

Lyapunov の安定理論に基づく 離散値適応制御系の設計

(昭和52年5月26日 原稿受付)

制御工学科 米 澤 洋
大 川 不二夫

Design of Discrete Adaptive Control System using Lyapunov's Direct Method

by Yoo YONEZAWA
Fujio OHKAWA

Recently, Adaptive Control System have been studied based on stability theorem without specifying exact values of the system parameters, because of difficulties in identification and stability analysis due to the complex non-linearity.

In this paper, two types of designing method for discrete Adaptive Control System with inaccessible states based on Lyapunov's Direct method are proposed. One is Model Reference Adaptive Control System, and the other is Adaptive Control System using Adaptive Observer.

It is shown that these Adaptive Control System are constructed by identical method.

Futhermore, by digital simulation, it is shown that the validity of proposed algorithms.

1. まえがき

適応制御系の設計に関しては、古くから種々の方法が研究、報告されている¹⁾。それらは、主として何らかの手法よりシステムの未知パラメータの同定を行ない、その同定されたシステムの最適制御をするものである。しかしながら、このパラメータ同定過程に多大の労力を要するために、オンラインでの実現は実際上不可能であるといえる。さらに、適応制御系は一般に複雑な非線形系となるので、その安定解析は非常に困難である。

一方、安定理論による適応制御系の設計法²⁾はパラメータ同定の必要がなく、また適応過程中の安定性が常に保証されているという優れた利点がある。

本論文では、Lyapunov の安定理論に基づき、二種類の離散値適応制御系の設計法、すなわち、モデルを導入したいわゆる“モデル規範形”設計法とモデル可変形の一環と考えられる適応観測器による方法とを提案する。

その設計の過程中、これら両者が同一の構成でもって設計可能であることを明らかにする。さらに、本手法に

よって設計された適応制御系の有用性を数値例について考察する。

2. 適応制御系の構成

未知システムに対して適応制御系を設計する場合、一般に図-1(構成(I))および図-2(構成(II))に示すような構成のものが考えられる。

構成(I)は、いわゆる“モデル規範形”であり、規範モデルとシステムの誤差の情報に基づき、システムのパラメータに調整を加え、モデルとシステムの出力誤差を収束させるようになっている。

ここで、設計を行なう安定理論に基づくモデル規範形適応制御系では、このパラメータ調整条件は安定理論を用いて誘導される。また、用いられている安定理論は Lyapunov の直接法および Popov の超安定理論があるが、一般に、超安定理論によるもの³⁾は補助変数の導入等解析手順が複雑であり、ここでは Lyapunov の直接法に基づき設計を行なう。

この適応系においては、システムのパラメータが直接

かつ独立に調整可能であるというかなり厳しい条件を必要とする。しかし、もし、この条件を満足するようなシステムであれば、未知パラメータの推定の必要がなく、良好な適応性をもつ制御系の設計が期待できる。

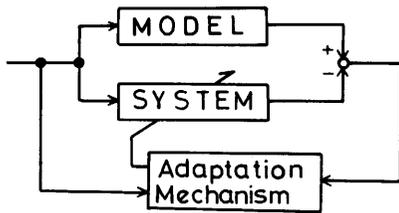
一方、構成 (II) では、破線内がパラメータおよび状態量の推定機構と考えられるが、一般の推定手法では推定に非常に労力を要し、オンラインでの適応系の構成は実際上不可能であるといえる。従って、ここでは、パラメータが未知の場合の観測器、いわゆる適応観測器を安定理論より誘導する。この適応観測器は推定速度が非常に速く、また常に安定性が保証されているという利点がある。

この両者は、システムとモデルを置換すれば、全く同一の構成であり、同じアルゴリズムでもって設計可能と推測される。しかし、両者には

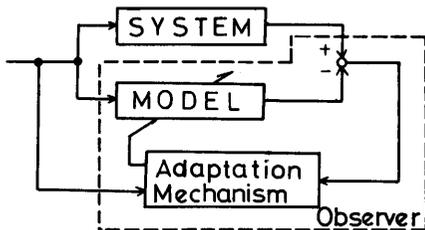
i) 構成 (I) では、モデルの情報が全て入手でき、これらの情報を用いてアルゴリズムの誘導、すなわち、システムの調整が可能である。

ii) 構成 (II) では、システムの情報はお出力のみしか入手できなく、システム内部の情報は利用できない。の根本的な相違が存在する。

本論文では、同様のアルゴリズムでもって適応系が設計できるようなモデル（規範モデルおよび観測器）を提案して、その適応アルゴリズムを誘導する。



図一 適応制御系の構成 (構成I)



