

体積力法による三次元表面き裂の位置・形状の同定*

陳 玳 珩*¹, 野田尚昭*², 小田和広*³Determination of Location and Shape of 3-D Mode I Surface
Crack by Body Force Method

Dai-Heng CHEN, Nao-Aki NODA and Kazuhiro ODA

In this study, the location and the size of the three-dimensional semi-elliptical surface crack in a semi-infinite body, and the loading stress at infinity are determined on the basis of the data of strains measured around the region of the crack. In searching for the location and the size of the surface crack, the method of gradient search is employed which minimizes the sum of the squares of the residuals between the measured strain distributions and the computed ones for the assumed crack location and size. The body force method is used to calculate the strain field around the crack. In order to obtain the solution with short CPU time, the crack is represented by several concentrated force doublets; moreover, the database of the magnitudes of force doublets for various aspect ratios of the crack is utilized. Based on the fact that the strain field around the surface crack is mainly dominated by the crack area, the crack area and the aspect ratio are chosen as parameters and several inversion schemes are examined to obtain accurate results. Numerical simulations are carried out and the results show that the location and the shape of the crack are determined efficiently and with good accuracy.

Key Words: Inverse Problem, Nondestructive Inspection, Body Force Method, Surface Crack, Semi-Infinite Body, Database

1. 緒 言

物体表面より得られる測定データを補助情報として用い、計算力学的手法を援用して定量的に欠陥を同定する手法が、新しい非破壊検査法の開発につながるものとして、最近とくに注目されている⁽¹⁾。

著者らは、このような逆問題解析法のひとつとして、き裂周囲の数点で測定したひずみ情報に基づいて、二次元弾性体中に存在するき裂の位置・寸法および外部荷重を同定する問題を取扱い、解析の精度と効率の向上のための種々の検討を行ってきた^{(2)~(4)}。本研究では、これまでに提案した二次元き裂逆問題の解析手法を三次元問題に拡張し、実用上重要なモード I 形表面き裂の同定問題の解析を行う。

三次元き裂逆問題では、二次元の場合と比較し推定すべき未知数が増加するため、精度の良い同定結果を得ることが難しく、また計算量が膨大となるなどの問題をかかえており、現場での簡便性、迅速性という面

で不十分であることが指摘されている⁽⁵⁾。このような三次元表面き裂の同定を効率的に行うために、二次元近似解析を用いる方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾が提案されているが、き裂形状の詳細な同定を行うにはき裂の三次元性を考慮した解析を行うことが望ましい。三次元解析を行った手法としては、有限要素法⁽¹²⁾や境界要素法に基づく手法が提案されており、久保らは三次元解析の前処理として二次元走査解析を行い、き裂の仮定を徐々に細かくしていく階層化法を採用し計算量の軽減を計っている⁽⁸⁾⁽¹³⁾。また、大路ら⁽⁹⁾は、平板表面の電気ポテンシャル分布をデータベースとして参照することにより逆解析の効率化を図っている。しかし、この方法では電気ポテンシャルに対する多量のデータが必要となるという問題が残る。

本研究では、オンラインき裂測定の可能なシステムの開発という目的の達成のために、体積力法の考え方を援用してき裂の探索方法の効率化を行う。体積力法では、き裂の存在によって生じるひずみ場は、物体中に分布させた体積力対で表現される。このことに基づいて、分布させるべき力対の大きさをデータベース化し、それを援用することによって効率的な三次元き裂の逆問題解析が可能であることを示す。また、高精度の探索結果を得るための逆解析手順について考察し、提案

* 平成5年4月1日 第70期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成6年3月24日。

*¹ 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市川津 680-4)。

*² 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

*³ 正員、九州工業大学大学院。

する手法を用いて半だ円表面き裂の位置・形状を同定する解析を行い、手法の有効性を検討する。

2. 体積力法に基づく効率的逆解析手法

本研究では、三次元き裂逆問題の効率的な解析手法を確立するため、その最も基本となる問題として、図1に示すような半無限体中に存在する半だ円表面き裂の中心位置 (\bar{x}_0, \bar{z}_0) とき裂寸法 (\bar{a}, \bar{b}) の同定問題の解析を行う。補助情報としては、き裂を囲む閉曲線上の $4 \times M$ 個の点 P_k において測定された、ある未知の荷重 $\bar{\sigma}^\infty$ のもとでのひずみ $\bar{\epsilon}_{zz}(P_k)$ ($k=1, \dots, 4M$) を用いる。このとき、構造物に作用している外部荷重 $\bar{\sigma}^\infty$ は、荷重軸の方向は既知であるが、その大きさは時間とともに変動しあらかじめ知ることはできないことを考慮して、き裂と同様に未知数として取扱う。

一般に逆問題解析では、順解析の反復計算により解を求める方法が採用される。すなわち、未知数であるき裂の位置・形状および外部荷重を仮定して順解析を行い、数値解析によって得られたひずみ $\epsilon_{zz}(P_k)$ と計測によって得られたひずみ $\bar{\epsilon}_{zz}(P_k)$ との差を次式

$$R = \sum_{k=1}^{4M} \{ \bar{\epsilon}_{zz}(P_k) - \epsilon_{zz}(P_k) \}^2 \dots \dots \dots (1)$$

