

53/3
K-15

377.5
K-11
1-3

2種類の液体で満たされ分割された中空回転軸 の動的不安定に関する研究



平成 3 年 1 月

九州工業大学 設計生産工学専攻

久保省藏

目 次

第 1 章 序論	1
1・1 本研究の目的	1
1・2 従来の研究と本研究の特色	4
1・3 本研究の内容	8
第 2 章 振子を備えた回転軸による予備的考察	11
2・1 運動方程式	13
2・2 減衰がない場合	14
2・3 減衰を考慮した場合	23
2・4 実験	29
2・5 結論	32
第 3 章 2 種類の液体で満たされ分割された中空回転軸の動的不安定 (粘性および減衰を無視した場合)	34
3・1 基礎方程式	35
3・2 軸が一方向に振動する場合	38
3・3 軸が円軌道でふれ回る場合	47
3・4 実験装置および方法	52
3・5 実験結果	54
3・6 結論	66
第 4 章 2 種類の液体で満たされ分割された高速中空回転軸の動的不安定 (減衰による系の安定化の実験)	67
4・1 実験装置および方法	68
4・2 実験結果	69

4・3 結論	72
第5章 総括	73
謝辞	76
付録	77
3・1 式(3・16)および式(3・17)の導出	77
3・2 振幅 A_{i2} , および位相 β_{i1} の導出	78
3・3 液体力の導出	79
参考文献	82

第 1 章 序論

1・1 本研究の目的

ガスタービンのブレードの冷却装置を開発するためにロータ内部を中空にし、その中に水を封入した回転軸の実験の過程で危険速度以上のある軸回転数域で激しい自励振動が発生した例が報告されている。

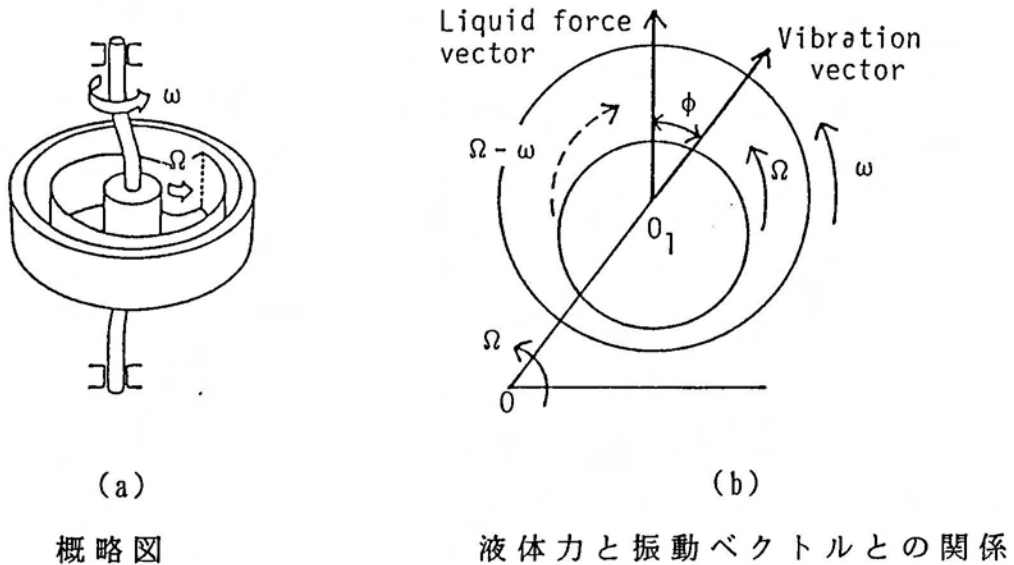
また、ジェットエンジンのコンプレッサ内に漏れて溜まった潤滑油によって同様な激しい非同期ふれ回り運動が生じたとの報告もある。このように、液体を部分的に含む中空回転軸系は、ある回転数域でしばしば自励振動を引起こすことがある。

これらの自励振動の特徴や発生メカニズムは以下のように説明することができる。

まず、発生する自励振動は軸の危険速度にほぼ等しい角速度 Ω で軸の回転と同じ向きにふれ回る、いわゆる前進ふれ回りである。このとき、遠心力によってロータ内の空洞壁に張りついた液体の自由表面には軸に同期して伝播する波動が発生している。自励振動発生時の軸回転数 ω は一般に危険速度 Ω よりも高い。したがって、この波動は図 1・1 (a) に示すようにロータに相対的に軸回転とは逆の方向に $\Omega - \omega$ の角速度で伝播する、いわゆる後進波となる。その位相は液体の粘性のため軸振動に対して常に遅れている。

一方、ロータに作用する液体力の方向は波動の方向にほぼ等しいから、液体力の方向も図 1・1 (b) に示すようにロータ振動に対し、ある角度 ϕ だけ遅れることになる。ロータに固定した回転座標系から見たこの位相の遅れは静止座標系から見ると進みになる。この進みによる液体力のふれ回り方向の成分がロータに作用する減衰力よりも大

きい場合に自励振動が発生する。



概略図

液体力と振動ベクトルとの関係

図 1・1 部分的に液体を内蔵する回転軸

同様な現象は空洞内を比重の異なる 2 種類の液体で満たした場合も起こり得る。

上記のようにこの種の自励振動は液体の自由表面または界面上を軸回転と逆方向に伝播する波動によって引起こされる。したがって、自励振動防止の現実的な対策としては空洞を扇形に分割して波動の伝播を妨げる方式が 1 槽式の遠心分離機などで広く採用されている。

しかしながら、上記のような対策が施されていたにもかかわらず、最近実用化された理化学用の 2 液式超遠心分離機の性能向上のための開発実験の課程で装置の破壊を招くような激しい自励振動が発生し得ることが確認された。

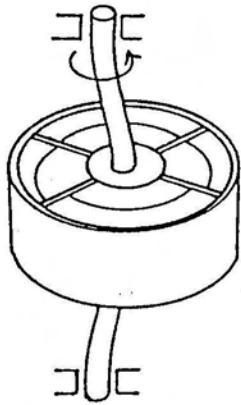
確かに空洞の分割によって液体波動の周方向の伝播は抑制することは可能である。しかし、分割空洞内の液体は遠心力を復元力とする

振動系を構成する。この点で複数の遠心力振子を備えた回転軸系と力学的には類似の構造を持つ。後者については全回転数域で必ずしも系は安定にならないとの解析結果の報告がある。

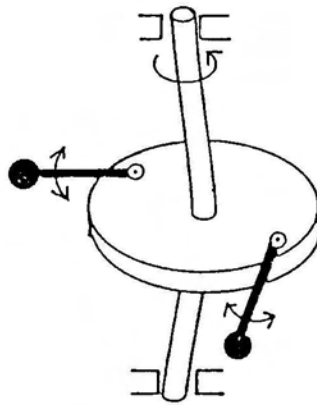
遠心力振子を備えた回転軸系で振子の支点を軸心に一致させると、軸と同心の環状溝内に複数の転動球を入れた回転軸系と力学的に同じ系となる。転動球を内蔵する回転軸系は危険速度以上のある回転数範囲で、部分的に液体を封入した中空回転軸系と同様に、転動球の後進的な運動を伴う自励振動を引起こすことが確認されている。

これらの点を考慮すると図1・2に示すような分割空洞内に2種類の満たした回転軸、遠心力振子を備えた回転軸、転動球を内蔵した回転軸、および未分割空洞内に部分的に液体を封入した回転軸系は互いに類似の自励振動を引き起こす可能性があると考えらるべきである。

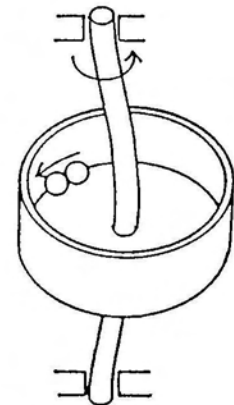
その中で遠心力振子を備えた系は支点の位置によっては他の系とも共通な性質を持つ簡単な系と考えられる。



分割空洞内を2種類の液体で満たした回転軸



遠心力振子を備えた回転軸



転動球を内蔵する回転軸

図1・2 系の類似性

2 液式超遠心分離機の特徴は分離される固形物をロータドラム壁面に付着させずに、それらを密度の異なる2種類の液体の間に形成される密度勾配層内に捕捉する点にある。

そのため操作が簡便で能率が高いだけでなく、分離された固形物の損傷や破壊も防止できるという大きな長所を有している。

この長所は近年進展が著しいバイオテクノロジーや医療工学の分野で大いに注目され、その需要がとみに増大しつつあり、さらに高速化、大容量化への要求も高まりつつある。

しかし、前述のようにこの種の遠心分離機はドラム内を分割してもなお自励振動が発生する可能性があり、それが性能向上に大きな障害になっているのが現状である。

この問題を解決するために本研究では先ず簡単な類似系である遠心力振子を備えた回転軸の動的挙動について解析し、この種の自励振動の定性的な特性を明らかにする。次にこれらの結果を踏まえて密度の異なる2種類の液体で満たされ、分割された中空回転軸の挙動を解析し、自励振動の発生メカニズムやその特性について調べる。さらに系の不安定性に対する主なパラメータの影響を明らかにしてこの種の液体を含む回転機械の具体的設計指針を与える。

1・2 従来の研究と本研究の特色

部分的に液体で満たされた中空回転軸系の不安定振動については Kollmann⁽¹⁾ がガスタービンのブレードの冷却の方法としてロータを中空にして水を封入する方式の装置の開発実験の過程で、液体に自由表面が存在すると危険速度以上のある回転数域で自励振動が発生し、また系の危険速度は $\omega_c^2 = k / M_L$ (k : 軸のばね定数、 M_L : 空洞を完全に満たすに必要な液体の質量と空のロータの質量との和)

と減少することを報告している。Ehrich⁽²⁾ はジェットエンジンのコンプレッサ内に漏れて僅かに溜まっていた潤滑油によって同様な激しい非同期ふれ回りが生じたことを報告している。そして液体の粘性を考慮し一種の安定線図らしきものを求めている。

Wolf⁽³⁾ は非粘性非圧縮性流体を部分的に含んだ中空回転軸についてKollmannの実験を解析した。減衰の無い系で一定振幅のふれ回りを仮定して系の固有振動数を求め実根が存在しない範囲を不安定領域として求め、理論結果が実験とよく一致することを示している。この報告以来多くの研究がなされている⁽⁴⁻¹⁶⁾。

これらの報告は液体を非粘性とみなしているもの^(1, 3, 4, 12)と粘性を考慮したもの^(2, 6-11, 13-16)とに分けられる。金子ら⁽¹⁴⁾、斉藤ら⁽⁶⁻¹¹⁾によると自励振動の発生機構の物理的な解釈として液体の粘性により壁面に作用する液体力に軸心変位と位相のずれた成分が発生し、それが負の減衰力として作用するためであるとされている。

井上ら^(17, 18) は複数の鋼球が円筒空洞内を転動する回転軸系について調べている。危険速度直上のある回転数域では激しい自励振動が発生する。このとき球の公転速度は軸の角速度より遅くなる。すなわち、ロータから見て鋼球は軸回転方向と逆向きに回転している後進波動的な運動をする。そしてこの自励振動は鋼球に作用する粘性抵抗を大きくすると抑制できることを示している。

Ма ча б е л и⁽¹⁹⁾ は不釣合のないロータに一对の振子を付けた系の安定性について理論的に解析し、系の危険速度以上の全回転数域では安定であると言う現実離れした結論を報告している。この報告の中の安定性の解析においては、振子の摂動のみが考慮され、ロータの摂動については無視されている。この他、物理振子をつけた回転軸系としては4個の物理振子を備えた縦型脱水機の自動平衡装置⁽²⁰⁾、あるいは内燃機関のクランク軸やプロペラシャフト等の振り振動防止の

ための動吸振器、いわゆるテラードンパ⁽²¹⁾等があるが、これらの系で不安定振動が発生した報告例は見当たらない、と言うよりも研究対象が不安定振動を扱っていない。このような振子を付けた回転軸系の不安定性についての報告はМацабелл⁽²²⁾の研究報告以外は見当たらない。

部分的に液体で満たされたり、2種類の比重の異なる液体で満たされた中空回転系で自励振動が発生するのは空洞内の液体の自由表面や界面上に波動が発生し、この波動が軸から見て軸の回転方向と逆向きに周方向に伝播するためである。したがって、この自励振動を抑制するには波動の周方向の伝播を妨げればよく、その最も簡単な方法としては空洞内を半径方向に仕切る方法が一般的に採られている。仕切りがやや不完全な、いわゆる抵抗板の制振効果についてはKollmann⁽¹⁾が簡単に触れ、自励振動の発生する軸回転数範囲が狭められることを報告している。

安尾ら^(22, 23)は中空円筒内壁側に設置した流動防止板により液体の表面速度が周方向成分を持たないような流路を内蔵した回転体について理論解析および実験を行っている。理論解析としては、Wolf⁽³⁾と同じように非粘性液体についての微小振動の安定判別を行い、不安定領域および危険速度を求めている。この時、流動防止板のある範囲とない範囲に分けて考え、ない範囲では周方向の速度成分のみを無視して理論解析を行い、得られた解析結果および実験結果をWolfの行った完全に自由な場合の結果と比較している。その結果、表面の流動を防止する板の形状によらず危険速度は完全な自由表面の場合の値と一致すること、自由表面波の出来ない境界条件にもかかわらず自励振動が発生すること、しかしこの自励振動の発生領域は流動防止板がある場合は狭くなることなどを得ている。

下郷ら⁽²⁴⁾は安尾らと同じようにロータ空洞内に抵抗板を設置した

中空回転軸系の不安定性について調べている。理論解析においては非圧縮粘性流体についての微小ふれ回り振動を仮定して、金子ら⁽¹⁴⁾と同様の安定判別を行っている。すなわち、液体力の軸振動の速度に比例する成分が系に働く外部減衰よりも大きくなると不安定になるとしている。粘性の影響、液体の厚みの影響そして仕切りの数の影響などについて理論結果と実験の対比を行っている。不安定領域は抵抗板や液体の厚みが増すと狭められ、液体の粘性が大きくなると不安定域は広くなり抵抗板の存在は余り効果がないと結論付けている。

谷下⁽²⁵⁾は航空発動機のクランク軸が曲げ振動をするとき、その釣合錘が横揺れをする事に着目し、この釣合錘の内部に液体を部分的に封入する波動型動吸振器について述べている。この釣合錘は扇状断面を有している。しかし自励振動などには何ら触れられていない。

ロータ空洞内を半径方向に完全に仕切ると波動の周方向の伝播が抑制されるので、自励振動は発生しないと考えられていた。松下ら⁽²⁶⁾は比重の異なる2種類の液体で完全に満たされ、6分割されたドラムロータを有する理化学用超遠心分離機の高速度・大型化の開発の段階で装置の破壊にいたるほどの激しい自励振動が発生した例を報告している。この自励振動を新たに開発した電磁ダンパによって安定化させている。13800rpmで発生した発散的な自励振動を抑え、30000rpmまで運転可能にしている。ただ自励振動の発生メカニズムなどには触れられていない。このように空洞内を完全に分割してもなお自励振動が発生しているが、これは前述したように分割空洞内の液体が遠心力を復元力とする振動系を構成するので、遠心力振子を複数備えた回転軸と類似の不安定振動を引起こす可能性がある。

本研究は扇形に分割された空洞内に比重の異なる2種類の液体を満たした中空回転軸系に引起こされる自励振動について調べた。

その結果、2種類の液体で満たされた中空回転軸はその空洞を完全

に分割してもなお自励振動が発生する危険性がある。そして、この自励振動は遠心力振子を備えた回転軸系に発生するものと同じ性質のものである。後者の系においては軸の危険速度と振子の固有振動数との和に近い回転数領域で系が不安定となる危険性がある。前者の系においても同様に危険速度と液体に固有振動数との和に近い領域で系が不安定となる危険性がある。ただし、振子と異なり液体は高次のモードの液体波動を伴う自励振動も起こされる可能性がある。さらに振子や液体の1次固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定となることが分かった。

このように2種類の液体で満たされた分割空洞を有する中空回転軸系でもなお自励振動が発生する可能性があること、この自励振動は遠心力振子を備えた回転軸系に発生するものと同じ性質のものであることを見いだしたこと、そしてそれらの性質を明らかにし具体的な自励振動防止策を与えたことが本研究の特色である。

さらに、転動球を内蔵する回転軸系、液体で部分的に満たされた未分割空洞を有する回転軸系等は振子の支点を軸心に一致させた場合である。したがって、系の類似性を考慮すると起こされる自励振動は同じ性質のものである。

1・3 本研究の内容

本論文の本文は第2章より始まる。

第2章では、前述したように2種類の液体で満たされ分割された中空回転軸系は遠心力振子を備えた回転軸系と同じ力学構造をなすので、解析が簡単で現象の把握が容易であるので、予備的考察としてまず遠心力振子を備えた回転軸系の不安定振動について調べた。系の不安定性の基本的な性質を明らかにするため軸や振子の減衰および軸の不釣

合を無視して、軸や振子の微小振動に対して調和バランス法を用いて系の振動数方程式を求める。求められた振動数方程式が実根を持つか否かで系の安定性を調べた。

次に系や振子の減衰および軸の不釣合を考慮した場合について平均法を用いて解析した。系の安定性は定常解からの小さなずれに対する特性方程式をRouth-Hurwitzの安定規範を用いて調べた。

解析の結果、振子が全体として軸に対して相対的に軸の回転方向と逆向きに回転する不釣合力を発生させ、軸を不安定にする回転数域が存在することが分かった。この不安定領域は軸の危険速度と振子の固有振動数との和に等しくなる回転数近傍に存在する。振子の固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定である。

系や振子の減衰が不安定領域に及ぼす影響についても調べた。この不安定性は比較的弱い外部減衰で安定化できることが予測される。しかしながら、振子の減衰が非常に小さいと高回転数域でも不安定になり得る。実験でも危険速度と振子の固有振動数との和に等しい回転数近傍で自励振動が発生する事が確認された^(27, 28, 29)。

第3章では本論文の主題である2種類の比重が異なる液体で満たされ扇形に分割された空洞を持つ回転軸系の動的不安定性について調べた。軸は小さな直線振動か、または円軌道のふれ回りをし、液体の運動は非粘性二次元流れであるとして、液体に対する重力やコリオリの力および軸に対する外部減衰等は無視して系の安定条件を求めた。

解析結果は不安定領域は軸回転数が危険速度と液体の固有振動数との和にほぼ等しい領域で、かつそのような領域でのみ系は不安定になり得ることを示している。液体は振子と異なり高次の波動を伴った自励振動を引き起こす可能性がある。液体の1次固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定である。さらに、本解析結果は未分割空洞内に部分的に液体を満たした場合のWolfの解析結果に非

常によく似ていることが分かった。すなわち、自励振動が発生している時、分割空洞内の液体は全体としてあたかも未分割空洞内に部分的に満たされた液体と同じように後進波動的な挙動をする。ただ、未分割空洞の場合、分割空洞の場合と異なり液体の固有振動数は常に軸回転数より低く自励振動の発生する危険性が常に存在する。

一方向に振動可能な装置を用いて実験を行い、理論の妥当性を検証した。主なパラメータの不安定領域に対する影響についても考察した。空洞分割数を多くすると液体の固有振動数が高くなるので、自励振動の発生領域を高回転数側に移行させることができ、現実的にはその発生領域は狭くなると共に発生する自励振動も弱くなる傾向がある。高次のモードを伴った自励振動は観察されない場合が多いことなどが分かった。具体的な自励振動防止策としては分割数を多くすることが最も効果的である。しかしながら、機械の仕様などでこの方策が採られ難い場合は外部減衰力を作用させて抑制するしかない^(30, 31, 32)。

第4章では、第3章で考察した系に起こされる自励振動は現実には比較的弱い外部減衰によって抑制できることが期待されるので、実際にはどの程度の外部減衰で安定化できるかについて実験的に調べた。

その結果、自励振動は比較的弱い外部減衰で抑制できること、分割空洞数や液体のモード次数が多くまた液体間の密度差が小さい場合は容易に抑制できることなどが分かった。

第5章は本研究の総括である。

なお、補足的な説明のために付録を設けた。

第2章 振子を備えた回転軸による予備的考察

本章では、本論文の主研究対象である比重の異なる2種類の液体で満たされ扇形に分割された空洞をもつ回転軸は、遠心力振子を備えた回転軸と類似の力学的構造をなすので、解析が簡単でかつ現象の把握が容易であることから、予備的考察として遠心力振子を備えた回転軸系について調べ、系の基本的な性質を明らかにする。まず、系の不安定性の基本的な特徴を明らかにするため、系や振子の減衰および軸に不釣り合いがない場合について考察する。次に、減衰や不釣り合いの存在する場合について調べ、これらが系の安定性に及ぼす影響について考察する。理論解析の結果、遠心力振子を備えた回転軸系は軸回転数が系の危険速度と振子の固有振動数との和に等しくなる回転数の近傍で不安定となること、振子の固有振動数が軸回転数より大きい場合は全回転数域で安定であることが分かった。さらに比較的弱い外部減衰で系を安定化できることが予測される。

主な記号

- $O-XY$: 静止座標系
- $O_1-X_1Y_1$: 円板に固定した回転座標系
- O_1, O : 静止時および運動中における円板中心
- a : 振子の支点と軸心との距離
- c : 系の粘性抵抗係数
- c_1 : 振子の固有円振動数の係数
- c_ϕ : 振子の粘性抵抗係数
- G : 振子の重心

- I_G : 振子の重心 G まわりの慣性モーメント
 I_O : 円板の軸心まわりの慣性モーメント
 I_P : 振子の支点まわりの慣性モーメント
 k : 系のばね定数
 k_ϕ : 振子の角変位測定用板ばねのばね定数
 l : 振子の支点と振子の重心 G との距離
 M : 系の全質量
 M_0 : 円板の質量 (不釣合、振子を除く)
 M_1 : 不釣合質量
 m : 振子の質量
 n : 振子の数
 X_0 : 軸の振幅
 $p_1 = c_1 \omega$: 振子の固有円振動数
 q_s : 振子に相対的な軸振動数 ($q_1 = p - \mu$, $q_2 = p + \mu$)
 α_1 : M_1 の取りつけ角
 β_i : i 番目の振子の支点の位相
 $\varepsilon = \sqrt{m/M}$: 微小パラメータ
 $\varepsilon \zeta$: 系の無次元粘性抵抗係数
 $\varepsilon \zeta_1$: 振子の無次元粘性抵抗係数
 $\eta_0 = (\Omega_0/\omega)^2$, $\eta = (\Omega/\omega)^2$
 $\mu = \Omega/\Omega_0$
 $\nu_0 = \Omega_0/\omega$, $\nu = \Omega/\omega$
 ϕ_i : i 番目の振子の角変位
 Ω : 軸の振動数
 Ω_0 : 系の固有振動数
 ω_1 : 不安定領域の中心的な回転数
 $\omega_p = \sqrt{k_\phi/I_P}$: 振子の角変位測定用ばねの固有円振動数

ω : 軸の回転角速度

2・1 運動方程式

図 2・1 に示すように軽い軸の中央に取りつけられた一定の角速度 ω で回転する円板に、軸中心より a の位置に相等しい物理振子を n 個取りつけた系を考える。振子は同一円周上に等間隔に配置されてある。系の運動エネルギー T 、ポテンシャルエネルギー V 、および消散関数 F は

$$2T = M_0(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + I_0\omega^2 + M_1(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + \sum_{i=1}^n \{m(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + I_G(\omega + \dot{\phi}_i)^2\}$$

$$2V = k(X^2 + Y^2) + \sum_{i=1}^n k\phi_i^2$$

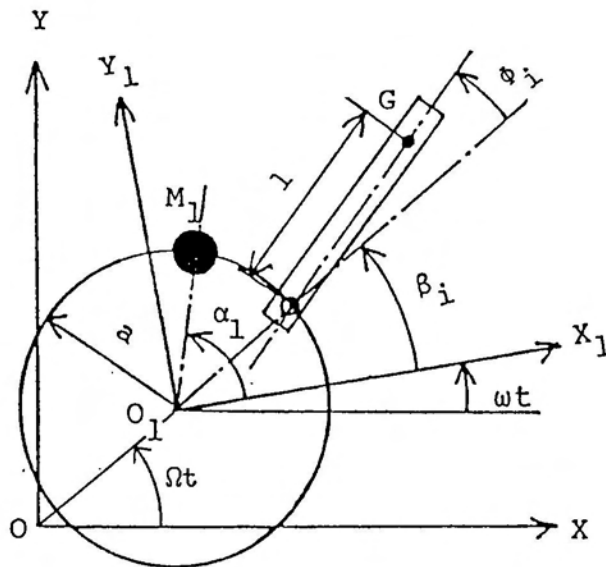


図 2・1 力学系

$$2F = c(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \sum_{i=1}^n c_{\phi} \dot{\phi}_i^2 \quad (2.1)$$

