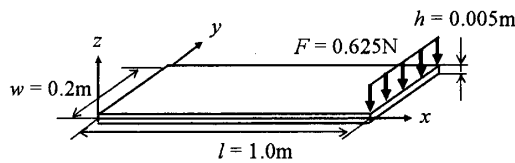


Fig. 2 Loaded cantilever plate.

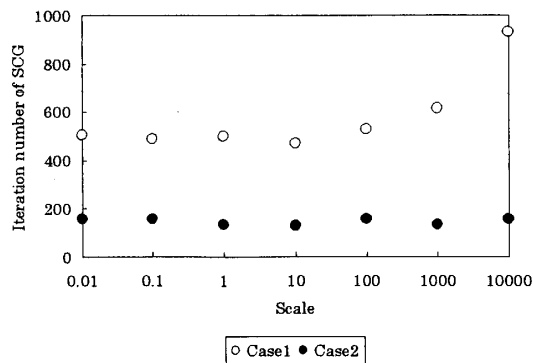


Fig. 3 Transition of iteration number of SCG for scale sizes.

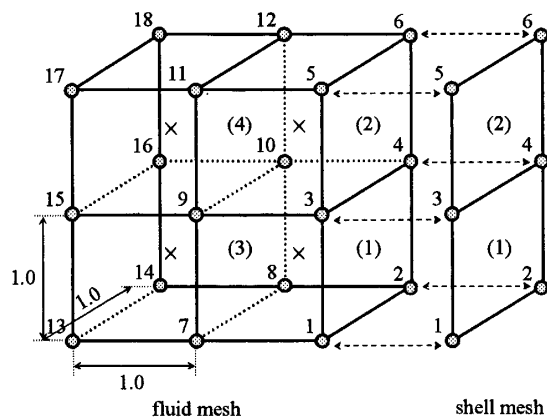


Fig. 4 Simple finite element model for the shell-fluid interaction system. Each integer denotes the node number, each integer with round bracket denotes the element number and each real number denotes the dimension.

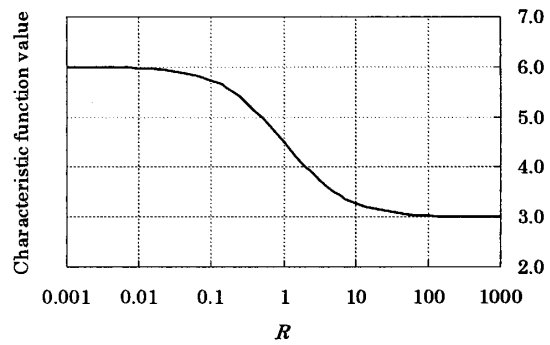


Fig. 5 The shape of the characteristic function.

## 5. 静止流体で満たされた狭い流路内で振動する板

### 5・1 問題の設定

図6に示す静止流体で満たされた狭い流路内で振動する片持ち板を考える。各寸法を  $l=2.0\text{ cm}$ ,  $w=1.0\text{ cm}$ ,  $h=0.01\text{ cm}$ ,  $h_0=0.1\text{ cm}$  とする。流体領域の  $x$ - $y$  面上および板の有限要素メッシュを図7に示す。ここで流体メッシュの  $z$  方向は  $0.125\text{ cm}$  刻みの等分割とし、 $y$ - $z$  面に関する対称性を考慮している。流体メッシュの節点数 8316, 要素数 42000, 構造メッシュの節点数 286, 要素数 250 である。ここで流体に4面体1次要素による流速圧力同時補間<sup>(12)</sup>, 構造にMITCシェル要素<sup>(13)</sup>を用いる。流体の移流項と要素に起因する数値的不安定性を回避するため、安定化手法の1種である SUPG/PSPG 法<sup>(12)</sup>を適用する。さらに以下の設定を行う。(a) 流体領域の全節点で  $z$  方向流速 0 を課すことにより、 $x$ - $y$  面内の2次元流れとする, (b) 板に関して、全節点において、 $x$  方向変位 0,  $z$  軸周回回転 0 とする, (c) 片持ち板の曲げ振動の振幅が微小であるようにステップ分布荷重を与える。

