弾性棒を備えた回転体の動的安定性に関する研究

平成14年1月

大 塚 芳 臣

目　次

第１章　序論・・・1

１・１　本研究の目的　1

１・２　従来の研究と本研究の特色　4

１・３　本研究の内容　9

第２章　並進モードの動的安定性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・12

（遠心力による梁モードの変化を無視した場合）

２・１　理論解析　14

２・１・１　運動方程式　14

２・１・２　梁の固有振動数　20

２・１・３　梁の振動解　23

２・２　系の動的安定性　25

２・２・１　振動数方程式　25

２・２・２　安定性　26

２・３　実験および考察　32

２・４　結論　36

第３章　遠心力による梁モードの変化とその安定性への影響・・37

３・１　梁の固有振動数と固有モード　37

３・１・１　Galerkin 法による３モード近似解析　37

３・１・２　Order N 法による数値計算　41

３・２　安定性　44

３・３　結論　47

第4章　円錐モードの動的安定性……48
4・1　運動方程式　50
4・2　振動数方程式と系の安定性　55
4・3　実験装置および結果　62
4・4　結論　66

第5章　総括……67

謝辞……70

付録……71
Ⅲ　Order N 法の解説……71
Ⅲ・1　柔軟多体構造物の定式化法　71
Ⅲ・2　速度および加速度　71
Ⅲ・3　運動方程式　72
Ⅲ・4　変数変換則　73
Ⅲ・5　多体システムへの適用　74
Ⅲ・6　見かけ上切り離された等価システム　76
Ⅲ・7　ロータの質量行列と力の総計 $\mathbf{M}_1, \bar{G}_1$　79
Ⅲ・8　弾性棒の質量行列と力の総計 $\mathbf{M}_i, \bar{G}_i$　80
Ⅲ・9　構成要素の結合　82
Ⅳ　運動エネルギー式(4・1)の補正項……85
プログラムリスト……87