で評価することとすれば、逆問題の解析は R の値を最小にする未知数の組合せを捜すという問題に帰着される。この方法では、測定値の誤差などの影響を除けば、 R を最小にする五つの未知数の組合せを捜すことは原理的には常に可能である。しかし、そのためには非常に多くの仮定したき裂位置、寸法に対して繰返し計算を実施する必要があり、問題を多くのパラメータで表現するほど組合せ数は爆発的に多くなり、解くことは時間的に不可能となる。したがって、逆問題解析においては、このような組合せ的爆発による問題を克服し、いかにはやく解を見つけ出すかということが重

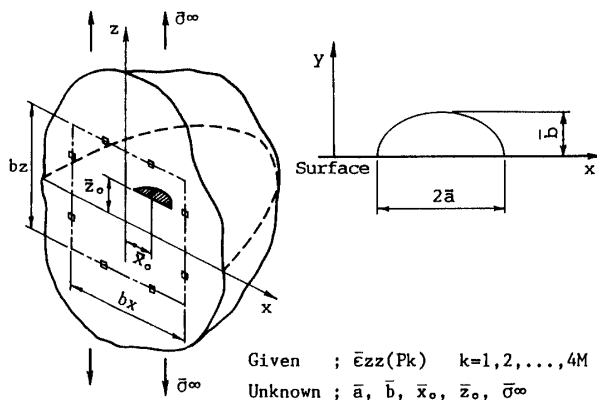


図1 三次元表面き裂同定問題

要な問題となる。そのために、一般にこう配探索法などの最適化手法が適用されている。しかし、本研究で取扱う三次元き裂問題ではこの配探索法をそのまま適用しても計算は膨大なものとなるので、実用上許容できる程度まで計算時間を抑えることが必要である。そのため本研究では、(1)1回の順解析に要する時間の短縮と(2)き裂探索過程の効率化を図るため、体積力法の考えを用いて以下に示すような解析手法を提案する。

2.1 集中力対データベースの援用によるひずみ場の効率的解析
 き裂の探索は、順解析を多数回繰返すため、1回の順解析に要する時間をできるだけ短縮させることは逆問題解析の効率化の上で重要である。そこで本研究では、き裂によるひずみ場を数個の集中力対によって近似し、その集中力対密度のデータベースを援用した効率的な解析手法を提案する。

体積力法では、半無限体中の仮想き裂面上に体積力対を分布させ、問題を体積力対の密度を未知関数とする境界積分方程式を解くことに帰着させる⁽¹⁰⁾。図2(a)にき裂周囲のひずみ場を求める際の体積力法のフローチャートを示す。通常体積力法による解析では、図2(a)の手順(2)~(5)の体積力対の密度を決定するまでの計算時間(特に影響係数などの数値積分による時間)が問題を解くのに必要な時間の大部分を占めている。したがって、この計算をいかに効率よく行うかが計算時間短縮のためのキーポイントとなる。

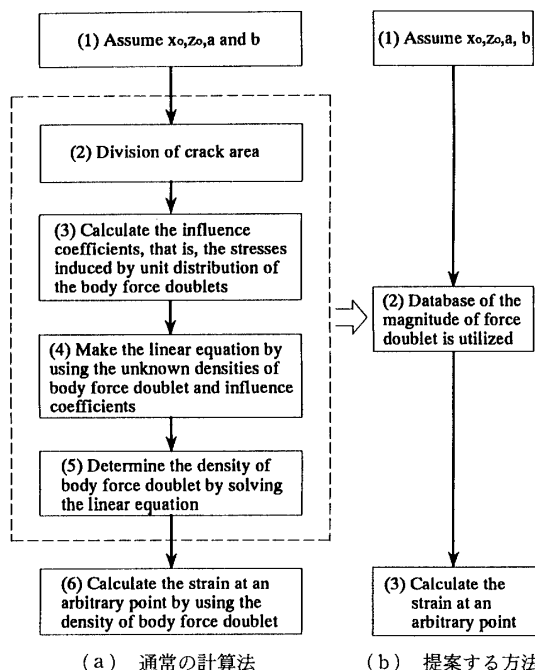


図2 体積力法によるひずみ計算のフローチャート

本研究では、き裂によるひずみ場を求める順解析の際、図3に示すようにき裂によるひずみ場を、き裂のない半無限体中に埋め込まれた9個の集中力対(ジャイアント力対)によって代表させる。すなわち、図4のように、き裂の半だ円を半径1の半円に写像し、それを九つの扇形区間に分割し、適当な強さの集中力対を各分割区間の中点に埋め込むことによりひずみ場を表現する。また、このとき埋め込むべきジャイアント力対の大きさは、通常の体積力法によって得られる体積力対密度を各扇形区間で積分することによってあらかじめ求めておき、それをデータベースとして利用する。本研究で取扱う半無限体中の半だ円表面き裂の問題では、分布させるべきジャイアント力対の大きさは形状比 b/a の関数として表現される。このとき、 b/a に対するジャイアント力対の大きさの変化は滑らかであるため、 $\nu=0.3$ に対する解析結果に最小二乗法を適用し、力対データを b/a の3次式として作成した。また、問題の対称性から図4中①~⑥の六つの区間だけを考えればよいので、ジャイアント力対のデータベースは以下のように簡単な形で表現される。