### 5・2 精度検証

5・1節で述べた条件(b), (c)により、片持ち板の各  $x$ - $y$  断面は剛体的に  $y$  方向に振動する。そこで、片持ち板の  $y$  方向の曲げ振動の第1次モードを考えると、流体が無い場合の各断面の振動特性は以下に示す板の  $z$  方向単位長さに関する質量  $m^s$  とバネ剛性  $k^s$  により評価できる。

$$m^s = \rho^s A, \quad k^s = (\kappa l^4) EI \quad (17)$$

但し、 $\rho^s$ : 板の質量密度,  $A$ : 板の断面積,  $E$ : 板のヤング率,  $I$ : 板の断面2次モーメント,  $\kappa$ : 板の支持方法に依存して決まる定数(片持ち板の場合, 1.8751)とする。5・1節で述べた条件(a)を併せて考えると、本問題(3次元シェル流体連成問題)における流体構造連成効果は、各  $x$ - $y$  面内で生じる流体構造連成効果を  $z$  方向に重ね合わせたものと近似的に等価となる。従つ

て、本問題における片持ち板の振動特性は、 $x$ - $y$ 面内の2次元流れ中で $y$ 方向にステップ励振する剛体断面の問題(2次元剛体流体連成問題)における剛体断面の振動特性と近似的に一致すると考えられる。そこで3次元シェル流体連成問題を提案解法で、2次元剛体流体連成問題を文献(14)の解法で解き、それぞれの構造の振動特性を比較することにより、提案解法の精度検証を行う。ここで文献(14)の解法は、流体を充填した円筒内で微小振動する剛体円柱の解析を通じて、その精度の検証が行われている。構造の質量密度 $\rho^s=78 \text{ g/cm}^3$ 、ヤング率 $E=2.05 \times 10^{12} \text{ g/(cm sec}^2)$ 、ポアソン比0.0とする。このとき、板の各単位断面に関する質量 $m^s$ 、バネ定数 $k$ はそれぞれ $0.078 \text{ g}$ 、 $1.32 \times 10^5 \text{ g/sec}^2$ となる。流体は表1に示す水、空気の2種類とする。また時間刻み $\Delta t=1.0 \times 10^{-5} \text{ sec}$ 、Newmark法の制御パラメータ $\beta=0.3025$ 、 $\gamma=0.6$ とする。流体が空気の場合に、提案解法により得られた板荷重点を含む $x$ - $y$ 平面内の流速ベクトル場を図8、文献(14)の解法により得た $x$ - $y$ 平面内の流速ベクトル場を図9に示す。図8、9を比較することにより、流れ場全体の様子が両方で定性的に良く一致していることが判る。図10、11に提案解法と文献(14)の解法から得られた板荷重点の $y$ 方向変位の時刻歴を平衡点での変位で規格化して示す。図10、11に示されるように両者の時刻歴は定量的に良く一致しており、提案解法により板の振動特性が十分な精度で解析できていると判断できる。以上により、本問題の範囲ではあるものの、提案解法が十分な精度を持つことが示された。

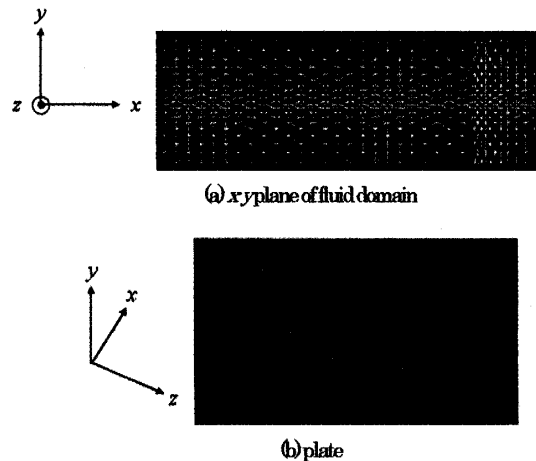


Fig. 7 Finite element models.

Table 1 Material properties of fluids

	water	air
mass density $\rho^f \text{ (g/cm}^3)$	1.0	$1.18 \times 10^{-3}$
viscosity $\mu \text{ (g/cm sec)}$	0.013	$1.82 \times 10^{-4}$