参考文献……133

第1章　序論

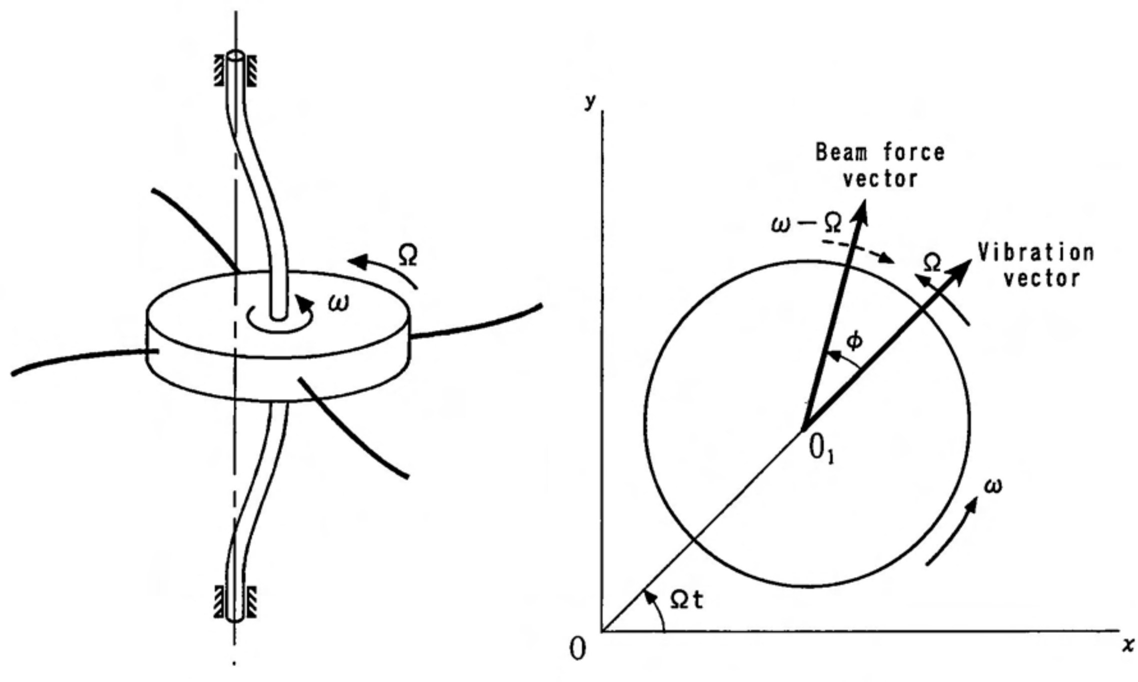
1・1　本研究の目的

長い振り子や弾性ブームを取付けた回転体は、ある回転数域で激しい自励ふれまわりや姿勢不安定を引起こす危険性がある。この事例としては、soft in-plane ローターを持つヘリコプター特有の地上共振や空中共振がよく知られている[1]。これは数秒のうちに機体を破壊し得る非常に危険な自励振動である。試料保持容器を回転軸にピン支持した、いわゆる Swing Arm 型の遠心分離機[2]や振り子を利用した自動平衡装置[3][4]でも同種の自励振動が起きる。弾性ブームによる回転体の姿勢不安定の例は米国初の人工衛星 Explorer I のアンテナによる予期に反した短軸まわりの回転がある。最近でも 1995 年に打上げられた細長い弾性ブームを持ち、長軸まわりに低回転するカナダのテザー衛星 ODEPUS-C のスピン不安定が報告された[5]。

このように、柔軟な片持ち梁を備えた回転軸系においても、ある条件下で自励振動が発生し系が不安定となると考えられる。この種の自励振動の特徴や発生メカニズムは次のように説明することが出来る。

発生する自励振動は軸の危険速度にほぼ等しい角速度Ωで軸の回転速度と同じ向きにふれまわる、いわゆる前進ふれまわりである。このとき図1・1（a）に示すようにローターに取付けられた柔軟な片持ち梁には軸のふれまわりの慣性力によってふれまわりに同期した振動が励起される。この振動によって生じる梁全体の慣性力はふれまわりに同期して回転する力としてローターにフィードバックされる。一般に自励振動発生時の軸回転数ωは危険速度Ωよりも

高い。したがって、軸のふれまわりの慣性力は梁に対して軸回転数とは逆の方向に$\omega-\Omega$の角速度で回転する力として作用する。減衰抵抗が作用する振動系は常に周期力よりも位相が遅れて変位する。梁の振動による慣性力の方向は梁全体の重心移動の方向に一致するから、図１・１（ｂ）に示すように、梁全体の振動による慣性力は常にある角度ϕの遅れを伴って軸のふれまわりに同期して回転する。ローターに固定した回転座標系から見たこの位相の遅れは軸に対する相対回転方向が軸回転と逆方向であるために、静止座標系から見ると進みになる。この進みのため、軸のふれまわりによって励起された梁の振動による慣性力は軸のふれまわりをさらに成



（a）概略図　　（b）梁力と振動ベクトルとの関係

図 1・1　柔軟な片持ち梁を備えた回転軸

長させる方向に作用するから、系にエネルギーが蓄積されて自励振動が発生する。同様な現象は、ローター内に複数個の転動球を入れた回転軸系[(6)-(8)]や空洞内に比重の異なる二種類の液体で満たされた回転軸系[(9)-(11)]においても起こり得る。前者は転動球の後進的な運動を、後者は液体の自由表面の後進的な波動を伴う自励振動を引起すことが確認されている。

上記のようにこの種の自励振動は、回転軸の擾乱的なふれまわりがブームや振り子等の可動質量の振動を誘起し、それによって発生した不釣合い力が軸のふれまわりを成長・持続させるという正帰還的力学構造によって引起こされる。

最近、クリーンなエネルギー源として開発や普及が進められている発電用風車も長い弾性ブームを備えた回転体と見なしてよい。これらの不安定振動発生事例の報告はまだ見当たらないが、風車の高効率化・高性能化の観点から剛構造から柔構造への転換が行われ、支持塔も剛性の高い塔から柔構造でローターとの共振を避ける構造が主体となりつつある。このような柔構造は一般に自励振動を発生し易くするから、その危険性の有無について事前に十分な検討を行うことは設計製作上不可欠である。

以上のような背景から、本研究はこの種の動的不安定現象の基本的な発生メカニズムや予防策をできるだけ簡潔明瞭に把握するため、一様断面の片持ち梁を等間隔に複数個取付けた単純な回転軸系の並進モードと円錐モードの安定性に的を絞って理論解析と実験を行った。その際、風車やヘリコプターの翼が必然的にもつ曲げ剛性の方向による大きな違いも安定性を支配する重要な因子の一つとして考慮した。

1・2 従来の研究と本研究の特色

回転体に取付けられた片持ち梁は、プロペラ、ヘリコプター回転翼、タービン翼、圧縮機およびロボットアームとしてよく提供されるものである。梁の自由振動解析からよく知られた結果は、回転の速度が増加するにつれて梁の固有振動も高くなることである。これは遠心力の作用により梁の剛性が上がるためである。