ここで、 X_1 , Y_1 は不釣り合い質量 M_1 の、 x_i , y_i は i 番目の振子の重心 G の座標である。

$$\begin{aligned} X_1 &= X + a \cos(\omega t + \alpha_1), \quad Y_1 = Y + a \sin(\omega t + \alpha_1) \\ x_i &= X + a \cos(\omega t + \beta_i) + l \cos(\omega t + \phi_i + \beta_i) \\ y_i &= Y + a \sin(\omega t + \beta_i) + l \sin(\omega t + \phi_i + \beta_i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

T , V , F を Lagrange の式に代入すると系の運動方程式が求まる。

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + c\dot{X} + kX &= M_1 a \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_1) + m \sum_{i=1}^n \{ a \omega^2 \cos(\omega t + \beta_i) \\ &\quad + l \ddot{\phi}_i \sin(\omega t + \phi_i + \beta_i) + l(\omega + \dot{\phi}_i)^2 \cos(\omega t + \phi_i + \beta_i) \} \\ M\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY &= M_1 a \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_1) + m \sum_{i=1}^n \{ a \omega^2 \sin(\omega t + \beta_i) \\ &\quad - l \ddot{\phi}_i \cos(\omega t + \phi_i + \beta_i) + l(\omega + \dot{\phi}_i)^2 \sin(\omega t + \phi_i + \beta_i) \} \\ I_P \ddot{\phi}_i + c_{\phi} \dot{\phi}_i + m a l \omega^2 \sin \phi_i + k_{\phi} \phi_i &= m l \{ \ddot{X} \sin(\omega t + \phi_i + \beta_i) \\ &\quad - \ddot{Y} \cos(\omega t + \phi_i + \beta_i) \} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

なお振子の角変位 ϕ_i を測定する必要上振り子の支点にごく柔らかいばねが取り付けられている。このばねの存在は振子の復元力を僅かに大きくするのみであり、系の挙動に本質的な影響を与えない。

以後簡単のため系は Y 方向を拘束して X 方向のみに運動する場合を考える。系の質量 M は振子の質量 m や不釣り合い質量 M_1 に比べて非常に

大きく、また系や振子の粘性抵抗も小さいことを考慮して、正の微小パラメータ ε を導入して

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{M}, \quad \tau = \Omega_0 t, \quad \varepsilon^2 = \frac{m}{M}, \quad \varepsilon^2 \delta = \frac{M_1 a}{Ml}, \quad \varepsilon \zeta = \frac{c}{M\Omega_0}, \quad \varepsilon \zeta_1 = \frac{c}{I_p \Omega_0},$$

$$\alpha = \frac{a}{l}, \quad \Omega_p^2 = \frac{k_p}{I_p}, \quad q = \frac{\omega_p}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{m l^2}{I_p}, \quad x = \frac{X}{\varepsilon l}, \quad p = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \mu = \frac{\Omega}{\Omega_0}$$

(2.4)

とにおいて式 (2.3) を書き改めると

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x = & \varepsilon [-\zeta \dot{x}' + \delta p^2 \cos(p\tau + \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \{ \alpha p^2 \cos(p\tau + \beta_i) \\ & + \phi_i'' \sin(p\tau + \phi_i + \beta_i) + (p + \phi_i')^2 \cos(p\tau + \phi_i + \beta_i) \}] \\ \phi_i'' + \alpha \beta p^2 \sin \phi_i + q^2 \phi_i = & \varepsilon [-\zeta_1 \phi_i' + \beta x'' \sin(p\tau + \phi_i + \beta_i)] \\ & (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

(2.5)

ただし、' は τ に関する微分を表す。

2.2 減衰がない場合

系や振子の減衰および不釣合を無視すると式 (2.5) は

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x = & \varepsilon \sum_{i=1}^n \{ \phi_i'' \sin(p\tau + \phi_i + \beta_i) + (p + \phi_i')^2 \cos(p\tau + \phi_i + \beta_i) \} \\ \phi_i'' + \alpha \beta p^2 \sin \phi_i + q^2 \phi_i = & \varepsilon \beta x'' \sin(p\tau + \phi_i + \beta_i) \end{aligned}$$

(2.6)

振子が等間隔に配置されており、軸振動や振子の変位が小さいとしてそれらの2次以上の項を無視すると、式(2・6)は

$$\begin{aligned}
 x'' + x &= \varepsilon \sum_{i=1}^n \{ \phi_i'' \sin(p\tau + \beta_i) - p^2 \phi_i \sin(p\tau + \beta_i) \\
 &\quad + 2p \phi_i' \cos(p\tau + \beta_i) \} \\
 \phi_i'' + \sigma_1^2 \phi_i &= \varepsilon \beta x'' \sin(p\tau + \beta_i)
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

ここで、 σ_1 は振子の無次元固有振動数であり、 c_1 はその係数である。

$$\sigma_1 = c_1 p, \quad c_1^2 = \alpha\beta + (q/p)^2
 \tag{2.8}$$

いま、軸が $x = x_0 \cos \mu \tau$ ($\mu = \Omega / \Omega_0$) の調和振動をしていると仮定し、式(2.7)の第2式に代入すると

$$\phi_i'' + \sigma_1^2 \phi_i = -\frac{1}{2} \varepsilon \beta x_0 \mu^2 \sum_{s=1}^2 \sin(q_s \tau + \beta_i)
 \tag{2.9}$$

ただし、 q_s は振子から見たロータの振動数で、 $q_1 = p - \mu$,
 $q_2 = p + \mu$ である。

式(2.9)より

$$\phi_i'' = -\frac{1}{2} \varepsilon \beta x_0 \mu^2 \sum_{s=1}^2 \frac{1}{\sigma_1^2 - q_s^2} \sin(q_s \tau + \beta_i)
 \tag{2.10}$$

式(2.10)を式(2.7)の第1式に代入して、調和バランス法⁽³³⁾を適用すると

$$1 - \mu^2 = \lambda \mu^2 \left[\frac{\mu^2}{\sigma_1^2 - (p - \mu)^2} + \frac{\mu^2}{\sigma_1^2 - (p + \mu)^2} \right]
 \tag{2.11}$$

ここで $\lambda = n \varepsilon^2 \beta / 4$ である。

式(2.11)を物理量を用いて書き改めると

$$-\Omega^2 + \Omega_0^2 = \lambda\Omega^2 \left[\frac{\Omega^2}{p_1^2 - (\omega - \Omega)^2} + \frac{\Omega^2}{p_1^2 - (\omega + \Omega)^2} \right] \quad (2 \cdot 12)$$

ここで、 $p_1 = c_1 \omega$ は振子の固有振動数である

式(2・12)は振子の力(右辺)と軸力(慣性力とばね力=左辺)との釣合いを要求する式であるが、系の固有振動数 Ω を決定する振動数方程式でもある。もし式(2・12)が共役な複素根、たとえば $\Omega = \alpha \pm i\beta$ ($i^2 = -1$, $\beta > 0$) を持つと系の運動は $\exp(\beta t) \cos \alpha t$ の成分を持つことになり、系には自励振動が発生することになる。

式(2・12)を次の様な無次元式に書き改める。

$$F_1 = F_2 \quad (2 \cdot 13)$$

ここで

$$F_1 = \eta_0 - \eta, \quad F_2 = -2\lambda\eta^2 \frac{\{\eta - (c_1 - 1)\}}{\{\eta - (c_1 - 1)\}^2 \{\eta - (c_1 + 1)\}^2},$$

$$\eta_0 = (\Omega_0/\omega)^2, \quad \eta = (\Omega/\omega)^2 \quad (2 \cdot 14)$$

η は系の無次元固有振動数である。

F_1 および F_2 と η との関係を模式的に書くと図2・2のようになる。振子の力 F_2 は漸近線 $F_2 = -2\lambda\eta$ を持ち、振子が軸振動に共振する $\eta = (1 \pm c_1)^2$ で無限大になる。軸力 F_2 は勾配-1の直線でその切片 η_0 は軸回転数 ω の二乗に反比例する。この切片 η_0 は軸回転数を上げると小さくなる。

式(2・12)すなわち(2・13)の実根は F_1 と F_2 との交点で与えられる。図2・2に示すように振子の固有振動数の係数 c_1 が1より小さくない時は実根は3根とも正となり系は全回転数域で安定

となる。一方、 $c_1 < 1$ の時は F_1 と F_2 が $\eta = (1 - c_1)^2$ 近傍で交わるような軸回転数 η_0 に対して一対の共役複素根が存在して、系が不安定となる可能性がある。

式(2・12)の実根、すなわち系の固有振動数 Ω と軸回転数 ω との定性的な関係は F_2 が $\eta = (1 - c_1)^2$, $\eta = (1 + c_1)^2$ および F_3 の3つの漸近線を持つことを考慮に入れると容易に推定でき

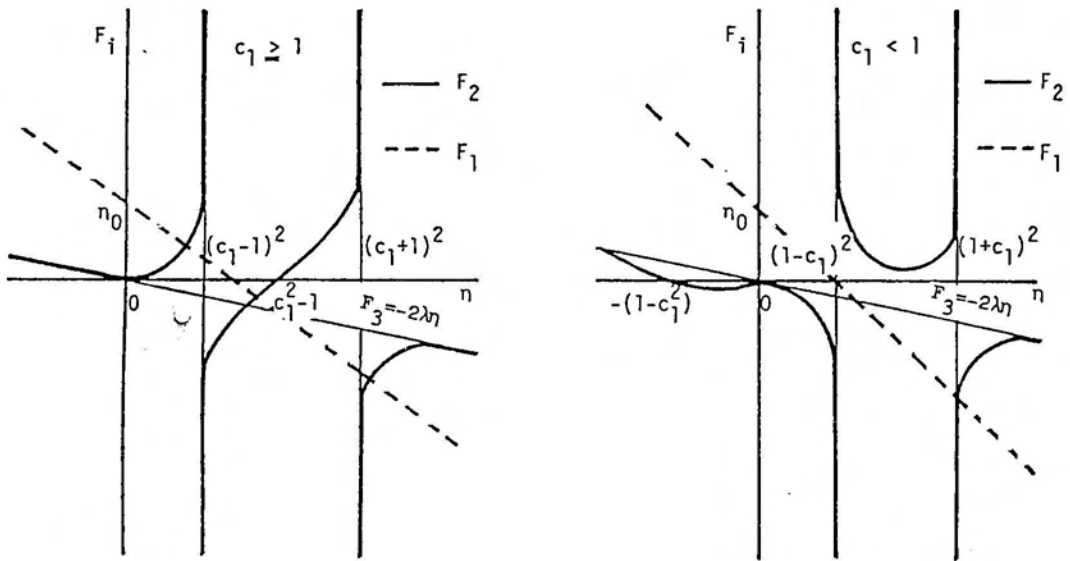


図 2・2 軸力と振子の力の関係

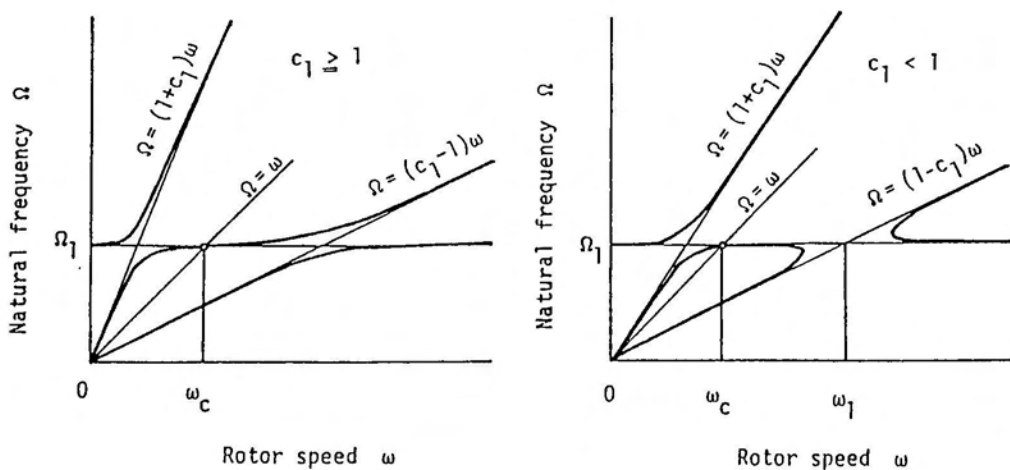


図 2・3 系の固有振動数

る。Ωとωの関係を図2・3に示す。ただし、3つの負根は正根と同じ絶対値を持つから省略した。

$c_1 < 1$ の場合、 $\Omega = \Omega_1$ と $\Omega = (1 - c_1)\omega$ との交点近傍では2実根と2対の共役複素根を持ち系は不安定となる。この交点での回転数 ω_1 は

$$\omega_1 = \Omega_1 / (1 - c_1), \quad \Omega_1 = \Omega_0 / \sqrt{1 - 2\lambda} \quad (2 \cdot 15)$$

ω_1 は不安定領域の中心的な回転数を与える。系の危険速度 ω_c は式(2・12)で $\Omega = \omega$ において

$$\omega_c = \Omega_0 / \sqrt{1 + 2\lambda(2 - c_1^2) / c_1^2(4 - c_1^2)} \quad (2 \cdot 16)$$

λ は1に比べて非常に小さいので $\omega_c \approx \Omega_1$ と考えてよいから、式(2・15)より $\omega_1 \approx \omega_c / (1 - c_1)$ 、あるいはこの場合 $\omega_1 c_1 = p_1$ であるから不安定領域の中心的な回転数 ω_1 は

$$\omega_1 \approx \omega_c + p_1 \quad (2 \cdot 17)$$

式(2・17)は軸回転数が系の危険速度 ω_c と振子の固有振動数 Ω との和にほぼ等しくなるような領域で、系が不安定になる可能性があることを示している。

この不安定領域の中心的な回転数 ω_1 は $\Omega = \omega_c + \omega_1 c_1$ と $\Omega = \omega$ との交点で与えられるから振子の固有振動数 p_1 の係数 c_1 が大きくなると高回転数側に移行し、1以上になると全回転数域で安定となる。すなわち、振子の固有振動数が軸回転数より低くない場合は全回転数域で安定である。

振り子の固有振動数 p_1 は係数 c_1 と軸回転数 ω の積であるので、式(2・8)から分かるように係数 c_1 は振子の支点と軸心との距離 a と振子の長さ l との比 α に依存しているので振子の支点を軸中心か

らかなり離さないとき系が不安定となり、自励振動が発生する危険性がある。

式(2・13)は次の様な3次方程式に書き改められる。

$$\eta^3 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3 = 0 \quad (2\cdot18)$$

ただし

$$a_1 = \{2\lambda(c_1^2 - 1) - 2(c_1^2 + 1) - \eta_0\}/(1 - 2\lambda)$$

$$a_2 = \{(c_1^2 - 1)^2 + 2(c_1^2 + 1)\eta_0\}/(1 - 2\lambda)$$

$$a_3 = (c_1^2 - 1)\eta_0/(1 - 2\lambda)$$

(2・19)

η の3次方程式(2・18)の実根はすべて正であるので、系の安定性はその判別式の符号で簡単に調べることが出来る⁽³⁴⁾。3次方程式

(2・18)の判別式Dは

$$D = \left\{\frac{1}{3}(a_2 - \frac{a_1^2}{3})\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(a_3 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3)\right\}^3 \quad (2\cdot20)$$

もし $D > 0$ ならば式(2・12)は二対の共役複素根を持つ。このようにして式(2・12)の全ての根を求めなくても系の不安定領域が求められる。

系が不安定である時、円板に固定した回転座標系に相対的な軸の振動数は $\Omega - \omega = -c_1\omega$ で、軸回転数 ω は軸振動数 Ω より大きくなり、振子の力のベクトルは円板に固定した回転座標系から見て負の回転つまり後進波動的な動きをする。

振子の変位 Φ_1 は式(2・10)から計算して、図2・4のように推定できる。図はロータに固定した回転座標系から見た振子の変位を示している。振子の力の方向は振子の変位の方向に同じと考えてよいから、振子の力のベクトルの方向を▲で図中に示す。図からも分かる

ように、振子の力はロータに相対的に軸の回転方向と逆向きに回っている。すなわち、振子は軸に対して逆方向に回転する不釣り合い力を発生し、系には自励振動が引起こされる。

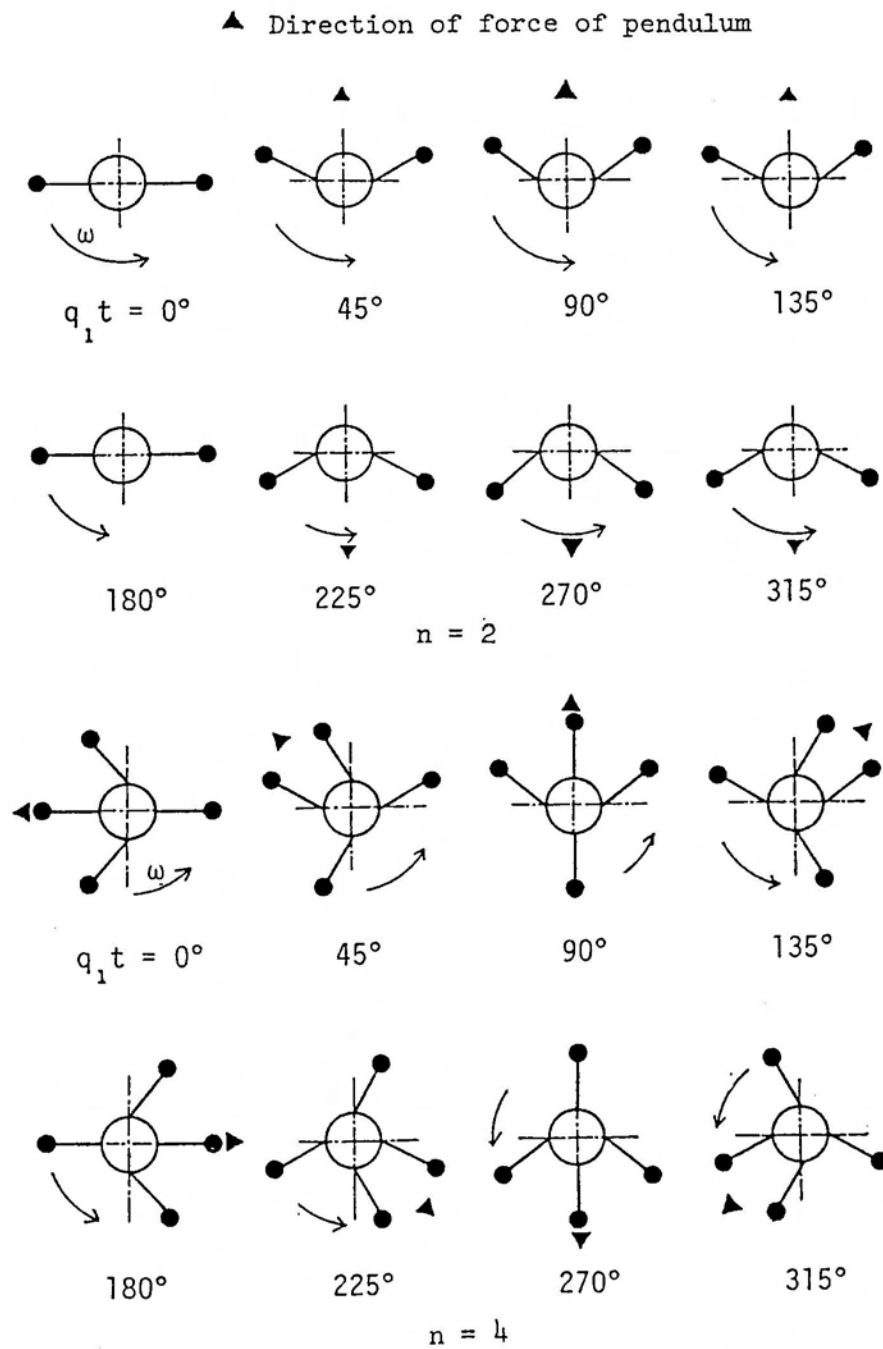


図 2 ・ 4 振子の挙動 (不安定時)

なお、軸が $x = x_0 \cos \Omega t$, $y = x_0 \sin \Omega t$ の小さい円軌道でふれ回る場合は式 (2・9) および式 (2・10) の右辺を 2 倍し、 q_2 の項を除けばよい。

この場合の振動数方程式は式 (2・12) 及び式 (2・13) のかわりに

$$-\Omega^2 + \Omega_0^2 = 2\lambda\Omega^2 \frac{\Omega^2}{p_1^2 - (\omega - \Omega)^2} \quad (2\cdot21)$$

$$v_0^2 - v^2 = -2\lambda v^2 \frac{v^2}{\{v - (1 - c_1)\}\{v - (1 + c_1)\}} \quad (2\cdot22)$$

ここで、 $\nu_0 = \Omega_0 / \omega$, $\nu = \Omega / \omega$ である。

式 (2・21) は Ω に関する 4 次方程式であり、 $c_1 < 1$ の場合のみに一対の共役複素根を持つ軸回転数 ω が存在し、系が不安定となり得る。この時の不安定領域の中心的な回転数 ω_1 は式 (2・15) で示される値と同じである。式 (2・21) で $\Omega = \omega$ と置くとふれ回り運動をしているときの危険速度 ω_c^* は次の様に求められる。

$$\omega_c^* = \Omega_1 / \sqrt{1 + 2\lambda/c_1}, \quad \Omega_1 = \Omega_0 / \sqrt{1 - 2\lambda} \quad (2\cdot23)$$

λ は 1 に比べて非常に小さいので、ふれ回り運動をしている時の危険速度 ω_c^* と一方向のみに振動する場合の危険速度 ω_c とは実質上同じで不安定領域の中心的な回転数 ω_1 に関する式 (2・17) は軸がふれ回る場合も適用できると考えてよい。

式 (2・22) は次の様な ν の 4 次方程式に表せる。

$$\nu^4 + a_1\nu^3 + a_2\nu^2 + a_3\nu + a_4 = 0 \quad (2\cdot24)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -2/(1 - 2\lambda), \quad a_2 = (1 - c_1^2 - v_0^2)/(1 - 2\lambda), \\
 a_3 &= 2v_0^2/(1 - 2\lambda), \quad a_4 = -(1 - c_1^2)v_0^2/(1 - 2\lambda)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

式(2.24)をFerrariの⁽³⁵⁾公式を用いて2次方程式の積の形に因数分解して、それらの係数を用いて判別式を求めれば系の安定性が予測できる。軸が円軌道でふれ回る場合は、直線振動する場合に比べて不安定領域はおよそ $\sqrt{2}$ 倍広がるだけであって系の安定性には本質的な差異はない。

2.3 減衰を考慮した場合

軸や振子の減衰を考慮し、かつ軸に不釣合がある場合について考察する。式(2.5)を平均法⁽³⁶⁾を用いて解析する。式(2.5)の母解を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
 x &= A \cos p\tau + B \sin p\tau, \quad x' = -pA \sin p\tau + pB \cos p\tau \\
 \phi_i &= \phi_i, \quad \phi_i' = \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

ここで、 A , B , ϕ_i はゆっくり変化する τ の関数である。式(2.26)の第1式を τ で微分したものと第2式を等置すると

$$A' \cos p\tau + B' \sin p\tau = 0 \tag{2.27}$$

式(2.26)を式(2.5)に代入し、式(2.27)を用いて A' , B' などを求め、 A , B などがゆっくり変化する τ の関数であることを考慮にいれて、 x の1サイクルにわたって平均をとる。平均値を改めて A , B , ϕ_i , ψ_i と書くとこれらの式は

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{\varepsilon}{2p} \left[-\zeta_p A + \alpha_p B + \delta p^2 \sin \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \{ \alpha p^2 \sin \beta_i + (p + \psi_i)^2 \sin(\phi_i + \beta_i) \} \right] \\
B' &= \frac{\varepsilon}{2p} \left[-\alpha_p A - \zeta_p B + \delta p^2 \cos \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \{ \alpha p^2 \cos \beta_i + (p + \psi_i)^2 \cos(\phi_i + \beta_i) \} \right] \\
\psi_i' &= \varepsilon \left[-\frac{\alpha \beta p^2}{\varepsilon} \sin \phi_i - \zeta_1 \psi_i - \frac{g^2}{\varepsilon} \phi_i - \frac{1}{2} \beta p^2 \{ A \sin(\phi_i + \beta_i) + B \cos(\phi_i + \beta_i) \} \right] \\
\phi_i' &= \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

(2.28)

ここで $\alpha_p = (1 - p^2) / \varepsilon$ である。

定常状態では式(2.28)において時間微分項が0となる。すなわち、定常解は

$$A' = B' = \phi_i' = 0 \quad (2.29)$$

とおくことによって得られる。定常値を A_0 , B_0 , ϕ_{i0} とおくと

$$\begin{aligned}
\zeta_p A_0 - \alpha_p B_0 &= \delta p^2 \sin \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \{ \alpha p^2 \sin \beta_i + p^2 \sin(\phi_{i0} + \beta_i) \} \\
\alpha_p A_0 - \zeta_p B_0 &= \delta p^2 \cos \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \{ \alpha p^2 \cos \beta_i + p^2 \cos(\phi_{i0} + \beta_i) \} \\
2\alpha \sin \phi_{i0} + \frac{2g^2}{\beta p^2} \phi_{i0} &= -\varepsilon \{ A_0 \sin(\phi_{i0} + \beta_i) + B_0 \cos(\phi_{i0} + \beta_i) \} \\
&(i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

