

任意個の一行菱形介在物の干渉効果の解析*

野田 尚 昭*¹, 川 島 裕 二*²
森 山 伸 也*³, 小 田 和 広*⁴

Analysis of Interaction Effect of a Row of
Diamond-Shaped Inclusions

Nao-Aki NODA, Yuuji KAWASHIMA,
Shinya MORIYAMA and Kazuhiro ODA

This study deals with a row of equally spaced diamond shaped inclusions with angular corners under various loading conditions. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy type or logarithmic type singularities, where the unknowns functions are the densities of body forces distributed in infinite plates having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to analyze the problems accurately, unknown functions of the body force densities are expressed as a linear combination of two types of fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to represent the symmetric stress singularity of $1/r^{1/2}$ and the skew symmetric stress singularity of $1/r^{1/2}$. Then, newly defined stress intensity factors of angular corners are systematically calculated for various shapes, spacings, elastic constants and numbers of diamond shaped inclusions in a plate subjected to uniaxial tension, biaxial tension and in plane shear. For all types of diamond shaped inclusions, the stress intensity factor is shown to be linearly related to the reciprocal of the number of diamond shaped inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Angular Corner, Interaction Effect, Singular Integral Equation, Diamond Shaped Inclusions

1. 緒 言

複合材料の強度評価のため、強化材と母材の異材接合角部に生じる応力特異性を解析する研究が多くなされている^{(1)~(10)}。き裂問題と異なり、異材接合角部では、式(1)で示されるように二つの変形モードに関係した異なる特異応力場が混在している⁽¹⁾。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I, A_i}}{r^{1/2}} f_i^I(\theta) + \frac{K_{II, A_i}}{r^{1/2}} f_i^{II}(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

これまでの研究では、二つの独立な特異応力場の存在を十分考慮していないものが多いため、今後この種の研究において角部の応力拡大係数 [式(1)] に注目した研究が重要となるものと考えられる。

著者らはさきに体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法を用いて、無限板中に任意個の一行菱形孔が存在する場合⁽⁸⁾と2個の菱形介在物が存在する場合⁽⁹⁾の解析を行った。そして、これらの問題を通してその解析法の有効性と角部の応力拡大係数の干渉効果を明らかにした。菱形孔や菱形介在物の問題は、通常き裂に対して定義される応力拡大係数を異材接合角部に拡張する際に、まず第

一に考察すべき基本的なモデルであると考えられる^{(3)(5)~(9)}。すなわち、その角部の角度と介在物の弾性定数を零とすれば解析結果はき裂の場合⁽¹¹⁾と一致する。そこで本研究では、図1に示すような無限板中に任意個の一行菱形介在物が存在する場合の介在物角部の応力拡大係数の干渉効果について考察する。遠方での荷重条件として本研究では(a)一軸引張り、(b)両軸引張り、(c)面内せん断の3種類を取り扱う。

2. 菱形介在物列問題の特異積分方程式による数値解析法

図1に示すような同一形状および寸法をもつ任意個の一行菱形介在物を有する無限板において解析方法を説明する。ここで、 l_1, l_2 は介在物寸法、 d は距離のパラメータ、 θ_A, θ_B は角A, B等の角度、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ は無限遠での応力である。また、母材と介在物のそれぞれの

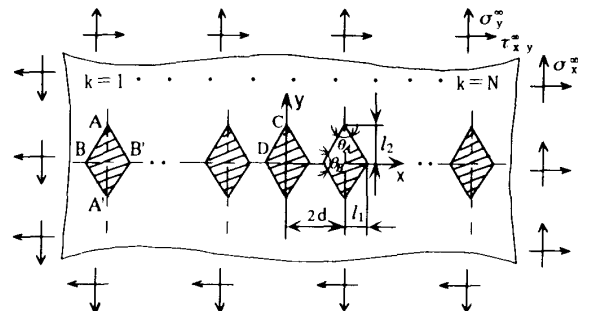


Fig. 1 Diamond shaped inclusions in an infinite plate

* 原稿受付 1995年12月11日。
*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市八幡区仙水町1-1)。
*² 学生員, 九州工業大学大学院。
*³ 学生員, 九州工業大学学生。
*⁴ 正員, 徳山工業高等専門学校 (〒745 徳山市久米高城 3538)。

横弾性定数, ポアソン比を G_1, ν_1 および G_2, ν_2 とする.

