

繊維分散複合材料の構成則モデル*

(第1報, 均等分布する繊維分散複合体)

呉 亜 東^{*1}, 中 垣 通 彦^{*1}

Constitutive Model for Fiber Dispersed Composite (1st Report, Composite with Homogeneously Distributed Fibers)

Yadong WU and Michihiko NAKAGAKI

A constitutive model that describes the macro-stiffness characteristics for fiber reinforced composite materials is introduced. The model utilizes the Eshelby's equivalent inclusion method for describing a particle but with authors' self consistent compliance scheme instead of Mori-Tanaka's meanfield theory, which most other composite models are based on. A separated meso-mechanics analysis verified the accuracy and the reliability of the present model for a fiber dispersed composite over the existing model. A numerical analysis with the developed model revealed that fiber orientation, aspect ratio of fiber, rigidity ratio of fiber/matrix, and volume fraction of fiber are the major controlling factors of the fiber reinforced composite, thus can be regarded to take the role of design parameters of the composite structures.

Key Words: Fiber/Particle Dispersed Composite, Constitutive Modeling, Meso-mechanics Analysis, Equivalent Inclusion Method, Self Consistency, Fiber Orientation, Fiber Aspect Ratio

1. 緒 言

短繊維強化複合材料では, その種類と用途に従ってチョップド繊維やグラウンド繊維が強化材料として用いられ, 高い载荷能力を呈したり塑性すべりを阻止して, 複合材の比剛性や比強度を高める働きをする. 融点が高いプラスチックを母相とする繊維分散材料(FRP)は一般的な工業材料として既に広く利用されていて, 比較的均等な繊維の分布が得られやすいが, 実際の製造においては配向や密度が分布する場合がある.

軽量で高強度をもつ金属基複合材料(MMC)は, 構造物金属材料として開発されている. さらに強度の高いMMCとしてチタニウム合金をマトリックスとし, マグネシウムやSiCなどのウスカを分散材とする短繊維強化複合材料の開発を目指す研究が著者らの参加しているグループによって進められている⁽¹⁾. 一般に粒子/繊維強化複合材料の場合, 本来の目的から母相と介在相の剛性は著しく異なる事が多い. このような場合, 介在物の形状, 即ち短繊維のアスペクト比や繊

維の配向性, 偏り分布などのメゾ的な諸元が, 複合材料のマクロな材料特性に及ぼす影響が大きい.

繊維強化複合材の材料剛性に関する構成則としては, 同一配向をもつ繊維複合体に対して, 最も古いHill⁽²⁾のモデル, 上下限を与えるHashin⁽³⁾モデル, 繊維のアスペクト比を考慮したTakao-Taya⁽⁴⁾らのモデルがあり, ランダム配向性をもつものとして, Tandon-Weng⁽⁵⁾の構成則および, Hatta-Taya⁽⁶⁾の熱伝導則モデルがある. 本論文では既出のモデルの評価を行い, 上記のメゾ的な諸元がマクロ材料特性に与える影響の観点から, 著者らの自己整合モデルを用いた精度よい構成則を提案する. また, モデルの精度の検証のため, 複合体のメゾメカニクス解析を実施した. 本構成則モデルを用い, 繊維の分布形態が複合材料の巨視的な挙動に及ぼす影響について検討し, それらの結果を示す.

2. 均質分布する繊維分散複合体の構成則モデル

繊維の配向分布やアスペクト比は, 繊維強化複合材料のマクロ性質にとって重要な意味をもつ. 構成則としてのTakao-Taya⁽⁴⁾, Tandon-Weng⁽⁵⁾, Hatta-Taya⁽⁶⁾らのモデルは, 一つの楕円体粒子が無限母相の中に存

* 原稿受付 1998年8月18日.

^{*1} 正員, 九州工業大学情報工学部(〒820-8502 飯塚市川津680-4).

E-mail: nakagaki@mse.kyutech.ac.jp

在すると仮定する Eshelby の等価介在物理論⁽⁷⁾ を多粒子の複合体に拡張した Mori-Tanaka の平均場理論⁽⁸⁾ を用いた (EMT) モデルであり, 粒子の長径/短径比を十分大きくしたものである. 平均場理論では粒子間の干渉がうまく取り扱えないため, 粒子の体積分率が大きくなればその精度は低下し, また介在相/母相の剛性比が大きい時はさらに精度が悪化する⁽⁹⁾. これに対し著者らは, 剛性問題については複合体と平均的に等価なコンプライアンスを持つ媒体を想定する Self-consistent 概念^(10,11,12) を用い, これに等価介在物理論を適用し, 体積分率と剛性比の全範囲に互って精度のよい一つの構成則モデルを示した⁽⁹⁾. これは, 本質的には Mura⁽¹³⁾ の定式化と一致する. ここでは, 改めてこのモデルを SCC モデルと呼び, これを用いた繊維分散複合材料の構成則を導く. ここでも長径/短径比の値を大きく設定する事によって繊維を表すとし, 基本的には楕円体粒子を介在物として取り扱う.