(2.30)

式(2.30)の第1式および第2式より振幅 A_0 , B_0 を求めて第3式に代入すると振子の角変位 ϕ_{i0} が求まる。

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{p^2}{\alpha_p^2 + (\zeta p)^2} \left[\zeta p \left\{ \delta \sin \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \sin(\phi_{i0} + \beta_i) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_p \left\{ \delta \cos \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \cos(\phi_{i0} + \beta_i) \right\} \right] \\
B_0 &= \frac{p^2}{\alpha_p^2 + (\zeta p)^2} \left[\zeta p \left\{ \delta \cos \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \cos(\phi_{i0} + \beta_i) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \alpha_p \left\{ \delta \sin \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \sin(\phi_{i0} + \beta_i) \right\} \right] \\
\frac{\alpha}{\varepsilon} \sin \phi_{i0} + \frac{q}{\varepsilon \beta p^2} \phi_{i0} + \frac{p^2}{2\sqrt{\alpha_p^2 + (\zeta p)^2}} &\left[\delta \sin(\phi_{i0} + \beta_i - \alpha_1 - \gamma_p) \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^n \sin(\phi_{i0} + \beta_i + \gamma_p - \phi_{k0} - \beta_k) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ただし

$$\gamma_p = \tan^{-1} \left(\frac{p\zeta}{\alpha_p} \right) \tag{2.32}$$

定常状態では、振子は危険速度以下の回転数域 ($\omega < \omega_n$) においては不釣合を助長するが、危険速度以上 ($\omega > \omega_n$) では不釣合を減少させる配置となる。しかし、危険速度以上のある回転数域では定常解が不安定となる可能性がある。

定常解の安定性は定常解からの小さなずれを考慮して調べることが出来る。すなわち定常解からの小さなずれを a , b , w_i , v_i とし

$$A = A_0 + a, \quad B = B_0 + b, \quad \phi_i = \phi_{i0} + v_i, \quad v_i' = w_i \tag{2.33}$$

とにおいて、式(2.28)に代入して ε の2次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned}
\frac{2p}{\varepsilon}a' &= -\zeta_p a + \alpha_p b + \sum_{i=1}^n \{2p \sin(\phi_{i0} + \beta_i) w_i + p^2 \cos(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha \beta \cos \phi_{i0}) v_i\} \\
\frac{2p}{\varepsilon}b' &= -\alpha_p a + \zeta_p b + \sum_{i=1}^n \{2p \cos(\phi_{i0} + \beta_i) w_i - p^2 \sin(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha \beta \cos \phi_{i0}) v_i\} \\
w_i' &= \varepsilon \left[-\zeta_1 w_i - \left\{ \frac{\alpha \beta p^2}{\varepsilon} \cos \phi_{i0} + \frac{q^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \beta p^2 A_0 \cos(\phi_{i0} + \beta_i) - B_0 \sin(\phi_{i0} + \beta_i) \right\} v_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \beta p^2 \sin(\phi_{i0} + \beta_i) a - \frac{1}{2} \beta p^2 \cos(\phi_{i0} + \beta_i) b \right] \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

(2.34)

式(2.34)において

$$a = a_0 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2p} \lambda \tau\right), b = b_0 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2p} \lambda \tau\right), v_i = v_{i0} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2p} \lambda \tau\right), w_i = w_{i0} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2p} \lambda \tau\right)$$

(2.35)

とおくと

$$\begin{aligned}
(-\lambda - \zeta_p) a_0 + \alpha_p b_0 + \sum_{i=1}^n (X_{1i} w_{i0} + G_{1i} v_{i0}) &= 0 \\
-\alpha_p a_0 + (-\lambda - \zeta_p) b_0 + \sum_{i=1}^n (X_{2i} w_{i0} + G_{2i} v_{i0}) &= 0 \\
H_{i1} a_0 + H_{i2} b_0 + (-\lambda - 2p\zeta_1) w_i - Y_{ii} v_{i0} &= 0 \\
\frac{2p}{\varepsilon} w_{i0} - v_{i0} &= 0
\end{aligned}$$

(2.36)

ここで

$$\begin{aligned}
X_{1i} &= 2p \sin(\phi_{i0} + \beta_i), & G_{1i} &= p^2 \cos(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha \beta \cos \phi_{i0}) \\
X_{2i} &= 2p \cos(\phi_{i0} + \beta_i), & G_{2i} &= -p^2 \sin(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha \beta \cos \phi_{i0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{1i} &= 2p\sin(\phi_{i0} + \beta_i), \quad G_{1i} = p^2 \cos(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha\beta\cos\phi_{i0}) \\
 X_{2i} &= 2p\cos(\phi_{i0} + \beta_i), \quad G_{2i} = -p^2 \sin(\phi_{i0} + \beta_i)(1 + \alpha\beta\cos\phi_{i0}) \\
 H_{11} &= -p^3\beta\sin(\phi_{i0} + \beta_i), \quad H_{i2} = -p^3\beta\cos(\phi_{i0} + \beta_i) \\
 Y_{ii} &= -\frac{p^3\beta}{\epsilon} \{ 2\alpha\cos\phi_{i0} + \epsilon A_0 \cos(\phi_{i0} + \beta_i) - \epsilon B_0 \sin(\phi_{i0} + \beta_i) - \frac{2a^2 p}{\epsilon} \} \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

(2.37)

式(2.36)の特性方程式は 係数行列式 = 0 とおいて求められる。これを式(2.38)の形に表す。

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{2.38}$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix}
 -\zeta p & \alpha_p & X_{11} & \dots & X_{1i} & \dots & X_{1n} & G_{11} & \dots & G_{1i} & \dots & G_{1n} \\
 -\alpha_p & -\zeta p & X_{21} & \dots & X_{2i} & \dots & X_{2n} & G_{21} & \dots & G_{2i} & \dots & G_{2n} \\
 H_{11} & H_{12} & -2p\zeta_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & Y_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 H_{i1} & H_{i2} & 0 & \dots & -2p\zeta_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & Y_{ii} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 H_{n1} & H_{n2} & 0 & \dots & 0 & \dots & -2p\zeta_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & Y_{nn} \\
 0 & 0 & 2p/\epsilon & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 2p/\epsilon & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 2p/\epsilon & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
 \end{pmatrix}$$

(2.39)

Aは(n+2) × (n+2)の行列であり、この行列の特性方程式の係数をDanilevsky法⁽³⁷⁾で求め、その係数を用いてRouth-Hurwitzの安定規範を用いて安定判別を行った。

安定判別の結果を図 2・5 に示す。同図は系の安定性に対する系の減衰 ε とおよび振子の減衰 ε_1 の影響についての計算結果であり、パラメータは実験の例と同じである。曲線の内側の領域では安定であ

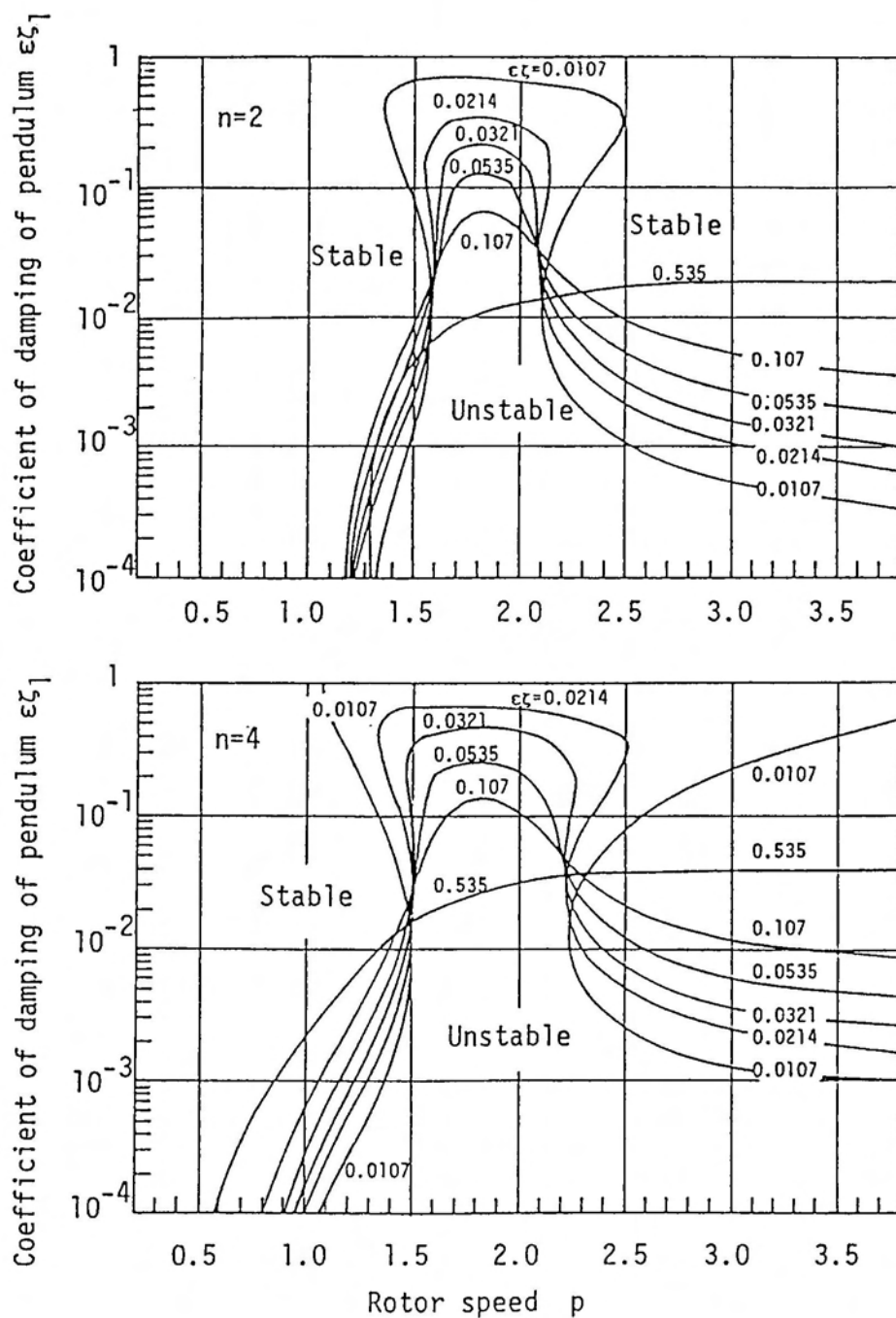


図 2・5 安定判別の結果

り、外側では不安定である。この不安定領域は系や振子の減衰、支点の位置などによっても異なるが、系や振子の減衰を無視した場合と同じように系の危険速度と振子の固有振動数との和に等しくなる軸回転数、すなわち $p = 1 + \sqrt{\alpha \beta p^2 + q^2}$ ($= 1.62$) の近傍に存在する。したがって、式(2・17)は遠心力振子を備えた回転軸系の不安定領域に対する中心的な回転数を与えることが分かる。

減衰が大きい場合は全回転数域で安定となるが、比較的弱い外部減衰で安定化できることが分かる。しかし、図から分かるように振子の減衰があまりにも小さいと高回転数域でも不安定となる。

振子の数が増すと不安定域は広くなる。不釣合が極端に大きいと全回転数域で安定となる。不釣合の位置の変化は安定領域には影響を与えない。

なお、Y方向の運動を拘束しない場合、すなわち軸が円軌道でふれ回る場合は解析上の違いは式(2・28)の第3式第4項が2倍になるだけである。これによって振子がロータの振動の影響をそれだけ受けやすくなり、不安定振動が発生しやすくなるが系の挙動には本質的な差異はない。

2・4 実験

実験は系の運動を一平面内に拘束して行った。実験装置の概略を図2・6に、その写真を図2・7に示す。

円板には4個の等しい物理振子が軸心より $a = 20\text{mm}$ の位置に同一円周上に等間隔で取り付けられ、図2・6に示す様に直流電動機(プリントモータ 200W)と共に板ばねで支持された台に取り付けられている。振子は質量が $m = 83.5\text{g}$ 、支点まわりの慣性モーメン

トは $I_P = 1.10 \times 10^{-3} \text{kgm}^2$ 、 支点と振り子の重心との距離は $l = 68.5 \text{mm}$ である。系の全質量は $M = 8.27 \text{kg}$ 、 危険速度は $\omega_c = 14.24 \text{Hz}$ である。

なお、振り子の角変位を測定するために図 2・7 に示す様に振り子の支点にごく柔らかい板ばねを取りつけている。この板ばねの固有振動数は $\omega_p = 2.5 \text{Hz}$ である。

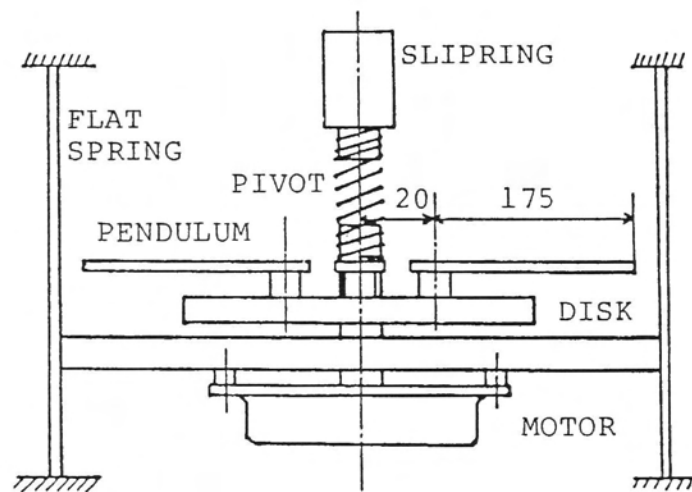


図 2・6 実験装置

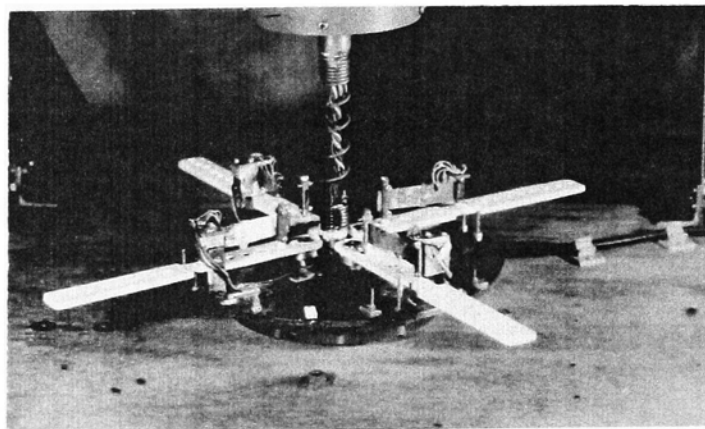


図 2・7 実験装置

系の振幅は板ばねに貼り付けた歪ゲージにより、振子の角変位は振子の支点に取りつけられた板ばねに貼付した歪ゲージによりスリップリングを介して測定した。振子の挙動はストロボスコープを用いて観察した。

振子が4個の場合の系の応答曲線を図2・8に示す。この時不釣合 $6.25g \times 95mm$ が1番目の振子より 45° 進んだ位置に取りつけてある。図中の○は実験点をそれに隣接する曲線は計算結果を示す。曲線の中絶はこの範囲で系が不安定であることを示す。矢印で示される範囲は減衰や不釣合を無視した場合の不安定領域の計算結果である。図には式(2・5)より求めた不安定領域の中心的な回転数 ω_1 も示してある。この例 ($n=4$) では不安定領域は $21.40Hz \sim 32.29Hz$ と計算で求められるが、実験では $23.9Hz$ で自励振動が発生した。この時、振子の振幅は急速に発散拡大して、振子は安全のため設けた振子

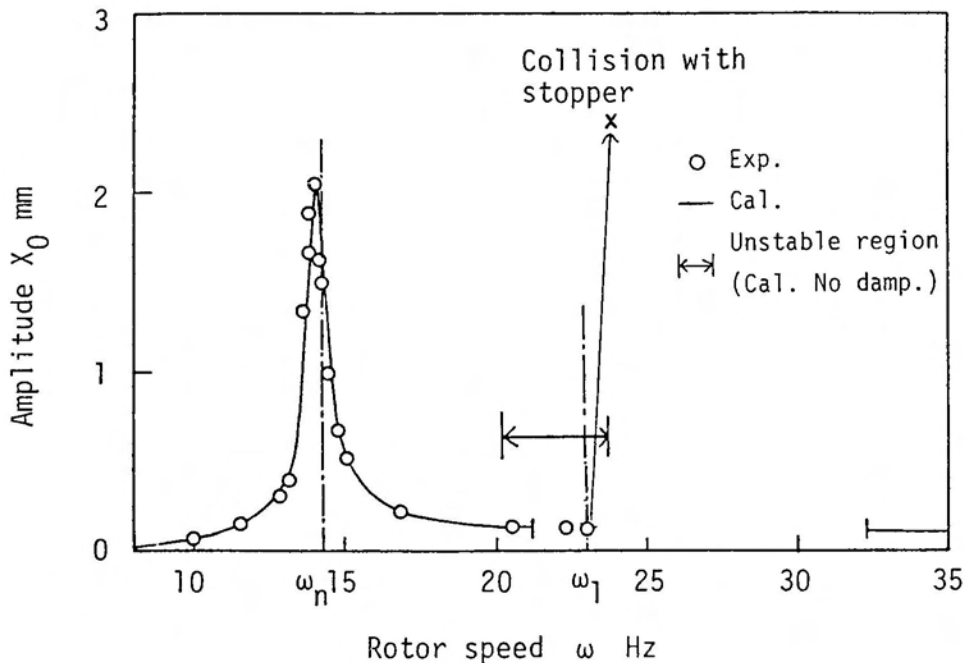


図2・8 系の応答

のストッパに衝突して不安定領域の下限しか求めることができなかった。

一对の振り子を付けた場合 ($n = 2$) では $22.48\text{Hz} \sim 30.40\text{Hz}$ と不安定領域は求められるが、実験では 23.1Hz で $n = 4$ の例と同様に自励振動が発生した。この時不釣合は1番目の振り子より 90° 進んで取りつけられている。

系や振子の減衰および不釣合を無視し、一对の振り子を取り付けた場合 ($n = 2$)、不安定領域は計算では $20.69\text{Hz} \sim 23.1\text{Hz}$ と求められるが、実験では 24.8Hz で振子が急速に激しく発散的する、自励振動が発生した。

Мацабели⁽¹⁹⁾ は減衰および不釣合のないロータに一对の振り子を備えた回転軸系の安定性について理論的な解析を行い、系の危険速度以上の回転数においては安定であるという現実には合わない結果を報告している。本解析と異なる結果になっているのは系の安定性の解析において振子の摂動のみ考慮し、ロータの摂動は無視しているためである。

2・5 結論

本章では、2種類の比重の異なる液体で満たされ扇形に分割された空洞をもつ中空回転軸は、遠心力振子を備えた回転軸と類似の力学的構造をなすので、予備的考察として遠心力振子を備えた回転軸系の不安定性について調べた。その結果、次の結論を得た。

(1) 振子が全体として軸に対して相対的に逆方向に回転する不釣り合い力を発生させ軸を不安定にする回転数域が存在する。

(2) この不安定は系の危険速度と振子の固有振動数との和に等し

くなる軸回転数の近傍に存在する。そのような回転数域のみで、系に自励振動が発生する可能性がある。

(3) 振子の固有振動数が軸の回転数より大きい場合は全回転数域で安定である。

(4) 系や振子の減衰および不釣合を極端に大きくするか、振子の支点を軸心よりかなり離さない限り系が不安定となる回転数域が存在する。

(5) しかしながら、この自励振動は比較的弱い外部減衰で安定化出来ることが予測される。ただ、振子の減衰があまりにも小さいと高回転数域でも不安定となり得る。

第3章 2種類の液体で満たされ分割された中空回転軸の動的不安定（粘性および減衰を無視した場合）

本章では比重の異なる2種類の液体で満たされ、分割された空洞を有する回転軸系の動的不安定性について考察する。この系は第2章で考察した、遠心力振子を取り付けた回転軸系と類似の力学構造を持っているから後者と同じ性質の自励振動を引き起こし得ると考えられる。遠心力振子は剛体であるので振動モードは1つしか持たない。しかし、空洞内の液体は連続体であるので高次のモードを伴う自励振動を引き起こす可能性がある。主なパラメータが系の不安定に及ぼす影響についても考察した。

主な記号

- $O-XY$: 静止座標系
- $O_1-X_1Y_1$: 回転軸に固定した動座標系
- c_m : 液体の m 次固有円振動数の係数
- C_x, C_y : 液体境界に立てた外向き法線と X_1, Y_1 軸との方向余弦
- F_{x1}, F_{y1} : 液体力の X_1, Y_1 方向成分
- H_i : 第 i 区での自由界面の変位
- H_0 : 密度のより大きい液体の平均層厚
- K : 系のばね定数
- $k = m\pi/\theta_1$
- M : 液体を除いた系の質量
- m : 液体の振動の次数
- n : 空洞の分割数

- P_{ij} : 第 i 区第 j 液の圧力
 P_{ij}^* : 軸回転による静圧
 P_{ij} : 軸振動による圧力
 $P_m = c_m \omega$: 液体の m 次固有円振動数
 R, θ : 各区における円筒座標
 R_0 : 自由界面の平均半径
 R_1, R_2 : 空洞の内側および外側の半径
 $r_j = R_j/R_0$
 U_{ij}, V_{ij} : 第 i 区第 j 液の流速の R, θ の方向成分
 X, Y : 軸変位の X, Y 方向成分
 X_0 : 軸変位の振幅
 Z_0 : 空洞の軸方向長さ
 $\alpha_i = 2\pi(i-1)/n$: 第 $i-1$ 区と第 i 区間の仕切板の位置
 β_{is} : 第 i 区の液体振動の位相
 $\eta = (\Omega/\omega)^2, \eta_0 = (\Omega_0/\omega)^2$
 θ_1 : 各分割区間の占める角度
 ρ_j : 第 j 液の密度
 ψ_{ij} : 第 i 区第 j 液の流れ関数
 Ω : 液体を含む軸の固有円振動数
 Ω_0 : 液体を含まない軸の固有円振動数
 ω : 軸の回転数
 ω_c : 液体を含む軸の危険速度
 ω_m : 不安定領域の中心的な回転数

3・1 基礎方程式

系の概略を図 3・1 に示す。軸は内側および外側の半径 R_1, R_2 , 長

さ Z_0 の環状空洞を有し、一定の角速度 ω で回転する。空洞は半径方向に設置された仕切り板によって n 個の扇形断面の区間に完全に分割され、各区間には異なった密度 ρ_1 、 ρ_2 の2種類の液体で完全に満たされている。二液間の界面の平均半径は R_0 である。 $O - XY$ は空間に固定した静止座標系 $O_1 - X_1 Y_1$ は軸に固定した回転座標系である。解析では次の様な仮定をおく。

- (1) 液体の運動は微小な非粘性二次元流れである。
- (2) 液体に対する重力、コリオリ力および軸に対する外部減衰の影響は無視できる。
- (3) 軸の運動は小さな一方向の調和振動か、または円軌道のふれ回り運動をする。

軸に固定した動座標系からみた図 3・1 の第 i 区、第 j 液の運動量および連続の式は

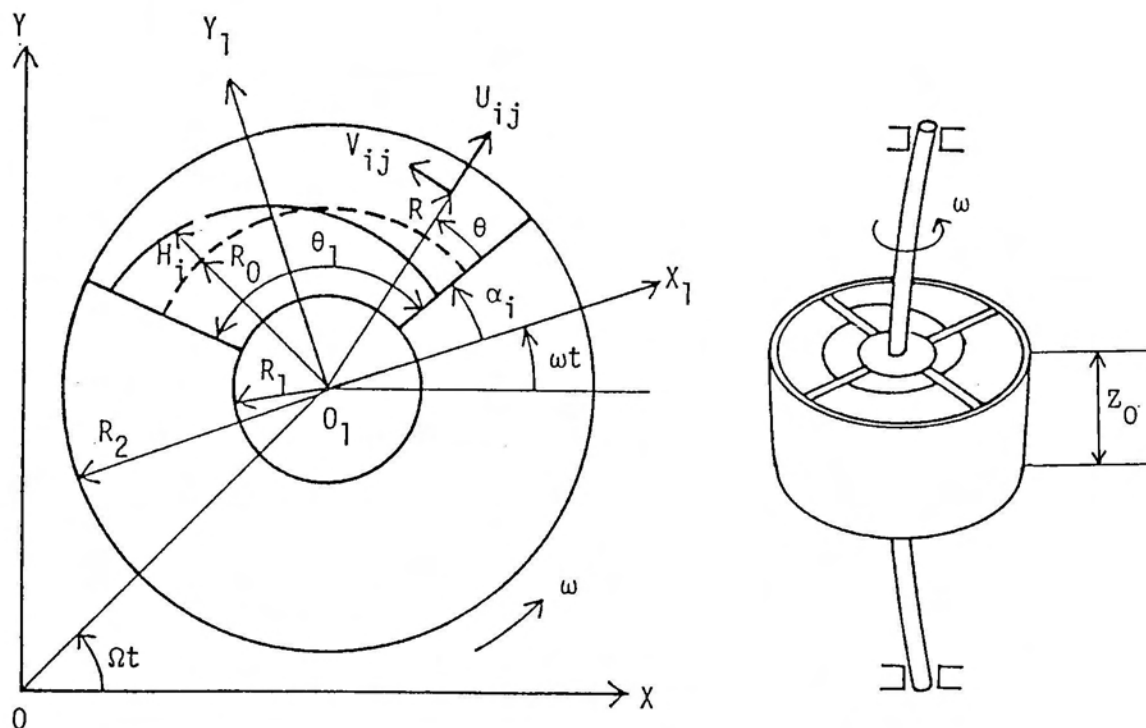


図 3・1 力学系

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + U_{ij} \frac{\partial U_{ij}}{\partial R} + \frac{V_{ij}}{R} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \theta} - \left(\frac{V_{ij}}{R} + \omega \right)^2 R &= - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P_{ij}}{\partial R} \\
&- \frac{d^2 X}{dt^2} \cos(\omega t + \theta + \alpha_i) - \frac{d^2 Y}{dt^2} \sin(\omega t + \theta + \alpha_i) \\
\frac{\partial V_{ij}}{\partial t} + U_{ij} \frac{\partial V_{ij}}{\partial R} + \frac{V_{ij}}{R} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \theta} + \left(\frac{V_{ij}}{R} + 2\omega \right) U_{ij} &= - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P_{ij}}{R \partial \theta} \\
&+ \frac{d^2 X}{dt^2} \sin(\omega t + \theta + \alpha_i) - \frac{d^2 Y}{dt^2} \cos(\omega t + \theta + \alpha_i)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial(U_{ij} R)}{R \partial R} + \frac{\partial V_{ij}}{R \partial \theta} = 0 \tag{3.2}$$