本研究では, 無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力を, 2種類の形式の体積力分布の線形結合によって問題を表現する. それぞれの角部では, 一般にモード I とモード II の二つの変形が生じるので, 角部での仮想境界上に分布させるべき2種類の体積力 F_r と F_θ [(r, θ) は角点を中心とする極座標] に対し, 角部の二等分線に対して対称形(モード I)と逆対称形(モード II)の2種類の分布形式を採用する⁽³⁾⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾. このような体積力法の考え方に基づいて, まず領域 1(図 1 中の N 個の菱形孔をもつ無限板)の i 番目の菱形孔の境界変位 (U_M, V_M) と表面力 (σ_{nM}, τ_{nM}) との関係を求めるには, 横弾性定数 G_1 , ポアソン比 ν_1 の均一な無限板(これを無限板 M とする)中の k 番目の菱形孔

となるべき仮想境界上の θ 方向および r 方向の体積力密度をそれぞれ $F_{\theta M,k}(r_k) = F_{\theta M,k}^I(r_k) + F_{\theta M,k}^{II}(r_k)$, $F_{r M,k}(r_k) = F_{r M,k}^I(r_k) + F_{r M,k}^{II}(r_k)$ (上付添字はモード I, モード II の分布形式に相当)とする. 同様に, 領域 2(図 1 中の N 個の菱形介在物)の i 番目の菱形介在物の境界変位 (U_I, V_I) と表面力 (σ_{nI}, τ_{nI}) との関係を求めるには, 横弾性定数 G_2 , ポアソン比 ν_2 の均一な無限板(これを無限板 I とする)中の k 番目の菱形介在物となるべき仮想境界上の θ 方向および r 方向の体積力密度をそれぞれ $F_{\theta I,k}(r_k) = F_{\theta I,k}^I(r_k) + F_{\theta I,k}^{II}(r_k)$, $F_{r I,k}(r_k) = F_{r I,k}^I(r_k) + F_{r I,k}^{II}(r_k)$ とすれば, 角部を含む境界での境界条件 ($\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{nIM} - \tau_{nII} = 0, U_M - U_I = 0, V_M - V_I = 0$) を表す特異積分方程式は式 (2), (3) で表わされる⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} F_{\theta M,i}(s_i) - \frac{1}{2} F_{\theta I,i}(s_i) + \sum_{k=1}^N \left[\int_{L_k} h_{nn}^{F_{\theta M}^{nm}}(r_k, s_i) F_{\theta M,k}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{nn}^{F_{r M}^{rm}}(r_k, s_i) F_{r M,k}(r_k) dr_k \right. \\
 & \quad \left. - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{\theta I}^{ni}}(r_k, s_i) F_{\theta I,k}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{r I}^{ri}}(r_k, s_i) F_{r I,k}(r_k) dr_k \right] = -\sigma_{nM}^\infty(s_i) + \sigma_{nI}^\infty(s_i) \\
 & -\frac{1}{2} F_{r M,i}(s_i) - \frac{1}{2} F_{r I,i}(s_i) + \sum_{k=1}^N \left[\int_{L_k} h_{nt}^{F_{\theta M}^{nm}}(r_k, s_i) F_{\theta M,k}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{nt}^{F_{r M}^{rm}}(r_k, s_i) F_{r M,k}(r_k) dr_k \right. \\
 & \quad \left. - \int_{L_k} h_{nt}^{F_{\theta I}^{ni}}(r_k, s_i) F_{\theta I,k}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nt}^{F_{r I}^{ri}}(r_k, s_i) F_{r I,k}(r_k) dr_k \right] = -\tau_{nIM}^\infty(s_i) + \tau_{nII}^\infty(s_i) \quad (i=1 \sim N) \\
 & \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \left[\int_{L_k} h_u^{F_{\theta M}^{nm}}(r_k, s_i) F_{\theta M,k}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_u^{F_{r M}^{rm}}(r_k, s_i) F_{r M,k}(r_k) dr_k \right. \\
 & \quad \left. - \int_{L_k} h_u^{F_{\theta I}^{ni}}(r_k, s_i) F_{\theta I,k}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_u^{F_{r I}^{ri}}(r_k, s_i) F_{r I,k}(r_k) dr_k \right] = -u_{M,i}^\infty + u_{I,i}^\infty \\
 & \sum_{k=1}^N \left[\int_{L_k} h_v^{F_{\theta M}^{nm}}(r_k, s_i) F_{\theta M,k}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_v^{F_{r M}^{rm}}(r_k, s_i) F_{r M,k}(r_k) dr_k \right. \\
 & \quad \left. - \int_{L_k} h_v^{F_{\theta I}^{ni}}(r_k, s_i) F_{\theta I,k}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_v^{F_{r I}^{ri}}(r_k, s_i) F_{r I,k}(r_k) dr_k \right] = -v_{M,i}^\infty + v_{I,i}^\infty \quad (i=1 \sim N) \\
 & \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{k=1}^N$ はそれぞれの菱形孔および菱形介在物となるべき仮想境界について総和をとることを意味している. また, \int_{L_k} は k 番目の菱形孔(無限板 M のとき)または菱形介在物(無限板 I のとき)となる境界上において体積力を積分することを意味する. 右辺の $\sigma_{nM}^\infty(s_i), \tau_{nIM}^\infty(s_i)$ 等は無限板 M (または無限板 I) の i 番目の菱形孔(または菱形介在物)となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である(母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限板 I にも遠方荷重を作用させる). また, $h_{nn}^{F_{\theta M}^{nm}}(r_k, s_i)$ 等は無限板 M (または無限板 I) の k 番目の菱形孔(または菱形介在物)の仮想境界上の点 r_k に r 方向または θ 方向の単位強さの集中力(対称形および逆対称形)が作用するとき, i 番目の菱形孔(または菱形介在物)となる仮想境界上の任意の選点 s_i に生じる応力および変位である. また, 式 (2), (3) の離散化数値解析のため, 各菱形孔または菱形介在物となるべき境界 AB 等を四つの基本区間に分け, 各基本区間に分布させる体積力を以下に示すように基本密度関数 r_k^{A-1} (角部に対して対称な分布密度), r_k^{B-1} (角部に対して逆対称な分布密度) と重み関数 $W_{\theta M,k}^I \sim W_{r M,k}^{II}$ 等で近似する. 以下では角部 A 近傍の離散化を例として説明する ($r_{A,k}$ は角部 A からの距離である).