本節では, まず図 1 (a) に示すように介在物がランダムに分散し, 密度分布が一様な複合体を考える. 繊維介在物は方向性が強いので, 介在物の配向性を考慮

した構成則を立てる必要がある. 介在相の応力は配向性に依存し, 同方向を向くすべての繊維は同じ特性をもつと仮定する. 任意の方向を向く一つの介在物に着目し, 図 1 (b) に示すように, この介在物の軸方向に沿って局所座標を設定する. この介在物をもつ平均的な応力とひずみを決定するため, この介在物粒子のみが, 平均複合体と同じ特性を持つ均質媒体の中に位置すると考える. さらに図 2 (b) に示すように同媒体の中に媒体と同じ材料からなり介在物と同形の仮想粒子を考え, これに固有歪みを与える事により, 図 2 (a) に表す実粒子に等価させる. 等価介在物の応力, 歪みは周囲の均質等価媒体の応力-歪みと異なり, それぞれ次のように表すことができる.

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_i \tag{1}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 + \epsilon_i \tag{2}$$

ここで, (') は局所座標を表し, (:) は 2 階以上のテンソル, (:) は 2 重内積, (\otimes) はテンソル積を表す. 添字 0, 1 と 2 はそれぞれ複合体, 母相と介在相を示す. σ_2 と ϵ_2 は介在相の平均応力と平均歪み, σ_0 と ϵ_0 は複合体の平均応力と平均歪みであり, σ_i と ϵ_i は複合体と介在相間の平均応力と平均歪みの食い違い量を表す. また (\wedge) は複合材料の巨視的な平均量を表すが, これらは予め仮定された既知量ではなく, 自己整合的に決定される未知量である.

楕円体介在物に対する Eshelby の等価理論を用いて, 食い違い量 ϵ_i および σ_i は, 粒子に与えられた固有歪み ϵ^* の関数として次のように表すことができる.

$$\epsilon_i = \hat{S} : \epsilon^* \tag{3}$$

$$\sigma_i = \hat{E} : (\epsilon_i - \epsilon^*) \tag{4}$$

ここで \hat{S} は, 複合体と等価な均質体を媒体とする一つの介在物に対する Eshelby テンソルであり, 粒子の三つの軸長 (a_1, a_2, a_3) と材料定数によって決定される量である. その詳細は文献⁽¹³⁾ に記されている.

適当な固有歪みを等価粒子に与える事により, 実介在物と等価介在物の間の応力およびひずみの等価性を実現する事ができ, 次の関係式が成り立つ.

$$E_2 : (\epsilon_0 + \epsilon_i) = \hat{E} : (\epsilon_0 + \epsilon_i - \epsilon^*) \tag{5}$$

式 (3), (5) より固有ひずみを次のように解く事ができる.