図二 適応制御系の構成 (構成II)

3. 適応アルゴリズム

未知システムの状態推移方程式および観測方程式はそれぞれ次式とする。

$$X_{k+1} = H_k X_k + B_k u_k \tag{3.1}$$

$$X_k, B_k \in R^m \quad H_k \in R^{m \times m}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} h_k^1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \\ h_k^{m-1} & & & 1 \\ h_k^m & & & \end{bmatrix} \quad B_k = \begin{bmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^m \end{bmatrix}$$

$$y_k = D X_k = x_k^1 \tag{3.2}$$

$$D = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad D \in R^{1 \times m}$$

一方、モデルの状態推移方程式は次式とする。

$$\hat{X}_{k+1} = (C_k - \hat{H}_k) E_k + \hat{H}_k \hat{X}_k + \hat{B}_k u_k \tag{3.3}$$

$$\hat{H}_k = \begin{bmatrix} \hat{h}_k^1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \hat{h}_k^{m-1} & & & 1 \\ \hat{h}_k^m & & & \end{bmatrix} \quad C_k = \begin{bmatrix} c_k^1 & & 1 & \\ \vdots & & & \\ c_k^{m-1} & & & \\ c_k^m & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_k = \begin{bmatrix} \hat{b}_k^1 \\ \vdots \\ \hat{b}_k^m \end{bmatrix}$$

$$E_k = \hat{X}_k - X_k \tag{3.4}$$

$$\hat{X}_k, \hat{B}_k, E_k \in R^m \quad \hat{H}_k, C_k \in R^{m \times m}$$

ここで、 C_k は後に決定する可変要素をもつ行列である。

明らかに、モデル (3.3) は e_k のみの情報を用いて構成されており、 e_k が 0 に収束すると (3.3) は (3.1) と同形となる。

3.1. 適応アルゴリズムの誘導

(3.1) と (3.3) より、それぞれ次式を得る。

$$x_{k+1} = \sum_{j=1}^m (h_{k+1-j}^1 x_{k+1-j}^1 + b_{k+1-j}^1 u_{k+1-j}) \tag{3.5}$$

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{j=1}^m \{ (c_{k+1-j}^1 - \hat{h}_{k+1-j}^1) e_{k+1-j}^1 + \hat{h}_{k+1-j}^1 \hat{x}_{k+1-j}^1 + \hat{b}_{k+1-j}^1 u_{k+1-j} \} \tag{3.6}$$

ここで、

$$\alpha_k \triangleq [\hat{h}_k^1 - h_k^1 \ \dots \ \hat{h}_k^m - h_k^m]$$

$$\begin{aligned}
\beta_k &\triangleq [\bar{b}_k^1 - b_k^1 \cdots \bar{b}_k^m - b_k^m] \\
\bar{C}_k &\triangleq [c_k^1 c_k^{2-1} \cdots c_k^{m-1-m}] \\
\bar{E}_k &\triangleq [e_k^1 e_k^{1-1} \cdots e_k^{1-1-m}]^T \\
\Phi_k &\triangleq [\alpha_k^1 \beta_k^1 \cdots \alpha_k^m \beta_k^m] \\
\bar{\Phi}_k &\triangleq [\alpha_k^1 \beta_k^1 \cdots \alpha_k^{m-1-m} \beta_k^{m-1-m}] \\
\omega_k &\triangleq [y_k u_k \cdots y_{k+1-m} u_{k+1-m}] \\
\alpha_k, \beta_k, \bar{C}_k &\in R^{1 \times m} \quad \bar{E}_k \in R^m \quad \Phi_k, \omega_k \in R^{2m}
\end{aligned}$$

を定義すると (3.4) ~ (3.6) より次式を得る。

$$e_{k+1} = \bar{C}_k \bar{E}_k + \bar{\Phi}_k \omega_k \quad (3.7)$$

したがって、設計問題は (3.7) で表現される系の e_k^1 が収束するように $\bar{\Phi}_k$ の適応アルゴリズムを決定することである。

そのために、ここでは Lyapunov の安定理論を用いて適応アルゴリズムを誘導する。

まず、 V 関数を

$$V_k = \bar{\Phi}_k \bar{\Phi}_k^T \quad (3.8)$$

とする。また、パラメータ調整アルゴリズムを

$$\bar{\Phi}_{k+1} = \bar{\Phi}_k + \theta_k \cdot \omega_k^T = \bar{\Phi}_k + \delta_k \quad (3.9)$$