$$\begin{aligned}
 F_{\theta AM,k}(r_{A,k}) &= F_{\theta AM,k}^I(r_{A,k}) + F_{\theta AM,k}^{II}(r_{A,k}) = W_{\theta AM,k}^I(r_{A,k}) r_{A,k}^{A-1} + W_{\theta AM,k}^{II}(r_{A,k}) r_{A,k}^{B-1} \\
 F_{r AM,k}(r_{A,k}) &= F_{r AM,k}^I(r_{A,k}) + F_{r AM,k}^{II}(r_{A,k}) = W_{r AM,k}^I(r_{A,k}) r_{A,k}^{A-1} + W_{r AM,k}^{II}(r_{A,k}) r_{A,k}^{B-1} \\
 F_{\theta AI,k}(r_{A,k}) &= F_{\theta AI,k}^I(r_{A,k}) + F_{\theta AI,k}^{II}(r_{A,k}) = W_{\theta AI,k}^I(r_{A,k}) r_{A,k}^{A-1} + W_{\theta AI,k}^{II}(r_{A,k}) r_{A,k}^{B-1}
 \end{aligned}$$

$$F_{rAI,k}(r_{A,k}) = F_{rAI,k}^I(r_{A,k}) + F_{rAI,k}^{II}(r_{A,k}) = W_{rAI,k}^I(r_{A,k})r_{A,k}^{\lambda_1-1} + W_{rAI,k}^{II}(r_{A,k})r_{A,k}^{\lambda_2-1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} W_{\theta AM,k}^I(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M a_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, & W_{r AM,k}^I(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M b_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, & W_{\theta AM,k}^{II}(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M c_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, \\ W_{r AM,k}^{II}(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M d_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, & W_{\theta AI,k}^I(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M C_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, & W_{r AI,k}^I(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M f_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, \\ W_{\theta AI,k}^{II}(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M g_{n,k} r_{A,k}^{n-1}, & W_{r AI,k}^{II}(r_{A,k}) &= \sum_{n=1}^M h_{n,k} r_{A,k}^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 λ_1, λ_2 は、幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根である⁽¹⁾⁽⁹⁾、式(4)に含まれる基本密度関数 $r_{A,k}^{\lambda_1-1}, r_{A,k}^{\lambda_2-1}$ は角部先端近傍について体積力密度の分布を精度よく表現するため、式(5)の離散化手法により良好な収束性が得られる。また、角部B等に分布させる体積力も同様の手法によって離散化を行う。以上のような離散化手法により、境界上に適当に選んだ点での境界条件から式(5)の係数 $a_{n,k} \sim h_{n,k}$ を決定すれば、特異積分方程式(2)、(3)の解が得られる。そして、介在物の角部に関して定義された応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1,k}, K_{II,\lambda_2,k}$ は角部先端での重み関数の値 $W_{\theta,k}^I(0), W_{\theta,k}^{II}(0), W_{r,k}^I(0), W_{r,k}^{II}(0)$ から求められる。