分割区間は回転方向に1から順に番号が付されており、添字 $j = 1$ は密度の小さい液体を、添字 $j = 2$ は密度の大きい液体を表す。液体が満足すべき境界条件は環状壁 $R = R_j$ で

$$U_{ij} = 0 \tag{3.3}$$

仕切り壁 $\theta = 0, \theta_1$ で

$$V_{ij} = 0 \tag{3.4}$$

二液が接する界面 $R = R_0 + H_1$ では、二液の圧力が等しく、また界面が流線に平行であるから^(3.8)

$$P_{i1} = P_{i2} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = U_{i1} - \frac{V_{i1}}{R} \frac{\partial H_i}{\partial \theta} = U_{i2} - \frac{V_{i2}}{R} \frac{\partial H_i}{\partial \theta} \tag{3.6}$$

一方、ロータの運動方程式は

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + KX = F_{x1} \cos \omega t - F_{y1} \sin \omega t$$

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + KY = F_{x1} \sin \omega t + F_{y1} \cos \omega t \quad (3.7)$$

ここで、 F_{x1} 、 F_{y1} はロータに作用する液体力の X_1 、 Y_1 方向成分であり、境界での液体の圧力を積分して

$$F_{x1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{S_{ij}} P_{ij} C_x dS_{ij}, \quad F_{y1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{S_{ij}} P_{ij} C_y dS_{ij} \quad (3.8)$$

ただし、 C_x 、 C_y は i 区 j 液の境界面 S_{ij} の微小要素 dS_{ij} にたてた外向き法線と X_1 、 Y_1 軸との方向余弦である。

3.2 軸が一方向に振動する場合

上記の方程式をそのまま厳密に解析することは困難であるから、まず軸が次のように X 方向のみに小さく振動する場合を考える。

$$X = X_0 \cos \Omega t, \quad Y = 0 \quad (3.9)$$

軸振動がなく、液体が軸とともに剛体回転するときは、

$$U_{ij} = V_{ij}, \quad X = H_i = 0$$

である。そのときの圧力 P_{ij}^* は式 (3.1) より

$$\frac{dP_{ij}^*}{dR} = \rho_j R \omega^2 \quad (3.10)$$

軸振動によって励起される微小な流速、圧力を u_{ij} 、 v_{ij} 、 p_{ij} とし、

$$U_{ij} = u_{ij}, \quad V_{ij} = v_{ij}, \quad P_{ij} = P_{ij}^* + p_{ij} \quad (3.11)$$

とにおいて、式 (3.1) および (3.2) に代入し、これらの 2 次以上の微小項およびコリオリの項を無視すると⁽²⁵⁾

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial p_{ij}}{\rho_j \partial R} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 X_0 \Omega^2 \cos(q_s t + \theta + \alpha_i)$$

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial t} = -\frac{\partial p_{ij}}{\rho_j R \partial \theta} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 X_0 \Omega^2 \sin(q_s t + \theta + \alpha_i)$$

(3.12)

$$\frac{\partial(u_{ij} R)}{R \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_{ij}}{\partial \theta} = 0$$

(3.13)

ただし、 $q_1 = \omega - \Omega$ 、 $q_2 = \omega + \Omega$ である。

境界条件 (3.3) および (3.4) は $R = R_1$ で

$$u_{ij} = 0 \quad (3.14)$$

$\theta = 0$ 、 θ_1 で

$$v_{ij} = 0 \quad (3.15)$$

界面での境界条件 (3.5) および (3.6) は u_{i1} 、 v_{i1} 、 p_{i1} および H_i の 2 次以上の微小項を無視して $R = R_0$ で (付録 3.1)

$$p_{i2} - p_{i1} = -(\rho_2 - \rho_1) \omega^2 R_0 H_i \quad (3.16)$$

$$\frac{dH_i}{dt} = u_{i1} = u_{i2} \quad (3.17)$$

液体力も 2 次以上の項を無視すれば、式 (3.8) から

$$F_{x1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{s_{ij0}} p_{ij} c_x^{ds_{ij}}, \quad F_{y1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \int_{s_{ij0}} p_{ij} c_y^{ds_{ij}}$$

(3.18)

ただし、 s_{ij0} はロータがふれまわらずに回転する時の i 区 j 液が濡らす境界面である。式 (3.12) は圧力 p_{i1} を消去し、流れ関数 ψ_{i1} を導入すると⁽³⁸⁾

$$\frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.19)$$

ただし、液体の流速 u_{ij} , v_{ij} は

$$u_{ij} = -\frac{\partial \psi_{ij}}{R \partial \theta}, \quad v_{ij} = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial R} \quad (3 \cdot 20)$$

振動解として、次の様な変数分離形の解を仮定する。

$$\psi_{ij} = \sum_{s=1}^2 F_{ijs}(R) \mathcal{D}_{ijs}(\theta) \cos(q_s t + \beta_{is}) \quad (3 \cdot 21)$$

ただし、 β_i は第 i 区の液体振動の位相である。

式 (3・21) を式 (3・19) に代入し、境界条件 (3・14)、(3・15) および (3・17) を考慮すれば、 m 次モードの流速 u_{ij} , v_{ij} と界面変位 H_i は

$$u_{ij} = -\sum_{s=1}^2 k A_{ijs} (R_0^{k-1} - R_j R_0^{-k-1}) \cos k \theta \cos(q_s t + \beta_{is})$$

$$v_{ij} = \sum_{s=1}^2 k A_{ijs} (R_0^{k-1} + R_j R_0^{-k-1}) \sin k \theta \cos(q_s t + \beta_{is}) \quad (3 \cdot 22)$$

$$H_i = -\sum_{s=1}^2 \frac{k}{q_s} A_{ijs} (R_0^{k-1} - R_j^{2k} R_0^{-k-1}) \cos k \theta \sin(q_s t + \beta_{is}) \quad (3 \cdot 23)$$

式 (3・22) を式 (3・12) に代入し、 R または θ で積分すると液体の圧力が次の様に求められる。

$$p_{ij} = -\sum_{s=1}^2 \rho_j \{ q_s A_{ijs} (r^k + r_j^{2k} r^{-k}) \cos k \theta \sin(q_s t + \beta_{is}) - \frac{1}{2} X_0 \Omega^2 R \cos(q_s t + \theta + \alpha_i) \} \quad (3 \cdot 24)$$

ただし

$$A_{i1s} = \frac{1 - r_2^{2k}}{1 - r_1^{2k}} A_{i2s}, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad r_j = \frac{R_j}{R_0}, \quad k = \frac{m\pi}{\theta_1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$
(3.25)

式(3.23)と(3.24)を境界条件式(3.16)に代入すると

$$L = \sum_{s=1}^2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{q_s}{p_m} \right)^2 \right\} (r^{2k} - 1) A_{i2s} \cos k\theta \sin(q_s t + \beta_{is}) \right. \\ \left. + \frac{q_s}{2k} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 R_0 X_0 \cos(q_s t + \theta + \alpha_i) \right] = 0$$
(3.26)

ここで p_m は液体の m 次の固有円振動数で

$$p_m = c_m \omega, \quad c_m^2 = \frac{k(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \gamma_1 - \rho_2 \gamma_2}, \quad \gamma_j = \frac{1 + r_j^{2k}}{1 - r_j^{2k}}$$
(3.27)

式(3.26)は $k = 1$ の場合は満足されるが、それ以外は満足されない。そこで

$$\int_0^{\theta_1} L \cos k\theta d\theta = 0$$
(3.28)

なるガラーキン法を適用すると、未定定数 A_{is} と β_{is} が次の様に定められる。(付録3.2)

$$A_{i2s} = \Gamma \frac{q_s \Omega^2 R_0}{k \omega^2 (r_2^{2k} - 1)} \cdot \frac{X_0}{1 - (q_s/p_m)^2}, \quad \beta_{is} = \alpha_i - \phi$$
(3.29)

ここで

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{\sqrt{2 - 2(-1)^m \cos\theta_1}}{|1 - k^2|\theta_1} & (k \neq 1) \\ \frac{1}{2} & (k = 1) \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \tan^{-1} \left\{ \frac{(-1)^m \sin\theta_1}{(-1)^m \cos\theta_1 - 1} \right\} & (k \neq 1) \\ \frac{\pi}{2} & (k = 1) \end{cases}$$

液体力 F_{x1} , F_{y1} は式 (3・18)、(3・24) と (3・29) から求められる (付録 3・3)。液体力の X 方向成分 F_x は

$$F_x = F_{x1} \cos\omega t - F_{y1} \sin\omega t \quad (3\cdot30)$$

F_x はつぎのように表せる。

$$F_x = M \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \left[\left\{ \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{2m} \frac{q_s^2}{p_m^2 - q_s^2} \right\} \cos(q_s - \omega)t \right. \\ \left. - \left\{ \frac{R_0^2(\rho_2 - \rho_1)}{4M} \cos\theta_1 + \frac{1}{2} \lambda_{2m} \frac{q_s^2}{p_m^2 - q_s^2} \right\} \cos(q_s + \omega)t \right. \\ \left. - \left\{ \frac{R_0^2(\rho_2 - \rho_1)}{4M} \sin\theta_1 + \frac{1}{2} \lambda_{2m} \frac{q_s^2}{p_m^2 - q_s^2} \right\} \sin(q_s + \omega)t \right] \quad (3\cdot31)$$

式 (3・31) の右辺の第 2、第 3 項は $n \geq 3$ の場合は 0 となる。また $k = 1$ となるのは、 $n = 1, m = 2$ か $n = 2, m = 1$ の場合のみで、この時は式 (3・31) で $\cos(q_s + \omega)t$ の係数の第 1 項と $\sin(q_s + \omega)t$ の係数は 0 となる。

式 (3・31) の λ_1 および λ_{2m} は

$$\lambda_1 = \lambda \frac{n\theta_1}{2\pi} \left(1 - \frac{\rho_1 r_1^2}{\rho_2 r_2^2}\right), \quad \lambda = \frac{\rho_2 R_0^2 Z_0}{M},$$

$$\lambda_{2m} = \begin{cases} \lambda k_{2m} & (k \neq 1), \quad k_{2m} = 2nk_2^* \left(\frac{p_1}{q_s}\right)^2 \left\{ \frac{1 - (-1)^m \cos\theta_1}{\pi\theta_1 (k^2 - 1)^2} \right\} (1 - c_m^2) \\ \lambda k_{2m}^*/2 & (k = 1), \quad k_{2m}^* = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(\frac{p_m}{p_1 r_2}\right)^2 \end{cases}$$

(3・32)

求められた液体力 F_x を軸の運動方程式 (3・7) に代入して調和バランス法を適用する⁽³³⁾。すなわち $\cos \Omega t$ 成分のみとる。

$$-\Omega^2 + \Omega_0^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega^2 \left[\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{2m} \left\{ \frac{(\omega - \Omega)^2}{p_m^2 - (\omega - \Omega)^2} + \frac{(\omega + \Omega)^2}{p_m^2 - (\omega + \Omega)^2} \right\} \right]$$

(3・33)

ここで $\Omega_0^2 = k/M$ は液体を含まないときの軸の危険速度である。

式 (3・33) は遠心力振子を備えた回転軸系の場合の式 (2・31) と似ているが、振子は剛体の物理振子でありその固有モードは1つしかない。液体の場合は高次のモードまで持ち得る。液体が m 次モードで軸振動に共振している場合は他のモードの成分は m 次モード成分に比べて非常に弱く軸振動にはほとんど影響を与えない。したがって、 m 次モードのみ注目して考えてよい。

m 次モードの液体波動を伴う場合の自励振動を考えると式 (3・33) は

$$-\Omega^2 + \Omega_0^2 = \Omega^2 \left[\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_{2m} \left\{ \frac{(\omega - \Omega)^2}{p_m^2 - (\omega - \Omega)^2} + \frac{(\omega + \Omega)^2}{p_m^2 - (\omega + \Omega)^2} \right\} \right]$$

(3・34)

式(3・34)は軸に作用するロータ力(ばね力と慣性力とから成る=左辺)と液体力(右辺)との釣合いを要求する式であるが、 m 次モードの液体波動を伴う場合の系の固有振動数 Ω を与える振動数方程式でもある。したがって、振子を備えた回転軸の場合と同様に振動数方程式(3・34)が共役複素根を持てば系は m 次の液体波動を伴った自励振動が発生する。

式(3・34)を無次元量で書き改めると、

$$F_1(\eta) = F_2(\eta) \quad (3\cdot35)$$

ただし

$$F_1 = \eta_0 - \eta, \quad F_2 = [\lambda_1 - \lambda_{2m} \frac{\eta^2 - (c_m^2 + 2)\eta - (c_m^2 - 1)}{\{\eta - (c_m - 1)^2\}\{\eta - (c_m + 1)^2\}}] \eta,$$

$$\eta = (\Omega/\omega)^2, \quad \eta_0 = (\Omega_0/\omega)^2$$

(3・36)

図3・2にロータ力 F_1 および液体力 F_2 と軸振動数 η との関係を模式的に示す。ロータ力 F_1 は縦軸の切片が η_0 、傾きが -1 の直線であり、切片 η_0 は軸回転数 ω の二乗に反比例する。液体力 F_2 は漸近線 $F_2 = (\lambda_1 - \lambda_{2m})\eta$ を持ち、液体が m 次モードで軸振動に共振する $\eta = (1 \pm c_m)^2$ で無限大となる。この時、ロータに固定した回転座標系に相対的な軸振動数 $|\Omega - \omega|$ は液体の m 次モードの固有振動数 $p_m (= c_m \omega)$ に等しい。

式(3・35)、すなわち式(3・34)の実根は F_1 と F_2 との交点で与えられる。図3・2に示すように液体の固有振動数の係数 c_m が1より小さくない場合は3根とも正となり、系は全回転数域で安定である。一方、 $c_m < 1$ の時は F_1 と F_2 が $\eta = (1 - c_m)^2$ 近傍で交わるような軸回転数 η_0 に対して一対の共役な複素根が存在して、系が不安定となる可能性が生じる。式(3・35)が共役な複

素根の解を持つときの切片 n_0 の範囲は主に係数 λ_{2m} に依存する。

式 (3・34) の実根、すなわち系の固有振動数 Ω と軸回転数 ω との定性な関係は、振子を備えた系の場合と同じように図 3・3 のように推定できる。ただし、三つの負根は正根と同じ絶対値を持つから省略した。

図 3・3 に示すように $c_m \geq 1$ の時、式 (3・32) は全て実根を

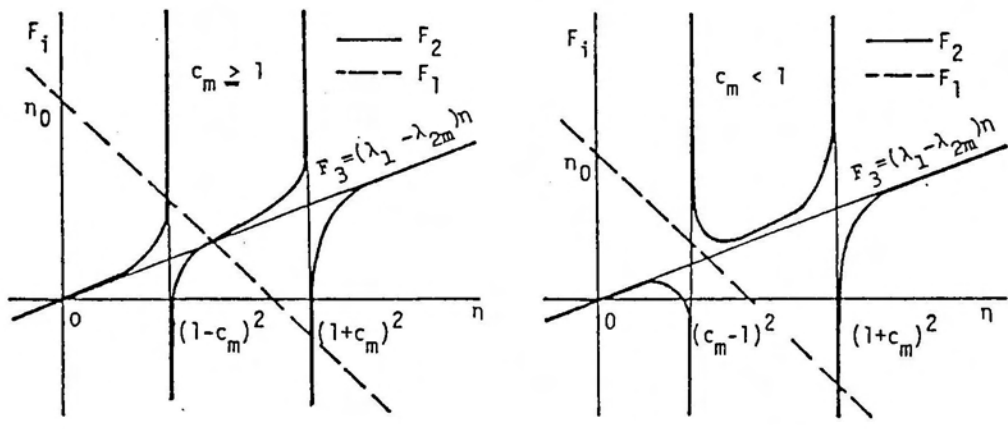


図 3・2 ロータ力と液体力の関係

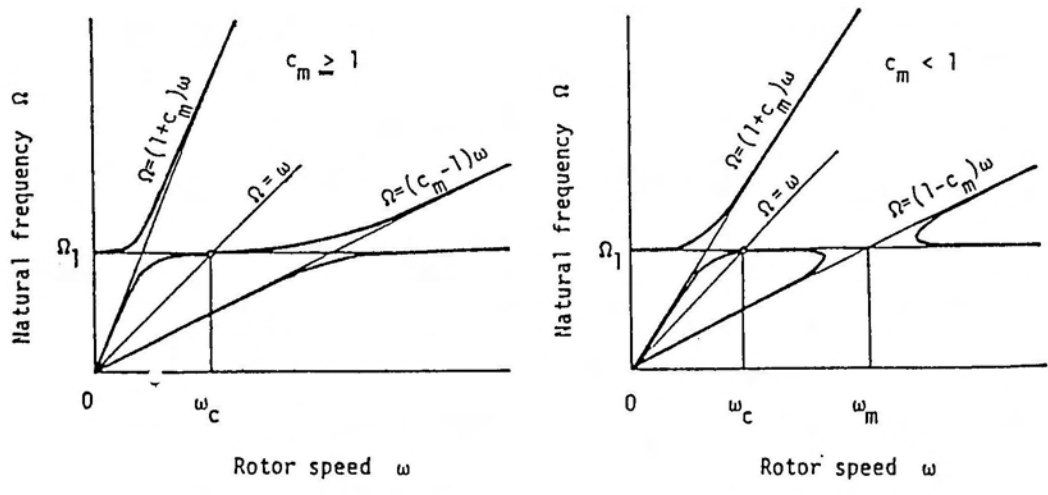


図 3・3 系の固有振動数

持ち、系は全回転数域において安定である。一方、 $c_m < 1$ の時、式(3・32)は2つの漸近線 $\Omega = \Omega_0 / \sqrt{1 + \lambda_1 - 2\lambda_{2m}}$ と $\Omega = (1 - c_m)\omega$ との交点近傍で二対の共役な複素根を持ち得る。これらの漸近線は図3・2においては F_3 と $\eta = (1 - c_m)^2$ に相当する。したがって、この領域で軸には m 次モードの液体波動を伴う自励振動が引起こされる。この交点での回転数 ω_m は

$$\omega_m = \Omega_1 / (1 - c_m), \quad \Omega_1 = \Omega_0 / \sqrt{1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}} \quad (3.37)$$

ω_m は液体 m 次モードの自励振動が発生する不安定領域の中心的な回転数を与える。一方、 Ω_1 は高回転数域における系の一次固有振動数である。

系の危険速度 ω_c は式(3・34)において $\Omega = \omega$ とおいて

$$\omega_c = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + \lambda_1 - 2\lambda_{2m} / (4 - c_m^2)}} \quad (3.38)$$

多くの場合、係数 λ_{2m} は1に比べて非常に小さいので、 $\Omega_1 \approx \omega$ と考えてよいから式(3・38)より

$$\omega_m \approx \omega_c / (1 - c_m) \quad (3.39)$$

この時 $p_m = c_m \omega$ であるから

$$\omega_m \approx \omega_c + p_m \quad (3.40)$$

式(3・40)は軸回転数が系の危険速度 ω_c と液体の固有振動数 p_m との和にほぼ等しくなる領域で系が不安定になることを示している。不安定領域に関するこのような関係は第2章で述べた遠心振子を備えた回転軸系の場合と同じである。

不安定領域の中心的な回転数 ω_m は $\Omega = \omega$ と $\Omega = c_m \omega + \omega$ との交点で与えられるから液体の固有振動数の係数 c_m が大きくなると高回転数側に移行する。式(3・25)および(3・27)から隔壁の数 n が増すほど、二液間の密度差 $\rho_2 - \rho_1$ が大きくなるほど、あるいは液体波動の次数 m が高くなるほど高回転数側に移行する

ことがわかる。そして液体の1次固有振動数 p_1 ($= c_1 \omega$) が軸回転数よりも高くなると全回転数域で系は安定となる。

式(3・36)は η の3次方程式で実根はすべて正であるから、系の安定性はその判別式の符号⁽³⁴⁾で簡単に調べることが出来る。式(3・34)を書き改めると、

$$\eta^3 + b_1 \eta^2 + b_2 \eta + b_3 = 0 \quad (3.41)$$

ここで

$$\begin{aligned} b_1 &= -2\{(1 + \lambda_1 - \lambda_{2m})(c_m^2 + 1) + \lambda_{2m}c_m^2 + \eta_0\}/(1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}) \\ b_2 &= \{(1 + \lambda_1)(c_m^2 - 1)^2 + \lambda_{2m}(c_m^2 - 1) + 2(c_m^2 + 1)\eta_0\}/(1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}) \\ b_3 &= -\eta_0(c_m^2 - 1)^2/(1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

3次方程式(3・40)の判別式 D は

$$D = \left\{ \frac{1}{3}(b_2 - \frac{b_1^2}{3}) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2}(b_3 - \frac{b_1 b_2}{3} + \frac{2}{27}b_1^3) \right\}^3 \quad (3.43)$$

もし、 $D > 0$ ならば式(3・34)は共役な複素根を持つ。このようにして系の不安定領域は

$$D > 0 \quad (3.44)$$

となる軸回転数域で与えられ、式(3・34)の全ての根を求めなくても調べられる。

3・3 軸が円軌動でふれ回る場合

軸が $X = X_0 \cos \Omega t$, $Y = X_0 \sin \Omega t$ の小さな円軌道を描いてふれ回る場合は、式(3・12)の右辺の第二項が $X_0 \Omega^2 \cos(q \cdot t + \theta + \alpha_1)$ および $-X_0 \Omega^2 \cos(q \cdot t + \theta + \alpha_1)$ となる。

前節の液体の解析において、 X_0 を2倍し、 q_2 の項をすべて除去すればよい。

この場合の振動数方程式は式(3・34)および(3・36)のかわりに

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = \Omega^2 \left[\lambda_1 + \lambda_{2m} \frac{(\omega - \Omega)^2}{p_m^2 - (\omega - \Omega)^2} \right]$$

(3・45)