$$T_n = \frac{4(1-\nu)^2 ab^2 \sigma^\infty}{(1-2\nu)} f_n(b/a) \quad (n=1\sim6) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} f_1(b/a) &= 0.22019 - 0.12487b/a \\ &\quad + 0.02983(b/a)^2 - 0.001684(b/a)^3 \\ f_2(b/a) &= 0.18256 - 0.10171b/a \\ &\quad + 0.02441(b/a)^2 - 0.001484(b/a)^3 \\ f_3(b/a) &= 0.17746 - 0.10037b/a \\ &\quad + 0.02487(b/a)^2 - 0.001631(b/a)^3 \\ f_4(b/a) &= 0.10008 - 0.05068b/a \\ &\quad + 0.00992(b/a)^2 - 0.000102(b/a)^3 \\ f_5(b/a) &= 0.09851 - 0.05223b/a \end{aligned}$$

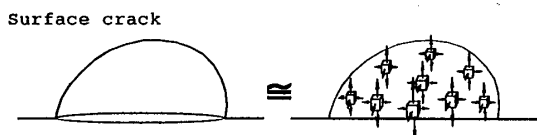


図3 9個のジャイアント力対によるひずみ場の近似

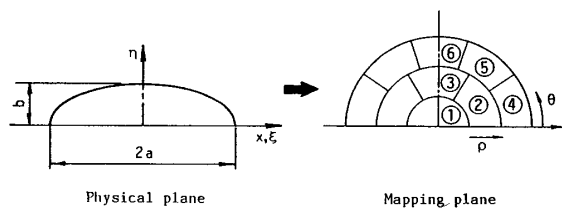


図4 き裂面の写像および分割

$$\begin{aligned} &+ 0.01156(b/a)^2 - 0.000479(b/a)^3 \\ f_6(b/a) &= 0.09932 - 0.05554b/a \\ &+ 0.01411(b/a)^2 - 0.001060(b/a)^3 \\ &\dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここで、添字 n は図4中に示される分割区間に対応する番号を表し、 T_n は区間 n に埋め込むジャイアント力対の大きさである。このようなデータベースの援用により、ひずみ場の計算は次式より容易に実行することができる。

$$\varepsilon_{ij}(P) = \varepsilon_{ij}(P, \infty) \sigma^\infty + \sum_{n=1}^9 \varepsilon_{ij}(P, Q_n) T_n \quad \dots(4)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}(P, \infty)$ は遠方に作用する $\sigma^\infty=1$ の応力によって任意の点 P に生じるひずみであり、 $\varepsilon_{ij}(P, Q_n)$ は大きさ1のジャイアント力対が区間 n の中点 Q_n に作用するときの点 P におけるひずみである。

逆問題においては、同定の対象とする部分(き裂)より離れた位置で得られた測定値などを補助情報として用いることが多い。き裂を数個の力対で近似したことによる誤差は、空間的に急速に減少するので、き裂のすぐ近傍以外でのひずみ場に関しては提案した近似的手法が実用上十分有効である。また、データベースの利用により図2(b)に示すように体積力対密度を決定する計算[図2の手順(2)~(5)]を省略できるため、大幅な計算時間の短縮が可能となる。

2.2 き裂探索過程の効率化

こう配探索法によるき裂探索の問題点は、大きく次の二つがあげられる。

- (1) 探索方法の決定のために、未知数の数だけ数値的に微係数を求める必要があること。
- (2) 局所的な情報により探索が行われるため、真の minimum ではなく Local minimum に陥る可能性があること。