とすると次式を得る。

$$\begin{aligned}
\Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \\
&= \omega_k^T \omega_k \left(\theta_k + \frac{e_{k+1}^1 - \bar{C}_k \bar{E}_k}{\omega_k^T \omega_k} \right)^2 \\
&\quad - \frac{(\bar{\Phi}_k \omega_k)^2}{\omega_k^T \omega_k} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\theta_k = -\frac{e_{k+1}^1 - \bar{C}_k \bar{E}_k}{\omega_k^T \omega_k} \quad (3.11)$$

とえらば

$$\Delta V_k = -\frac{(\bar{\Phi}_k \omega_k)^2}{\omega_k^T \omega_k} < 0 \quad (3.12)$$

となり、 Φ_k の収束性が保証される。

3.2 モデル規範形

モデル規範形適応制御系においては、明らかに

$$\begin{aligned}
\bar{h}_k^i &= \bar{h}^i = \text{Const} \\
\bar{b}_k^i &= \bar{b}^i = \text{Const} \quad (i = 1, \dots, m)
\end{aligned}$$

である。したがって、システムのパラメータ調整アルゴリズムを

$$\begin{bmatrix} h_{k+1}^1 & b_{k+1}^1 \\ \vdots & \vdots \\ h_{k+1}^m & b_{k+1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_k^1 & b_k^1 \\ \vdots & \vdots \\ h_k^m & b_k^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_k^1 \\ \vdots \\ \delta_k^m \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\Phi_{k+1} &= \Phi_k + \delta_k \\
\delta_k &\triangleq [\delta_k^1 \cdots \delta_k^m]^T \quad \delta_k \in R^{m \times 2}
\end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、

$$\Delta_k \triangleq [0 \quad -\delta_{k-1}^2 \cdots -\sum_{j=1}^{m-1} \delta_{k-j}^m] \quad (3.15)$$

を定義すると

$$\bar{\Phi}_k = \Phi_k + \Delta_k \quad (3.16)$$

となり、(3.7) に代入すると次式を得る。

$$e_{k+1} = \bar{C}_k \bar{E}_k + (\Phi_k + \Delta_k) \omega_k \quad (3.17)$$

つぎに、任意のパラメータ C_k の各要素を

$$\begin{aligned}
c_k^1 &= c_k^0 + \tilde{c}_k^1 & |c_k^0| < 1 \\
\tilde{c}_k^1 &= \frac{1}{e_k^1} \left(\sum_{i=2}^m \delta_{k-1}^i \omega_{k+1-i}^1 - c_{k+1-m}^m e_{k+1-m}^1 \right) \\
c_k^i &= \frac{1}{e_k^1} \sum_{i=j+1}^m \delta_{k-1}^i \omega_{k+j-i}^1 \quad (i = 2, \dots, m-1) \\
c_k^m &: \text{任意}
\end{aligned} \quad (3.18)$$

とすると (3.17) は次式となる。

$$e_{k+1} = c_k^0 e_k^1 + \Phi_k \omega_k \quad (3.19)$$

ここで、(3.9) と (3.11) より

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{e_{k+1}^1 - c_k^0 e_k^1}{\omega_k^T \omega_k} \omega_k^T \quad (3.20)$$

を得る。(3.19) より、明らかに $|c_k^0| < 1$ の条件から Φ_k の収束とともに e_k^1 も原点に収束する。

いま、 $c_k^0 = 0$ とすると (3.20) より、適応アルゴリズムとしては次式が決定できる。

$$h_{k+1}^j = h_k^j + \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} y_{k+1-j} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.21)$$

$$b_{k+1}^j = b_k^j + \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} u_{k+1-j} \quad (3.22)$$

$$y_k = x_k^1$$

3.3 適応観測器

適応観測器の場合には、モデル規範形とは逆に

$$\begin{aligned}
h_k^i &= h^i = \text{Const} \\
b_k^i &= b^i = \text{Const} \quad (i = 1, \dots, m)
\end{aligned}$$

である。したがって、観測器のパラメータ調整アルゴリズムを

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{k+1}^1 & \hat{b}_{k+1}^1 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{h}_{k+1}^m & \hat{b}_{k+1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_k^1 & \hat{b}_k^1 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{h}_k^m & \hat{b}_k^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_k^1 \\ \vdots \\ \delta_k^m \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

とすると次式となる。

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \delta_k \quad (3.24)$$

(3.24) は (3.14) と同一となり、モデル規範形の場合と全く同一の手順により、次式のアロリズムが得られる。

$$\hat{h}_{k+1}^j = \hat{h}^j - \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} y_{k+1-j} \quad (3.25)$$

$$\hat{b}_{k+1}^j = \hat{b}^j - \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} u_{k+1-j} \quad (3.26)$$