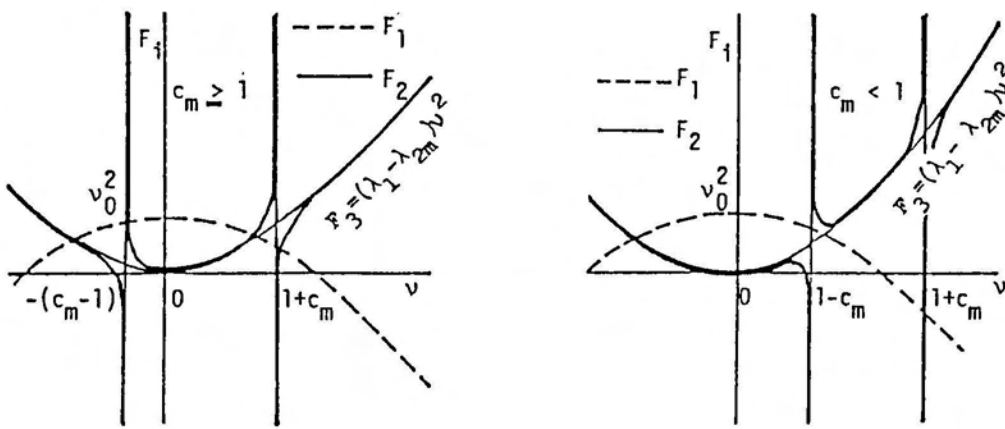


図3・4 ロータ力と液体力の関係（ふれ回り運動）

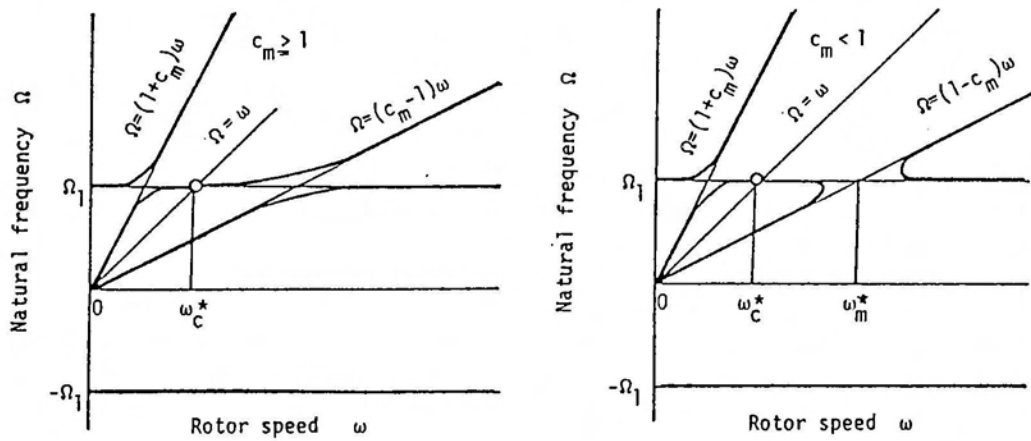


図3・5 系の固有振動数（ふれ回り運動）

$$v_0^2 - v^2 = v^2 \left[\lambda_1 + \lambda_{2m} \frac{(1-v)^2}{c_m^2 - (1-v)^2} \right] \quad (3.46)$$

ここで $v = \Omega / \omega$, $v_0 = \Omega_0 / \omega$ である

前節と同様に液体力 F_1 および F_2 とロータ振動数 v との関係を図 3・4 に、軸の固有振動数 Ω と軸回転数 ω との関係を図 3・5 に示す。
 F_1 と F_2 は次の式で与えられる。

$$F_1 = v_0^2 - v^2$$

$$F_2 = v^2 \left[\lambda_1 + \lambda_{2m} \frac{(1-v)^2}{c_m^2 - (1-v)^2} \right] \quad (3.47)$$

図から分かるように、式 (3・45) は $c_m < 1$ の場合にのみ共役な複素根を持ち得る。また、式 (3・45) は式 (3・34) と同じ漸近線を持つので不安定領域の中心的な軸回転数 ω_m^* は

$$\omega_m^* = \Omega_1 / (1 - c_m), \quad \Omega_1 = \Omega_0 / \sqrt{1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}} \quad (3.48)$$

となり、軸が 1 方向にのみ調和振動する場合の式 (3・37) に一致する。

軸がふれ回り運動をする場合の危険速度 ω_c^* は

$$\omega_c^* = \Omega_0 / \sqrt{1 + \lambda_1} \quad (3.49)$$

前節と同様に $\lambda_{2m} \ll 1$ であるので、 $\Omega_1 \approx \omega_c^*$ と考えてよいから

$$\omega_m^* \approx \omega_c + p_m \quad (3.50)$$

となる。

このように不安定領域の中心的な回転数 ω_m^* は式 (3・40) および式 (3・50) に示されるように軸がふれ回る場合でも、一方向に振動する場合と同様に適用できると考えてよい。

式 (3・46) は次の様な v の 4 次方程式の形に表せる。

$$v^4 + a_1 v^3 + a_2 v^2 + a_3 v + a_4 = 0 \quad (3.51)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -2, \quad a_2 = \{(1 + \lambda_1)(1 - c_m^2) - \lambda_{2m} - v_0^2\} / (1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}), \\
 a_3 &= 2v_0^2 / (1 + \lambda_1 - \lambda_{2m}), \quad a_4 = -(1 - c_m^2)v_0^2 / (1 + \lambda_1 - \lambda_{2m})
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

式(3.51)をFerrariの公式⁽³⁵⁾を用いて2次方程式の積の形に因数分解して、それらの判別式の符号を調べれば系の安定性が予測できる。一般に、軸が直線振動する場合と円軌道でふれまわる場合とでは系の安定性には本質的な差異はない。前者に比して後者の不安定領域がおよそ $\sqrt{2}$ 倍広くなるだけである。

なお、本節の解析結果は未分割空洞に部分的に液体を満たした場合のWolf⁽³⁾の解析結果によく似ている。すなわち、液体力とロータ力との関係(図3.4の $c_m < 1$ の場合)、系の固有振動数と軸回転数との関係(図3.5の $c_m < 1$ の場合)などである。この場合の高回転数域における系の1次固有振動数 Ω_1 、系の危険速度 ω_c 。および液体の1次固有振動数の係数 c_1 は彼の結果を引用すると

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \Omega_0 / \sqrt{1 - \lambda/\gamma_2}, \quad c_1 = \{1 - \sqrt{1 - \gamma_2}\} / \gamma_2, \\
 \omega_c &= \Omega_0 / \sqrt{1 + \lambda}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

これらの式を用いて式(3.48)から求めた不安定領域の中心的回転数 ω_1 を一点鎖線で、式(3.50)から求めた ω_1 を破線でWolf⁽³⁾が求めた不安定領域の結果とともにそれぞれ図3.6に示す ω_1 がこの場合でも不安定領域の中心的な回転数になっていることが分かる。これらの例からも空洞を分割した系、しない系さらには遠心力振子を備えた系の自励振動発生の機構や特性は基本的には同じと推察される。ただ、式(3.53)の c_1 は常に1より小さいから未分割空洞の場合、ある回転数域で系が不安定となる危険性は常に存在す

る。しかし、2次以上の液体波動を伴う自励振動は液体力が全体でバランスするので発生しない。これらの点は分割空洞の場合とは異なる。

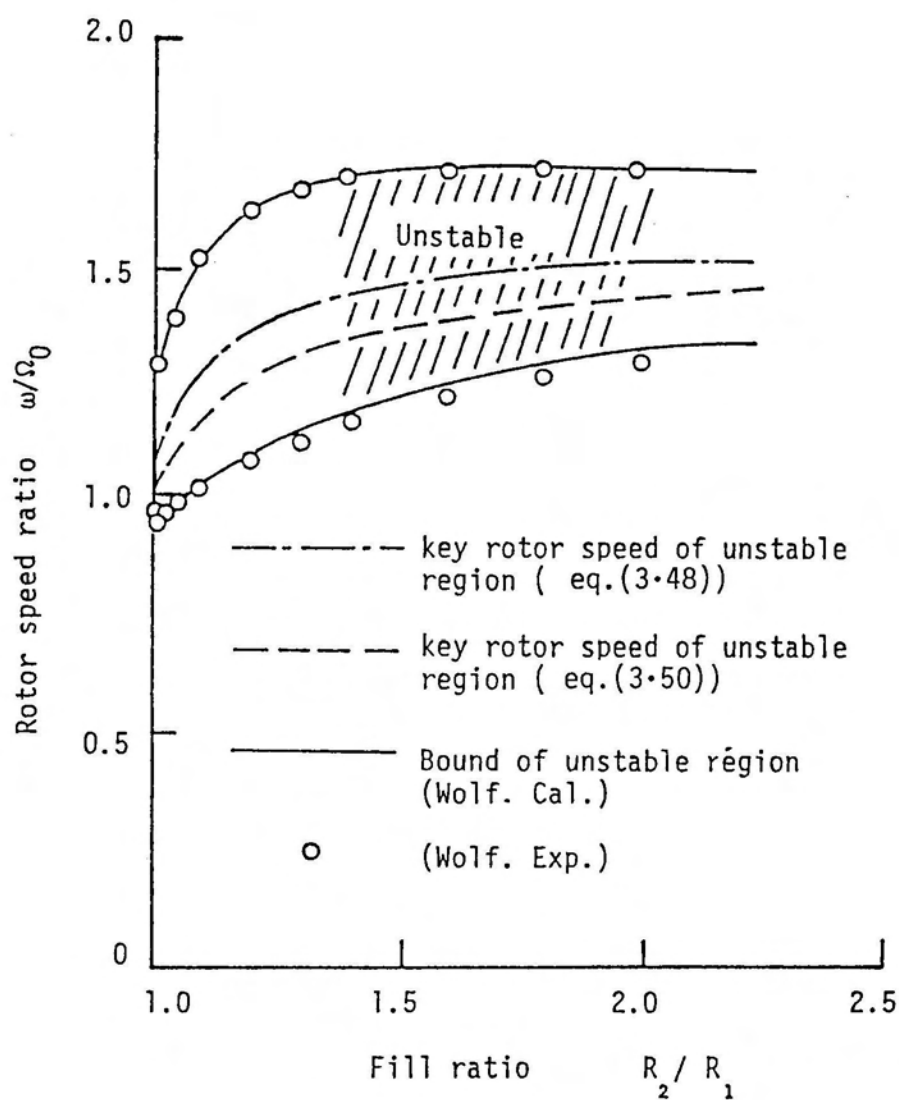


図 3・6 不安定領域の中心的な回転数
(未分割空洞 Wolf⁽³⁾)

3・4 実験装置および方法

実験は安全性と計測の便宜上、軸が一方方向にのみ振動可能な装置を用いて行った。図3・7にその概略を図3・8に写真を示す。軸は一对の板ばねで支持され、汎用インバータで制御される誘導電動機によって駆動される。軸には透明なアクリル製の環状空洞が取り付けられている。空洞は内および外側の半径がそれぞれ $R_1 = 50 \text{ mm}$, $R_2 = 95 \text{ mm}$ 、長さが $Z_0 = 100 \text{ mm}$ で半径方向に設置された仕切り板によって2～12個の扇状区間に等分割されている。仕切り板は厚さが2 mmで、液体が各区間で均等になるように環状壁に接するところ ($R = R_1$) の中間に直径1 mmの小さい穴を2個開けている。

液体を含まない系の質量は $M = 4.5 \text{ kg}$ 、危険速度は $\Omega_0 = 13.44 \text{ Hz}$ である。液体としては、水、灯油（密度 0.8 g/cm^3 ）、灯油と四塩化炭

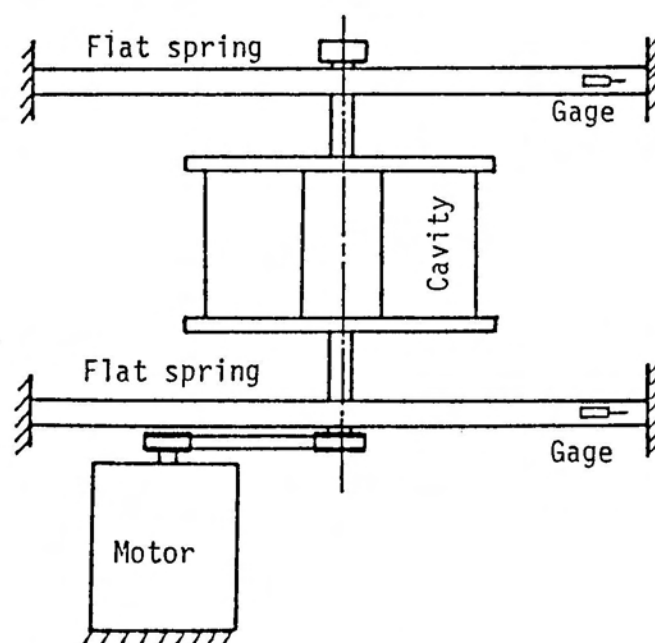


図3・7 実験装置

素との混合液（密度 0.9g/cm^3 ）および砂糖水（密度 1.2g/cm^3 ）を用いた。軸の振動は両板ばねに貼り付けた歪みゲージにより測定した。液体の運動はストロボスコープにより観察した。

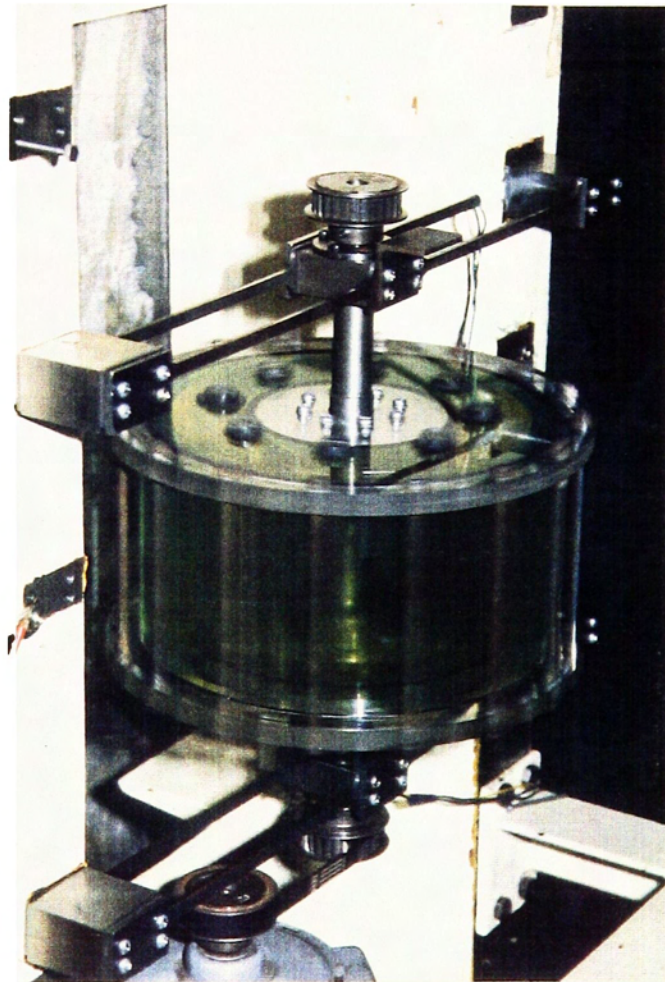


図 3・8 実験装置

測定を行う前に、まず空洞内を二種類の液体で完全に満たし、各区間で液体が均等になるように、危険速度 ω 以下の回転数でしばらく回転させる。次に、軸回転数を徐々上昇させ、各回転数における軸振動数 Ω 、軸振幅 X を測定する。自励振動が消えて識別されなくなる回転数まで上昇させた後に回転数を徐々に下げて同様な測定を行う。

強制振動発生時には液体の界面は同心円状で、液体は軸とともに剛体運動をする。自励振動発生時には液体の界面は変動し、軸回転数 ω と軸振動数 Ω とは異なる。

3. 5 実験結果

図3. 9に軸の振幅 X_0 、および軸振動数 Ω と軸回転数 ω との関係の測定結果を示す。空洞は4分割 ($n = 4$)され、灯油 ($\rho_1 = 0.8 \text{ g/cm}^3$)と平均層厚 $H_0 = 10 \text{ mm}$ の水 ($\rho_2 = 1.0 \text{ g/cm}^3$)で満たされている。

図中の○および●は自励振動の、□および■は強制振動の実験点である。○および□は軸回転数を徐々に上昇させた場合、●および■は下降させた場合である。太線は実験において自励振動が発生する範囲を、それに続く細線は自励振動は持続するが発生しない、いわゆる2価安定の範囲を示す。太い矢印で示される範囲は理論式(3.42)で得られる不安定領域である。式(3.36)で求められた系の危険速度 ω_c 、式(3.38)で求められた不安定領域の中心的な回転数 ω_1 ($m = 1$)も図中に示してある。矢印は軸回転数を徐々に変化させたときの振動の履歴を示す。

回転数を徐々に上げていくと $\omega = \omega_c$ 付近で共振が起こる(図中A)。強制振動が収まったあと1次モードの自励振動が発生し(図中B→C)、持続する(図中C→D)。 $\omega = 17.0 \text{ Hz}$ で自励振動は急に小さくなり(図中D→E)、非常に小さい強制振動のみが残る。回転数を徐々に下げたときは $\omega = 14.0 \text{ Hz}$ で急に大振幅の自励振動が発生する(図中F→G)。上昇時の回転数(図中B)より下側の回転数まで持続して消える(図中G→H→I)。

理論で予測したように $\omega \approx \omega_1$ で ω_c に近い振動数を持つ自励振

動が発生することが分かる。

この領域では1次モードの波動が各区間内の液体に引起こされ、あたかも1つの波がロータに対して $\omega - \omega_c$ の角速度で空洞内を逆向きに伝播する。このような挙動は部分的に液体で満たされた未分割空洞を有する回転軸系で観察されるのと同じである。このことは遠心力

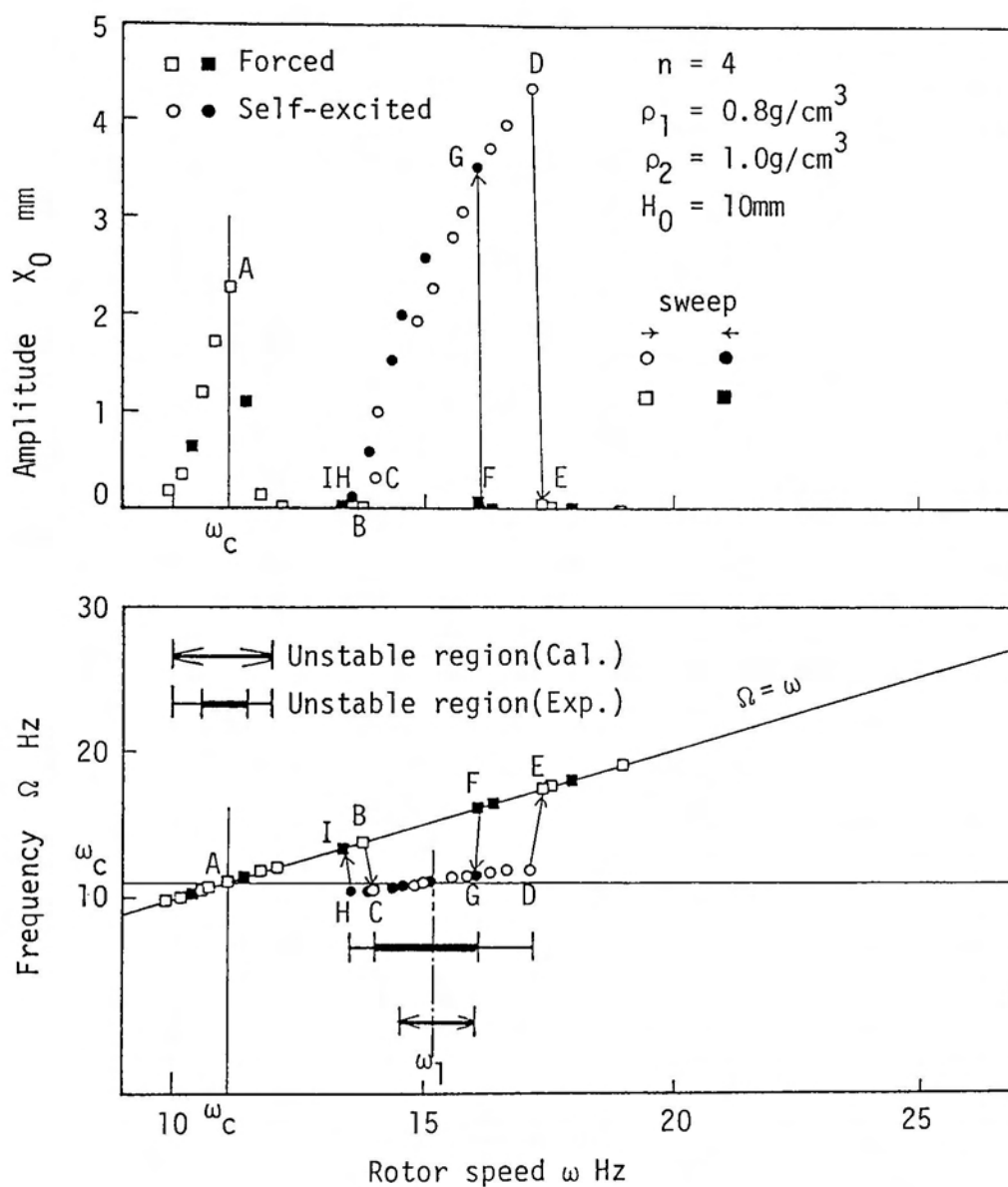


図 3・9 系の応答

振子を備えた回転軸の場合と同様な傾向を持つ。

図 3・10 に自励振動発生時の液体の界面の変化を式 (3・23) より計算して模式的に示す。界面の変化はロータに固定した座標系について書かれている。液体力は密度の重い液体すなわち外側の液体の層の厚い方向に向くと考えてよい。図中では液体力のベクトルの向きを記号 ▲ で表す。図 3・11 に図 3・10 に対応する写真を示す。図 3・11 で外側の色の濃い部分は着色した水を内側の薄い部分は灯油である。両者はよく一致していることが分かる。これらの図から分かるように、各分割空洞内の液体による力は全体としてあたかも未分割空洞内に部分的に封入された液体のように軸の回転方向と逆向きに回転する、いわゆる後進波である。

この例に示すように、2種類の液体で満たされた中空回転軸はその空洞を完全に分割してもなお軸回転数が系の危険速度と液体の固有振

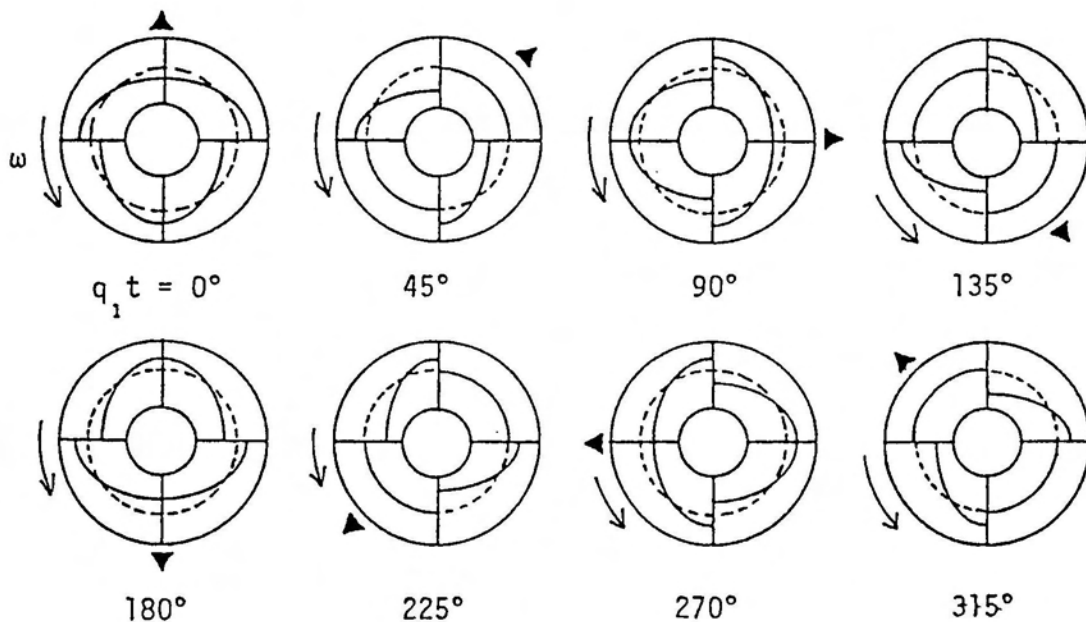


図 3・10 界面の変化 ($m = 1$)