そのために本解析では、二次元問題において提案した次の二つの手法⁽²⁾を応用し、効率的にき裂の探索を

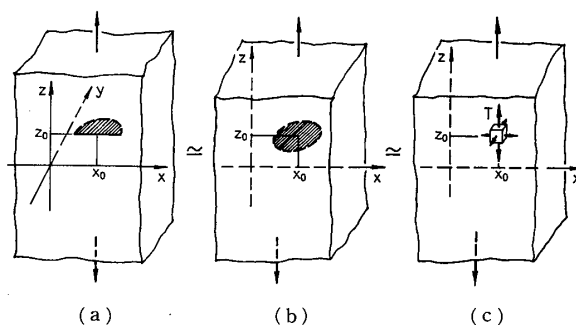


図5 無限体中の1個のジャイアント力対によるひずみ場の近似

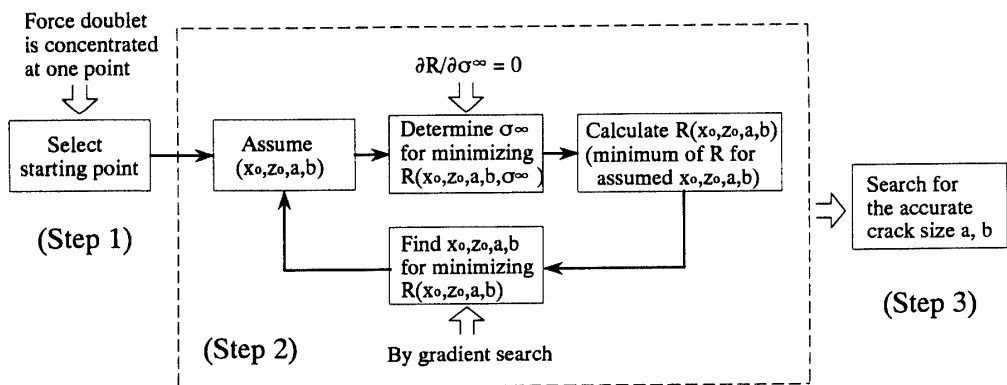


図 6 基本的探索手順

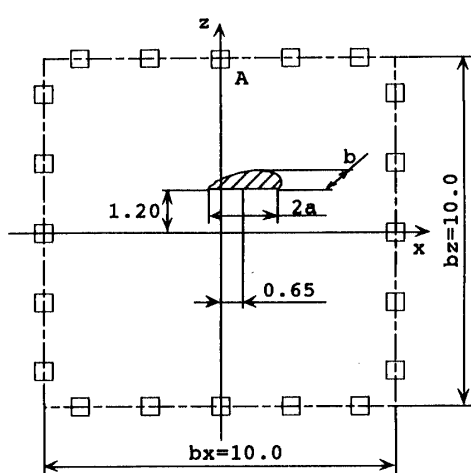


図 7 3章で検討される問題

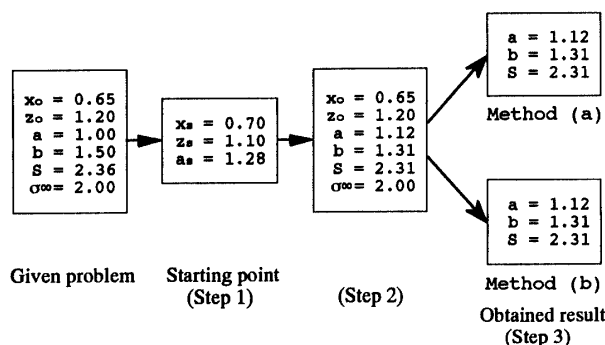


図 8 異なる探索パラメータを用いた場合のこの配探索法による結果の比較

実行する。

(1) 未知数の数を減らすこと 同時に仮定すべきパラメータの数を減らせば、この配探索に要する時間は短縮される。本研究で取扱う問題では、未知数は五つであるが、外部荷重 σ^∞ については、ひずみ場が荷重の線形方程式によって表される⁽²⁾ ことから、 $\partial R/\partial \sigma^\infty = 0$ の条件から直接求める。

(2) この配探索の起点の算定 この配探索法は局所的な手法であるため、Local minimum の問題を回避して、解(真の minimum)を安定的に得るためには、この配探索の初期値を適切に設定することが重要である。本研究では、図 5 に示すことに基いて、無限体中の 1 個のジャイアント力対で仮定したき裂に対するひずみ場を近似し、全探索領域中の何点かの代表点に対して式(1)の評価関数 R の値を計算し、 R が最も小さくなる条件から最も有望そうな探索起点 (x_s, z_s) を選び出す。このとき図 5(c) のひずみ場は、力対の大きさ T の線形関数として表されるので、それぞれの代表点における最適な力対の大きさ T は、外部

荷重 σ^∞ と同様に $\partial R/\partial T = 0$ の条件より求められる。一方、き裂寸法の初期値に関しては、半円き裂からスタートすることとすれば、初期き裂寸法 a_s は、 x_s, z_s における集中力対の大きさ T_s から次式のように計算される。

$$a_s = \sqrt[3]{\frac{3(1-2\nu)T_s}{16(1-\nu)^2\sigma^\infty}} \dots \dots \dots (5)$$

基本的な探索手順は図 6 の Step 2 までに示すように二次元問題からの拡張である。

しかし、この方法をそのまま適用しても解はうまく求まらないことが研究の過程で判明した。これは、この配探索法により表面き裂の探索を行う際(Step 2)、四つの未知数 x_0, z_0, a, b を同時に探そうとすると、き裂寸法 a, b よりもき裂位置 x_0, z_0 のほうが優先して推定され、それからき裂寸法 a, b が R の小さくなる方向に変化していくためである。久保らの行った電気ポテンシャル CT 法による解析においても、表面き裂の探索過程にこのような傾向のあることが指摘されている⁽¹¹⁾。この結果、き裂位置の探索結果に比べ、き裂寸法の探索精度は一般に低下する。そのため三次元問題では、き裂寸法を高精度に求めるための探索手順(Step 3)を新たに導入する必要がある。

