

角部の応力拡大係数の干渉効果の解析*

野田尚昭*¹, 小田和広*², 井上隆行*³Analysis of Stress Intensity Factors in the Interaction
of Angular Corners under Various Loads

Nao-Aki NODA, Kazuhiro ODA and Takayuki INO-UE

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in interaction problems of diamond-shaped holes with angular corners under various loading conditions. The problems are formulated as a system of singular integral equations on the basis of the body force method. In order to analyse the problems accurately, the unknown functions of the body force densities are expressed as a linear combination of two types of fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to express the symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_1}$ and the skew-symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_2}$. The stress intensity factors (SIFs) of the angular corners are systematically calculated for various shapes, spacings and numbers of the diamond-shaped holes subjected to uniaxial tension, biaxial tension and in-plane shear in comparison with the SIFs of ordinary cracks. The present method is found to give rapidly converging numerical results for the interaction problem. For all types of diamond-shaped holes, the maximum SIF is shown to be linearly related to the reciprocal of the number of diamond-shaped holes.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Angular Corner, Interaction Effect, Singular Integral Equation, Diamond-Shaped Hole

1. 緒 言

複合材料の強度評価を行う際には、強化材と母材の異材角部での応力分布を知る必要がある。このような角部では応力特異性が生じるため、その把握が必要となる。き裂問題と異なり、異材接合角部の問題では、モード I とモード II の変形モードに関係した異なる応力特異性の指数が混在している。すなわち、その角部近傍の特異応力場は、次式のように特異性の指数 λ_1, λ_2 および角部に拡張された応力拡大係数 $K_{I, \lambda_1}, K_{II, \lambda_2}$ によって記述されることが最近陳ら⁽¹⁾によって明らかにされている。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \dots \dots \dots (1)$$

著者らは、これまで体積法の手法を用いて種々のき裂問題^{(2)~(4)} および応力集中問題^{(5)~(7)} を特異積分方程式に定式化し、それを数値的に高精度に解析する方法について考察した。その結果、未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する離散化手法の有効性を示し

* 1995年3月14日 九州支部第48期総会講演会において講演、原稿受付 1995年2月24日。

¹ 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

² 正員、徳山工業高等専門学校 (〒745 徳山市久米高城 3538)。

³ 学生員、九州工業大学学生。

た。さらに、この方法を接合角部の基礎的な問題である切欠角部の問題に応用し、尖った角部に対しても提案する数値解析法が有効であることを確認した⁽⁸⁾。本研究では、体積法の特異積分方程式の数値解析によって、まず無限板中に存在する2個の菱形孔の角部の応力拡大係数の干渉効果を考察する。さらに図1に示すような任意個の菱形孔列についても解析を行う。そして、き裂と比較して、角部の応力拡大係数の干渉効果を明らかにする。遠方での荷重条件として本研究では(i)一軸引張り、(ii)両軸引張り、(iii)面内せん断

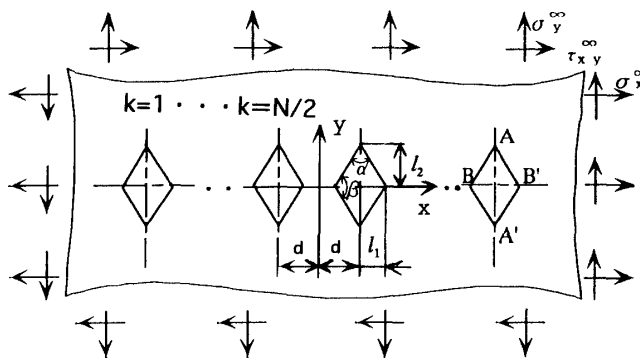


Fig. 1 Diamond-shaped holes in an infinite plate (When the number of holes is an even number)

の3種類を取り扱う。

2. 角部干渉問題の特異積分方程式
による数値解析法

図1に示すような同一形状および寸法をもつ任意個の菱形孔を有する無限板(菱形孔の個数が偶数個の場合)を例にとり解析方法を説明する。

本研究では、無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力を、図2に示すような2種類の形式の体積力分布の線形結合によって問題を表現する。それぞれの角部では、一般にモードIとモードIIの二つの変形が生じるので、角部での上下の仮想境界上に分布させるべきθ方向とr方向の体積力に対し、角部の二等分線に対して対称形(モードI)と逆対称形(モードII)の2種類の分布形式を採用する⁽⁸⁾。このとき、角部AとBでは特異性の指数が異なるため、解析は辺の中央より二分して行う。角部A、A'およびB、B'にそれぞれ図2の形式の体積力を分布させ、その線形結合によって境界条件を満足させる。また、この体積力はy軸

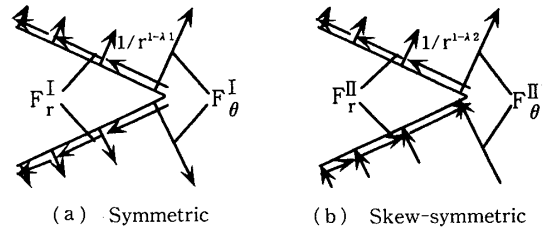


Fig. 2 Two types of body forces distributed along the imaginary boundary with angular corner