3. 解析結果および考察

図1に示す無限板中の1列菱形介在物角部の干渉問題において、角部A等の角度 θ_A 、角部B等の角度 θ_B 、寸法比 l_1/d 、または l_2/d 、介在物の剛性比 G_2/G_1 さらに個数 N を系統的に変えて角部の応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1,k}, K_{II,\lambda_2,k}$ の解析を行った。まず、このような角部

の干渉問題における本法の解析精度について検討を行う。角部先端の応力拡大係数は、 $K_{I,\lambda_1,k}$ については $W_{\theta,k}^I(0), W_{r,k}^I(0)$ より、 $K_{II,\lambda_2,k}$ については $W_{\theta,k}^{II}(0), W_{r,k}^{II}(0)$ からそれぞれ求められる。 θ 方向と r 方向の重みより求められる $K_{I,\lambda_1,k}, K_{II,\lambda_2,k}$ の値は、数値解析の誤差を除けばそれぞれ一致する。例として、表1は $N=4, \nu_1=\nu_2=0.3, \theta_A=60^\circ, l_2/d=1/2, G_2/G_1=10^{-1}$ の条件で、 $\sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty=\sigma^\infty, \tau_{xy}^\infty=0$ の向軸引張荷重(平面ひずみ)の場合の最外側菱形介在物の角部Aについて、式(6)を用いて得られる $F_{I,\lambda_1,k}, F_{II,\lambda_2,k}$ の収束状況を示している。また、表2は $N=4, \nu_1=\nu_2=0.3, \theta_A=60^\circ, l_2/d=1/2, G_2/G_1=10^{-1}$ の条件で、 $\sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty=0, \tau_{xy}^\infty=\tau^\infty$ のせん断荷重(平面ひずみ)の場合の最内側菱形介在物の角部Cについて、式(7)を用いて得られる $F_{I,\lambda_1,k}, F_{II,\lambda_2,k}$ の収束状況を示している。

$$\left. \begin{aligned} F_{I,\lambda_1,k} &= K_{I,\lambda_1,k} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_1}, \\ F_{II,\lambda_2,k} &= K_{II,\lambda_2,k} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{I,\lambda_1,k} &= K_{I,\lambda_1,k} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_1}, \\ F_{II,\lambda_2,k} &= K_{II,\lambda_2,k} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

なお、表1、2で M は角部A等の先端近傍の選点数であり、総選点数は $4MN$ 、未知関数を決定する連立方程式の元数は $16MN$ である。表1、2の結果は良好な収束性を示している。また、他の位置の菱形介在物に関しても良好な収束性を示した。さらに、表1、2に示す以外の荷重条件、個数、剛性比、形状でも検討した結

Table 1 Convergency of $F_{I,\lambda_1,k}$ and $F_{II,\lambda_2,k}$ at the corner A ($N=4, \nu_1=\nu_2=0.3, \theta_A=60^\circ, l_2/d=1/2, G_2/G_1=10^{-1}, \sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty=\sigma^\infty, \tau_{xy}^\infty=0$, Plane strain state in Fig. 1)

M	$F_{I,\lambda_1,k} (\lambda_1=0.6900333)$		$F_{II,\lambda_2,k} (\lambda_2=0.7940938)$	
	from $W_{\theta,k}^I(0)$	from $W_{r,k}^I(0)$	from $W_{\theta,k}^{II}(0)$	from $W_{r,k}^{II}(0)$
4	0.61869	0.61850	0.01887	0.01887
6	0.61904	0.61891	0.01890	0.01890
8	0.61915	0.61907	0.01891	0.01891
10	0.61919	0.61913	0.01892	0.01892
12	0.61918	0.61915	0.01892	0.01892

Table 2 Convergency of $F_{I,\lambda_1,k}$ and $F_{II,\lambda_2,k}$ at the corner C ($N=4, \nu_1=\nu_2=0.3, \theta_A=60^\circ, l_2/d=1/2, G_2/G_1=10^{-1}, \sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty=0, \tau_{xy}^\infty=\tau^\infty$, Plane strain state in Fig. 1)