(3.25), (3.26) と (3.21), (3.22) との相違点は右辺第2項の調整項の符号が各々異なる点のみである。

4. 数値例

ここでは、先に求めた適応アロリズムを用いて数値計算した結果について考察する。

4.1. 最適制御方策

制御方策はモデルの最適制御とする。ここで、最適制御方策は、先の適応アロリズムの誘導手順と統一するために Lyapunov の最適制御、すなわち

$$V_n = \hat{X}_n^T Q \hat{X}_n \quad (4.1)$$

$Q : m \times m$ 対称正値行列

において、 ΔV_n が最小値をとる

$$u_n = - \frac{\hat{B}_n^T Q \{ \hat{H}_n \hat{X}_n + (C_n - \hat{H}_n) E_n \}}{\hat{B}_n^T Q \hat{B}_n} \quad (4.2)$$

を用いる。明らかに、モデル規範形においては \hat{B}_k と \hat{H}_k は固定され、一定値 \hat{B} あるいは \hat{H} である。

数値計算においては、簡単にするために Q は単位行列とした。

4.2. 数値例 (I) モデル規範形

$$H_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

の初期値をもつ3次のシステムに対して、規範モデルを

$$\hat{H} = C_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 0 \\ -0.15 & 0 & 1 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

として数値試算した結果が図-3である。モデルの応答にシステムが性能よく追跡しており、アロリズムの有用性を裏付ける一例となっている。

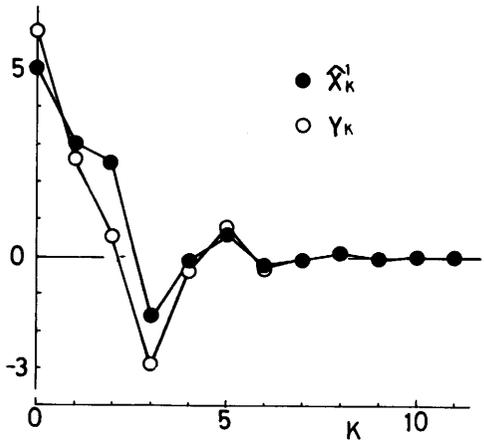


図-3 数値例(I)

4.3. 数値例 (II) 適応観測器

数値例 (I) と同一のシステムに対して、観測器の初期状態も数値例 (I) のモデルと同一として数値計算した結果が図-4である。数値例 (I) と同様に良好な応答特性を示しているのが読み取れる。

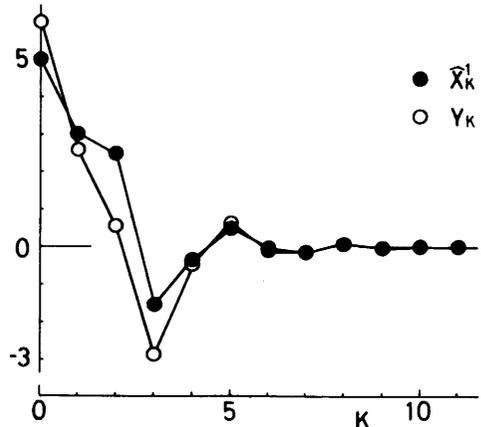


図-4 数値例(II)

5. あとがき

1 入出力離散値系に対して、モデル規範形適応制御系および適応観測器を設計した結果つぎのことが明らかとなった。

- i) 同様の構成でもって両者の設計が可能である。すなわち、一部のアルゴリズムの変更のみでモデル規範形にも、適応観測器にも適用可能である。
- ii) 誘導したアルゴリズムは微分回路の構成あるいは補助変数の導入等の必要がなく、より特性のよい適応制御系の構成が期待できる。
- iii) 数値例からは適応制御系の有用性を示す結果が得られた。

また、提案した適応制御アルゴリズムは観測雑音等が存在する場合にも十分有効であるが、それらについては別の機会に述べたい。

参 考 文 献

- 1) 例えば, I. D. Landau : Model Reference Adaptive System-A Survey (MRAS)-What is possible and Why?, Trans. ASME, Series G, 94, 119/132 (1972).
- 2) I. D. Landau ; A Survey of Model Reference Adaptive Techniques-Theory and Applications-, Automatica, vol. 10, 353/379 (1974).
- 3) I. D. Landau : Hyperstability Concept and their Application to Discrete Control Systems, Proc. JACC, paper 12-2 (1972).