$$\epsilon^* = A_0 : \hat{E} : \epsilon_0 \tag{6}$$

ここで

$$A_0 = [E_2 : (\hat{E} - E_2)^{-1} : \hat{E} - E_0]^{-1} \tag{7}$$

$$\hat{E}_0 = \hat{E} : (\hat{S} - L \otimes L) \tag{8}$$

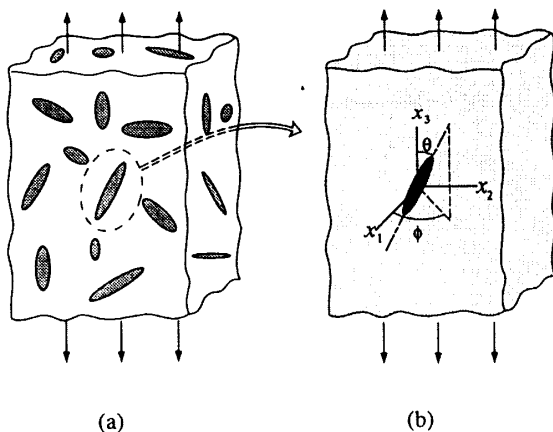


Fig.1. Inclusion dispersed domain and its equivalent model

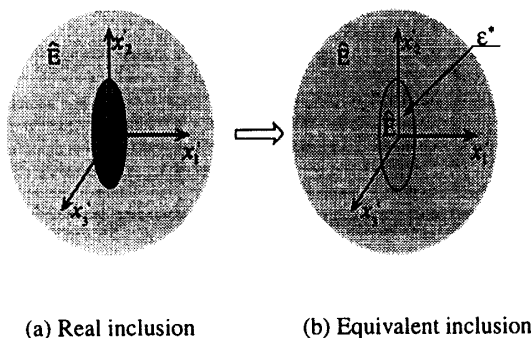


Fig.2 Equivalent inclusion model based on Self-Consistent method

である。

局所系における複合体の平均応力と平均ひずみの関係を次のように表せば、

$$\sigma_0 = \hat{E} : \varepsilon_0 \quad (9)$$

式 (1) および式 (4) ~ (9) より介在相応力は

$$\sigma_2 = [L \otimes L + \hat{E}_0 : A_0] : \sigma_0 \quad (10)$$

となる。

繊維の配向性による効果を表すため、複合体中の繊維の長軸方向の角度により介在物を多数のグループに分け、一つの方向に属する介在物を添字 "i" ($i=1, 2, 3, \dots$) によって表す。図3に示す介在物 i のもつ局所座標系と基準座標系間の応力変換テンソルを X_i で表せば、 i 方向を向く介在物の基準座標系応力は

$$\sigma_2^i = X_i^{-1} : \sigma_2 \quad (11)$$

によって表され、式 (10) から次の関係が得られる。

$$\sigma_2^i = B^i : \sigma_0 \quad (12)$$

ここで

$$B^i = X_i^{-1} : [L \otimes L + \hat{E}_0 : A_0] : X_i \quad (13)$$

分散した繊維介在物の長さや断面直径の比、即ち本モデルでは長楕円体介在物のアスペクト比は、実際の繊維分散複合材料では介在物の性質が十分一様となる位大きいと考えて差し支えない。従って同じ配向角度をもつすべての介在物は上式で表され、介在相の応力は平均則により次式によって定義することができる。

$$\sigma_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n c_2^i \sigma_2^i \quad (14)$$

ここで、 f は複合体中の全介在物の体積分率であり、 c_2^i は i グループに属する介在物の体積分率を表す。

複合体の応力平均則より母相の平均応力、介在相の平均応力、および複合体の平均応力との関係は

$$\sigma_0 = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2 \quad (15)$$

で表され、式 (12) ~ 式 (15) より母相と介在相の平均応力はそれぞれ次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-f} [L \otimes L - (\sum_{i=1}^n c_2^i B^i)] : \sigma_0 \quad (16)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{f} (\sum_{i=1}^n c_2^i B^i) : \sigma_0 \quad (17)$$

また歪みの平均則も同様に

$$\varepsilon_0 = (1-f)\varepsilon_1 + f\varepsilon_2 \quad (18)$$

によって記述し、式 (16) ~ (18) より複合体の平均歪みと平均応力の関係を次のように表すことができる。

$$\varepsilon_0 = \hat{L} : \sigma_0 \quad (19)$$

$$\hat{L} = L_1 : [L \otimes L - (\sum_{i=1}^n c_2^i B^i)] + L_2 : (\sum_{i=1}^n c_2^i B^i) \quad (20)$$

ここで、 L_1 と L_2 はそれぞれ母相と介在相の弾性コンプライアンス・テンソルであり、 \hat{L} は介在物の分散密度が全領域で一様な複合材料の平均コンプライアンスである。式 (20) は右辺に未知数自身を含む形であるため、解は収束計算等により求める必要があるが、右辺における初期値に簡単な Voigt モデル又は Reuss モデルを用いるのが一つの妥当な方法である。閉じた形の解を必要とする場合には、その第一近似を以てあてることもできる。

式 (20) は任意の配向分布をもつ複合材に対して適用可能である。その内、特にすべての介在物の方向が同じである場合は、次式の形となる。

$$\hat{L} = L_1 : [L \otimes L - fB] + fL_2 : B \quad (21)$$

ここで、

$$B = L \otimes L + \hat{E}_0 : A_0 \quad (22)$$

である。

式 (20) および式 (21) は、本論文の SCC モデルにより構築された、繊維の偏り分布などが無い場合の弾性構成式である。

4. 構成則モデルの検証

式 (19) と (20) によって与えられた、繊維/粒子の体積分率の分布が一様である複合材料の構成則の精度を検証するため、一例として繊維がランダムに配向および分布している分散複合材料に単軸引き張りを加えた二次元平面応力問題について数値解析を行った。著者らの知る限りでは、本問題に対して唯一比較可能な他の構成則モデルとしては、EMT モデルとして代表的な Tandon-Weng のモデル¹⁹⁾ がある。そこで本解析では：(1) 式 (20) に与えられる本論文の SCC モデル；