に対して対称な位置にも同様の形式で分布させるものとする。このような体積力法の考え方に基づいて、図1の問題で無限板中のk番めの菱形孔となるべき仮想境界上のθ方向およびr方向の体積力密度をそれぞれ $F_{\theta,k}(r) = F_{\theta,k}^I(r) + F_{\theta,k}^{II}(r)$, $F_{r,k}(r) = F_{r,k}^I(r) + F_{r,k}^{II}(r)$ (添字はモードI, モードIIの分布形式に相当)とすれば、角部Aを含む境界での境界条件 ($\sigma_n = 0, \tau_{nt} = 0$) を表す特異積分方程式は次のように表される**1。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}F_{\theta A, i}(s_i) + \sum_{k=1}^{N/2} \left[\int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{A,k}, s_i) F_{\theta A, k}(r_{A,k}) dr_{A,k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{A,k}, s_i) F_{r A, k}(r_{A,k}) dr_{A,k} \right. \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{A',k}, s_i) F_{\theta A', k}(r_{A',k}) dr_{A',k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{A',k}, s_i) F_{r A', k}(r_{A',k}) dr_{A',k} \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{B,k}, s_i) F_{\theta B, k}(r_{B,k}) dr_{B,k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{B,k}, s_i) F_{r B, k}(r_{B,k}) dr_{B,k} \\
 & \left. + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{B',k}, s_i) F_{\theta B', k}(r_{B',k}) dr_{B',k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{B',k}, s_i) F_{r B', k}(r_{B',k}) dr_{B',k} \right] = -\sigma_n^\infty(s_i) \\
 & -\frac{1}{2}F_{r A, i}(s_i) + \sum_{k=1}^{N/2} \left[\int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{A,k}, s_i) F_{\theta A, k}(r_{A,k}) dr_{A,k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{A,k}, s_i) F_{r A, k}(r_{A,k}) dr_{A,k} \right. \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{A',k}, s_i) F_{\theta A', k}(r_{A',k}) dr_{A',k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{A',k}, s_i) F_{r A', k}(r_{A',k}) dr_{A',k} \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{B,k}, s_i) F_{\theta B, k}(r_{B,k}) dr_{B,k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{B,k}, s_i) F_{r B, k}(r_{B,k}) dr_{B,k} \\
 & \left. + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{B',k}, s_i) F_{\theta B', k}(r_{B',k}) dr_{B',k} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nn}^{F_{r,k}}(r_{B',k}, s_i) F_{r B', k}(r_{B',k}) dr_{B',k} \right] = -\tau_{nt}^\infty(s_i) \quad (i=1 \sim N/2) \\
 & \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{k=1}^{N/2}$ はそれぞれの菱形孔となるべき仮想境界について総和をとることを意味し、 l_{AB} はAB間の距離である。 $h_{nn}^{F_{\theta,k}}(r_{A,k}, s_i)$ 等は、k番めの菱形孔となるべき仮想境界上の点 $r_{A,k}$ にr方向またはθ方向の単位大きさの集中力を図2の形式で作用させたときにi番めの菱形孔となる仮想境界上の任意の選点 s_i に生じる応力である。また $r_{A,k}, r_{A',k}$ および $r_{B,k}, r_{B',k}$ はそれぞれ角部A、A'およびB、B'を原点とする境界に沿う方向の局所座標であり、 $\sigma_n^\infty(s_i)$ および $\tau_{nt}^\infty(s_i)$ は、i番めの菱形孔となる仮想境界上の任意の選点 s_i で打ち消すべき法線方向および接線方向の応力である。その他の角部における境界積分方程式も同様な形で表現される。

本研究では、未知関数である $F_{\theta A, k}, F_{r A, k}$ 等を基本密度関数と級数で以下のように近似する⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned}
 F_{\theta A, k}(r_{A,k}) &= F_{\theta A, k}^I(r_{A,k}) + F_{\theta A, k}^{II}(r_{A,k}) = W_{\theta A, k}^I(r_{A,k}) r_{A,k}^{\lambda_1 - 1} + W_{\theta A, k}^{II}(r_{A,k}) r_{A,k}^{\lambda_2 - 1} \\
 F_{r A, k}(r_{A,k}) &= F_{r A, k}^I(r_{A,k}) + F_{r A, k}^{II}(r_{A,k}) = W_{r A, k}^I(r_{A,k}) r_{A,k}^{\lambda_1 - 1} + W_{r A, k}^{II}(r_{A,k}) r_{A,k}^{\lambda_2 - 1} \quad \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

**1 菱形孔の個数が奇数個の場合にも偶数個の場合とほぼ同様の理論で解析可能である。ただし、中央の孔に関しては、図2の対称形(a)または逆対称形(b)のいずれか一方の体積力を分布させればよいという点異なる

$$\begin{aligned}
 W_{\theta A, k}^I(r_{A, k}) &= \sum_{n=1}^M a_{n, k} r_{A, k}^{n-1} \\
 W_{\theta A, k}^{II}(r_{A, k}) &= \sum_{n=1}^M b_{n, k} r_{A, k}^{n-1} \\
 W_{r A, k}^I(r_{A, k}) &= \sum_{n=1}^M c_{n, k} r_{A, k}^{n-1} \\
 W_{r A, k}^{II}(r_{A, k}) &= \sum_{n=1}^M d_{n, k} r_{A, k}^{n-1}
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (4)$$

ここで $r_{A, k}^{-1}$, $r_{A, k}^{n-1}$ は, k 番めの菱形孔における切欠角部 A での特異応力場を表現するための基本密度関数であり, 添字 I, II は, 切欠きの二等分線に対して対称形および逆対称形の体積力を作用させることを意味する. λ_1, λ_2 の値は, 角部 A の場合, 次の特性方程式の根として与えられる⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned}
 \text{モード I : } \sin[\lambda_1(2\pi - \alpha)] &= \lambda_1 \sin \alpha \\
 \text{モード II : } \sin[\lambda_2(2\pi - \alpha)] &= -\lambda_2 \sin \alpha
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (5)$$

他の菱形孔および角部に分布させた体積力も同様の手法によって離散化を行う. 以上のような離散化手法を

Table 1 Convergency of F_{I, λ_1} and F_{II, λ_2} at the corner A ($N=2$, $l_2/d=1/2$, $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\tau_{xy}^\infty = 0$, $\alpha=30^\circ$ in Fig. 1)

M	$F_{I, \lambda_1} (\lambda_1=0.5014530)$		$F_{II, \lambda_2} (\lambda_2=0.5981918)$	
	from $W_r^I(0)$	from $W_\theta^I(0)$	from $W_r^{II}(0)$	from $W_\theta^{II}(0)$
2	0.98816	0.99747	0.26062	0.25870
4	0.94644	0.94663	0.02273	0.02271
6	0.94476	0.94473	0.02257	0.02257
8	0.94433	0.94431	0.02252	0.02252
10	0.94414	0.94413	0.02250	0.02250
12	0.94405	0.94404	0.02249	0.02494
14	0.94399	0.94398	0.02249	0.02249
16	0.94396	0.94395	0.02249	0.02248
18	0.94394	0.94394	0.02248	0.02248