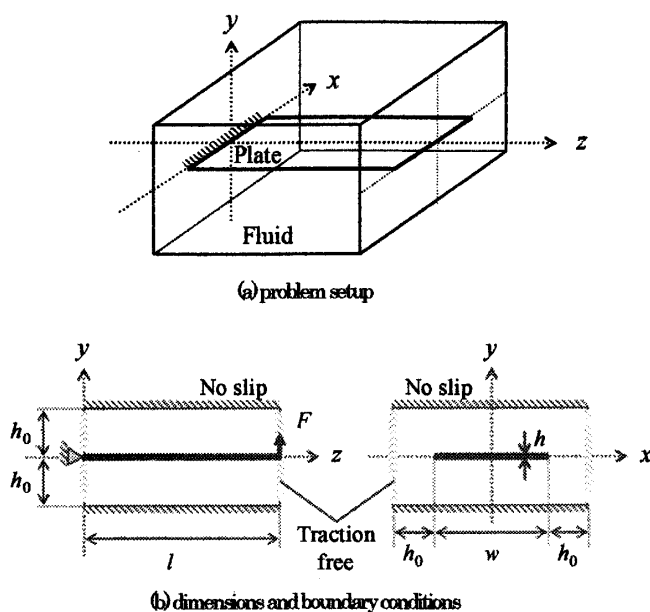
Fig. 8 Fluid velocity field of shell-fluid interaction on  $xy$  plane including loaded point at 0.01 sec in the case of air.Fig. 9 Fluid velocity field of rigid body-fluid interaction on  $xy$  plane including loaded point at 0.01 sec in the case of air.

Fig. 6 Loaded plate in flow channel vibration.

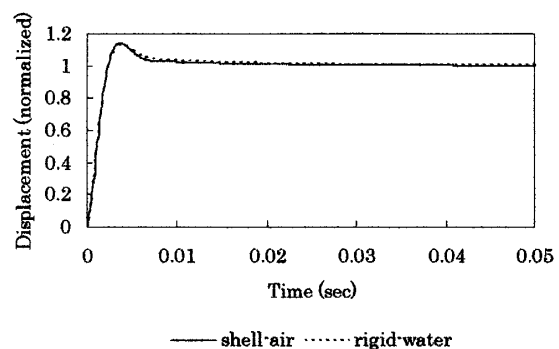


Fig. 10 Displacement histories of loaded point of plate in the case of water.

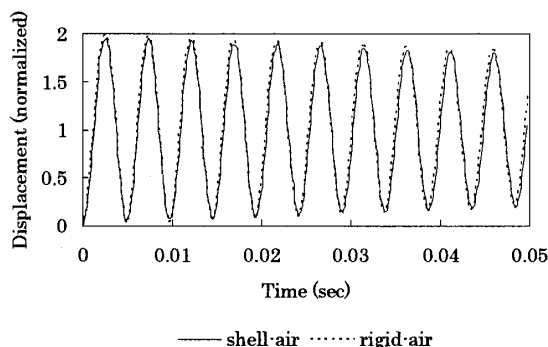


Fig. 11 Displacement histories of loaded point of plate in the case of air.

**5・3 性能検証** 4章で述べたように、整合圧力ポアソン方程式(12)においては、シェル構造の一般化質量行列の並進自由度に関するシュアコンプリメントのみ現れ、また物性値が大きく異なることによる構造と流体の一般化質量行列の成分の大きな差が低減されているため、係数行列が良条件に変更されていることが期待される。4・1節において、シェル剛性行列の並進自由度に関するシュアコンプリメントが良条件であることを数値的に確認した。ここでは4・2節で理論的に示した物性値の相違による構造と流体の一般化質量行列の成分の差の低減により、係数行列が良条件のものに変更されていることを数値的に確認する。提案解法と通常の強連成解法(2.3節参照)を5・1節の問題に適用し、反復法による連立1次方程式の求解に要する反復回数を比較する。ここで反復回数は係数行列の条件数に依存して変化するため、その良し悪しの指標となる。反復法として、提案解法に対しては前処理無しのCG法を、通常の強連成解法に対しては対角スケール付きBiCGSTAB法を用いる。反復計算の収束判定は残差ノルムが $10^6$ 以下となる場合とする。まず流体(空気)と板の物性値を5・2節で用いたものとした。この場合、通常の強連成解法と提案解法とで得られた板荷重点のy方向変位の時刻歴は良く一致したものの、1回目の時間ステップにおいて要した反復回数は、提案解法の場合、4回であったのに対し、通常の強連成解法の場合、1940回であった。ここでこの場合に通常の強連成解法に対して前処理無しのBiCGSTAB法を適用した場合、反復回数が過大となり収束が困難であったことに注意する。そこで構造と流体の一般化質量行列の成分の比 $R$ を

$$R = \frac{\rho^f \Delta x^2 h + \Delta t^2 \Delta x E}{\rho^f \Delta x^3} \quad (18)$$