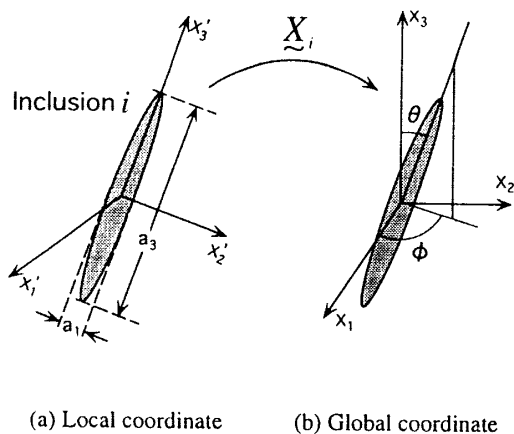


Fig. 3 Transformation between coordinates

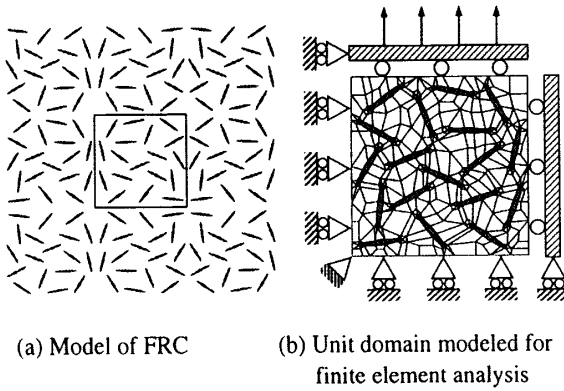


Fig.4 Model of randomly dispersed fiber reinforced composite for meso-mechanics analysis

(2) Tandon-Weng の EMT モデル; および両者の精度比較のため, (3) FEM によるメゾ・メカニクス解析を行った.

前報⁽⁹⁾の結果によれば, 介在相と母相の剛性が著しく異なる場合には構成則モデルの相違が顕著に現れる事が明らかとなっている. そのため本解析例では, 母相材料の材料係数を,

ヤング率: $E_1 = 2 \text{ GPa}$, ポアソン係数: $\gamma_1 = 0.34$

と仮定し, 繊維の材料定数を次のような二つの場合について検討した.

ヤング率: $E_2 = 20 E_1$, ポアソン係数: $\gamma_2 = 0.15$

ヤング率: $E_2 = 100 E_1$, ポアソン係数: $\gamma_2 = 0.15$

メゾ・メカニクス解析においては, まず無限の母相材中に繊維が分散した複合材料の解析領域を考え, その一部をユニット・セル領域として有限要素解析の対象とする. 図4 (b) は, 図4 (a) のユニット・セルの要素分割図を表したものであり, 短繊維の方向およ

び位置をランダムに配置している. この参照領域に周期無限境界条件を課して無限体とし, 単軸引き張りを行った. 図3 (a) に示す繊維の細長比 a_3/a_1 を 5 とし, 繊維の体積分率を 11%, 20% および 30% の三つの場合についてマクロな剛性を計算した. これらのユニット領域は, メゾ解析においてセルの周期性による干渉効果は小さく, 十分等方向性が得られているモデルである.

SCC モデルによる構成則の評価においては, 繊維 ($a_1 = a_2$) は二次元平面の全方向に一様分布すると仮定し, 2° 毎の繊維グループに分割した. 従ってその各々の体積分率を次のように表す.

$$c_2^i = \frac{f}{n} \quad (n = 90) \quad (23)$$

式 (23) を式 (20) に用いて複合材料の巨視的コンプライアンスをもとめ, さらに平面応力化して用いた.

一方 Tandon-Weng のモデルによれば, 繊維が全方向に一様に分布する分散複合材料の二次元複合材料のヤング率は次のように与えられる.

$$\hat{E} = \frac{E_1}{1 + f p_{11}} \quad (24)$$

但し, p_{11} については文献5 に与えられている定義を本計算に用いた.