Table 2 F_{I, λ_1} and F_{II, λ_2} for two diamond-shaped holes at the corner A under various loading conditions

l/d	α	Uniaxial tension ($F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_1^{1-\lambda_1}$, $F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2}$)							Biaxial tension ($F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_1^{1-\lambda_1}$, $F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2}$)							In-plane shear ($F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_1^{1-\lambda_1}$, $F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2}$)															
		0°	15°	20°	30°	60°	90°	0°	15°	20°	30°	60°	90°	0°	15°	20°	30°	60°	90°												
0	F_{I, λ_1}	1.000	1.011	1.019	1.042	1.148	1.293	1.000	1.004	1.007	1.014	1.034	1.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.006	1.007	1.014	1.034	1.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	F_{II, λ_2}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.056	1.085	1.154	1.599	4.279	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
1/6	F_{I, λ_1}	0.990	1.001	1.009	1.029	1.133	1.275	0.990	0.994	0.997	1.004	1.024	1.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.990	0.994	0.997	1.004	1.024	1.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	
	F_{II, λ_2}	0.001	0.001	0.001	0.001	0.003	0.010	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004	1.003	1.063	1.090	1.160	1.608	4.312	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004	1.003	1.063	1.090	1.160	1.608	
1/4	F_{I, λ_1}	0.978	0.988	0.996	1.016	1.116	1.254	0.978	0.982	0.985	0.992	1.013	0.993	0.003	0.003	0.003	0.003	0.005	0.011	0.978	0.982	0.985	0.992	1.013	0.993	0.003	0.003	0.003	0.003	0.005	
	F_{II, λ_2}	0.003	0.003	0.004	0.004	0.008	0.031	0.003	0.003	0.003	0.004	0.006	0.013	1.007	1.067	1.094	1.165	1.618	4.348	0.003	0.003	0.004	0.004	0.006	0.013	1.007	1.067	1.094	1.165	1.618	
1/3	F_{I, λ_1}	0.964	0.973	0.980	0.999	1.096	1.228	0.964	0.968	0.971	0.977	0.998	0.982	0.006	0.007	0.007	0.008	0.012	0.026	0.964	0.968	0.971	0.977	0.998	0.982	0.006	0.007	0.007	0.008	0.012	
	F_{II, λ_2}	0.006	0.007	0.008	0.009	0.018	0.067	0.006	0.007	0.007	0.008	0.012	0.028	1.012	1.072	1.100	1.171	1.629	4.390	0.006	0.007	0.008	0.009	0.018	0.067	1.012	1.072	1.100	1.171	1.629	
1/2	F_{I, λ_1}	0.930	0.937	0.943	0.960	1.049	1.172	0.930	0.934	0.937	0.944	0.966	0.955	0.018	0.020	0.021	0.023	0.038	0.083	0.930	0.934	0.937	0.944	0.966	0.955	0.018	0.020	0.021	0.023	0.038	
	F_{II, λ_2}	0.016	0.020	0.022	0.026	0.049	0.177	0.016	0.019	0.020	0.022	0.033	0.076	1.022	1.083	1.111	1.184	1.650	4.455	0.016	0.020	0.022	0.026	0.049	0.177	1.022	1.083	1.111	1.184	1.650	
2/3	F_{I, λ_1}	0.895	0.901	0.907	0.923	1.006	1.125	0.895	0.901	0.904	0.911	0.935	0.923	0.028	0.041	0.043	0.048	0.080	0.188	0.895	0.901	0.904	0.911	0.935	0.923	0.028	0.041	0.043	0.048	0.080	
	F_{II, λ_2}	0.031	0.038	0.041	0.048	0.088	0.305	0.031	0.036	0.038	0.042	0.061	0.152	1.030	1.092	1.121	1.194	1.662	4.436	0.031	0.038	0.041	0.048	0.088	0.305	1.030	1.092	1.121	1.194	1.662	

用いて特異積分方程式(2)を解くことにより, 陳らによって定義された角部の応力拡大係数 $K_{I, \lambda_1, k}$, $K_{II, \lambda_2, k}$ は, 角部先端での重みの値 $W_{\theta, k}^I(0)$, $W_{\theta, k}^{II}(0)$, $W_{r, k}^I(0)$, $W_{r, k}^{II}(0)$ から求められる⁽⁹⁾.

3. 解析結果および考察

図1に示す無限板中の任意個の菱形孔角部の干渉問題において, 角部 A の角度 α , 角部 B の角度 β , 形状比 l_1/d または l_2/d さらに個数 N を系統的に変えて角部の応力拡大係数 $K_{I, \lambda_1, k}$, $K_{II, \lambda_2, k}$ の解析を行った.

まず, このような角部の干渉問題における本法の解析精度について検討を行う. 角部先端の応力拡大係数は, $K_{I, \lambda_1, k}$ については $W_{\theta, k}^I(0)$, $W_{r, k}^I(0)$ より, $K_{II, \lambda_2, k}$ については $W_{\theta, k}^{II}(0)$, $W_{r, k}^{II}(0)$ からそれぞれ求められる⁽⁹⁾. θ 方向と r 方向の重みより求められる $K_{I, \lambda_1, k}$, $K_{II, \lambda_2, k}$ の値は, 数値解析の誤差を除けばそれぞれ一致する. 例として, 図1において $N=2$, $\alpha=30^\circ$, $l_2/d=1/2$, $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\tau_{xy}^\infty = 0$ の両軸引張荷重の場合, 角部 A について式(6)を用いて得られる F_{I, λ_1} , F_{II, λ_2} の収束状況を表1に示す.

$$F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_1}, \quad F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2}
 \dots\dots\dots (6)$$

なお, 表1に示す以外の形状でも検討した結果, 本解析法では $M=18$ 程度で θ 方向と r 方向の重みから得られる F_{I, λ_1} , F_{II, λ_2} の値が有効数字5けた程度まで一致し収束しており, 良好な収束性を示すことが確認された. 以下ではこのようにして得られた菱形孔の応力拡大係数を, 主として図1の $\alpha=0^\circ$ または $\beta=0^\circ$ に相

Table 3 F_{I,λ_1} or F_{II,λ_2} for two diamond-shaped holes at the corners B and B' under various loading conditions