3. き裂寸法探索精度向上のための 解析手順

き裂寸法に関するパラメータとしては、き裂寸法 a , b とき裂面積 S , 形状比 b/a の二つの組合せが考えられるので、探索パラメータを変えて解析を行い、その結果について比較した。

最初に、Step 2 で得られたき裂位置・寸法を起点として、き裂位置は固定し、 a, b をパラメータとしてこの配探索を実行した [Method(a)]。解析した問題を図 7 に、その結果を図 8 の Method(a) に示す。Method(a) では a, b の値は Step 2 の段階で得られた値からほとんど変化しなかった。次に、き裂寸法に関するパラメータとしてき裂面積 S と形状比 b/a を用いて同様のこの配探索を行った [Method(b)]。この場合も、図 8 の Method(b) よりわかるように、Step 2 の段階の結果からほとんど変化はなかった。しかし、Method(a), (b) の両結果は、図 8 からわかるように、き裂寸法の探索精度は低くてもき裂面積 S は同定対象と比較して誤差 2% 程度で推定されている。このことは、き裂周囲のひずみ場にとって、き裂面

積が支配的な因子であることを示唆しているものと思われる。そこで、ひずみ場が影響を受けるき裂寸法パラメータについての検討を行った。

3.1 ひずみ場の支配パラメータの考察 き裂寸法・形状がひずみ場に及ぼす影響を考察するために、図 7 に示した問題でき裂に最も近い測定点 A におけるひずみ ε_{zz} の値について検討を行う。図 8 に示した結果から、き裂周囲のひずみ場を主に支配している因子はき裂面積であることが予想される。そこで、き裂面積のひずみ場への影響をみるために、き裂面積に相当するパラメータとしてき裂寸法の積 ab をとり、形状比 $b/a = \text{一定}$ のもとでの ab に対する点 A におけるひずみ ε_{zz} の変化を図 9 に示す。ひずみ ε_{zz} の値は、遠方荷重 σ^∞ を受けるき裂のない物体中の同じ点でのひずみ ε_{zz}^∞ で無次元化した。また、形状比の影響については、 $ab = \text{一定}$ のもとでの b/a に対する ε_{zz} の変化を図 10 に示す。図 9, 10 より、 $b/a \geq 0.5$ では ε_{zz} の値はほぼ一定となっており、 $0.5 \leq b/a \leq 2.0$ の範囲では形状比の変化はひずみ場にあまり影響を与えないことがわかる。き裂より遠い他の測定点ではひずみの値は減衰

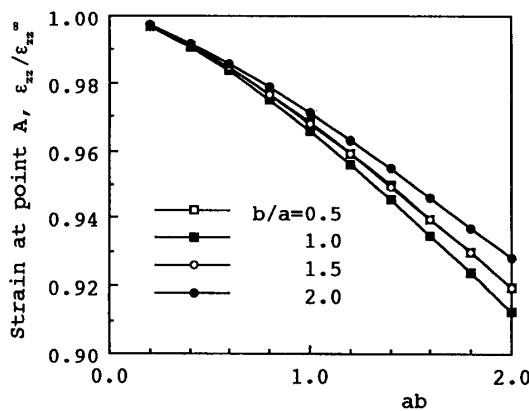


図 9 点 A におけるひずみ(図 7)と ab との関係

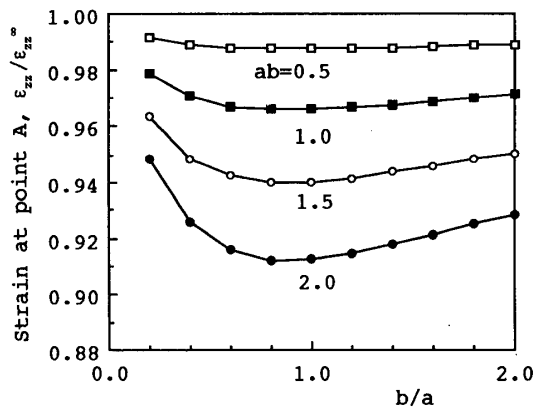
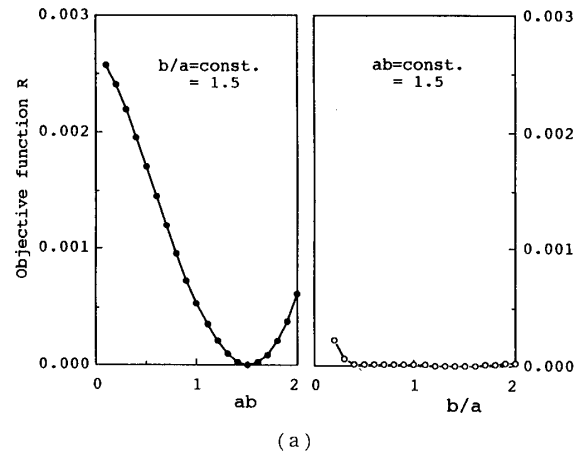
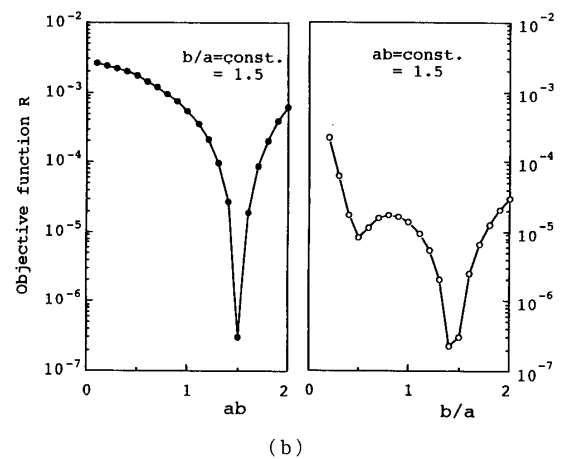