本モデルの式 (20), Tandon-Weng の式 (24), およびメゾ・メカニクス解析で得られた複合材料の剛性をヤング率によって図5 および図6 に示す. 横軸は繊維の体積分率を表す. 図5 は繊維と母相のヤング率比が 20 の場合, 図6 は同じく 100 の場合の結果を示す. 図中, 比較のため Hashin⁽¹⁾ の Higher-Bound 値と Lower-Bound 値をも示す. 二つの結果において, Tandon-

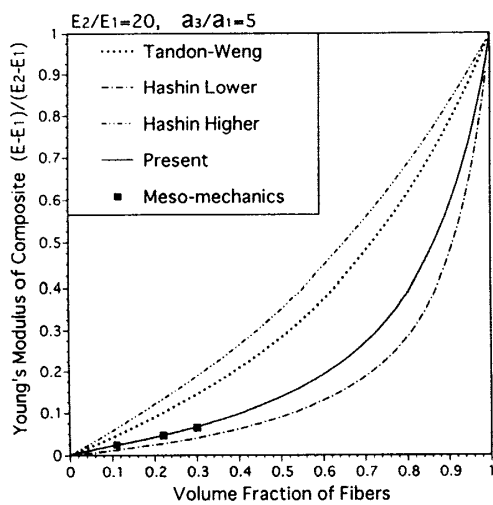


Fig. 5 Global Young's modulus of composite for various volume fraction of fiber when $E_2/E_1 = 20$

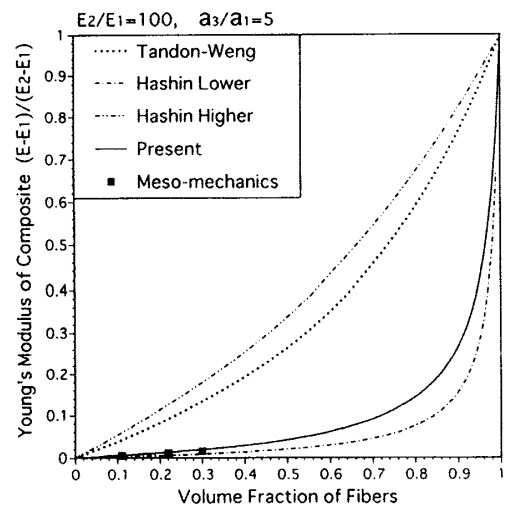


Fig. 6 Global Young's modulus of composite for various volume fraction of fiber when $E_2/E_1 = 100$

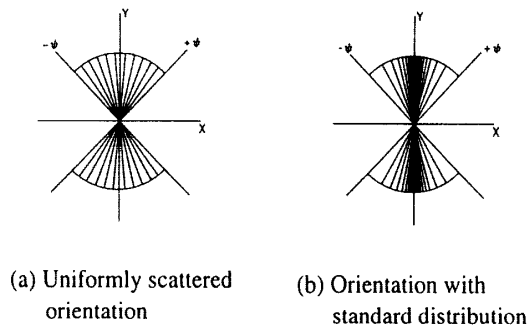


Fig. 7 Distributed angles of fiber orientation

Weng の結果の曲線は Hashin の Higher-Bound 値に近く、本構成則モデルの結果はむしろ Lower-Bound 値に近い。本モデルと Tandon-Weng の結果の間にはかなりの差が見られ、繊維と母相の剛性比が 100 の場合には、両者は一層著しい乖離を示す。剛性比が 100 というのは短繊維強化複合材料において非現実的な値でなく、十分現実的な値であると言える。

そこで、限られた繊維の体積分率のケースではあるが、真偽を確かめるため行ったメゾ・メカニクス解析の結果と比較すると、図 5、図 6 にシンボルで表すように、それらの結果は本モデルの結果とよい一致を示している。一方、EMT モデルである Tandon-Weng の結果とは一致しないが、その原因は介在物周りの剛性を常に母相の剛性と同じとする平均場理論の適用にあると考えられる。