M	$F_{I,\lambda_1,k} (\lambda_1=0.6900333)$		$F_{II,\lambda_2,k} (\lambda_2=0.7940938)$	
	from $W_{\theta,k}^I(0)$	from $W_{r,k}^I(0)$	from $W_{\theta,k}^{II}(0)$	from $W_{r,k}^{II}(0)$
4	0.00377	0.00378	1.58761	1.58762
6	0.00376	0.00377	1.58789	1.58789
8	0.00376	0.00377	1.58798	1.58798
10	0.00376	0.00377	1.58801	1.58801
12	0.00377	0.00377	1.58806	1.58806

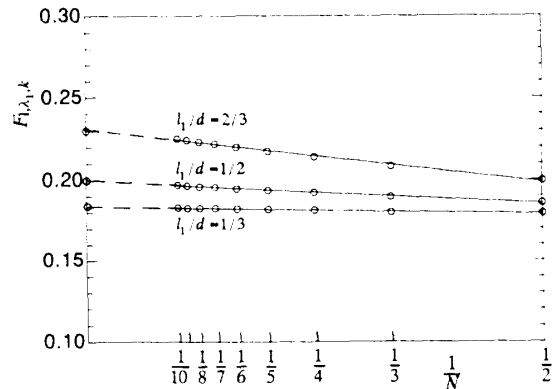


Fig. 2 $F_{I,\lambda_1,k} - 1/N$ relations ($\theta_B=30^\circ, G_2/G_1=10^2, \sigma_y^\infty=\sigma^\infty, \sigma_x^\infty=\tau_{xy}^\infty=0$, Plane strain state $\nu_1=\nu_2=0.3$)

Table 3 $F_{IA,\infty}$, $F_{IIA,\infty}$ and $F_{IC,\infty}$ ($F_{IIC,\infty}$) for a row of diamond shaped inclusions (Number of inclusions; $N \rightarrow \infty$) at the corner A and C under various loading conditions (Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)
 $F_{IA,\infty} = F_{I,\lambda,k}$ at the corner A when $N \rightarrow \infty$

(a) Uniaxial tension

$\frac{G_2}{G_1}$ $\frac{b_1}{l_2/d}$	$F_{IA,\infty} (F_{IA,\infty} / F_{I,\lambda,1} l_2/d = 0)$						$F_{IIA,\infty}$						$F_{IC,\infty} (F_{IC,\infty} / F_{I,\lambda,1} l_2/d = 0)$					
	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5
	0	1.042	0.909	0.747	-0.160	-0.174	-0.177	0.000	0.000	0.000	---	---	0.000	1.042	0.909	0.747	-0.160	-0.174

(b) Biaxial tension

$\frac{G_2}{G_1}$ $\frac{b_1}{l_2/d}$	$F_{IA,\infty} (F_{IA,\infty} / F_{I,\lambda,1} l_2/d = 0)$						$F_{IIA,\infty}$						$F_{IC,\infty} (F_{IC,\infty} / F_{I,\lambda,1} l_2/d = 0)$					
	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5
	0	1.014	0.889	0.749	0.214	0.244	0.251	0.000	0.000	0.000	---	---	0.000	1.014	0.889	0.749	0.214	0.244

(c) In-plane shear

$\frac{G_2}{G_1}$ $\frac{b_1}{l_2/d}$	$F_{IA,\infty}$						$F_{IIA,\infty} (F_{IIA,\infty} / F_{II,\lambda,2} l_2/d = 0)$						$F_{IIC,\infty} (F_{IIC,\infty} / F_{II,\lambda,2} l_2/d = 0)$					
	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5
	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.154	1.126	1.026	---	---	-0.584	1.154	1.126	1.026	---	---

Table 4 $F_{IB,\infty}$ ($F_{IB,\infty}$), $F_{IB',\infty}$ ($F_{IB',\infty}$) and $F_{ID,\infty}$ ($F_{ID,\infty}$) for a row of diamond shaped inclusions (Number of inclusions; $N \rightarrow \infty$) at the corner B, B' and D under various loading conditions (Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)
 $F_{IB,\infty} = F_{I,\lambda_1,k}$ at the corner B when $N \rightarrow \infty$

$\frac{G_2}{G_1} \frac{G_1}{h/d}$		$F_{IB,\infty} (F_{IB,\infty} / F_{I,\lambda_1} l/d=0)$						$F_{IB',\infty} (F_{IB',\infty} / F_{I,\lambda_1} l/d=0)$						$F_{ID,\infty} (F_{ID,\infty} / F_{I,\lambda_1} l/d=0)$					
		10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^1	10^2	10^5
		0	$1/3$	$1/2$	$2/3$	0	$1/3$	$1/2$	$2/3$	0	$1/3$	$1/2$	$2/3$	0	$1/3$	$1/2$	$2/3$		
(a) Uniaxial tension																			
(b) Biaxial tension																			
(c) In-plane shear																			