図 10 点 A におけるひずみ(図 7)と b/a との関係



(a)



(b)

図 11 評価関数 R と ab および b/a の関係

するので、形状比の影響はさらに小さくなるものと考えられる。これらのことから、き裂周囲のひずみ場を主に支配するパラメータはき裂面積であることがわかる。一方、形状比の変化はひずみ場の変化として現れにくいため、極端に扁平なき裂でない限り、 b/a が異なっても面積が同じであればひずみ場はほぼ同じになることが図 10 の議論からいえる。

次にパラメータ ab と b/a が評価関数 R に及ぼす影響について検討する。図 11 に、 $b/a = \text{一定} (=1.5)$ 、また $ab = \text{一定} (=1.5)$ のもとで R の値を計算した結果を示す。 $b/a = \text{一定}$ の場合は、 ab の変化に対する R の変化は大きく、 ab の真値 1.5 で最小となる単峰性を示している。しかし、 $ab = \text{一定}$ のもとでは、 R の値は零に近く b/a が変化しても R はほとんど変化しないように見える。 R の変化の様子をもっと詳しくみるために縦軸を $\log R$ にとった図を図 11(b) に示す。 $ab = \text{一定}$ の場合は Local minimum の多い R の分布となっていることがわかる。

以上の考察により、次のような知見が得られた。

(1) き裂周囲のひずみ場にとって、主にき裂位置とき裂面積が支配的な因子である。

(2) 影響の程度の異なるパラメータを同時にこう配探索法によって捜そうとすると、ひずみ場に与える影響の大きいパラメータが優先的に探索されてしまい、影響の小さいパラメータの探索は困難となる。

したがって、図 8 に示した Method (a), (b) での探索が成功しないのは、Method (a) では探索パラメータ選択の不適切に起因しており、Method (b) は、(2) に述べた理由に基づいていることがわかる。

3.2 き裂寸法探索手順 上記の議論をふまえ、本研究では、き裂寸法パラメータとしてき裂面積 S

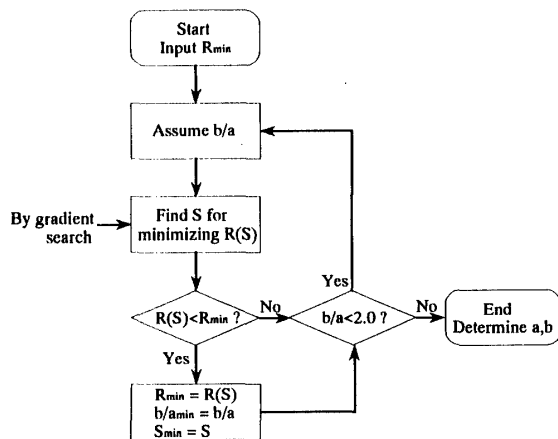


図 12 き裂寸法探索 (Step 3) のフローチャート [Method (c)]

と形状比 b/a を用いた次のような探索法 [Method (c)] を提案する。

き裂寸法の詳細同定のためのフローチャートを図 12 に、その原理を図 13 に示す。まず、 $b/a \leq 2.0$ の範囲のき裂の同定が可能であれば実用上十分であることを考慮して、 b/a を 0.1~2.0 の範囲で、0.1 間隔で仮定する。 $b/a = \text{一定}$ のもとでは、 R の単峰性は確認されている (図 11) ので、その仮定された b/a のもとで R が最小となる面積 S はこう配探索法により簡単に探索できる。それぞれの b/a のもとで計算された R を比較することにより、 R を最も小さくする b/a と S の組合せから、き裂寸法 a, b を決定する。ここで決定されたき裂寸法は、 b/a を 0.1 間隔と少し粗くとっているため、さらに精度よく求めるために、先に探索された $b/a \pm 0.1$ の範囲を 0.01 間隔で再度同様の探索を行い、き裂寸法を決定する。図 7 に示す問題を、提案する方法 [Method (c)] によって解析した結果を図 14 に示す。図 8 の Method (a), (b) の結果との比較から、提案した探索手法の有効性が確認される。