		Uniaxial tension : F_{I,λ_1} ($F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma \sqrt{\pi l^{1-\lambda_1}}$)						Biaxial tension : F_{I,λ_1} ($F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma \sqrt{\pi l^{1-\lambda_1}}$)						In-plane shear : F_{II,λ_2} ($F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \tau \sqrt{\pi l^{1-\lambda_2}}$)					
l/d \ β		0°	15°	20°	30°	60°	90°	0°	15°	20°	30°	60°	90°	0°	15°	20°	30°	60°	90°
0	B, B'	1.000	1.011	1.019	1.042	1.148	1.293	1.000	1.004	1.007	1.014	1.034	1.010	1.000	1.056	1.085	1.154	1.599	4.279
1/6	B	1.004	1.022	1.027	1.048	1.152	1.295	1.004	1.014	1.015	1.021	1.041	1.020	1.004	1.065	1.092	1.161	1.611	4.323
	B'	1.003	1.021	1.026	1.047	1.152	1.295	1.003	1.014	1.014	1.021	1.040	1.018	1.003	1.064	1.091	1.160	1.608	4.306
1/4	B	1.009	1.024	1.032	1.053	1.157	1.296	1.009	1.016	1.020	1.027	1.047	1.033	1.009	1.069	1.099	1.169	1.626	4.392
	B'	1.007	1.023	1.028	1.051	1.155	1.297	1.007	1.016	1.016	1.025	1.044	1.027	1.007	1.068	1.096	1.165	1.616	4.333
1/3	B	1.018	1.030	1.041	1.062	1.164	1.299	1.018	1.023	1.029	1.036	1.057	1.052	1.018	1.078	1.109	1.181	1.650	4.507
	B'	1.012	1.025	1.036	1.057	1.160	1.300	1.012	1.018	1.024	1.031	1.051	1.038	1.012	1.072	1.102	1.172	1.626	4.365
1/2	B	1.048	1.064	1.072	1.092	1.190	1.317	1.048	1.057	1.060	1.067	1.093	1.111	1.048	1.117	1.148	1.226	1.743	4.944
	B'	1.028	1.042	1.052	1.072	1.174	1.313	1.028	1.035	1.040	1.046	1.069	1.065	1.028	1.089	1.119	1.191	1.654	4.434
2/3	B	1.112	1.130	1.137	1.156	1.252	1.374	1.112	1.123	1.126	1.133	1.168	1.210	1.112	1.195	1.231	1.325	1.949	5.888
	B'	1.052	1.069	1.076	1.096	1.197	1.338	1.052	1.062	1.064	1.071	1.097	1.101	1.052	1.117	1.145	1.218	1.689	4.504

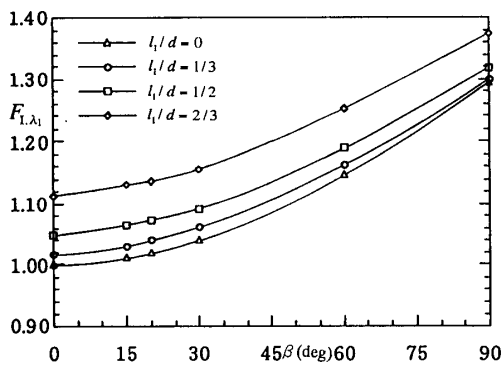


Fig. 3 An example of F_{I,λ_1} - β relation ($\sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$)

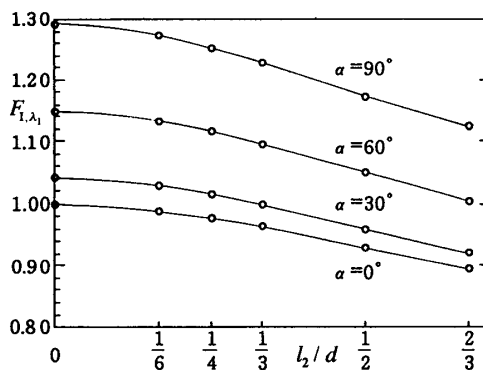


Fig. 4 An example of F_{I,λ_1} - l_2/d relation ($\sigma_x^\infty = \sigma^\infty$, $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$)

当するき裂群の結果⁽¹¹⁾と比較して考察する。

表2は $N=2$, $\alpha \leq 90^\circ$ のときの角部の干渉問題において、角部Aについて得られた一軸引張り (x 方向)、両軸引張りおよびせん断荷重下での F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の値を、表3は $N=2$, $\beta \leq 90^\circ$ のときの同問題において、角部BおよびB'について得られた一軸引張り (y 方向)および両軸引張りの場合の F_{I,λ_1} , せん断荷重下での F_{II,λ_2} の値をそれぞれ示す。得られた結果は、き裂の結果 ($\alpha=0^\circ$ または $\beta=0^\circ$) と比較して示した。き裂の場合は $\alpha=0^\circ$ については、未知関数である体積力密度を基本密度関数と Chebyshev 多項式で近似する方法を用いて解析した⁽²⁾。また、 $\beta=0^\circ$ は、Erdogan の厳密解⁽¹⁰⁾ の値を示した。また、この表3の y 方向一軸引張り、 $l_1/d=0, 1/3, 1/2, 2/3$ のときの角部Bにおける F_{I,λ_1} の値を図3に示す。また表2の x 方向一軸引張り、 $l_2/d=0, 1/6, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3$ のときの角部Aにおける F_{I,λ_1} の値を図4に示す。図3に示すように応力

拡大係数 F_{I,λ_1} の値は、 $\beta \rightarrow 0^\circ$ に従って減少し、き裂の結果に無理なく一致する。また、 $l_2/d \rightarrow 0$ に従って F_{I,λ_1} の値は1個の菱形孔の値に一致する。

図5, 6は $N=2 \sim 10$, $\alpha=30^\circ$, $l_2/d=1/3$ に対し一軸引張り (x 方向) とせん断荷重下のそれぞれのときに各々の菱形孔角部Aに生じる応力拡大係数の値 ($F_{I,\lambda_1,k}$, $F_{II,\lambda_2,k}$) を示した図である。さらに図7, 8は $N=2 \sim 10$, $\beta=30^\circ$, $l_1/d=1/3$ に対し一軸引張り (y 方向) と両軸引張りそれぞれのときに各々の菱形孔角部BおよびB'に生じる応力拡大係数の値 ($F_{I,\lambda_1,k}$) をそれぞれ示した図である。ここで、図5~8の縦軸は $F_{I,\lambda_1,k}$ ($F_{II,\lambda_2,k}$) と $F_{I,\lambda_1}|_{N=1}$ ($F_{II,\lambda_2}|_{N=1}$)、すなわち菱形孔が1個のときの値との比をとっている。これより図5の場合是最外側菱形孔で、図6~8の場合是最内側菱形孔でそれぞれ応力拡大係数が最大となることがわかる。他の荷重条件でも検討した結果、 $\alpha \leq 90^\circ$ の場合、引張りでは最外側菱形孔で、せん断荷重下では最内側

Table 4 $F_{max,N}$ for any diamond-shaped holes at the corner A under various loading conditions