Nachman[12]は、回転する梁の振動方程式を提示し、梁は弾性的で回転軸は必ずしも梁の固定端を通る必要はないとして、横断面せん断力(または座屈)を計算した。Kar[13]らは、あらかじめ偏りとねじりを与えられた片持ち梁が一定の角速度で回転しかつ自由端に周期的外力が作用するとき、回転するねじり梁の安定性を解析的に検討し、固有値法により梁の静的バックリング負荷と動的不安定領域を求めた。Chen[14]らはツイストドリル・ヘリコプター回転翼など軸力を受けながら回転するねじれたTimoshenko梁の横振動に関して、鋼製の矩形断面梁にねじり・回転・軸力の3条件を与え、有限要素法を用いて各回転数に対する固有振動数と振動モードを解析する容易で優れた計算法を開発した。また、Du[15]らはたわみに関する4項の微分方程式で与えられる運動方程式と境界条件を導き、解をべき級数の形に仮定して、回転面に垂直な方向の自由曲げ振動問題を正確に解いた。しかし最近でも、種々の軸回転速度についてEuler-Bernoulli片持ち梁の固有振動数の実験的な測定の試みがなされており[16]、提唱されている多くの解析や数値計算において色々な問題を含んでいることがうかがわれる。

上に述べたものは回転する梁のみに着目したものであるが、回転体と片持ち梁の関係をシステムとして捕らえたものとして、ヘリコ

プター、風車およびスピン衛星などが挙げられる。

完全関節型ローターのヘリコプターでは、ラグの固有振動数はブレードの回転数よりも小さい。このような場合、地上にあるヘリコプターに、いわゆる、地上共振と呼ばれる破壊的な機械的不安定をもたらす。これは降着装置を含む機体側の運動と、ブレードの回転面内の運動が連成して起こるもので、本質的には空気力が関与しない機械的な自励振動である。この防止にはラグ・ダンパ、降着装置の緩衝器などによる減衰の付与、あるいは降着装置の剛性変化による機体の固有振動数の調整などが有効とされている[1]。

一方、ラグ・ヒンジを取除いた無(あるいは半)関節型ローターの場合類似の現象が地上だけでなく空中でも発生する可能性があり、これは空中共振と呼ばれる。このとき、ラグの固有振動がローターの回転数に接近するのは危険であるから、ローターの回転数よりラグの固有振動数を小さくする場合と大きくする場合の2通りの方法がある。前者を soft in-plane、後者を stiff in-plane のローターという。地上共振や空中共振は、一般的に soft in-plane のローターに独特の現象で、コールマン型の問題と呼ばれる[17]。XH-51A ヘリコプターは空中共振問題をはじめて提起したものとされているが、Donham[18]らはこのヘリコプターについて、地上および空中における soft in-plane のローターの不安定現象を解説している。

stiff in-plane のローターではコールマン型の不安定現象は通常発生しない。ただし、このローターのリード・ラグ運動はたわみが小さいので機械的減衰を与えることが一般に困難であるため、他のブレード運動や機体側の運動と連成する可能性がある。同様の連成現象はもちろん soft in-plane のローターにも存在し、一般にローターの動的な安定、不安定現象はきわめて多岐にわたる[19][20]。

最近の地上および空中共振の基本的な解析として、Dick[21]は全関節型ローターおよび極めて剛性の高いリジッドローターを持つヘリコプターについて地上共振に関する安定性の数値解析を行っている。Zhang[22]は複素座標を用いて空中共振を体系的に再検討している。しかし、これら多くの研究は、ブレードが空気力によって周期的な力を受けるローター/胴体系の振動問題に主な関心をよせている。

風力エネルギーのエネルギー密度は小さく、不規則であるため風力発電は常に需要に見合う安定した電力を供給するためのエネルギー源としては評価が低い。しかし、石油依存度を軽減し、二酸化炭素を排出しない無尽蔵なクリーンエネルギーとして注目されている。日本では 1995 年には 11MW の規模であったが、2010 年には政府目標として 300MW を掲げている。強風による事故は、支持部の変形、翼のしなり、振動による金属疲労に大別される。