により評価し、流体を空気、板の質量密度を $1.0, 10 \text{ g/cm}^3$ 、ヤング率を $1.0 \times 10^6 \sim 10^{12} \text{ g/(cm sec}^2)$ と変化させ

て、1回目の時間ステップにおいて要する反復回数を、提案解法と通常の強連成解法とで比較する。但し、 $\Delta x$ は要素の代表寸法である。この結果、表2および図12を得た。表2および図12に示されるように、 $R$ にかかわらず、提案解法では安定した収束性を示しており、4・2節における理論的検討と一致している。一方、通常の強連成解法では $R$ の増大に伴い、収束性が悪化している。また表2に×で示すように、通常の強連成解法においては、反復回数が過大となり収束が困難な場合があった。対角スケール法を施しても、 $R$ の増大に伴い収束性が悪化し、しかも反復回数の変化の仕方と $R$ の変化の仕方が一致していることは、2・3節において単純化した連成方程式の係数行列(3)に基づき考察した結果と一致する。本問題の範囲ではあるものの、提案解法では常に反復法を安定して利用でき、また極端にシェルの剛性が小さい場合を除いて、通常の強連成解法よりも少ない反復回数で解を得ることができた。従って、1章で述べた問題点にかかわらず、整合圧力ポアソン方程式(12)の係数行列が良条件であると判断できる。また反復法による求解の時間を反復回数で割ることで1反復あたりの解析時間を求めると、提案解法は約0.05 sec、従来の強連成法は約0.08 secであった。但し、計算環境はCPU: Pentium4, 2.8GHz, コンパイラ: 最適化オプション無し of gccとし、5・2節の流体と板の物性値を用いた場合の結果から解析時間を求めた。従って、本問題の範囲では、極端にシェルの剛性が小さい場合を除いて、反復法による求解の時間も提案解法の方が優れている。

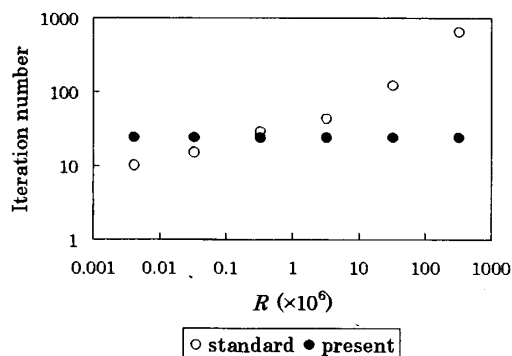
## 6. 結 論

本研究においては、シェル流体連成問題に従来の強連成法を適用した場合の問題点 (a) 流体物性値に比べ、構造物性値がかなり大きい場合、悪条件な連成方程式の係数行列が生じる、(b) シェル要素に起因して、連成方程式の係数行列中の構造部分そのものが悪条件になる、という問題点を解決するために、整合圧力ポアソン方程式に基づくシェル流体強連成解法を開発した。理論的な分析により、流体と構造の物性値の相違の程度にかかわらず、整合圧力ポアソン方程式の係数行列成分間に大きな差が生じないことを示した。また本問題の範囲ではあるものの、(a) 提案解法中に現れるシェル剛性行列のシュアコンプリメントは元のシェル剛性行列に比べ、良条件のものであることを数値的に確認した、(b) 提案解法においては、常に反復法を安定して適用でき、また極端にシェルの剛性が小さい場合

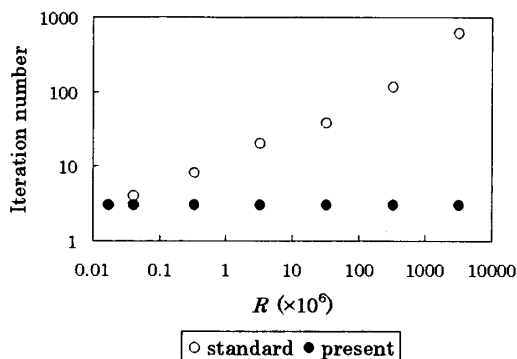
を除いて、通常の強連成解法よりも少ない反復回数で解を得ることができた。従って、上述の問題点(a), (b)にかかわらず、整合圧力ポアソン方程式の係数行列が良条件のものであると判断できる。以上により、シェル構造連成問題に対する有効な強連成解法を提案できたと言える。今後は提案解法を様々なシェル構造連成問題に適用し、有効性を確認するとともに、その特徴を生かして大規模解析への適用を行う予定である。

Table 2 Comparison of iteration number of iterative methods between the standard monolithic method and the present method.