N : Number of holes	l_2/d	$\alpha = 0^\circ$					$\alpha = 30^\circ$					$\alpha = 60^\circ$					$\alpha = 90^\circ$				
		$F_{max,N}/F_{max,N}$					$F_{max,N}/F_{max,N}$					$F_{max,N}/F_{max,N}$					$F_{max,N}/F_{max,N}$				
		0	1/3	1/2	2/3	0	1/3	1/2	2/3	0	1/3	1/2	2/3	0	1/3	1/2	2/3	0	1/3	1/2	2/3
Uniaxial tension $(F_{W,1} = F_{I,1}, F_{max,N} = F_{II,max,N})$ 	2	1.000	1.000	0.964	0.930	0.896	1.042	1.000	0.958	0.921	0.886	1.148	1.000	0.954	0.914	0.876	1.293	1.000	0.949	0.907	0.870
	3	1.000	1.000	0.955	0.915	0.876	1.042	1.000	0.951	0.907	0.867	1.148	1.000	0.945	0.898	0.856	1.293	1.000	0.939	0.890	0.849
	4	1.000	1.000	0.952	0.909	0.867	1.042	1.000	0.947	0.900	0.857	1.148	1.000	0.941	0.891	0.847	1.293	1.000	0.934	0.882	0.840
	5	1.000	1.000	0.949	0.905	0.862	1.042	1.000	0.944	0.896	0.852	1.148	1.000	0.938	0.887	0.842	1.293	1.000	0.931	0.878	0.834
	6	1.000	1.000	0.948	0.902	0.859	1.042	1.000	0.943	0.894	0.849	1.148	1.000	0.936	0.884	0.838	1.293	1.000	0.930	0.875	0.831
	7	1.000	1.000	0.947	0.901	0.856	1.042	1.000	0.942	0.892	0.846	1.148	1.000	0.935	0.882	0.836	1.293	1.000	0.929	0.873	0.828
	8	1.000	1.000	0.946	0.899	0.854	1.042	1.000	0.941	0.891	0.844	1.148	1.000	0.935	0.881	0.834	1.293	1.000	0.928	0.871	0.826
	9	1.000	1.000	0.946	0.898	0.853	1.042	1.000	0.940	0.889	0.842	1.148	1.000	0.934	0.880	0.832	1.293	1.000	0.927	0.870	0.825
	10	1.000	1.000	0.946	0.898	0.853	1.042	1.000	0.940	0.889	0.842	1.148	1.000	0.934	0.880	0.832	1.293	1.000	0.926	0.869	0.823
	∞	1.000	1.000	0.942	0.892	0.846	1.042	1.000	0.936	0.881	0.832	1.148	1.000	0.929	0.871	0.821	1.293	1.000	0.922	0.861	0.813
Biaxial tension $(F_{W,1} = F_{I,1}, F_{max,N} = F_{II,max,N})$ 	2	1.000	1.000	0.964	0.930	0.896	1.014	1.000	0.964	0.931	0.898	1.034	1.000	0.966	0.934	0.904	1.010	1.000	0.972	0.945	0.914
	3	1.000	1.000	0.955	0.915	0.876	1.014	1.000	0.956	0.917	0.881	1.034	1.000	0.959	0.923	0.890	1.010	1.000	0.967	0.938	0.908
	4	1.000	1.000	0.952	0.909	0.867	1.014	1.000	0.953	0.911	0.872	1.034	1.000	0.955	0.917	0.883	1.010	1.000	0.965	0.935	0.906
	5	1.000	1.000	0.949	0.905	0.862	1.014	1.000	0.951	0.908	0.868	1.034	1.000	0.954	0.914	0.879	1.010	1.000	0.963	0.933	0.904
	6	1.000	1.000	0.948	0.902	0.859	1.014	1.000	0.949	0.905	0.865	1.034	1.000	0.952	0.912	0.877	1.010	1.000	0.962	0.932	0.903
	7	1.000	1.000	0.947	0.901	0.856	1.014	1.000	0.948	0.904	0.863	1.034	1.000	0.951	0.911	0.875	1.010	1.000	0.962	0.931	0.902
	8	1.000	1.000	0.946	0.899	0.855	1.014	1.000	0.948	0.903	0.861	1.034	1.000	0.951	0.910	0.874	1.010	1.000	0.961	0.930	0.902
	9	1.000	1.000	0.946	0.898	0.854	1.014	1.000	0.947	0.902	0.860	1.034	1.000	0.950	0.909	0.873	1.010	1.000	0.961	0.930	0.902
	10	1.000	1.000	0.946	0.898	0.853	1.014	1.000	0.947	0.901	0.859	1.034	1.000	0.950	0.909	0.872	1.010	1.000	0.961	0.930	0.901
	∞	1.000	1.000	0.942	0.892	0.846	1.014	1.000	0.943	0.894	0.850	1.034	1.000	0.947	0.903	0.864	1.010	1.000	0.958	0.926	0.898
In-plane shear $(F_{W,1} = F_{II,1}, F_{max,N} = F_{II,max,N})$ 	2	1.000	1.000	1.012	1.022	1.030	1.154	1.000	1.014	1.026	1.034	1.599	1.000	1.018	1.032	1.039	4.279	1.000	1.026	1.041	1.037
	3	1.000	1.000	1.024	1.044	1.059	1.154	1.000	1.029	1.052	1.070	1.599	1.000	1.036	1.064	1.081	4.279	1.000	1.052	1.084	1.076
	4	1.000	1.000	1.028	1.051	1.073	1.154	1.000	1.033	1.061	1.086	1.599	1.000	1.042	1.077	1.103	4.279	1.000	1.061	1.105	1.112
	5	1.000	1.000	1.031	1.059	1.087	1.154	1.000	1.037	1.070	1.110	1.599	1.000	1.048	1.089	1.124	4.279	1.000	1.070	1.125	1.149
	6	1.000	1.000	1.033	1.063	1.094	1.154	1.000	1.039	1.075	1.111	1.599	1.000	1.050	1.096	1.137	4.279	1.000	1.074	1.136	1.170
	7	1.000	1.000	1.034	1.067	1.101	1.154	1.000	1.041	1.080	1.119	1.599	1.000	1.053	1.102	1.149	4.279	1.000	1.078	1.147	1.192
	8	1.000	1.000	1.035	1.069	1.105	1.154	1.000	1.042	1.082	1.124	1.599	1.000	1.054	1.106	1.156	4.279	1.000	1.081	1.154	1.207
	9	1.000	1.000	1.036	1.072	1.110	1.154	1.000	1.043	1.085	1.129	1.599	1.000	1.056	1.110	1.164	4.279	1.000	1.083	1.161	1.221
	10	1.000	1.000	1.037	1.073	1.112	1.154	1.000	1.044	1.087	1.132	1.599	1.000	1.057	1.112	1.169	4.279	1.000	1.085	1.165	1.231
	∞	1.000	1.000	1.043	1.088	1.142	1.154	1.000	1.050	1.103	1.164	1.599	1.000	1.066	1.135	1.214	4.279	1.000	1.099	1.205	1.336