4.2 繊維の配向分布効果 繊維の配向が集中す

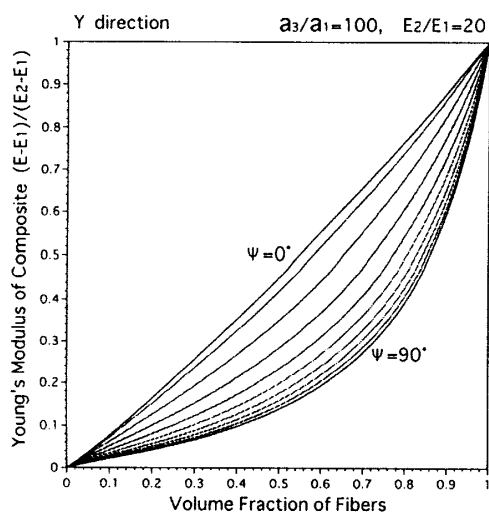


Fig. 8 Young's modulus of composite in principal fiber direction

る場合、複合材料は異方性を持つ。ここで繊維介在物の配向性による複合材料の異方効果を検討するため、繊維の配向分布が図 7 に示すように二次元の、一様分布と正規分布をもつ二つの場合を考える。繊維が基準 Y 軸に関し、左右夾角 $-\psi$ と $+\psi$ の間に分布していると仮定し、さらに ψ を $0 \sim \frac{\pi}{2}$ の間で変化させ、複合材料の剛性への影響を検討する。ここでは、繊維のアスペクト比を $a_3/a_1=100$ 、繊維と母相のヤング率比を $E_2/E_1=20$ とし、その他については前述の条件と同じとする。

まず、一様分布について繊維配向範囲を、 $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ として、本構成則モデルで算定した複合材料の Y 方向と X 方向の剛性をそれぞれ図 8 と図 9 に示す。これら二つの図の結果を比較すれば、一様分布であっても配向範囲の主軸方向には配向角度範囲の影響が著しく、主軸横断方向には配向角度範囲の影響が比較的小さい事が分る。

$\psi = 90^\circ$ の場合は、複合材料は等方となって、図 8 の X 方向のヤング率と図 9 の Y 方向のヤング率は等しくなる。 ψ の減少に従って Y 方向の剛性は大幅に増加する一方、X 方向の剛性は僅かに下がる。パラメタ $\psi = 0^\circ$ の場合はすべての繊維が Y 方向と平行する場合であり、図 9 に示すように主軸方向の剛性は繊維の体積分率とほぼ線形的な関係を持つようになる。繊維介在物のアスペクト比が ∞ となる場合は完全な線形となる。

次に、図 7 の一様分布と正規分布の場合の複合材料の挙動の相違について検討する。ここでは正規分布に

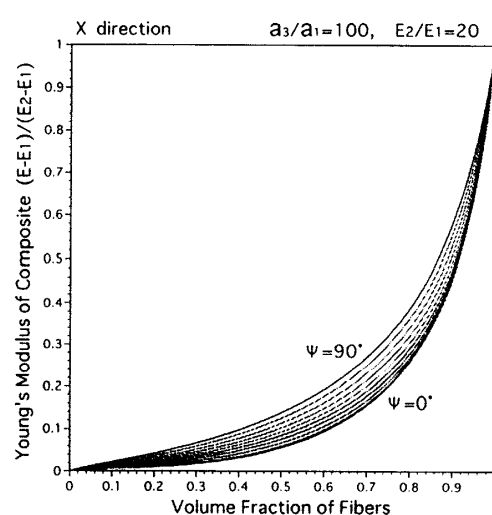


Fig. 9 Young's modulus of composite in transverse fiber direction

ついて、繊維の配向に関する体積分率は次のように与えられる。

$$c_i = \frac{f}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\psi - \frac{2\pi}{3})^2}{2(\frac{\pi}{3})^2}} \quad (i = 90) \quad (25)$$

繊維アスペクト比を $a_3/a_1=100$, ψ を 90° と設定し, $E_1/E_2=20$ および $E_1/E_2=100$ の例について本モデルで計算した, 正規分布配向と一様分布配向の結果の比較を, 図10と図11に示す. 図中, "Standard" は正規分布を, "Uniform" は一様分布を表し, "X" と "Y" はそれぞれX方向とY方向の結果を示す. 一様分布配向の場合の結果は, $\psi=90^\circ$ であるため複合材料のX方向とY方向のヤング率が一致する. 正規分布配向の場合, 繊維の平均的な主軸方向がY方向と一致するの

で, 一様分布と比べてY方向のヤング率が大きく, 逆にX方向のヤング率は小さくなる.

図10と図11を比べれば, 剛性比が高い場合, 相対的に体積分率の低域で変化が小さく, 高域で急激に変化する事が分る. また, 複合材料の異方性の絶対値も増加している.

以上の例からも繊維分散複合材料の場合は, 繊維介在物の配向による複合材料の巨視的な特性への影響は顕著である事が分り, 構成則においては正確なモデルが必要であることが明らかとなった.