$\rho^s$ g/cm <sup>3</sup>	$E$ g/(cm·sec <sup>2</sup> )	$R$	standard	present
1.0	$1.0 \times 10^{12}$	$3.267 \times 10^9$	×	24
1.0	$1.0 \times 10^{11}$	$3.267 \times 10^8$	647	24
1.0	$1.0 \times 10^{10}$	$3.267 \times 10^7$	120	24
1.0	$1.0 \times 10^9$	$3.268 \times 10^6$	43	24
1.0	$1.0 \times 10^8$	$3.276 \times 10^5$	29	24
1.0	$1.0 \times 10^7$	$3.352 \times 10^4$	15	24
1.0	$1.0 \times 10^6$	$4.115 \times 10^3$	10	24
10.0	$1.0 \times 10^{12}$	$3.267 \times 10^9$	609	3
10.0	$1.0 \times 10^{11}$	$3.267 \times 10^8$	114	3
10.0	$1.0 \times 10^{10}$	$3.268 \times 10^7$	38	3
10.0	$1.0 \times 10^9$	$3.276 \times 10^6$	20	3
10.0	$1.0 \times 10^8$	$3.352 \times 10^5$	8	3
10.0	$1.0 \times 10^7$	$4.115 \times 10^4$	4	3
10.0	$1.0 \times 10^6$	$1.742 \times 10^4$	3	3



(a) structural mass density  $\rho^s = 1.0$  g/cm<sup>3</sup>



(b) structural mass density  $\rho^s = 10.0$  g/cm<sup>3</sup>

Fig. 12 Comparison of iteration number of iterative methods between the standard monolithic method and the present method.

## 謝 辞

シェル解析に関して、ご助言を頂いた慶應義塾大学の野口裕久教授に感謝の意を表します。

## 文 献

- (1) Zang Q. and Hisada, T., Investigations of the Coupling Methods for FSI Analysis by FEM, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 67, No. 662 (2001), pp. 1555-1562.
- (2) Zang Q. and Hisada, T., Analysis of Fluid-structure Interaction Problems with Structural Buckling and Large Domain Changes by ALE Finite Element Method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 190, (2001), pp. 6341-6357.
- (3) Rugonyi, S. and Bathe, K.J., On Finite Element Analysis of Fluid Flows Fully Coupled with Structural Interactions, *Comput. Modeling Eng. Sci.*, Vol. 2, (2001), pp. 195-212.
- (4) Heil, M., An Efficient Solver for the Fully Coupled Solution of Large-displacement Fluid-structure Interaction Problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 193, (2004), pp. 1-23.
- (5) Hubner, B. et al., A Monolithic Approach to Fluid-structure Interaction Using Space-time Finite Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 193, (2004), pp. 2087-2104.
- (6) Washio, T. et al., Developments of New Iterative Solvers Based on Incomplete LU Factorization for Fluid-structure Strongly Coupled Finite Element Analysis, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, Vol. 8, No. 2 (2003), pp. 639-640.
- (7) Ishihara, D. and Yoshimura, S., Monolithic Approach for Fluid-Structure Interaction Based on Consistent Pressure Poisson Equation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 71, No. 706 (2005), pp. 1565-1572.
- (8) Ishihara, D. and Yoshimura, S., A Monolithic Approach for Interaction of Incompressible Viscous Fluid and an Elastic Body Based on Fluid Pressure Poisson Equation, *Int. Numer. Methods Eng.*, Vol. 64, (2005), pp. 167-203.
- (9) Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, (2000), p. 562, Dover Publications.
- (10) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, (1982), pp. 199-259.
- (11) Gresho, P.M. and Sani, R.L., *Incompressible Flow and the Finite Element Method: Isothermal Laminar Flow*, (1998), p. 640, John Wiley & Sons.
- (12) Tezduyar, T.E. et al., Incompressible Flow Computations with Stabilized Bilinear and Linear Equal-order-interpolation Velocity-pressure Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, (1992), pp. 221-242.
- (13) Noguchi, H. and Hisada, T., Sensitivity Analysis in Post-Buckling Problems of Shell Structure, *Comput. & Struct.*, Vol. 47, (1993), pp. 699-710.
- (14) Nomura, T. and Hughes, T.J.R., An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Interaction of Fluid and a Rigid Structure, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, (1992), pp. 115-138.