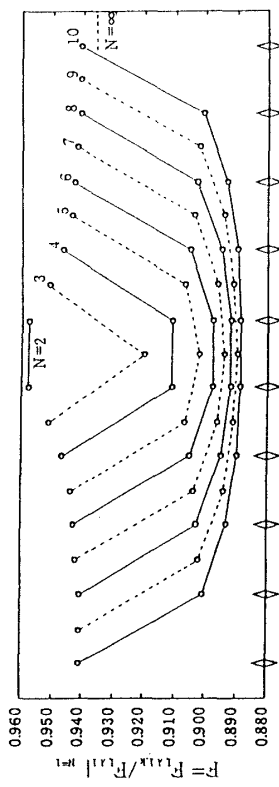


Fig. 5 F for each diamond-shaped hole at the corner A ($\sigma_x^0 = \sigma_y^0, \sigma_x^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \alpha = 30^\circ, l_2/d = 1/3$)

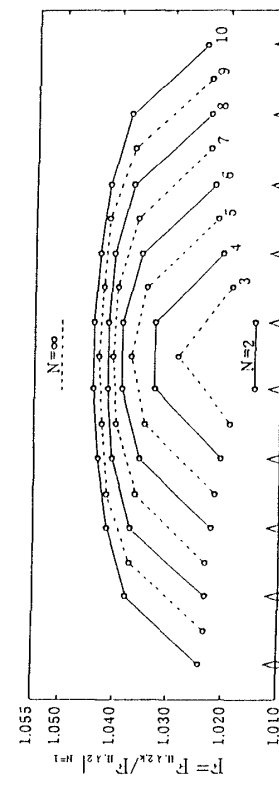


Fig. 6 F for each diamond-shaped hole at the corner A ($\tau_{xy}^0 = \tau^0, \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 0, \alpha = 30^\circ, l_2/d = 1/3$)

Table 5 $F_{max, N}$ for any diamond-shaped holes at the corners B and B' under various loading conditions

N : Number of holes	l_1/d	$\beta = 0^\circ$					$\beta = 30^\circ$					$\beta = 60^\circ$					$\beta = 90^\circ$				
		$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$	$F_{ y=1}$	$F_{max, N}/F_{ y=1}$		
		0	0	1/3	1/2	2/3	0	0	1/3	1/2	2/3	0	0	1/3	1/2	2/3	0	0	1/3	1/2	2/3
Uniaxial tension ($F_{ x=1} = F_{ d,1}, F_{max, N} = F_{I(max, N)}$)																					
2		1.000	1.000	1.018	1.048	1.115	1.042	1.000	1.019	1.048	1.110	1.148	1.000	1.014	1.037	1.090	1.293	1.000	1.006	1.018	1.063
3		1.000	1.000	1.031	1.077	1.172	1.042	1.000	1.030	1.074	1.161	1.148	1.000	1.023	1.059	1.136	1.293	1.000	1.010	1.035	1.102
4		1.000	1.000	1.035	1.088	1.199	1.042	1.000	1.034	1.085	1.187	1.148	1.000	1.026	1.068	1.159	1.293	1.000	1.012	1.042	1.124
5		1.000	1.000	1.039	1.097	1.218	1.042	1.000	1.037	1.093	1.204	1.148	1.000	1.029	1.075	1.174	1.293	1.000	1.014	1.048	1.139
6		1.000	1.000	1.041	1.102	1.230	1.042	1.000	1.039	1.098	1.216	1.148	1.000	1.030	1.079	1.184	1.293	1.000	1.015	1.052	1.149
7		1.000	1.000	1.043	1.106	1.240	1.042	1.000	1.040	1.102	1.224	1.148	1.000	1.031	1.082	1.192	1.293	1.000	1.015	1.055	1.156
8		1.000	1.000	1.044	1.108	1.246	1.042	1.000	1.041	1.104	1.230	1.148	1.000	1.032	1.085	1.198	1.293	1.000	1.016	1.056	1.161
9		1.000	1.000	1.044	1.111	1.251	1.042	1.000	1.042	1.106	1.235	1.148	1.000	1.033	1.087	1.202	1.293	1.000	1.016	1.058	1.166
10		1.000	1.000	1.045	1.112	1.255	1.042	1.000	1.043	1.108	1.239	1.148	1.000	1.033	1.088	1.206	1.293	1.000	1.017	1.059	1.169
∞		1.000	1.000	1.052	1.128	1.293	1.042	1.000	1.049	1.123	1.275	1.148	1.000	1.038	1.101	1.238	1.293	1.000	1.020	1.071	1.201
Biaxial tension ($F_{ x=1} = F_{I(d,1)}, F_{max, N} = F_{I(max, N)}$)																					
2		1.000	1.000	1.018	1.048	1.115	1.044	1.000	1.022	1.052	1.117	1.034	1.000	1.022	1.057	1.129	1.010	1.000	1.041	1.100	1.198
3		1.000	1.000	1.031	1.077	1.172	1.044	1.000	1.032	1.079	1.171	1.034	1.000	1.037	1.090	1.192	1.010	1.000	1.068	1.154	1.291
4		1.000	1.000	1.035	1.088	1.199	1.044	1.000	1.037	1.091	1.199	1.034	1.000	1.042	1.103	1.222	1.010	1.000	1.076	1.174	1.333
5		1.000	1.000	1.039	1.097	1.218	1.044	1.000	1.040	1.100	1.217	1.034	1.000	1.046	1.113	1.243	1.010	1.000	1.084	1.189	1.362
6		1.000	1.000	1.041	1.102	1.230	1.044	1.000	1.042	1.105	1.229	1.034	1.000	1.048	1.119	1.256	1.010	1.000	1.087	1.198	1.376
7		1.000	1.000	1.043	1.106	1.240	1.044	1.000	1.044	1.109	1.238	1.034	1.000	1.050	1.124	1.266	1.010	1.000	1.090	1.205	1.395
8		1.000	1.000	1.044	1.108	1.246	1.044	1.000	1.045	1.111	1.245	1.034	1.000	1.051	1.127	1.274	1.010	1.000	1.093	1.210	1.405
9		1.000	1.000	1.044	1.111	1.251	1.044	1.000	1.045	1.114	1.250	1.034	1.000	1.052	1.129	1.280	1.010	1.000	1.094	1.214	1.414
10		1.000	1.000	1.045	1.112	1.255	1.044	1.000	1.046	1.115	1.254	1.034	1.000	1.053	1.131	1.284	1.010	1.000	1.096	1.217	1.420
∞		1.000	1.000	1.052	1.128	1.293	1.044	1.000	1.052	1.132	1.292	1.034	1.000	1.060	1.150	1.327	1.010	1.000	1.108	1.245	1.480
In-plane shear ($F_{ x=1} = F_{II(d,2)}, F_{max, N} = F_{II(max, N)}$)																					
2		1.000	1.000	1.018	1.048	1.115	1.154	1.000	1.023	1.063	1.148	1.599	1.000	1.032	1.090	1.219	4.279	1.000	1.053	1.155	1.376
3		1.000	1.000	1.031	1.077	1.172	1.154	1.000	1.037	1.094	1.207	1.599	1.000	1.049	1.125	1.284	4.279	1.000	1.074	1.197	1.459
4		1.000	1.000	1.035	1.088	1.199	1.154	1.000	1.042	1.108	1.242	1.599	1.000	1.056	1.146	1.336	4.279	1.000	1.087	1.234	1.539
5		1.000	1.000	1.039	1.097	1.218	1.154	1.000	1.046	1.118	1.264	1.599	1.000	1.061	1.159	1.364	4.279	1.000	1.094	1.253	1.582
6		1.000	1.000	1.041	1.102	1.230	1.154	1.000	1.049	1.124	1.279	1.599	1.000	1.067	1.168	1.388	4.279	1.000	1.100	1.269	1.635
7		1.000	1.000	1.043	1.106	1.240	1.154	1.000	1.051	1.129	1.290	1.599	1.000	1.067	1.175	1.403	4.279	1.000	1.104	1.279	1.661
8		1.000	1.000	1.044	1.108	1.246	1.154	1.000	1.052	1.133	1.299	1.599	1.000	1.068	1.180	1.416	4.279	1.000	1.107	1.289	1.676
9		1.000	1.000	1.044	1.111	1.251	1.154	1.000	1.053	1.135	1.305	1.599	1.000	1.070	1.184	1.426	4.279	1.000	1.109	1.295	1.693
10		1.000	1.000	1.045	1.112	1.255	1.154	1.000	1.054	1.138	1.311	1.599	1.000	1.071	1.187	1.434	4.279	1.000	1.111	1.301	1.710
∞		1.000	1.000	1.052	1.128	1.293	1.154	1.000	1.061	1.157	1.359	1.599	1.000	1.081	1.215	1.511	4.279	1.000	1.127	1.354	1.869