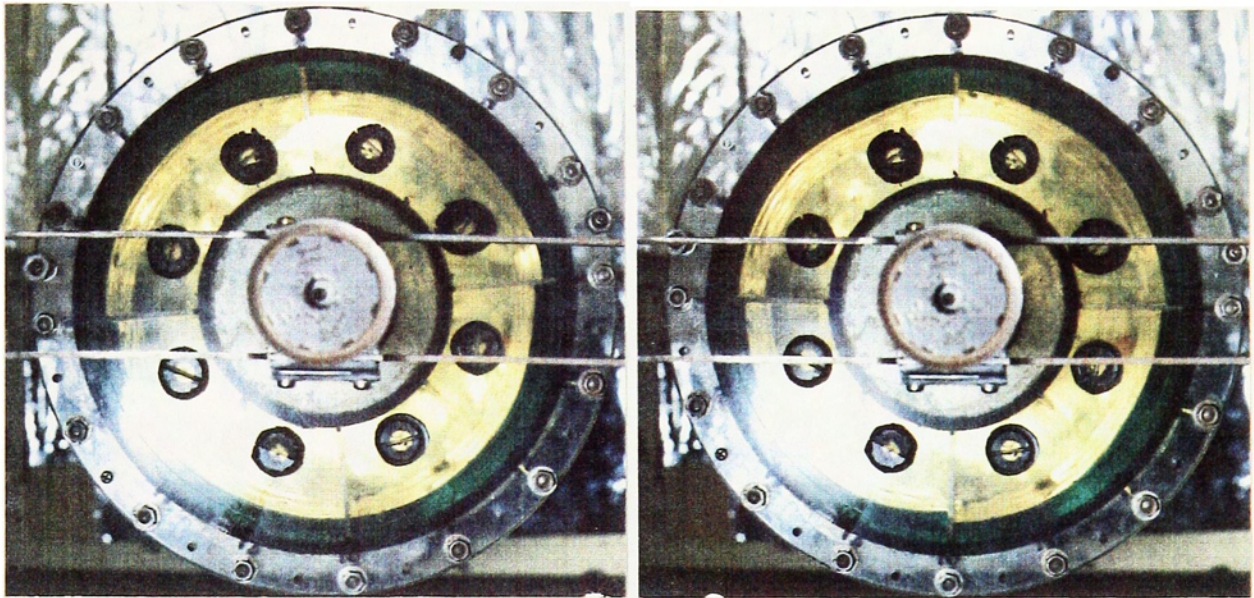
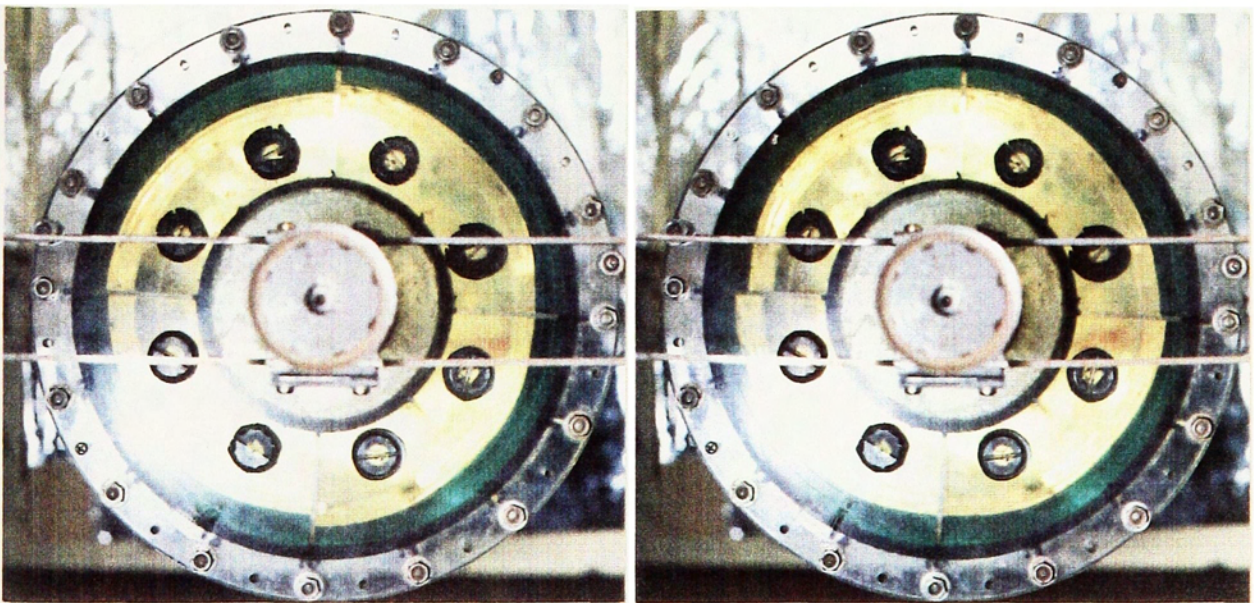
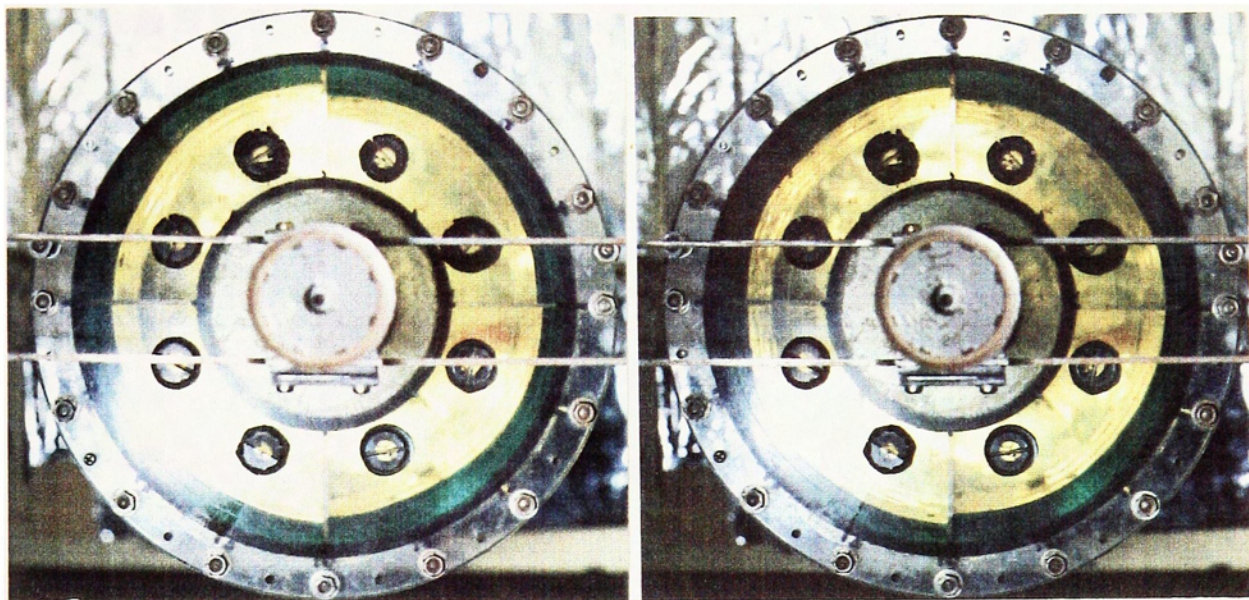
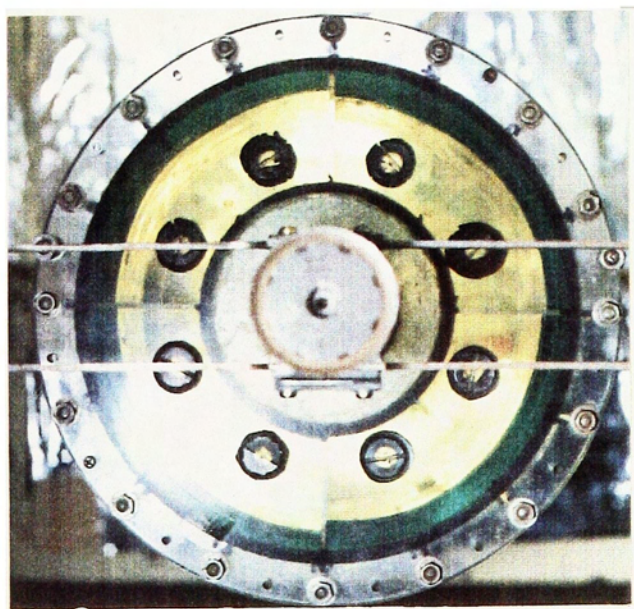
 $q_{1t} = 0^\circ$ 45°  90° 180°

図 3・11 界面の変化 ($m = 1$)



2 2 5 °

2 7 0 °



3 1 5 °

図 3 ・ 1 1 界面の変化 ($m = 1$)

動数の和にほぼ等しい領域では、系の危険速度にほぼ等しい振動数を持った自励振動が発生する可能性がある。このとき、各区画内の液体は全体としてあたかも、未分割空洞の場合と同様に⁽³⁾、一つの波が軸の回転と逆方向に伝播しているような挙動を示す。ただ、仕切り板のため分割空洞の場合の不安定領域は比較的狭く、自励振動もあまり

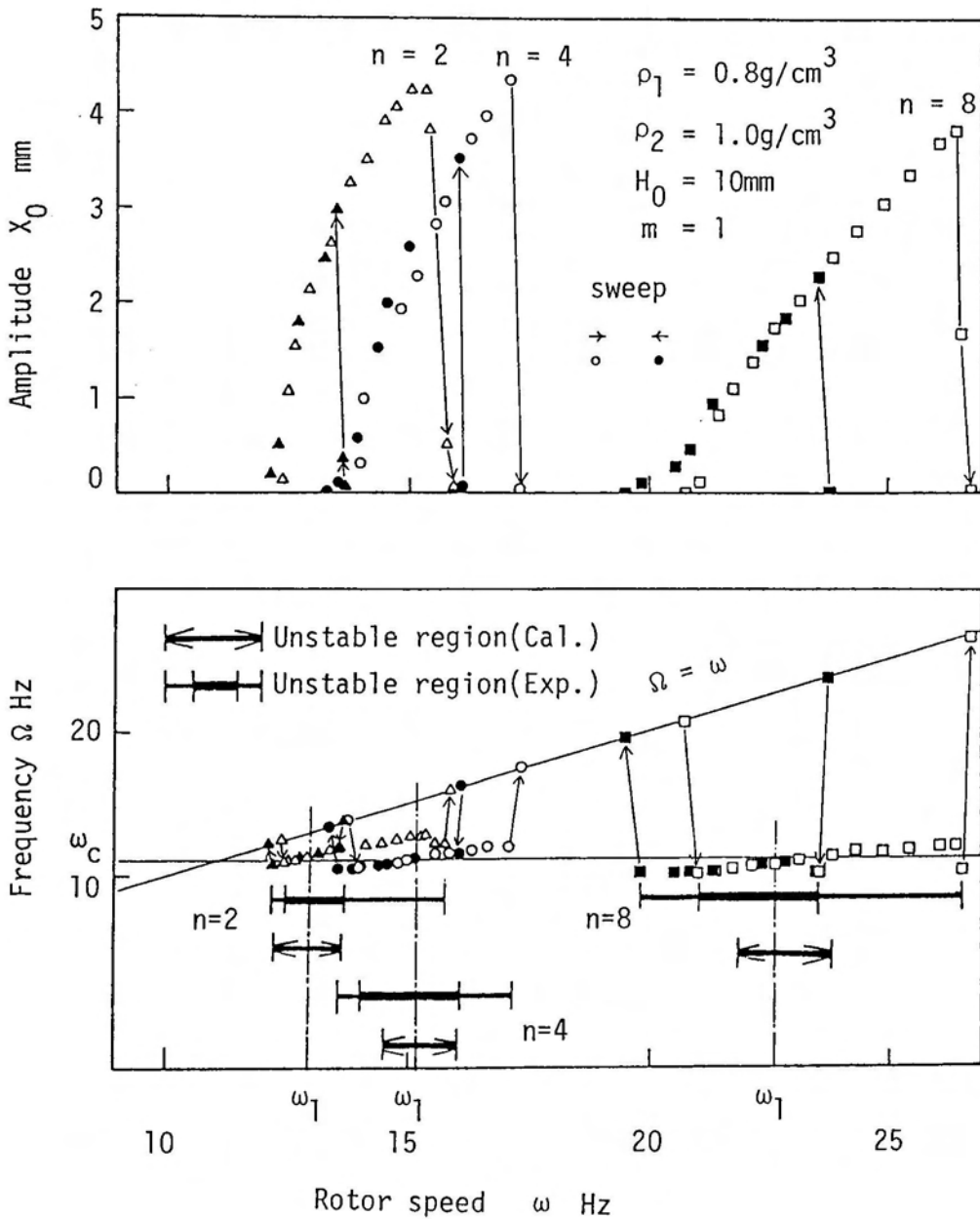


図 3・12 空洞分割数の影響

強くない場合が多い。この傾向は分割数や液体波動の次数が多いほどまた、両液体間の密度差が小さいほど顕著であり、現実の系では割合小さな外部減衰によって抑制されることも珍しくない。例えば、図3・7の場合 $\omega = 22.04\text{Hz} \sim 22.80\text{Hz}$ で液体2次モードの自励振動の発生を予測しているが、実験では全く観察されなかった。

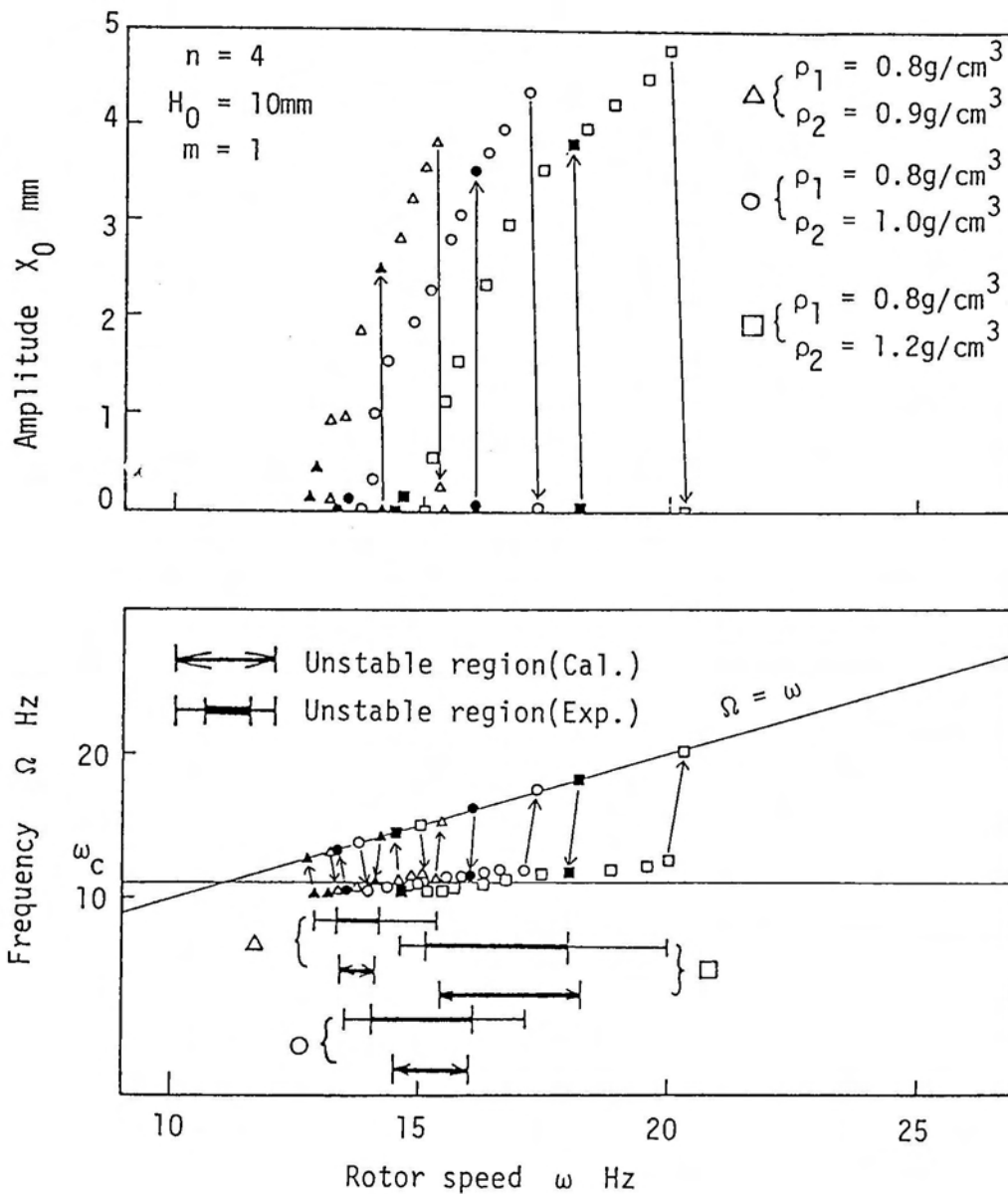


図3・13 液体の密度差の影響

図3・12は不安定領域に対する空洞の分割数 n の影響を示したものである。液体1次モードの係数 c_1 は n の増加関数であるから、分割数を多くすると高回転数側へ移行する。不安定領域の幅は n の増加とともに広がる傾向が見られる。しかし、 $n = 8$ 場合、実験では自励振動が発生するには時間がかかる。これは空洞が狭くなり空洞壁の抵抗などにより液体が運動しにくくなったためと思われる。そして $n = 12$ の場合は、自励振動は全く観察されなかった。

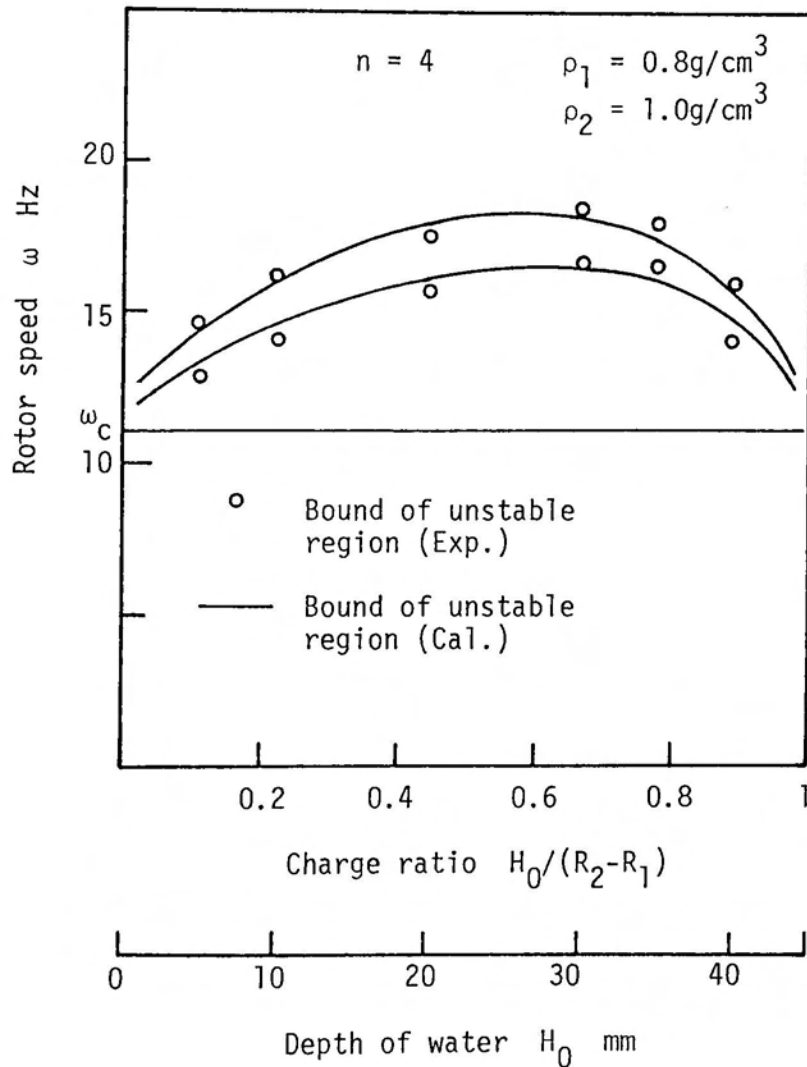


図3・14 液体充填比の影響

図3・13に液体の密度差の影響を示す。密度差が大きくなると不安定領域は高回転数側へ移行し、その範囲は広くなる。また、発生する自励振動も激しくなる傾向がある。

図3・14は密度の大きい液体の厚さ H_0 を変化させた場合の例である。二液間の界面が空洞の環状壁から離れるにつれて不安定領域は

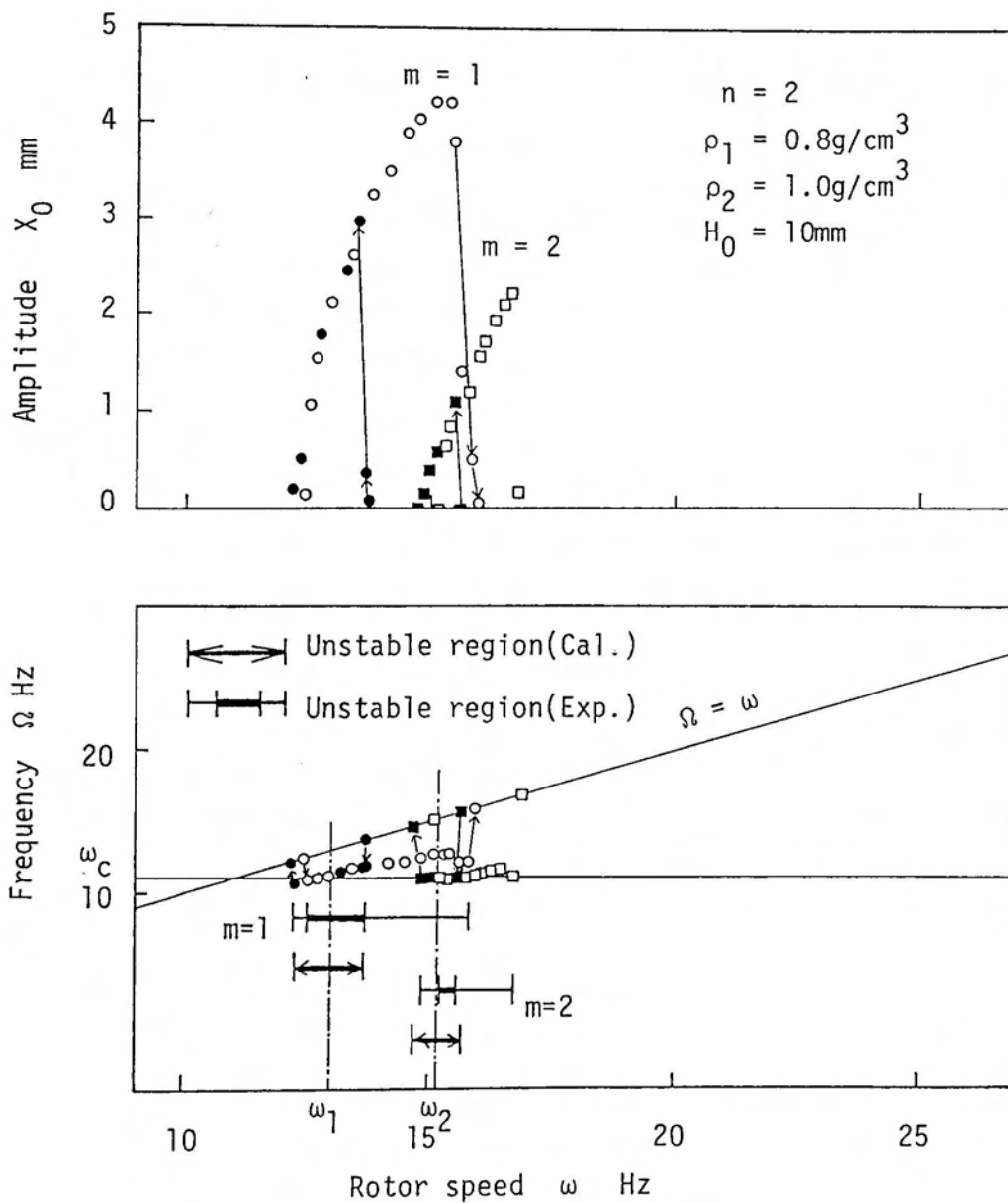


図3・15 2次モードの発生例 ($n = 2$)

高回転数側に移行し、その範囲も広くなるが、界面が壁にかなり近い場合を除けば液体の充填比の効果はさほど顕著ではない。なお、空洞内を水で完全に満たした場合は自励振動は全く観察されなかった。

前述したように液体の2次のモードの自励振動は計算では予測されても、実験では観測されない場合が多い。しかし、分割空洞数が少な

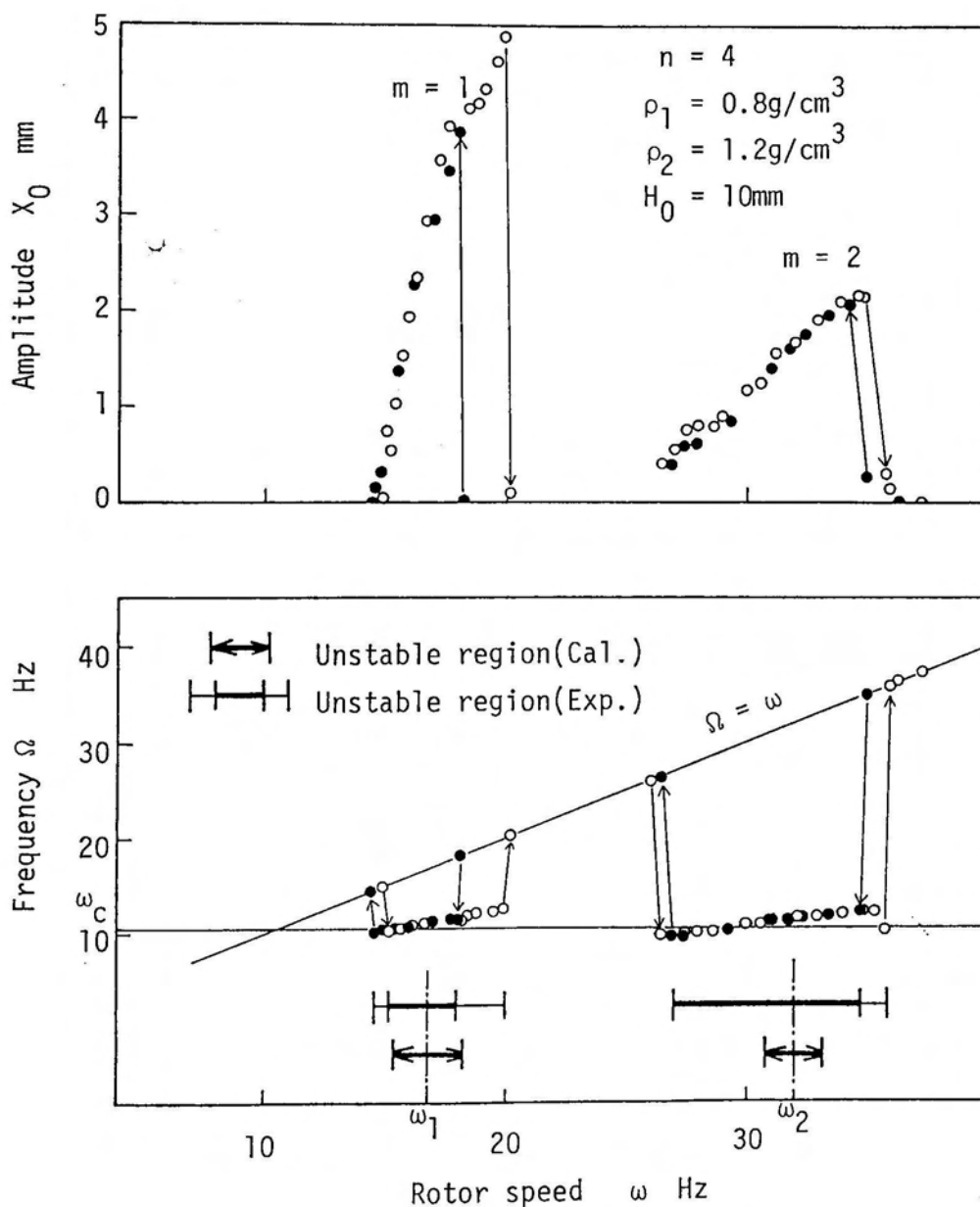


図 3・16 2次モードの発生例 ($n=4$)