4.3 繊維のアスペクト比について

特に短繊維複合材料の場合は, 繊維のアスペクト比が複合材料の巨視的な特性に及ぼす影響は無視できず, アスペクト比は一つの重要な意味を持つ. ここでは繊維の体積分率を0.3と固定し, 繊維が一方向に配向した場合と一様分布配向の場合の複合材料の巨視的なヤング率の結果を, 繊維のアスペクト比の変化に対して図12に示す. 剛性比は $E_1/E_2=20$ および $E_1/E_2=100$ の場合につき, 主軸方向と横断方向の巨視的な剛性を計算した. 繊維の横断方向と一様配向分布の結果は, 比較的アスペクト比の低い値で一定化してしまう. 一方, 主軸方向の剛性はアスペクト比に対して鋭敏であり, 特に剛性比が100の場合にはアスペクト比が80程度まで一定化しないという結果が得られている. 繊維のアスペクト比が大きい場合, 複合材料の主軸方向のヤング率が繊維の剛性に大きく依存する. 即ち, 繊維の強化効果が大きい. また繊維がランダム配向する場合は, 主軸方向の場合程, 繊維の剛性は複合材料の強化に寄与していない事が分る.

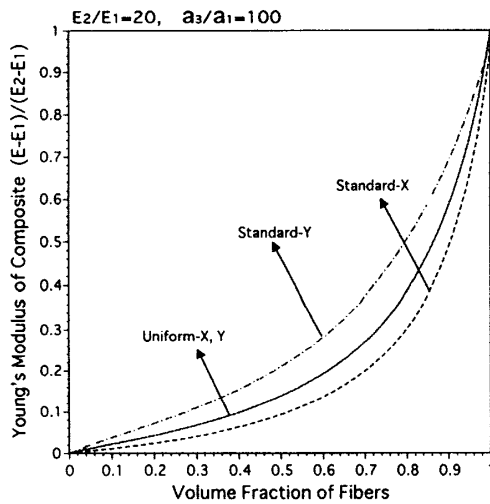


Fig.10 Young's modulus of composite when $E_2/E_1=20$

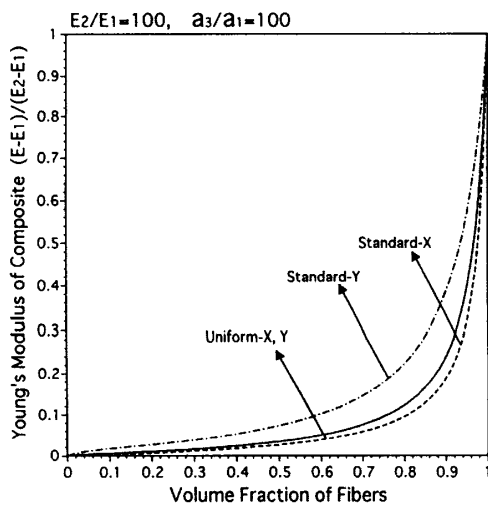


Fig.11 Young's modulus of composite when $E_2/E_1=100$

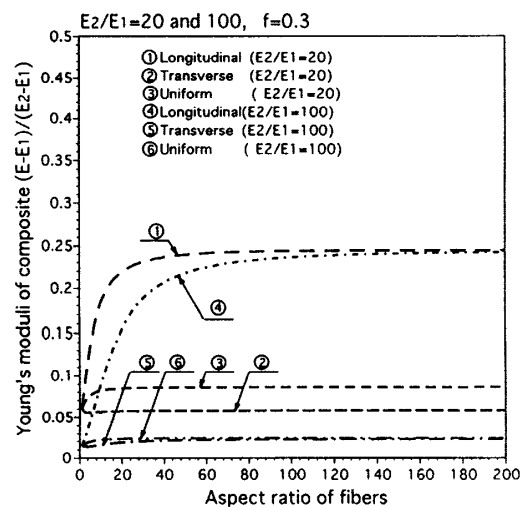


Fig.12 Young's modulus of composite for various aspect ratios of fibers when $f=0.3$