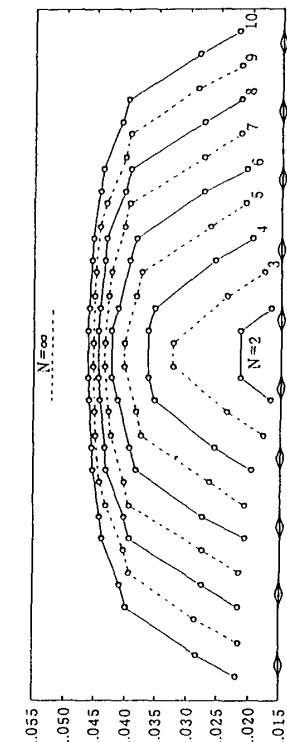


Fig. 8 F for each diamond-shaped hole at the corner B and B' ($\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \sigma^0, \tau_{xy}^0 = 0, \beta = 30^\circ, l_1/d = 1/3$)

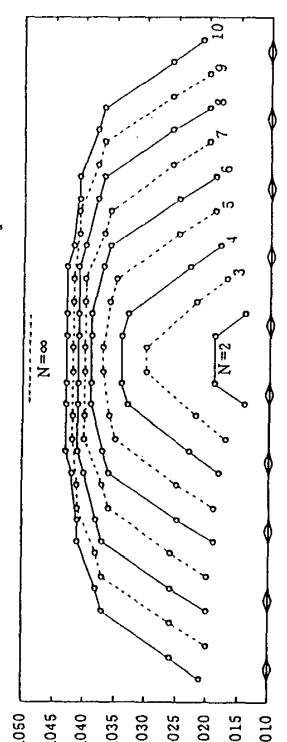


Fig. 7 F for each diamond-shaped hole at the corner B and B' ($\sigma_y^0 = \sigma^0, \sigma_x^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \alpha = 30^\circ, l_1/d = 1/3$)

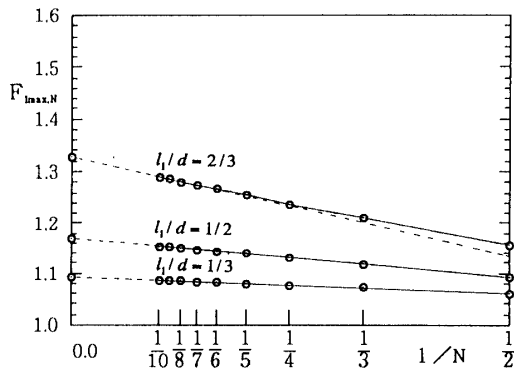


Fig. 9 $F_{I_{\max,N}}-1/N$ relations
($\sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$, $\beta = 30^\circ$)

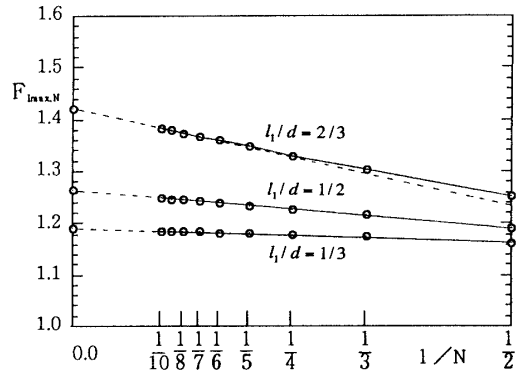


Fig. 10 $F_{I_{\max,N}}-1/N$ relations
($\sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$, $\beta = 60^\circ$)