い場合や2液間の密度差が大きい場合は2次のモードを持つ自励振動が発生することがある。図3・15および図3・16に2次の液体波動のモードを持つ自励振動の発生例を示す。

図3・15は $n = 2$, $\rho_1 = 0.8\text{g/cm}^3$, $\rho_2 = 1.0\text{g/cm}^3$, $H_0 = 10\text{mm}$ の場合の測定結果である。2次モードの自励振動は1次モードに比べて弱くその発生領域も狭い。この例では、軸回転数を徐々に上昇させた場合1次モードが2次モードの発生域を超える領域まで持続するので2次モードは観察されない。自励振動の振動数は、1次モード2次モードとも同じ ω_c である。

図3・16は $n = 4$, $\rho_1 = 0.8\text{g/cm}^3$, $\rho_2 = 1.2\text{g/cm}^3$, $H_0 = 10\text{mm}$ の場合である。この例では1次モードと2次モードの発生域がかなり離れているので、軸回転数を徐々に変化させた場合それぞれの発生域で、それぞれのモードに対する自励振動が観察される。

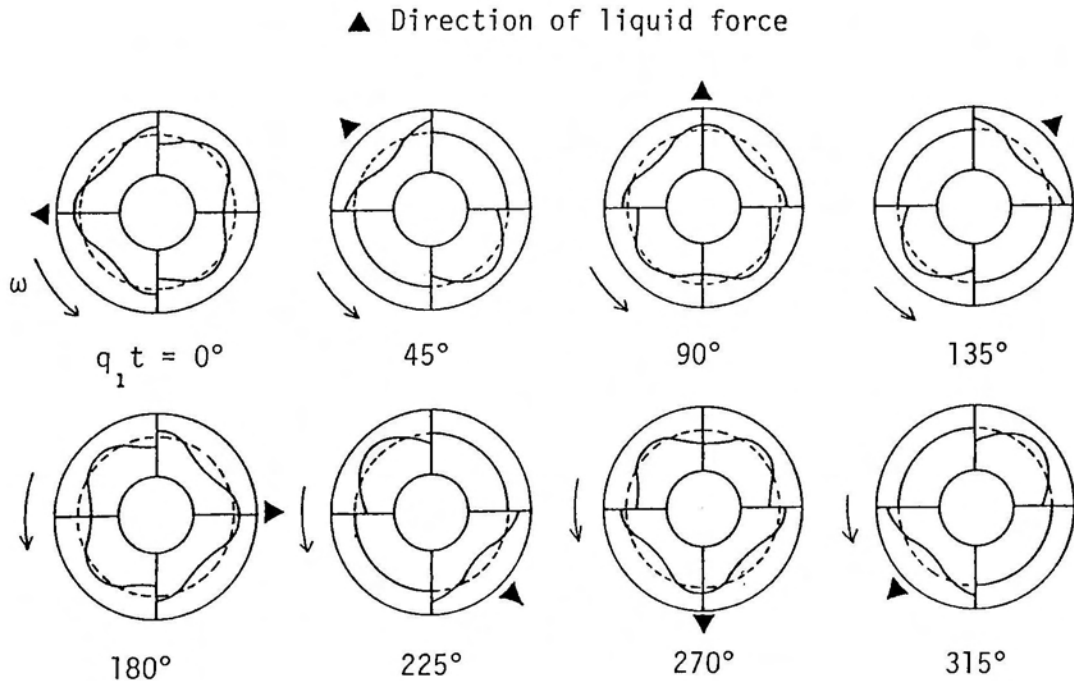
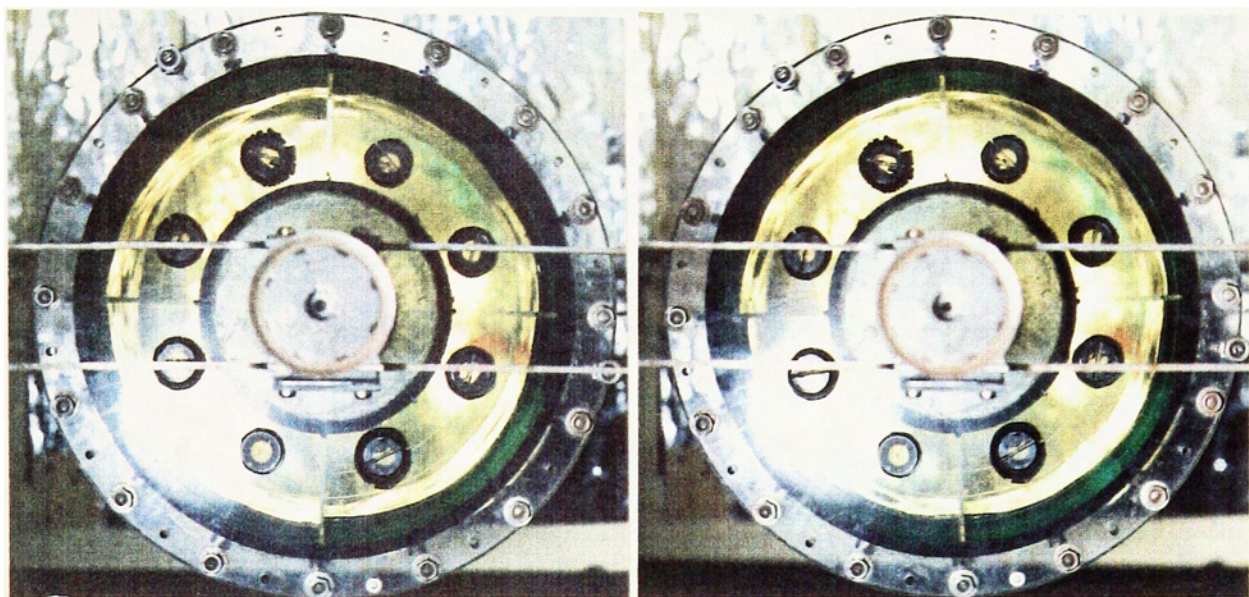
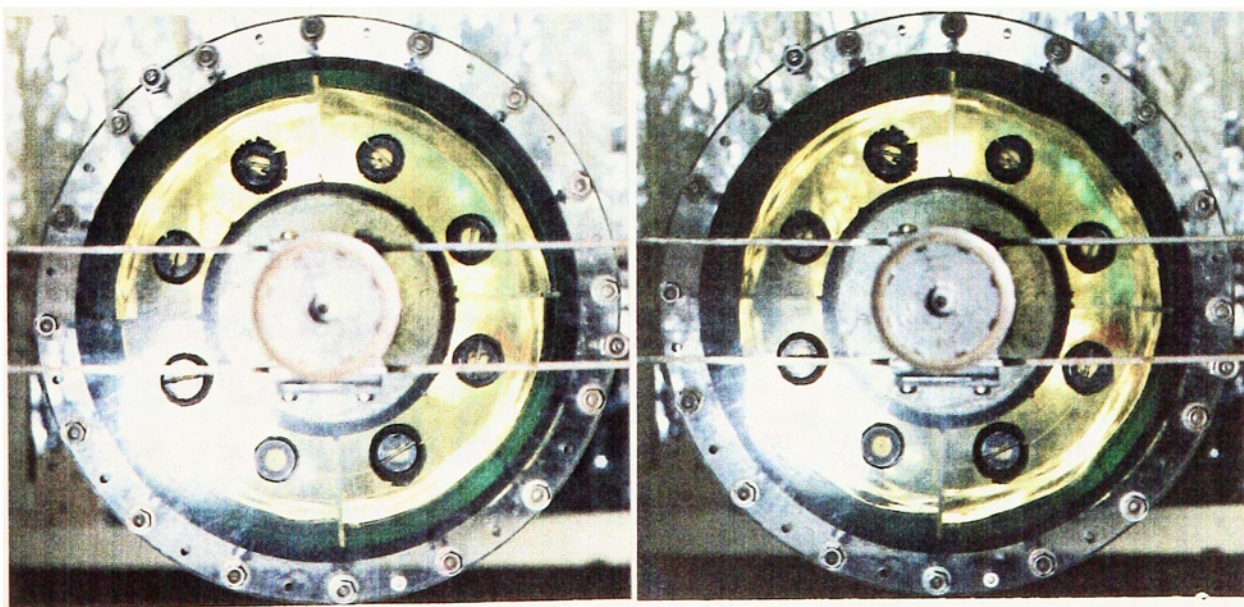


図3・17 界面の変化 ($m = 2$)

 $q_{1t} = 0^\circ$ 90°  135° 180° 図 3・18 界面の変化 ($m = 2$)

2 次のモードについては、実験では自励振動の発生域が計算と離れているが、これは重い液体にかなり粘性の大きい砂糖水を用いて、計算ではその粘性等を見捨てたためと思われる。

図 3・17 および図 3・18 に図 3・16 の場合の 2 次モードの液体波動を伴う自励振動が発生しているときの界面の変化を先の 1 次モードの例と同じように示す。表示法は先の例と同じである。やはり全体として液体力は後進波である。

3・6 結論

扇形の区画に分割され、密度の異なる 2 種類の液体で満たされた空洞を有する高速回転軸系の動的不安定性について理論解析ならびに実験を行った。得られた知見を要約すると

(1) 密度の異なる 2 種類の液体を満たした中空回転軸はその空洞を完全に分割してもなお動的に不安定となる危険性がある。

(2) この種の動的不安定は軸回転数が系の危険速度と液体の固有振動との和に近い領域で、かつそのような領域でのみ起こり得る。

(3) この不安定領域は空洞の分割数や液体の密度差を大きくしていくと高回転数側に移行し、液体の 1 次固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定となる。

(4) 不安定領域の範囲は液体の密度差が大きくない場合は比較的狭い。また、2 次以上のモードの液体波動による自励振動は一般にかなり弱く、実際は観察されない場合が多い。そして小さな外部減衰によって抑制されやすい。

(5) 不安定領域に対する液体充填比の影響は二液間の界面が空洞壁に近接している場合を除けば、さほど大きくない。

第4章 2種類の液体で満たされ分割された高速中空回転軸の動的不安定（減衰による系の安定化の実験）

第3章で、比重の異なる2種類の液体で満たされ分割された中空回転軸系の動的不安定について液体の粘性および系の減衰を無視して調べた。その結果、不安定振動は軸回転数が系の危険速度と液体の固有振動との和に近い領域でのみ起こり得ること、液体の1次固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定であること、分割空洞数が多い場合、液体間の密度差が小さい場合や2次以上のモードの液体波動を伴う自励振動はかなり弱く、小さな外部減衰によって抑制されやすいことなどが分かった。

本章はこの系の自励振動は比較的弱い外部減衰によって安定化させ得ることを実験的に確かめたものである。

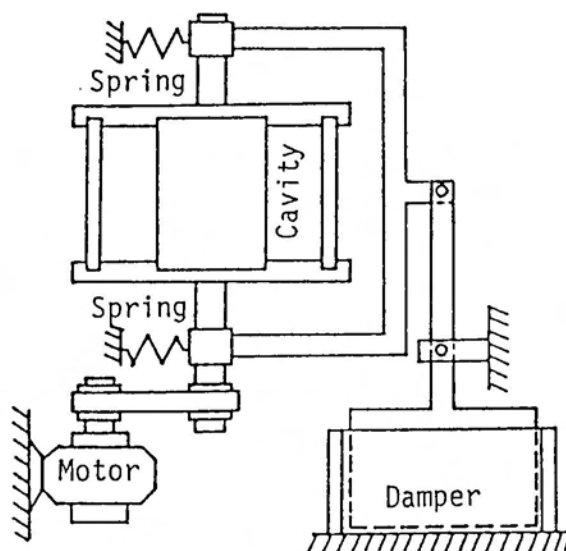


図4・1 実験装置

4・1 実験装置および方法

実験装置の概略を図4・1にその写真を図4・2に示す。ロータは第3章の実験で使用した物と同じである。ただ、減衰を与えるためにオイルダンパを付けているだけである。液体を含まない軸の質量は7.2 kg, 危険速度は18.5Hzである。軸の減衰はオイルダンパによって与えられる。実験の方法等については第3章と同じである。

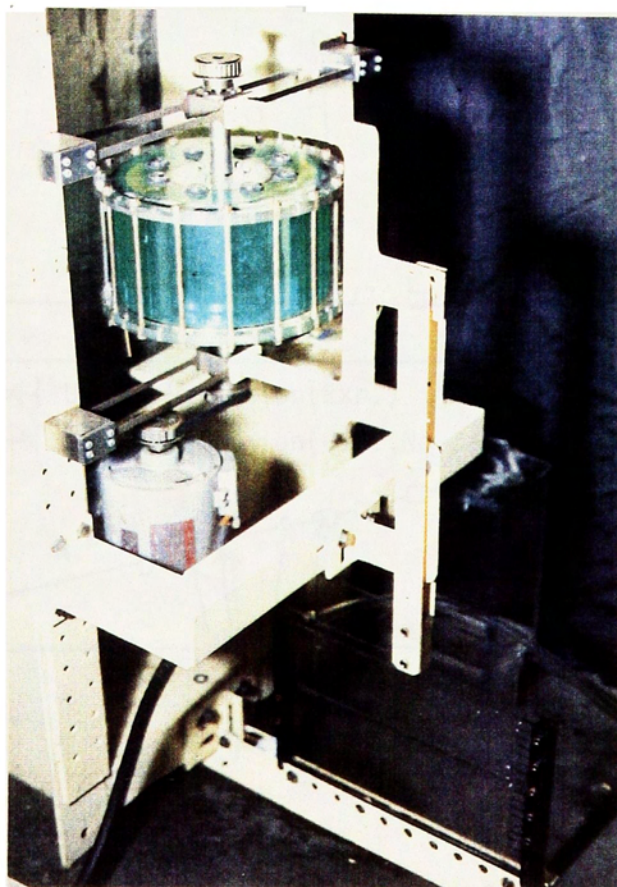


図4・2 実験装置

4・2 実験結果

図4・3に軸の振幅 X_0 、および振動数 Ω と軸回転数 ω との関係の測定結果を示す。空洞は4 ($n=4$) 分割され、灯油 ($\rho_1 = 0.8\text{g/cm}^3$) と平均層厚 $H_0 = 10\text{mm}$ の水 ($\rho_2 = 1.0\text{g/cm}^3$) で満たされている。

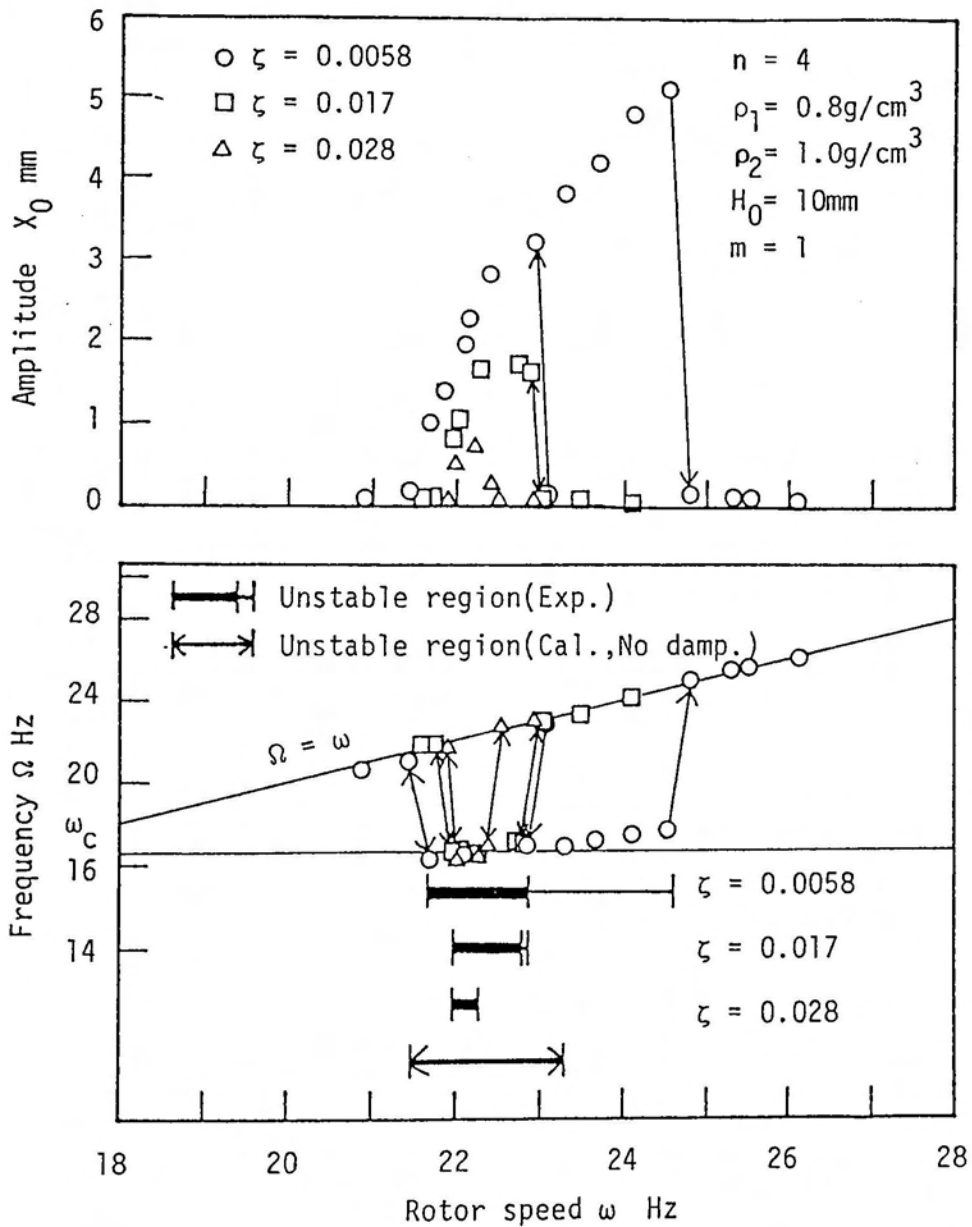


図4・3 外部減衰の効果

図中の太い矢印で示される領域は外部減衰や液体の粘性を無視した場合の不安定領域の計算結果である。またこの場合における系の危険速度 ω も示してある。太線は実験において自励振動が観察される領域を、太線の右側に接続する細線は自励振動が持続するが発生はしない、いわゆる2値安定の領域を表す。

細い矢印は軸回転数を徐々に変化させたときの振動履歴を示す。図から分かるように外部減衰を大きくすると自励振動は小さくなり、その発生域もせまくなる。この例では、系の減衰比が $\zeta = 0.031$ 以上になると自励振動は全く観察されなかった。

この種の自励振動は割合小さな外部減衰によって抑制できることが確認される。

図4・4は不安定領域に対する空洞分割数 n および減衰比 ζ の影響を示したものである。分割数を増すと不安定領域は高回転数側へ移行

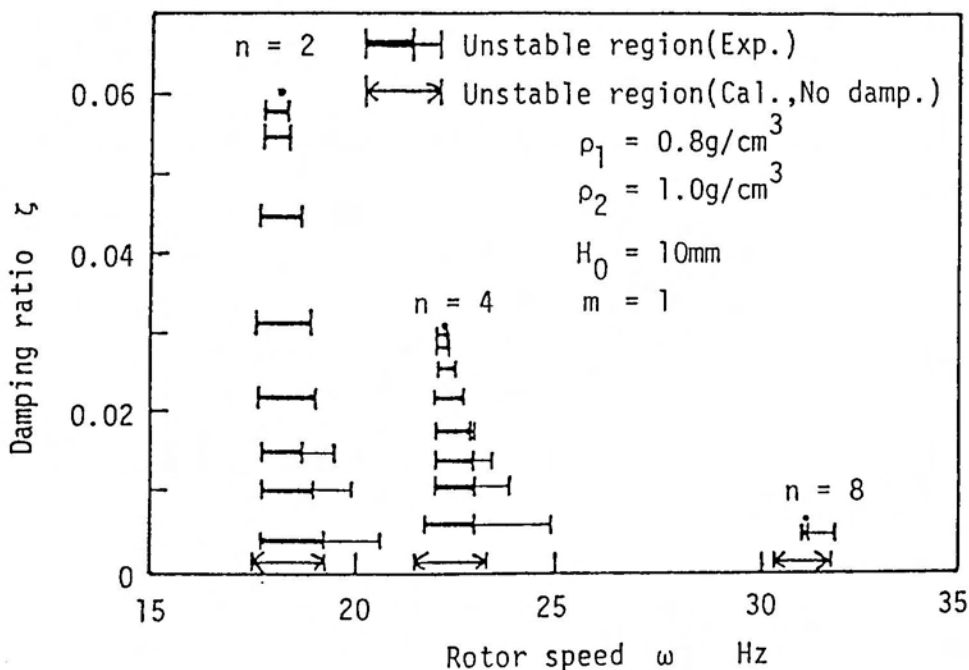


図4・4 空洞分割数の影響

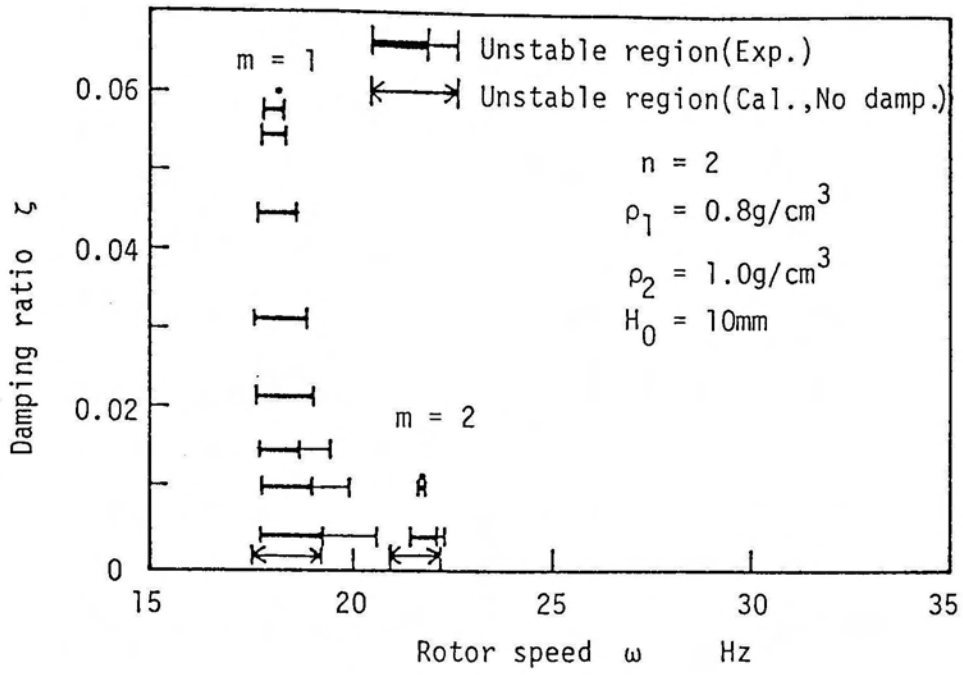


図 4・5 液体の密度差の影響

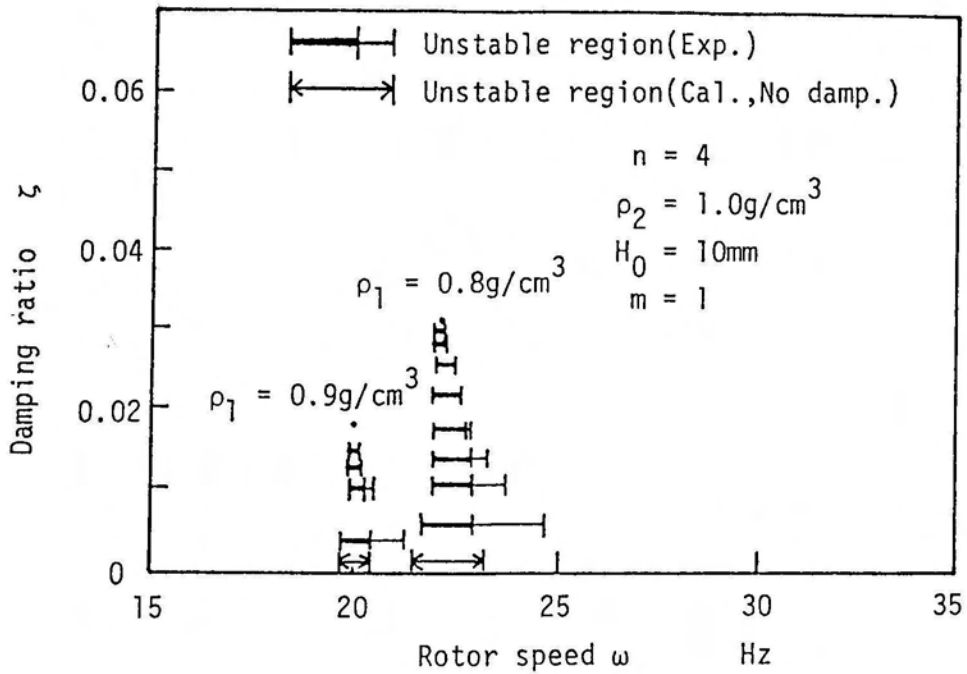


図 4・6 液体波動モードの影響

し、その範囲も狭くなる。 $n = 8$ の場合などはわずかな外部減衰で抑制されている。

図 4・5 は液体の密度差の影響を示す。2 液間の密度差が小さくなると自励振動が発生する領域は狭くなり、弱い外部減衰で抑制できることが分かる。

未分割空洞と異なり、分割空洞の場合は高次モードの液体波動を伴う自励振動が発生し得る。図 4・6 は 2 次モードの波動を伴う自励振動 ($m = 2$) の発生例である。この場合の自励振動の振動数は 1 次モードの場合 ($m = 1$) と同じである。ただし、先に述べたように高次モードの自励振動は小さな減衰でも抑制され易く、観察できない場合が多い。