果、本解析法では $M=12$ 程度で θ 方向と r 方向の重みから得られた $F_{I,\lambda_1,k}, F_{II,\lambda_2,k}$ の値が有効数字4けた程度まで一致し収束しており、良好な収束性を示すことが確認された。

図2は $\theta_B=30^\circ, G_2/G_1=100$ での一軸引張荷重 (y 方向)において、介在物の個数 N と寸法比 l_1/d を系統的に変化させたときの角部Dに生じる応力拡大係数の値 $F_{I,\lambda_1,k}$ の値と個数 N との関係を示したものである。他の場合についても検討した結果、いずれの場合も図2のように、 $F_{I,\lambda_1,k}$ および $F_{II,\lambda_2,k}$ と $1/N$ との間には直線関係があることが確認された。このような関係はき裂⁽¹¹⁾ および菱形孔列⁽⁹⁾ の場合とまったく同じである**1。

表3, 4は図2で確認された $F_{I,\lambda_1,k}$ (または $F_{II,\lambda_2,k}$) と $1/N$ の直線関係を用いて外挿して求めた $N \rightarrow \infty$ の $F_{I,\lambda_1,k}$ (または $F_{II,\lambda_2,k}$) の値をまとめたものである。また、()の値は菱形介在物が単独で存在する場合の応力拡大係数の値との比を示している。ただし、表3では $\theta_A \leq 90^\circ$ のとき、最外側の介在物の角部Aおよび最内側の介在物の角部Cについて得られた一軸引張荷重 (x 方向)、両軸引張荷重およびせん断荷重での値をまとめた(図1参照)。また、表4では $\theta_B \leq 90^\circ$ のとき、

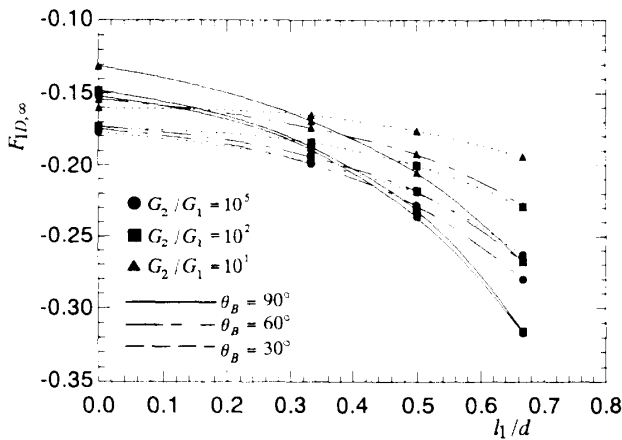


Fig. 3 Interaction of $F_{II,D,\infty}$ for a row of diamond shaped inclusions at the corner D under uniaxial tension ($N \rightarrow \infty, G_2/G_1 > 1$, Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)

最外側の介在物の角部 B, B' および最内側の介在物の角部 D について得られた一軸引張り (y 方向)、両軸引張りおよびせん断荷重での値をまとめた(図1参照)。一方、図3, 4は表3, 4において干渉効果が大きく現れている $\theta_B \leq 90^\circ, y$ 方向一軸引張り ($G_2/G_1 > 1$) と面内せん断 ($G_2/G_1 < 1$) の角部 D での応力拡大係数の値を横軸に l_1/d をとって図示したものである。これらの表、図から特に角部の応力拡大係数の干渉効果が大きく現れているのは一軸引張り (y 方向)で $\theta_B=90^\circ, l_1/d=2/3, G_2/G_1 \geq 10$ のときであり、角部 D で応力拡大係数が約2倍になっている(ただし応力拡大係数の値そのものは小さい)。また、面内せん断で $\theta_B=90^\circ, l_1/d=2/3, G_2/G_1 \leq 10^{-1}$ のときの角部 D でも8割程度の干渉効果が現れている(このときは応力拡大係数の値も大きい)。一般に角部の角度が大きい場合 ($\theta_A, \theta_B=90^\circ$) が小さい場合 ($\theta_A, \theta_B=30^\circ, 60^\circ$) に比べて干渉効果が大きくなる場合が多いようである(ただし例外もある)。全般に前報⁽⁹⁾ で報告した2個の菱形介在物の結果と比べて、いずれの場合にも干渉効果が大きく現れている。