4. 解析結果

図 1 に示したき裂同定問題について解析を行い、得られた結果を以下に示す。解析には、ワークステーション SUN ELC 4/25 FM-8 を用いた。

表 1 に、き裂位置 $(\bar{x}_0, \bar{z}_0) = (0, 0)$ 、き裂半長 $\bar{a} = 1.0$ 、外部荷重 $\bar{\sigma} = 1.0$ の場合に、き裂深さ \bar{b} を種々

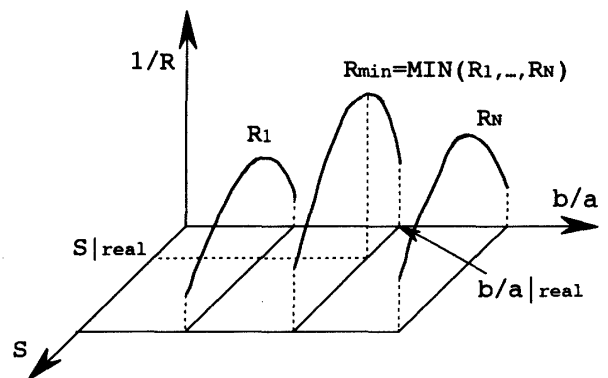


図 13 R の最小値の探索原理

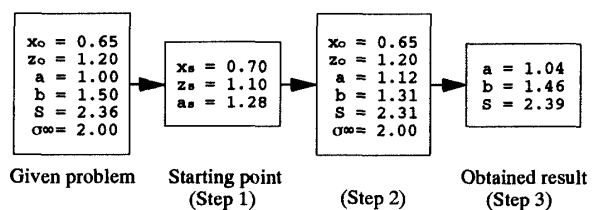
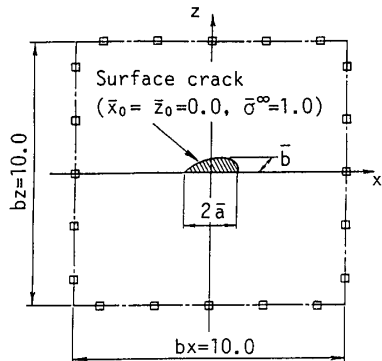


図 14 Method (c) による探索結果

表 1 き裂深さ b を変化させた場合の探索結果



Given problem		Obtained result				
\bar{a}	\bar{b}	a	b	x_0	z_0	σ^∞
1.000	0.200	1.019	0.204	0.004	-0.000	1.00
1.000	0.400	1.020	0.408	-0.000	0.000	1.00
1.000	0.600	1.017	0.610	0.000	0.000	1.00
1.000	0.800	1.014	0.811	0.000	0.000	1.00
1.000	1.000	1.022	1.002	0.000	0.000	1.00
1.000	1.200	1.023	1.197	0.000	0.000	1.00
1.000	1.400	1.025	1.394	0.000	0.000	1.00
1.000	1.600	1.026	1.590	0.000	0.000	1.00
1.000	1.800	1.026	1.785	0.000	0.000	1.00
1.000	2.000	1.030	1.957	0.000	0.000	1.00

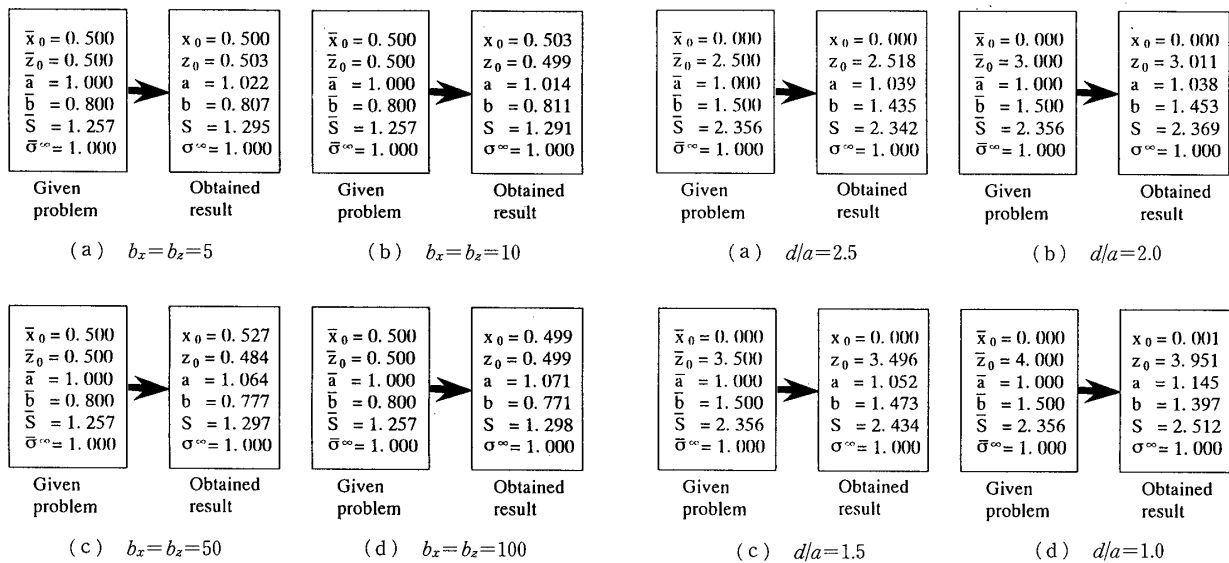


図 15 ひずみ測定領域を変化させた場合の探索結果 ($M=5$)