菱形孔で応力拡大係数が最大となった。また $\beta \leq 90^\circ$ の菱形孔では引張り、せん断荷重下ともに最内側菱形孔で最大となった。このような結果は $\alpha = 0^\circ$ の平行き裂群と $\beta = 0^\circ$ の共線き裂群に対して行われた石田らの解析結果⁽¹¹⁾と類似している。すなわち石田らは図1で $\alpha = 0^\circ$ の平行き裂群の x 方向引張り(図5に相当)においては最外側のき裂において最大値が生じることを、また平行き裂群の面内せん断(図6に相当)では最内側のき裂で最大応力拡大係数が生じることを示している。また図1で $\beta = 0^\circ$ に相当する共線き裂群の y 方向引張り(図7に相当)と面内せん断(共線き裂問題では y 方向引張りと同値となる)では最内側のき裂で最大応力拡大係数が生じることを示している。菱形孔の問題では無限遠での σ_x^∞ , σ_y^∞ の両者が点A, Bの応力拡大係数に影響する点はき裂と異なる。

表4, 5は l_1/d または l_2/d と個数 N , さらに $\alpha \leq 90^\circ$ のときは角度 α を, $\beta \leq 90^\circ$ では角度 β をそれぞれ系統的に変えたときの N と応力拡大係数の最大値 $F_{\max,N}$ (引張荷重下では $F_{I_{\max,N}}$, せん断荷重下では $F_{II_{\max,N}}$) をまとめたものである。なお, 表中の $N \rightarrow \infty$ の $F_{\max,N}$ の値は, 後述の $1/N$ との直線性を用いて $N=9, 10$ の値より外挿したものである。ただしせん断荷重下での $\alpha = \beta = 90^\circ$, $l_1/d = l_2/d = 2/3$ の場合は直線性が現れにくいため $N=15, 16$ からの外挿値を示してある ($N=14, 15$ からの外挿値と $N=15, 16$ からの外挿値との誤差は1%以下である)。また, き裂の値 ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$) は石田らの結果⁽¹¹⁾より内挿したものである。これらの表から $\alpha \leq 90^\circ$ については, 引張荷重下の場合は l_2/d の増加に伴い $F_{\max,N}$ は減少しており, せん断荷重下では逆に増加していることがわかる。また, $\beta \leq 90^\circ$ のときは引張荷重下, せん断荷重下とも $F_{\max,N}$ は増加している。

図9~11は表5中の $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ での一軸引張

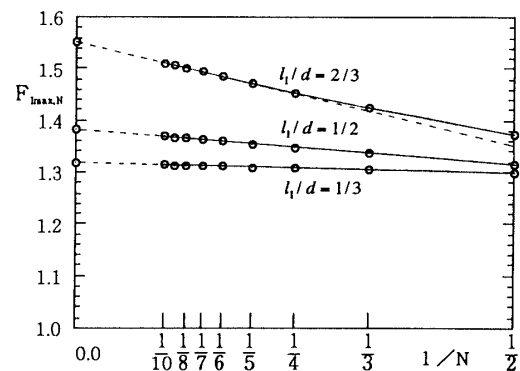


Fig. 11 $F_{I_{\max,N}}-1/N$ relations
($\sigma_y^\infty = \sigma^\infty$, $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$, $\beta = 90^\circ$)

り (y 方向) において, 菱形孔の個数 N と形状比 l_1/d を系統的に変えたときの応力拡大係数の最大値 ($F_{I_{\max,N}}$) と菱形孔の個数 N との関係を示したものである。他の荷重下についても検討した結果, いずれの場合も図9~11のように, $F_{\max,N}$ と $1/N$ との間には直線関係があることが確認された。石田らは無限体の共線き裂群あるいは平行き裂群で, 同様の荷重下において, l_1/d または l_2/d を固定したときの $F_{I_{\max,N}}$ (または $F_{II_{\max,N}}$) と $1/N$ とは直線関係にあることを解析結果として示した。本解析により, このことが菱形孔列の場合にもほぼ成り立つことがわかる。

4. 結 言

本研究では, 体積法の特異積分方程式を利用して無限板中の任意個の菱形孔列の干渉効果を厳密に解析した。得られた結果を表1~5にまとめたほか, 以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析には, 未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法により, 少ない計算時間で良好な収束性が得られた。

(2) $\alpha \leq 90^\circ$ の任意個菱形孔列において、一軸引張り (x 方向) および両軸引張荷重下では最外側菱形孔に、せん断荷重下では最内側菱形孔にそれぞれ応力拡大係数の最大値が生じる。これらの結果は、平行き裂群の結果⁽¹¹⁾ と類似している。

(3) $\beta \leq 90^\circ$ の任意個菱形孔列において、一軸引張り (y 方向)、両軸引張り、せん断荷重下のいずれの場合も応力拡大係数の最大値は最内側菱形孔に生じる。これらの結果は、共線き裂群の結果⁽¹¹⁾ と類似している。

(4) き裂の場合⁽¹¹⁾ と同様に、 N 個の菱形孔列の応力拡大係数の最大値 $F_{I \max, N}$ (または $F_{II \max, N}$) と $1/N$ はほぼ直線関係にあることが認められ、この関係により $N \rightarrow \infty$ における $F_{I \max}$ (または $F_{II \max}$) の極限値を推定して示した。

本研究の一部は、卒論学生樋口健君(現:三菱自動車)の助力を得た。記してお礼を申し上げる。

文 献

- (1) 陳・西谷, 接合異材の角部近傍での応力場, 機論, 57-534, A(1991), 366-372.
- (2) 野田・小田・陳, 超越特異積分方程式法による混合モードき裂の解析, 機論, 56-532, A(1990), 2405-2410.
- (3) 野田・小田・増田, 超越積分方程式法による屈折き裂の解析, 機論, 57-542, A(1991), 2332-2337.
- (4) 野田・小田・石田, 曲線状き裂の応力拡大係数の解析, 機論, 59-558, A(1993), 332-336.
- (5) 野田・松尾, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第1報)基礎の理論と境界条件の満足度の検討, 機論, 58-555, A(1992), 2179-2184.
- (6) 野田・松尾, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第2報)切欠きの干渉問題の一般的解析法, 機論, 59-559, A(1993), 785-791.
- (7) 野田・松尾, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第3報)三次元問題への応用, 機論, 59-564, A(1993), 1964-1970.
- (8) 野田・小田・樋口・田中, 体積法の特異積分方程式の数値解析による界面き裂および角部の応力拡大係数の解析, 機論, 60-578, A(1994), 2213-2219.
- (9) 陳・西谷, 半無限板のV形切欠先端における特異応力場, 機論, 57-538, A(1991), 1406-1411.
- (10) Erdogan, F., On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts under Arbitrary Loads, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1962), 547-553.
- (11) 石田・井川, 種々の荷重を受ける共線き裂群および平行き裂群, 機論, 59-561, A(1993), 1262-1269.
- (1) 陳・西谷, 接合異材の角部近傍での応力場, 機論, 57-534,