風車の設計に関しては、高効率・高性能の観点から剛構造から柔構造への転換が行われている。支持塔は剛性の高い塔から柔構造でローターとの共振を避ける構造が主体となり、翼はグラスファイバーにより軽量化され、ローター直径が 70m を越えるような大面積の大型風車が登場している[23]。風力発電機のような回転機械の動力学的解析はタービンローターが最も重要な役割を果たすが、そのためにはブレード枚数やタワーとローターの位置関係など基本的な設計方針が重要であり[24]、その運転は電力系統に接続されて広範囲に変化する条件で動的安定性を改善することが要求される。

風車に関するローター/支柱系の動特性に関して記述した研究は少ない。牛山ら[25]は水平軸プロペラ形風車システムをモデル化した。風車のブレード枚数を B、風車の定格回転時の回転数を n としたとき、支柱に作用する加振力は Bn で表されるとし、支柱の質量を無

視した場合の1質点系、ばね支持された2質点系の固有振動数を数値計算した。岡野ら[26]は風車ローターの回転がもたらす不釣合い量の回転が加振力であると仮定し、それに起因する支柱の振動について数値解析と実験解析の両面から検討している。

人工衛星はその姿勢安定方式によって、スピン衛星と3軸衛星に大別される。スピン衛星は3軸衛星と比較して、姿勢の決定や制御を地上で実行でき、姿勢制御ハードウェアは複雑でなく単純で安価である。この方法の不利な点は、センサーまたはアンテナが地球に関して一定方向を指向しないことである[27]。衛星 Dynamics Explorer A は極軌道を飛ぶ科学探測を目的とするスピン衛星で、プラズマ波形と称する一対のワイヤーアンテナが対称に取付けられ、それぞれ100m の長さがある。その重量は本体の 0.05%に過ぎないが、長いために慣性モーメントが本体の半分を占めている。このアンテナは極めて柔軟であるため衛星の姿勢運動を支配するぐらい大きな影響力を持っている[28]。この種の姿勢不安定の例は米国初の衛星 Explorer I のアンテナによる予期に反した短軸まわりの回転がある。最近でも、1995 年に打上げられたカナダのテザー衛星 ODEPUS-C は長軸まわりの自転を安定化させるために細長い弾性ブームを取付けたにもかかわらず、スピン不安定を引起している[5]。

上述したように、長い振り子や弾性ブームを取付けた回転体は、ある回転数域で激しい自励振動や姿勢不安定を引起す可能性がある。ヘリコプターや風車における柔軟な回転翼を備えたローターの動特性は、機体や支柱の弾性力と慣性力以外に空気力が働き、これらの力が相互干渉によって生じる現象、いわゆる、空力弾性を考慮した多くの研究が行われている。しかし、それらの研究は複雑多岐にわたり、理論的な解析の複雑さと困難さのために、系の共振点に主眼

が置かれ、系の動的安定性に言及したものは少ない。シミュレーションを行って安定性に言及したものもあるが、種々の条件下でも系の安定性の全体像が見通し良く把握出来るよう記述したものはほとんど見られない。

本研究は、柔軟な弾性棒を備えた回転系の自励振動の発生条件とその効果的な防止策を出来るだけ簡潔明瞭に把握するため、空気力を無視した比較的簡単な系について調べた基礎研究である。ローターに一様断面の片持ち梁を半径方向に等間隔に複数個取付けた回転軸系が並進モードと円錐モードでふれまわる場合の動的安定性に的を絞って理論解析と実験を行った。解析では、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、散逸関数を求め、Hamilton の原理から運動方程式を導いた。この運動方程式を陽に解くことは困難なので、梁に関する運動方程式に Galerkin 法を適用し、回転する梁の各モードにおける固有振動数と振動の近似解を得た。並進モード、円錐モード共にローターのふれまわりが小さな調和振動をすると仮定して、調和バランス法により系の振動数方程式を求め、この振動数方程式が共役な複素根を持つか否かで系の安定性を判別した。その際、風車やヘリコプターの翼が必然的にもつ曲げ剛性の方向による違いも安定性を支配する重要な因子の一つとして考慮した。

1・3　本研究の内容

本論文の本文は第2章より始まる。

第2章では、弾性支持され、一様断面の片持ち梁を半径方向に等間隔に複数個取付けた回転軸系の並進モードにおける自励振動とその発生メカニズムについて調べる。ローターが回転するとき片持ち梁には遠心力が作用し梁の固有振動数と固有モードが変化するが、この章では系の不安定現象の基本的な性質を明らかにするため、遠心力による梁のモード変化を無視して、回転する梁のモードを遠心力が作用しない場合のモードで近似する。