図5は $\theta_B=30^\circ, l_1/d=2/3, G_2/G_1=10$ での両軸引張荷重において、おのおのの菱形介在物角部 B, B' お

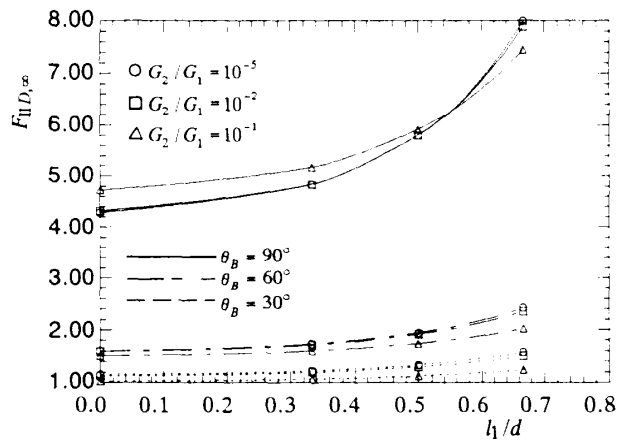


Fig. 4 Interaction of $F_{II,D,\infty}$ for a row of diamond shaped inclusions at the corner D under in plane shear ($N \rightarrow \infty, G_2/G_1 < 1$, Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)

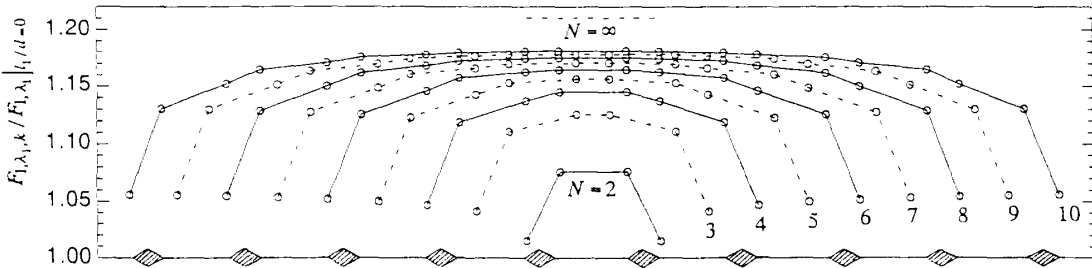


Fig. 5 $F_{I,\lambda_1,k}/F_{I,\lambda_1,k}|_{l_1/d=0}$ for each diamond shaped inclusions ($\theta_B=30^\circ, l_1/d=2/3, G_2/G_1=10^1, \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty, \tau_{xy}^\infty = 0$, Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)

**1 体積力法の考え方によれば、き裂や孔および介在物の問題は均一な板に分布すべき体積力として置き換えられる。このとき体積力の拡散特性よりこのような関係が説明できる⁽¹¹⁾。

よびD等に生じる応力拡大係数の値 $F_{I,\lambda_1,k}$ をそれぞれ示した図である。ここで、図5の縦軸は $F_{I,\lambda_1}|_{l_1/d=0}$ との比をとっている。ただし、 $F_{I,\lambda_1}|_{l_1/d=0}$ の値は菱形介在物が単独で存在する場合の応力拡大係数の値に相当している。これより図5の場合は個数に関係なく応力拡大係数の最大値が最内側菱形介在物で生じ、最小値が最外側菱形介在物で生じることがわかる。また、他のすべての場合で検討した結果、いずれの場合も応力拡大係数の最大値は①最内側菱形介在物で生じ、外側にいくほど減少する場合、②最外側菱形介在物で生じ、内側にいくほど減少する場合のいずれか一方であることがわかった。そして、表3, 4で最大応力拡大係数を太枠で囲んで示した。これより、 $\theta_A \leq 90^\circ$ (表3)では、(a)一軸引張荷重(x 方向)では $G_2/G_1 < 1$ で最外側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最内側菱形介在物に、(b)両軸引張荷重では剛性比に関係なく最外側菱形介在物に、(c)せん断荷重では $G_2/G_1 < 1$ で最内側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最外側菱形介在物にそれぞれ応力拡大係数の最大値が生じることがわかる。また、 $\theta_B \leq 90^\circ$ (表4)では、(a)一軸引張荷重(y 方向)および(b)両軸引張荷重では剛性比に関係なく最内側菱形介在物に、(c)せん断荷重では $G_2/G_1 < 1$ で最内側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最外側菱形介在物にそれぞれ応力拡大係数の最大値が生じることがわかる。ただし、最大値は引張荷重では $F_{I,\lambda_1,k}$ の値であり、せん断荷重では $F_{II,\lambda_2,k}$ の値である。