図 16 き裂の位置が測定点に近づく場合の探索結果 ($b_x=b_z=10, M=8$)

に変化させ逆解析を行った結果を示す。ひずみの測定点は $b_x=10.0, b_z=10.0, M=5$ (記号は図1)と適当に設定し、ひずみの測定値としては、通常の体積力法の予備解析によって得られた値を用いた。同定対象と探索結果との比較から、本研究で提案した解析手法によって、き裂の位置 x_0, z_0 , き裂寸法 a, b および外部荷重 σ^∞ の値が、少ない計算時間(この例では、計算時間は1分程度である)で、 $b/a \leq 2.0$ の全範囲にわたって精度良く同定できることがわかる。

き裂によるひずみ場の変化という情報は、測定点がき裂より離れるか、き裂が小さくなるに従って急速に減少するため、高精度の解析結果を得ることは困難となる。そこで、ひずみの測定領域(図1でき裂を囲む閉曲線の大きさ)と検出可能なき裂の大きさの関係について検討した。図15にその例を示す。図15よりわかるように、測定領域に対しき裂寸法が $a/b_x \geq 1/100$ の

範囲であれば、本研究で提案した手法が有効である。

また、本研究では、本来連続的に分布させるべき体積力対を有限個の力対で置き換えて計算を行うため、測定点近くに存在するき裂に対しては探索精度が落ちる。き裂が測定点に近づくときの探索精度の変化を図16に示す。ここで d はき裂と測定点との距離である。図16の解析例では、き裂の位置と測定点との距離がき裂半長 a 以上離れていれば、本手法による解析は有効であることがわかる。

5. 結 言

ひずみ情報に基づく半無限体中の三次元半だ円表面き裂の位置・形状同定問題の解析を行い、得られた知見を以下に示す。

- (1) これまで二次元問題において提案した体積力法の考えに基づいたき裂探索の効率化の手法を三次元

問題に拡張した。また、ひずみ場の順解析の際、き裂を有限個の集中力対で代表させ、その力対の大きさをデータベースとして援用することで、き裂によるひずみ場的高速計算を可能とした。

(2) き裂位置に比べき裂寸法は求まりにくいいため、き裂寸法を詳細に同定する手順を導入した。き裂寸法 a, b を未知パラメータとしてこう配探索を行う方法 [Method(a)], き裂寸法 a, b の代わりにき裂面積 S , 形状比 b/a を用いる方法 [Method(b)] および本研究で提案する方法 [Method(c)] の3種類の探索スキームによる結果を比較検討することにより、き裂寸法を高精度に推定することに成功した。このことから、適切な逆問題解を得るためには、未知パラメータの選択に注意する必要があるだけでなく、そのパラメータのひずみ場への影響をも考慮した探索手法が必要となることが明らかとなった。

(3) 本研究で提案した手法により、き裂の位置 x_0, z_0 , き裂寸法 a, b および外部荷重 σ^∞ の値が、 b/a

≤ 2.0 の全範囲にわたって少ない計算時間(ワークステーション SUN ELC 4/25 FM-8 で1分程度)で、精度良く同定できることを示した。また、ひずみの測定領域に対しき裂の大きさが $a/b_x \geq 1/100$ であり、き裂の位置が測定点よりき裂半長 a 以上離れていれば、本解析法が有効であることがわかった。

文 献

- (1) 田中, 機械の研究, 43-6(1991), 648; 43-7(1991), 751.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 274.
- (3) 陳・西谷・才本, 機論, 57-540, A(1991), 1706.
- (4) 陳・野田・小田, 機論, 57-544, A(1991), 2891.
- (5) 例えば, 望月・矢川・吉村, 機論, 57-540, A(1991), 1922.
- (6) 三好・中野, 機論, 52-476, A(1986), 1097.
- (7) 坂・嘉納・阿部, 非破壊検査, 38-10(1989), 909.
- (8) 久保・ほか4名, 機論, 54-498, A(1988), 218.
- (9) 大路・ほか3名, 機論, 57-541, A(1991), 2078.
- (10) 西谷・陳, 体積法, (1987), 第3章, 培風館.
- (11) 久保・大路・中塚, 機構論, No. 900-86, (1990-11), 667.
- (12) 林・ほか4名, 材料, 37-419, (1988), 964.
- (13) 阪上・ほか4名, 機論, 56-521, A(1990), 27.