ローターのふれまわりと梁のたわみは小さいとして3次以上の微小項を無視して運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、散逸関数を求め、Hamiltonの原理からローターと梁に関する運動方程式を求める。解析ではローターの不釣合い、減衰力および重力の項は無視する。ローターのふれまわりが微小な調和振動であると仮定し、梁の運動方程式にGalerkin法を適用し梁の振動の近似解を導き、ローターの運動方程式にこの近似解を代入し、調和バランス法により系の振動数方程式を求める。この振動数方程式が共役な複素根を持つか否かで系の安定性を調べる。理論解析の妥当性は実験によって確認する。

解析の結果、系が不安定となる可能性があるのは梁の1次モードのみであり、軸回転数が軸の危険速度と片持ち梁の1次固有振動数の和にほぼ等しい領域で自励振動が発生し、系は不安定となる。梁の固有振動数が軸回転数より高い場合系は安定であり、梁の振動が2次以上の高次モードでは梁の曲げ剛性や長さの如何によらず系は安定となる。系の不安定現象のメカニズムは、軸に固定された動座

標系から観測したとき、梁の振動によって軸に対し相対的に軸の回転方向と逆向き作用する不釣合い力が発生し、この不釣合い力が軸のふれまわりに同期して自励振動を誘発し系を不安定にすることが分かった[29]。

第3章では、前章で無視した遠心力による梁の固有モードの変化および系の不安定性に対するその影響について検討する。系の不安定化に関係する梁の1次モードのみを考慮し、それを遠心力が働かない片持ち梁の1次から3次の規準モードの1次結合で近似してGalerkin法を適用することにより、梁の1次固有振動数と固有モードが遠心力によってどのように変るかを調べる。その際、回転する梁の固有モードを実験で正確に測定することは非常に困難なため、計算精度と効率のよいOrder N法[30]による数値計算も行って解析結果の妥当性を確認する。

その結果、遠心力による梁の1次モードの形状にはあまり大きな変化はなく、梁のモード変化に対し遠心力の作用を考慮した場合と無視した場合を比較すると両者の不安定領域にはほとんど差はない。遠心力の作用を無視した梁の1次モードで近似した簡便な方法でも、実用上十分な精度で不安定領域を予測することが出来ることを示した[31][32]。

第4章では、曲げ剛性に強い異方性がある梁を取付けたローターの円錐モードの安定性について調べる。曲げ剛性に強い異方性を持つ梁は剛性が最も小さい平面内で振動しやすいから、このような梁を回転軸に垂直な平面に対してある角度をなす方向に振動するように取付けると円錐モードのふれまわりによって梁の振動が励起され、梁の振動が逆にローターのふれまわりを励起するという正帰還的な力学構造が形成されて自励ふれまわりが発生し得ることを示す。

運動方程式はHamiltonの原理から求め、梁の振動解は前章の結果を踏まえ、梁の1次曲げ振動モードのみを考える。このとき、梁のモード変化に対する遠心力の影響は無視する。ローターは微小な調和振動の円錐モードでふれまわると仮定し、Galerkin法と調和バランス法によって系の振動数方程式を求め、その解が複素根を含むか否かで系の不安定性を調べる。

解析の結果、次のことが分かった。梁の剛性に強い異方性がある場合、ローター平面とあまり大きく傾かない方向に梁が振動するとき、系は不安定となる可能性がある。軸の回転速度が梁の無いローターの前進歳差ふれまわり固有振動数と梁の1次固有振動数との和にほぼ等しくなる領域で前進歳差モードの自励ふれまわりが起こる危険性がある。一方、後進歳差モードの自励ふれまわりは起こらない。曲げ剛性に異方性がない梁の振動はローター平面に垂直な方向に励起され、梁の1次固有振動数は常に軸回転数より高くなるから円錐モードの自励ふれまわりは発生しない(33)。また、異方性の強い梁を細長いローターに取付けたとき、ジャイロ効果によって高回転数全域に渡って系が不安定となる非常に危険な状況があり得ることを指摘した。

第5章は本研究の総括である。

なお、補足的な説明のために付録を設けた。

第2章　並進モードの動的安定性
(遠心力による梁モードの変化を無視した場合)

本章では、弾性支持され一様断面の片持ち梁を半径方向に等間隔に複数個取付けた回転軸系が並進モードでふれまわるとき、系の不安定現象の基本的な特徴を明らかにする。ローターに取付けられて回転する梁は遠心力の作用によりその振動モードは変化する。遠心力による梁モードの変化や系の不安定性に対するその影響については次章に譲る。ここでは、解析を容易にし現象を明確に把握するため、梁モードを遠心力が作用しないときのモードで近似した場合について調べ、自励振動とその発生メカニズムについて考察する。