4. 結 言

本研究では、体積方法の特異積分方程式を利用して図1に示すような無限板中に存在する任意個の一列菱形介在物の応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1,k}$, $K_{II,\lambda_2,k}$ の干渉効果を、介在物の個数、剛性比、距離を系統的に変化させ厳密に解析した。得られた結果をまとめると以下のようになる。

(1) 特異積分方程式の数値解析には、未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を用いた。その結果、介在物の個数 N 、寸法比、剛性比が変化しても角部先端近傍の選点数 $M = 12$ 程度で有効数字4けた程度収束した結果が得られ、解法の有効性が確認された(表1, 2)。

(2) 任意個の一列菱形孔の場合と同様に任意個の一列菱形介在物の場合も $F_{I,\lambda_1,k}$ または $F_{II,\lambda_2,k}$ と $1/N$ との間には直線関係があることが認められ、この関係により $N \rightarrow \infty$ における $F_{I,\lambda_1,k}$, $F_{II,\lambda_2,k}$ の極限値を推定して示した(表3, 4)。

(3) 介在物の寸法比 $l_1/d \leq 2/3$, $l_2/d \leq 2/3$ の範囲で、遠方での荷重条件として(a)一軸引張り、(b)両軸引張り、(c)面内せん断の3種類について干渉効果を考察した(表3, 4)。その結果、干渉効果が大きく現れたのは一軸引張荷重(y 方向)、 $\theta_B = 90^\circ$, $l_1/d = 2/3$, $G_2/G_1 \geq 10$ のときの最内側菱形介在物の角部D(10割程度)と、せん断荷重、 $\theta_B = 90^\circ$, $l_1/d = 2/3$, $G_2/G_1 \leq 10^{-1}$ のときの角部D(8割程度)であった。

(4) $\theta_A \leq 90^\circ$ の任意個の一列菱形介在物において(a)一軸引張荷重(x 方向)では $G_2/G_1 < 1$ で最外側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最内側菱形介在物に、(b)両軸引張荷重では剛性比に関係なく最外側菱形介在物に、(c)せん断荷重では $G_2/G_1 < 1$ で最内側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最外側菱形介在物にそれぞれ応力拡大係数の最大値が生じる。

(5) $\theta_B \leq 90^\circ$ の任意個の一列菱形介在物において(a)一軸引張荷重(y 方向)および(b)両軸引張荷重では剛性比に関係なく最内側菱形介在物に、(c)せん断荷重では $G_2/G_1 < 1$ で最内側菱形介在物に、 $G_2/G_1 > 1$ で最外側菱形介在物にそれぞれ応力拡大係数の最大値が生じる。

文 献

- (1) 陳飛珩・西谷弘信、接合異材の角部近傍での応力場、機論、57-534, A(1991), 366-372.
- (2) Theocaris, P. S., The Order of Singularity at a Multi-Wedge Corner of a Composite Plate, *Int. J. Eng. Sci.*, 12 (1969), 107-120.
- (3) 陳飛珩・西谷弘信、介在物の角部における特異応力場の数値解析、機論、57-542, A(1991), 2504-2508.
- (4) 服部敏雄・坂田荘司・初田俊雄・村上元、応力特異場パラメータを用いた接着界面強度評価、機論、54-499, A(1988), 597-603.
- (5) 西谷弘信・陳飛珩・柴戸明、面外せん断による菱形介在物角部の特異応力場、機論、59-561, A(1993), 1191-1195.
- (6) Chen, D. H. and Nisitani, H., Singular Stress Field Near the Corner of Jointed Dissimilar Materials, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 60(1993), 607-613.
- (7) Chen, D. H. and Nisitani, H. (Fujitani, Y., ほか2名編), *Singular Stress Field at Inclusion Corner, Modelling, Computation and Analysis in Fracture Mechanics*, (1994), 93-113, Kinokuniya.
- (8) 野田高昭・小田和広・井上隆行、角部の応力拡大係数の干渉効果の解析、機論、61-589, A(1995), 2052-2059.
- (9) 野田高昭・川島裕二・小田和広、特異積分方程式による菱形介在物の干渉効果の解析、機論、62-598, A(1996), 1456-1463.
- (10) 野田高昭・小田和広・樋口健・田中篤、体積方法の特異積分方程式の数値解析による界面き裂および角部の応力拡大係数の解析、機論、60-578, A(1994), 2213-2219.
- (11) 石田誠・井田秀信、種々の荷重を受ける共線き裂群および平行き裂群、機論、59-561, A(1993), 1262-1269.