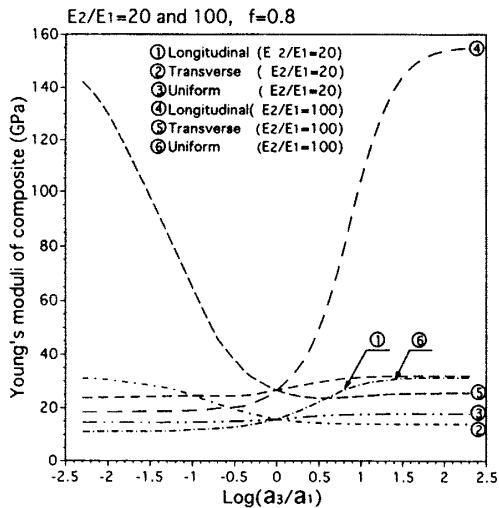


Fig. 13 Young's modulus of composite for various logarithmic aspect ratios of fibers when $f = 0.8$

いづれの剛性比の場合も、繊維のアスペクト比が大きくなれば、主軸方向の無次元化されたヤング率は同じ一定値に収束する。この事は、アスペクト比が ∞ となる時、式(3)中の繊維の軸方向のEshelbyテンソルは0となって介在相と複合体との平均ひずみの食い違いがなくなるため、その結果はVoigtモデルと一致することを示している。

図13に粒子の体積分率を0.80と設定して、繊維と母相の剛性比が20または100の場合の複合材料のヤング率と繊維のアスペクト比との関係を示す。繊維の体積分率が0.8と大きくなれば、複合材料の主軸方向の剛性は、アスペクト比の増加と共に著しく増加する。図13は、球状粒子が分散する立方体から繊維の長さの増加と共に異方性の起きる様子を示している。また、介在物のアスペクト比が1以下、即ちオプレート状の場合も示されている。一様配向の場合は、この場合の粒子の形状がさほど複合体の剛性に变化を与えないが、一方向配向の場合は殆ど主軸方向と横断方向の特性が定量的に入れ替わる程にまで変化する。

以上の例からも、繊維のアスペクト比も、配向性、剛性比、体積分率などと相関して複合体の特性に顕著な効果をもたらす事が明らかとなった。

5. 結 論

繊維分散複合材料の巨視的な特性は、メゾ的な要素、即ち介在物粒子のアスペクト比、配向性、介在相

と母相の材料剛性比、粒子の体積分率などに著しく支配される。また材料設計においては、それらの要素は要求される材料性能を実現するためのパラメタとして有効な役割をもつことになる。本論文ではそれらの効果を正確に表すモデルとして、SCC混合則を用いた構成則を開発し提案した。本研究で得られた結果を要約し、以下に列挙する。

(1) 従来のEMT構成則モデルと比較するため有限要素法によるメゾ・メカニクス解析を実施し、本構成則の信頼性を検証することができた。一方、EMTモデルは、メゾ非均質性が低く体積分率が低い時のみ適用することができる。

(2) 本構成則では繊維の配向角度を任意の範囲に設定する事ができ、その角度範囲内で一様分布配向や正規分布配向など任意に分布配向させることができる。結果によれば、繊維配向性は複合体の剛性と異方性に顕著な効果を与える事が分った。

(3) 繊維または粒子介在物のアスペクト比も、配向性や剛性比、体積分率など他の要素と相まって複合体の特性に顕著な効果を表す。

本研究に対し、文部省科学研究費補助金基盤研究(C) 07650107及び福岡県産業・科学技術振興財団の助成を受けた事を記し謝意を表す。

文 献

- (1) 平成9年度産学官共同研究中間成果発表フォーラム予稿集、(財)福岡県産業・科学技術振興財団、(1997)。
- (2) R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, **12**, (1964), 199-212.
- (3) Z. Hashin, *J. Mech. Phys. Solids*, **13**, (1965), 119-134.
- (4) Y. Takao, M. Taya, *J. Comp. Mat.* **21**, (1987), 140-156.
- (5) G.P. Tandon, G.J. Weng, *Comp. Sci. and Tech.* **27**, (1986), 111-132.
- (6) H. Hatta, M. Taya, *J. Appl. Phys.* **58-7**, (1985), 2478-2486.
- (7) J.D. Eshelby, *Proc. of the Royal Society of London*, **241**, A(1957), 376-396.
- (8) T. Mori, K. Tanaka, *Acta, Metallurgica*, **21**, (1973), 571-574.
- (9) 吳 垂東, 中垣 通彦, *機論*, 64-622, A (1998), 1646-1653.
- (10) E. Kröner, *Z. Physik Vol.151*, pp504-518, 1958.
- (11) B. Budiansky, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp223-227, 1965.
- (12) R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp213-222, 1965.
- (13) T. Mura, "Micromechanics of Defects in Solids," Kluwer Academic Publishers, 2nd Revised Edition, (1993)。