理論解析では、はじめに系の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、散逸関数を求め、Hamilton の原理から運動方程式を導く。この運動方程式を陽に解くことは困難なので、梁に関する運動方程式に Galerkin 法を適用し、梁の各モードにおける固有振動数と振動の近似解を得る。ローターに関する運動方程式に梁の近似解を代入し、調和バランス法を用いて系の振動数方程式を求め、この振動数方程式が共役な複素根を持つか否かで系の安定性を調べる。解析ではローターの不釣合い、減衰力および重力の項は無視する。

理論解析の結果、次のことが分かった。梁の振動が1次モードの場合のみ系は不安定となる可能性がある。軸回転数が軸の危険速度と片持ち梁の1次固有振動数の和にほぼ等しい領域で自励振動が発生し、系は不安定となる。梁の固有振動数が軸回転数より高い場合系は安定であり、梁の振動が2次以上の高次モードでは梁の曲げ剛性や長さの如何によらず系は安定で自励ふれまわりを引起こさない。

主な記号

A_0 ：ローター振幅

c ：ローターの減衰係数

c_1 ：片持ち梁の単位質量当たりの減衰係数

EI ：片持ち梁の曲げ剛性

$f_r(x)$ ：遠心力が作用しない場合の片持ち梁の r 次規準関数

I_0 ：ローターの回転軸まわりの慣性モーメント

i_z ：片持ち梁の微小部分 dm を薄板と考えたとき，X,Y 平面に垂直な軸まわりの回転半径

k ：系のばね定数

l ：片持ち梁の長さ

$M = M_0 + nm$ ：系の全質量

M_0, m ：ローターと片持ち梁の質量

n ：片持ち梁の個数

$O\text{-}XY$ ：系の静止座標

$O_i\text{-}x_iy_i$ ：たわみのない状態で片持ち梁の中立軸に固定された動座標系

$q = \omega - \Omega$ ：軸に固定された動座標系から見たローターの相対角速度

R ：ローター半径

$u_s(x)$ ：遠心力が作用する場合の片持ち梁の s 次規準関数

X, Y ：ローター変位の X,Y 成分

y_i ：i 番目の片持ち梁のたわみ

$\gamma_i = 2\pi(i-1)/n$ ：i 番目の片持ち梁の取付け位置

λ_s ：遠心力が作用する場合の片持ち梁の s 次モードの固有振動数

Ω ：系の円振動数

Ω_0 ：ローターの危険速度

ρA ：片持ち梁の単位長さ当たりの質量

ω ：ローター軸の角速度

ω_m ：不安定領域におけるローター軸の中心的角速度

ω_r ：遠心力が作用しない場合の片持ち梁の r 次モードの固有振動数

2・1　理論解析

2・1・1　運動方程式

断面が一様な片持ち梁を複数個取付けたローターが並進モードでふれまわっている場合を考える。解析で使用した座標系を図2・1に示す。O-XY は静止座標系、O_i-x_iy_i はたわみのない状態で片持ち梁の中立軸に固定された動座標系である。図に示すように、ローターは一定の角速度 ω で回転しながら、静止点 O を中心に軸受中心線 Z 軸に垂直な X,Y 平面を、変位 X, Y でふれまわる。ローターの質量は M_0、回転軸まわりの慣性モーメントは I_0である。ローターには長さ l の n 個の片持ち梁が円周上に等間隔に半径方向に向けて取付けられ、ローターの回転平面内のみ振動する。各梁の質量、密度、断面積はそれぞれ m, ρ, A である。ローターに不釣合いはなく、ばねは線形とする。また、ローターの変位と梁のたわみは小さいと仮定する。

ローターの運動エネルギー T_0 は、

$$T_0 = \frac{1}{2}M_0(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \tag{2・1}$$

次に各片持ち梁の運動エネルギー T_i を2次の微小量の範囲で求める。梁がたわむことにより梁の微小部分 dm が回転軸へ接近するが、この接近効果を考慮した場合の dm の変位成分 $X_i + \Delta X_i, Y_i + \Delta Y_i$ は

$$X_i + \Delta X_i = X_i - \frac{1}{2}\left\{\int_0^{x_i}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 d\xi\right\}\cos(\omega t + \gamma_i)$$

$$Y_i + \Delta Y_i = Y_i - \frac{1}{2}\left\{\int_0^{x_i}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 d\xi\right\}\sin(\omega t + \gamma_i)$$