4・3 結論

2 種類の液体で満たされ分割された中空回転軸系の自励振動に対する外部減衰の影響を実験的に調べた。その結果次のことが分かった。

- (1) この系の自励振動は比較的小さな減衰で抑制できる。
- (2) 分割空洞数や液体のモード次数が多く、液体間の密度差が小さい場合は容易に抑制される。
- (3) 高次の液体モードの自励振動は観察されない場合が多い。

第 5 章 総括

扇形の区画に分割され比重の異なる 2 種類の液体で満たされた空洞を有する高速回転軸系の動的不安定性について理論的ならびに実験的研究を行った結果、以下の結論を得た。

第 2 章ではこの系が遠心力振子を備えた回転軸系と類似の力学的構造をなすから、解析が簡単なことと、系の物理現象の把握が容易であるのでまず、予備的考察として遠心力振子を備えた回転軸系について調べた。

その結果、軸回転数が系の危険速度と振子の固有振動数との和に近い領域で、かつそのような領域でのみ系が不安定となる可能性があることが分かった。振子の支点を軸心より離していくと振子の固有振動数が高くなり、不安定領域は高回転数側に移行し、振子の固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回転数域で安定となる。

さらに、このような回転軸系は系や振子の減衰が非常に大きい場合は、全回転数域で安定となるが、振子の減衰が極端に小さいと高回転数域でも不安定となり得る。しかしながら、理論では系の不安定性は割合弱い外部減衰で安定化できることが予測されることなどが分かった。実験でも理論で予測したような領域で自励振動が発生することが確認された。

第 3 章では、扇形の区画に完全に分割され、比重の異なる 2 種類の液体で満たされた空洞を有する高速回転軸の動的不安定性について調べた。比重の異なる 2 種類の液体を満たした中空回転軸はその空洞を分割してもなお動的に不安定となる危険性がある。軸回転数が系の危険速度と液体の固有振動数との和に近い領域で、かつそのような領域のみで系が不安定になり得ること、液体の 1 次の固有振動数が軸回

転数よりも低くない場合は全域で安定であることなどが分かった。

主なパラメータの系への影響についても調べた。不安定領域は空洞の分割数や液体の密度差を大きくしていくと高回転数側へ移行し、不安定領域の範囲は液体の密度差が大きくない場合は比較的狭い。不安定領域に対する液体の充填比の影響は界面が空洞壁に近接している場合を除けばさほど大きくない。また、2次以上のモードの液体波動を伴う自励振動は一般にかなり弱く、観察されない場合が多い。

空洞分割数を多くすると液体の固有振動数が高くなり、自励振動が発生する軸回転数範囲は高回転数側に移行し、かつその領域も狭くなる。したがって、この自励振動の現実的で最も効果のある防止対策としては空洞の分割数を多くすることである。しかしながら、装置の仕様などからその方策が採り難い場合は外部減衰によって抑制しなければならない。この自励振動は比較的弱い外部減衰で抑制できるので、両者をうまく組み合わせると抑止のより一層の効果が期待できる。

第4章では、第3章で述べた系は現実には比較的弱い外部減衰によって抑制できることが分かったので、実際はどの程度の減衰で系が安定化できるかについて実験的に調べた。分割空洞数や液体波動のモードが大きい場合はかなり弱い減衰で簡単に抑えることができる。

本研究で取り扱った系は遠心力を復元力とする振動系を内蔵した回転軸系である。この様な系においては、軸振動によって励起された内蔵する振動系の運動が軸回転方向と逆方向に回転する、すなわち後進的な不釣合力を生じさせ軸を不安定にし、系に自励振動が引起こされる危険性がある。このような不安定は系の危険速度と内蔵する振動系の固有振動数との和に近い軸回転数域で、かつそのような領域でのみ起こる。

この不安定領域は内蔵する振動系の固有振動数を高くすると高回転数側に移行し、その固有振動数が軸回転数よりも低くない場合は全回

転数域で安定である。さらに、この種の系は比較的弱い外部減衰で安定化できることが予測されるので現実的な自励振動防止策としては内蔵する振動系の固有振動数を高くする方策と共に外部減衰を与えることはより一層の効果が期待できる。

軸と同心の環状溝に複数の転動球を入れた回転軸系、部分的に液体を封入したり比重の異なる2種類の液体で満たした中空回転軸は力学的には振子の支点を軸心に一致させた場合と同じことであり、内蔵する可動質量（液体、球）は振動はしないが、系の類似性を考慮すると転動球や液体の後進的な運動を伴う自励振動を引起こされることは当然のことである。

謝辞

本論文を終えるに当たり、本課題を与えられ終始ご指導、ご鞭撻を賜り、熱心にご指導いただいた九州工業大学工学部 陣内靖介教授に厚く感謝の意を表します。

本論文の作成に際しては、特に九州工業大学工学部 荒木嘉昭教授、山下 忠教授、村上周太教授、富田侑嗣教授より懇切丁寧なご指導と貴重なご助言をいただきました。そのご厚意に対して厚くお礼を申し上げます。

また、西日本工業大学学長 井上順吉先生には永い年月にわたり親身なるご指導とご援助を賜りました。心より深甚の謝意を表します。

実験・データ整理などに関して、ご協力頂いた九州工業大学工学部 振動研究室の卒業生諸氏、ならびに久留米工業大学の関係各位に感謝の意を表します。

付録 3・1 式 (3・16) および式 (3・17) の導出

境界条件 (3・5) は

$$P_{i1}^* + p_{i1} = P_{i2}^* + p_{i2} \quad (3\cdot1\cdot1)$$

式 (3・1・1) を $R = R_0 + H_i$ まわりに Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} P_{i1}^* \Big|_{R=R_0} + \frac{\partial P_{i1}^*}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i + p_{i1} \Big|_{R=R_0} + \frac{\partial p_{i1}}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i \\ = P_{i2}^* \Big|_{R=R_0} + \frac{\partial P_{i2}^*}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i + p_{i2} \Big|_{R=R_0} + \frac{\partial p_{i2}}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i \end{aligned} \quad (3\cdot1\cdot2)$$

2次以上の微小項を無視して

$$\frac{\partial P_{i1}^*}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = \rho_1 \omega^2 R_0, \quad \frac{\partial P_{i2}^*}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = \rho_2 \omega^2 R_0, \quad P_{i1}^* \Big|_{R=R_0} = P_{i2}^* \Big|_{R=R_0}$$

であることを考慮に入れると

$$P_{i2} \Big|_{R=R_0} - p_{i1} \Big|_{R=R_0} = -(\rho_2 - \rho_1) \omega^2 R_0 H_i \quad (3\cdot1\cdot3)$$

すなわち境界条件式 (3・16) が導かれる。

境界条件式 (3・6) は液体が微小振動をしている場合は

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial t} \Big|_{R=R_0+H_i} &= u_{i1} \Big|_{R=R_0+H_i} - \frac{v_{i1}}{R} \frac{\partial H_i}{\partial \theta} \Big|_{R=R_0+H_i} \\ &= u_{i2} \Big|_{R=R_0+H_i} - \frac{v_{i2}}{R} \frac{\partial H_i}{\partial \theta} \Big|_{R=R_0+H_i} \end{aligned} \quad (3\cdot1\cdot4)$$

$\frac{v_{ij}}{R} \frac{\partial H_i}{\partial \theta}$ は2次の微小項であるのでこれらの項は無視して $R = R_0 + H_i$ のまわりに Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial t} \Big|_{R=R_0} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial H_i}{\partial t} \right) \Big|_{R=R_0} \cdot H_i &= u_{i1} \Big|_{R=R_0} - \frac{\partial u_{i1}}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i \\ &= u_{i2} \Big|_{R=R_0} - \frac{\partial u_{i2}}{\partial R} \Big|_{R=R_0} \cdot H_i \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

2 次の微小項を無視すると

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} \Big|_{R=R_0} = u_{i1} \Big|_{R=R_0} = u_{i2} \Big|_{R=R_0} \quad (3.1.6)$$

よって境界条件式 (3.17) が導かれる。

付録 3・2 振幅 A_{i2} および位相 β_{i1} の導出

式 (3.26) は次の様に書かれる。

$$L = \sum_{s=1}^2 [L_{sc} \cos q_s t + L_{ss} \sin q_s t] = 0 \quad (3.2.1)$$

式 (3.2.1) が成り立つには $\cos q_s t, \sin q_s t$ の係数が 0。すなわち

$$\begin{aligned} L_{sc} &= TA_{i2s} \cos k\theta \sin \beta_{is} + \Psi \cos(\theta + \alpha_i) = 0 \\ L_{ss} &= TA_{i2s} \cos k\theta \sin \beta_{is} - \Psi \sin(\theta + \alpha_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ただし

$$T = \{1 - (q_s/p_m)^2\} (r_2^{2k} - 1), \quad \Psi = (q_s/2k)(\Omega/\omega)^2 R_0 X_0$$

(3.2.2) は厳密には満足されない。そこで次の様な Galerkin 法を適用する。

$$\int_0^{\theta_1} L_{sc} \cos k\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{\theta_1} L_{ss} \cos k\theta d\theta = 0 \quad (3.2.3)$$

したがって、次式が求められる。

$$A_{i2s} \sin \beta_{is} = - \frac{q_s}{k\theta_1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \frac{b_{1i}}{(r_2^{2k} - 1)\{1 - (q_s/p_m)^2\}}$$

$$A_{i2s} \cos \beta_{is} = \frac{q_s}{k\theta_1} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \frac{b_{2i}}{(r_2^{2k} - 1)\{1 - (q_s/p_m)^2\}}$$

(3.2.4)

ここで

$$b_{1i} = \begin{cases} -\{\sin \alpha_i - (-1)^m \sin(\theta_1 + \alpha_i)\}/(1 - k^2) & (k \neq 1) \\ m\pi \cos \alpha_i / 2 & (k = 1) \end{cases}$$

$$b_{2i} = \begin{cases} \{\cos \alpha_i - (-1)^m \cos(\theta_1 + \alpha_i)\}/(1 - k^2) & (k \neq 1) \\ m\pi \sin \alpha_i / 2 & (k = 1) \end{cases}$$

(3.2.4) より振幅 A_{i2} 、および位相 β_{i2} が求められる。

付録 3・3 液体力の導出

第 i 区画の液体力は空洞の長さを Z_0 とし、各液体の圧力を積分する。 x_1, y_1 方向の成分 F_{ix1}, F_{iy1} は次の様に書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{F_{ix1}}{Z_0} &= \int_0^{\theta_1} p_{i2}|_{R=R_2} \cdot R_2 \cos(\theta + \alpha_i) d\theta - \int_0^{\theta_1} p_{i1}|_{R=R_1} \cdot R_1 \cos(\theta + \alpha_i) d\theta \\ &+ \left\{ \int_{R_1}^{R_0} p_{i1}|_{\theta=0} dR + \int_{R_0}^{R_2} p_{i2}|_{\theta=0} dR \right\} \sin \alpha_i \\ &- \left\{ \int_{R_1}^{R_0} p_{i1}|_{\theta=\theta_1} dR + \int_{R_0}^{R_2} p_{i2}|_{\theta=\theta_1} dR \right\} \sin(\theta + \alpha_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 X_0 \Omega^2 \{ [2G_s B_1 b_{1i}^2 + M_r \{2\theta_1 + \sin 2(\theta_1 + \alpha_i) - \sin 2\alpha_i\} / 8 \\
&\quad + G_s B_2 b_{1i} \{ \sin \alpha_i - (-1)^m \sin(\theta_1 + \alpha_i) \} \\
&\quad - m_r \{ \sin 2(\theta_1 + \alpha_i) - \sin 2\alpha_i \} / 8] \cos q_s t \\
&\quad - [2G_s B_1 b_{1i} b_{2i} - M_r \{ \cos 2(\theta_1 + \alpha_i) - \cos 2\alpha_i \} / 8 \\
&\quad + G_s B_2 b_{2i} \{ \sin \alpha_i - (-1)^m \sin(\theta_1 + \alpha_i) \} \\
&\quad - m_r \{ \sin^2(\theta_1 + \alpha_i) - \sin^2 \alpha_i \} / 4] \sin q_s t \} \\
\frac{F_{iy1}}{Z_0} &= \int_0^{\theta_1} p_{i2} \Big|_{R=R_2} \cdot R_2 \sin(\theta + \alpha_i) d\theta - \int_0^{\theta_1} p_{i1} \Big|_{R=R_1} \cdot R_1 \sin(\theta + \alpha_i) d\theta \\
&\quad - \left\{ \int_{R_1}^{R_0} p_{i1} \Big|_{\theta=0} dR + \int_{R_0}^{R_2} p_{i2} \Big|_{\theta=0} dR \right\} \cos \alpha_i \\
&\quad + \left\{ \int_{R_1}^{R_0} p_{i1} \Big|_{\theta=\theta_1} dR + \int_{R_0}^{R_2} p_{i2} \Big|_{\theta=\theta_1} dR \right\} \cos(\theta_1 + \alpha_i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 X_0 \Omega^2 \{ [2G_s B_1 b_{1i} b_{2i} - M_r \{ \cos 2(\theta_1 + \alpha_i) - \cos 2\alpha_i \} / 8 \\
&\quad - G_s B_2 b_{1i} \{ \cos \alpha_i - (-1)^m \cos(\theta_1 + \alpha_i) \} \\
&\quad + m_r \{ \cos^2(\theta_1 + \alpha_i) - \cos^2 \alpha_i \} / 4] \cos q_s t \\
&\quad - [2G_s B_1 b_{2i}^2 + M_r \{ 2\theta_1 - \sin 2(\theta_1 + \alpha_i) - \sin 2\alpha_i \} / 8 \\
&\quad - G_s B_2 b_{2i} \{ \cos \alpha_i - (-1)^m \cos(\theta_1 + \alpha_i) \} \\
&\quad + m_r \{ \sin 2(\theta_1 + \alpha_i) - \sin 2\alpha_i \} / 8] \sin q_s t \}
\end{aligned}$$

(3.3.1)

ただし

$$G_s = \frac{(q_s/\omega)^2 R_0^{1-k}}{k\theta_1(r_2^{2k} - 1)(1 - q_s^2/p_m^2)}, \quad M_r = \rho_2 R_2^2 - \rho_1 R_1^2,$$

$$m_r = \rho_2(R_2^2 - R_0^2) + \rho_1(R_0^2 - R_1^2), \quad B_1 = \rho_2 R_2^{k+1} - \rho_1 \delta R_1^{k+1},$$

$$B_2 = \rho_2 \xi_2 + \rho_1 \delta \xi_1,$$

$$\xi_j = \begin{cases} (-1)^j \{ (R_j^2 - R_0^2)/2 + R_j^2 \ln(R_j/R_0) \} & (k = 1) \\ (-1)^j \{ (R_j^{1+k} - R_0^{1+k})/(1+k) + R_j^{2k} (R_j^{1-k} - R_0^{1-k})/(1-k) \} & (k \neq 1) \end{cases}$$

液体力はこれらを加えあわせると求められる。

$$F_{x1} = \sum_{i=1}^n F_{ix1}, \quad F_{y1} = \sum_{i=1}^n F_{iy1} \quad (3.3.2)$$

参考文献

- (1) F. G. Kollmann, " Experimentelle und theoretische Untersuchungen uber die kritischen Drehzahlen Flussigkeitsgefullter Hohlkorper ", Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwissens, Ausgabe, Nos. 4 and 5, 1962, pp.115-123 and pp.147-153
- (2) F. F. Ehrich, " The Influence of Trapped on High Speed Rotor Vibration", ASME Journal of Engineering for Industry, 1967, pp. 806-812
- (3) J. A. Wolf, " Whirl Dynamics of Rotor Partially Filled with Liquid", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, 1968, pp.676-682
- (4) I. M. Daich and Kazhdon, " Vibration of a Rotating Rigid Body with a Cavity Partly Filled with an Arbitray Viscous Liquid ", Soviet Applied Mechanics, 9-8, 1975, pp.888-891
- (5) S. L. Hendricks and J. B. Morton, " Stability of Rotor Partially Filled with a Viscous Incompressible Fluid ", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, 1979, pp.913-918
- (6) 齊藤、染谷, " 液体を内蔵した中空回転軸の振動に関する研究 (第1報 差分法による液体力の数値解)", 日本機械学会論文集 (第1部), 44巻, 388号, 昭和53年, pp.4115-4122
- (7) 齊藤、染谷, " 液体を内蔵した中空回転軸の振動に関する研究 (第2報 定数係数化による液体力の近似解)", 日本機械学会論文集 (第1部), 44巻, 388号, 昭和53年, pp.4123-4129
- (8) 齊藤、染谷, " 液体を内蔵した中空回転軸の振動に関する研究 (第3報 安定限界速度の解析)", 日本機械学会論文集 (C編), 45巻, 400号, 昭和54年, pp.1325-1331
- (9) 齊藤、染谷, " 液体を内蔵した中空回転軸に振動に関する研究 (第4報 実験結果)", 日本機械学会論文集 (C編), 48巻, 427号, 昭和57年, pp.321-327

- (10) 齊藤、染谷, "液体を内蔵した中空回転軸の振動に関する研究 (第5報 境界層理論を用いた液体力の近似解果)", 日本機械学会論文集(C編), 48巻, 429号, 昭和57年, pp. 656-661
- (11) 齊藤、染谷, "液体を内蔵した中空回転軸に振動に関する研究 (第6報 高レイノルズ数条件下での安定限界速度の解析)", 日本機械学会論文集(C編), 48巻, 435号, 昭和57年, pp. 1722-1728
- (12) 金子、葉山, "回転円筒容器内に部分的に含まれた液体の自由表面波に関する研究 (第1報 共振モードの可視化と非粘性による解析)", 日本機械学会論文集(C編), 48巻, 435号, 昭和58年, pp. 370-380
- (13) 金子、葉山, "回転円筒容器内に部分的に含まれた液体の自由表面波に関する研究 (第2報 境界層理論による流体力の計算)", 日本機械学会論文集(C編), 49巻, 439号, 昭和58年, pp. 381-391
- (14) 金子、葉山, "液体で部分的に満たされた中空回転軸系の自励振動に関する研究 (第1報 境界層理論から得られた流体力に基づく不安定性)", 日本機械学会論文集(C編), 51巻, 464号, 昭和60年, pp. 765-772
- (15) 陣内、荒木、井上、中島、上出, "液体を部分的に含む中空回転軸の自励振動 (第1報, 軸振動による液体の波動)" 日本機械学会論文集(C編), 51巻, 467号, 昭和60年, pp. 1463-1471
- (16) 太田、石田、佐藤、山田, "液体を持つ中空回転軸の振動に関する実験", 日本機械学会論文集(C編), 52巻, 474号, 昭和61年, pp. 474-482
- (17) 井上、陣内、荒木、中原, "自動平衡装置 (その基礎的な特性)", 日本機械学会論文集(C編), 45巻, 394号, 昭和54年, pp. 646-652
- (18) 井上、陣内、久保, "自動平衡装置 (動不釣り合いへの適用)", 日本機械学会論文集(C編), 49巻, 448号, 昭和57年, pp. 2142-2148
- (19) В л е х м а н, И. И., "Р о т о р с м а я т н и к о в ы м и
п о д в е с к а м и", С и н х р н и з а ц и я в П р и р о д е
и Т е х н и к е, Н а у к а, 1981, с. 180-186

- (20) E. L. Thearle, "Automatic Dynamic Balancers", *Machine Design*, 1950, pp. 103-106
- (21) 例えば 栗野誠一 著, "内燃機関工学", 山海堂, 昭和33年, pp. 552-561
- (22) 安尾、深田、大野、河村, "自由表面を含む液体流路を内蔵する回転体の振動(第1報 充てんされた液体の表面速度が周方向成分を持たない場合)", *日本機械学会論文集(C編)*, 51巻, 462号, 昭和60年, pp. 265-271
- (23) 安尾、河村、深田, "自由表面を含む液体流路を内蔵する回転体の振動(第2報 伝達マトリックス法を用いた弾性ロータの振動特性の数値解析)", *日本機械学会論文集(C編)*, 55巻, 511号, 1989, pp. 602-610
- (24) T. Shimogo, K. Yoshida, M. Kumagai and Y. Kazao, "Vibration of Rotor Containing Liquid", *Proceedings of the International Conference on Rotor Dynamics*, Tokyo, 1986, pp. 453-458
- (25) 谷下, "クランク軸の横振動に対する波動型動吸振器の設計法", *日本機械学会論文集*, 8巻, 30号, 昭和17年, pp. 26-31
- (26) 松下、高木、米山、斎藤、永田、相沢, "液体を内蔵したロータの不安定振動に対する電磁ダンパによる安定化", *日本機械学会論文集(C編)*, 53巻, 496号, 昭和62年, pp. 2453-2458
- (27) 久保, "振り子を付けたロータの動的挙動", *久留米工業大学研究報告*, 第8号, 1984年, pp. 19-27
- (28) 久保、陣内、荒木、井上, "自動平衡装置(遠心力振子を利用した場合)", *日本機械学会論文集(C編)*, 51巻, 467号, 昭和60年, pp. 1772-1777
- (29) Kubo, Jinnouchi, Araki and Inoue, "Automatic Balancer (Pendulum Balancer)", *Bulletin of JSME*, Vol. 29, No. 249, 1986, pp. 924-928

- (30) Jinnouchi, Araki, Inoue and Kubo, " On the Self-Excited Oscillations of a High-Speed Rotor Containing a Partitioned Cavity Filled with Two Kinds of Liquids ", Proceedings of International Conference on Mechanical Dynamics, August 3-6, 1987, Shenyang, China, pp.19-23
- (31) 陣内、荒木、井上、松下、久保, " 2種類の液体で満たされ分割された高速中空回転軸の動的不安定(粘性および減衰を無視した場合)", 日本機械学会論文集(C編), 55巻, 511号, 1989年, pp.5773-580
- (32) Jinnouchi, Inoue, Araki and Kubo, " Dynamic Instability of a High-Speed Rotor Containing a Partitioned Cavity Filled with Two Kinds of Liquids ", Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 1989, Vol.111, No.4, pp.450-456
- (33) C. Hayashi, " Nonlinear Oscillations in Physical Systems ", McGraw-Hill, 1964, pp.28
- (34) 例えば " 機械工学便覧 第2編", 日本機械学会, pp.2-4
- (35) A. П. シーシナ、И. В. プロスクリャコフ (麻嶋格次郎訳), " 高等代数 ", 総合図書, 昭和42年, pp.160
- (36) ボゴリューボフ、ミトロポリスキー (益子訳), " 非線系振動論 ", 共立出版, 昭和36年, pp.70
- (37) 例えば L. A. Pipes and S. A. Hovanessian, (清水訳), " 行列算法の応用", サイエンス社, 昭和46年, pp.82
- (38) H. Lamb, " Hydrodynamics, 6th ed.", Dover Publications, 1932, pp.7