ただし、

$$X_i = X + (R + x_i)\cos(\omega t + \gamma_i) - y_i\sin(\omega t + \gamma_i)$$

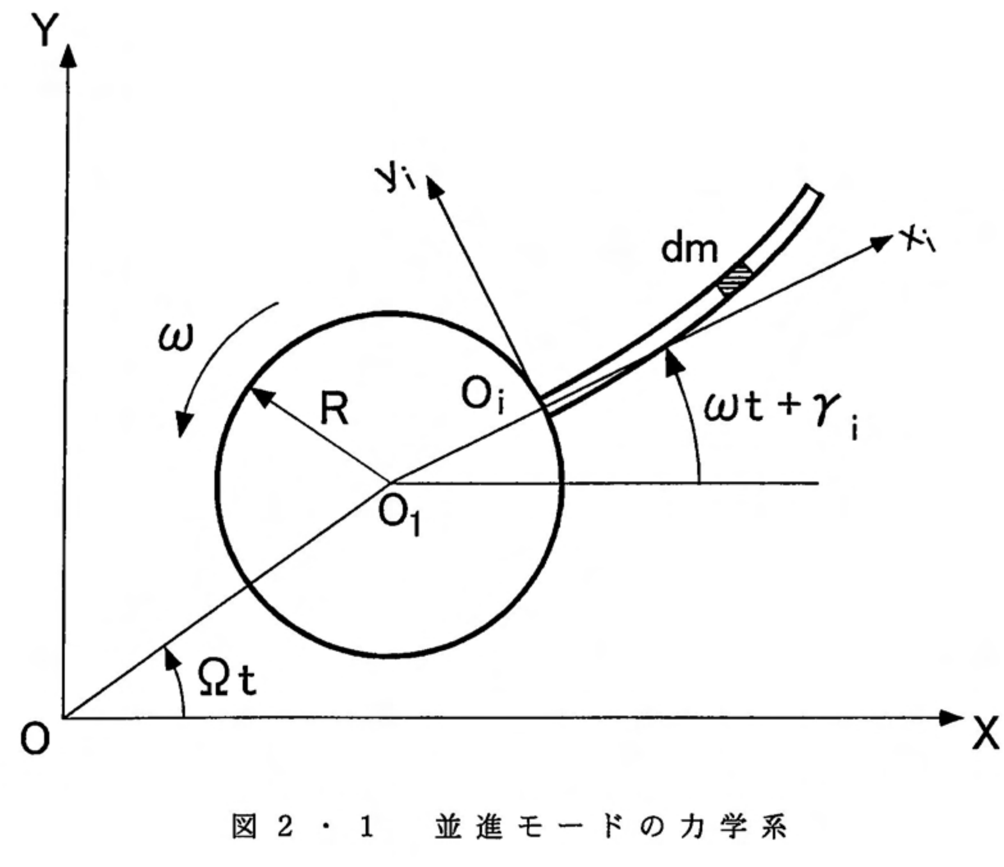


図2・1　並進モードの力学系

$$Y_i = Y + (R + x_i)\sin(\omega t + \gamma_i) + y_i \cos(\omega t + \gamma_i)$$

したがって、速度成分 $v_{Xi} + \Delta v_{Xi}$, $v_{Yi} + \Delta v_{Yi}$ は

$$v_{Xi} + \Delta v_{Xi} = \dot{X} - [\omega(R + x_i) + \frac{\partial y_i}{\partial t}]\sin(\omega t + \gamma_i) - \omega y_i \cos(\omega t + \gamma_i)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x [2\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y_i}{\partial t \partial x_i}\cos(\omega t + \gamma_i) - \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 \omega \sin(\omega t + \gamma_i)]d\xi$$

$$v_{Yi} + \Delta v_{Yi} = \dot{Y} + [\omega(R + x_i) + \frac{\partial y_i}{\partial t}]\cos(\omega t + \gamma_i) - \omega y_i \sin(\omega t + \gamma_i)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x [2\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y_i}{\partial t \partial x_i}\sin(\omega t + \gamma_i) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 \omega \cos(\omega t + \gamma_i)]d\xi$$

簡単のため、今後 x_i を x、微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を記号「′」で表すと、i 番目の梁の運動エネルギー $T_i + \Delta T_i$ は

$$T_i + \Delta T_i = \frac{\rho A}{2}\int_0^l \left\{(v_{Xi} + \Delta v_{Xi})^2 + (v_{Yi} + \Delta v_{Yi})^2\right\}dx + \frac{1}{2}\int_0^l (\omega + \dot{\theta})^2 i_z^2 dm$$

(2・2)

$$T_i = \frac{\rho A}{2}\int_0^l \Big[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + [\omega(R + x) + \dot{y}_i]^2 + \omega^2 y_i^2 + i_z^2(\omega + \dot{y}_i')^2$$
$$- 2\dot{X}\left\{[\omega(R + x) + \dot{y}_i]\sin(\omega t + \gamma_i) + \omega y_i \cos(\omega t + \gamma_i)\right\}$$
$$+ 2\dot{Y}\left\{[\omega(R + x) + \dot{y}_i]\cos(\omega t + \gamma_i) - \omega y_i \sin(\omega t + \gamma_i)\right\}\Big]dx \qquad (2\cdot3)$$

$$\Delta T_i = -\frac{\rho A \omega^2}{2}\int_0^l \left\{(R + x)\int_0^x (y_i')^2 d\xi\right\}dx \qquad (2\cdot4)$$

ただし、式(2・2)右辺第2項は梁の回転慣性で、$\theta = y_i'$ は梁のたわみ角、i_z は片持ち梁の微小部分 dm を薄板と考えたとき，dm の重心を通り X,Y 平面に垂直な軸まわりの回転半径で、ΔT_i は梁要素の回転軸への接近効果を表す補正項である。

部分積分を行うと

$$\Delta T_i = -\frac{\rho A\omega^2}{4}(R+x)^2\int_0^x (y_i')^2 d\xi\Big|_0^l + \frac{\rho A\omega^2}{4}\int_0^l (R+x)^2 (y_i')^2 dx$$

ここで、第1項は

$$\frac{\rho A\omega^2}{4}(R+x)^2\int_0^x (y_i')^2 d\xi\Big|_0^l$$

$$= \frac{\rho A\omega^2}{4}(R+l)^2\int_0^l (y_i')^2 d\xi = \frac{\rho A\omega^2}{4}\int_0^l (R+l)^2 (y_i')^2 dx$$

であるから、この補正項は

$$\Delta T_i = -\frac{\rho A\omega^2}{4}\left\{\int_0^l (R+l)^2 (y_i')^2 dx - \int_0^l (R+x)^2 (y_i')^2 dx\right\}$$

$$= -\frac{\rho A\omega^2}{2}\int_0^l \left\{\frac{1}{2}(R+l)^2 - \frac{1}{2}(R+x)^2\right\}(y_i')^2 dx \qquad (2\cdot5)$$

式（2・1）と式（2・2）より、系の運動エネルギー T は次のようになる。

$$T = T\left(t, x; \dot{X}, \dot{Y}, y_i, \dot{y}_i, y_i', \dot{y}_i'\right)$$

$$= \frac{1}{2}M_0(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho A}{2}\int_0^l \Big[\!\Big[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \left\{\omega(R+x) + \dot{y}_i\right\}^2 + \omega^2 y_i^2 + i_z^2(\omega + \dot{y}_i')^2$$

$$-2\dot{X}\left\{[\omega(R+x) + \dot{y}_i]sin(\omega t + \gamma_i) + \omega y_i \cos(\omega t + \gamma_i)\right\}$$

$$+2\dot{Y}\left\{[\omega(R+x) + \dot{y}_i]cos(\omega t + \gamma_i) - \omega y_i sin(\omega t + \gamma_i)\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2\left\{(R+l)^2 - (R+x)^2\right\}(y_i')^2 \Big]\!\Big] dx \qquad (2\cdot6)$$

また、ポテンシャルエネルギー V、散逸関数 F はそれぞれ、

$$V = V\left(t, x; X, Y, y_i''\right)$$
$$= \frac{1}{2}k(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l EI(y_i'')^2 dx \qquad (2\cdot7)$$

$$F = F\left(t, x; \dot{X}, \dot{Y}, \dot{y}_i\right)$$
$$= \frac{1}{2}c(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}c_1\sum_{i=1}^{n}\rho A\int_0^l (\dot{y}_i)^2 dx \qquad (2\cdot8)$$

となる。

一般化座標、一般化力をそれぞれ q_k, Q_k で表せば、運動方程式は Hamiltonの原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k}^{r}\left(Q_k - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k dt = 0$$

より、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}}\right) + \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = Q_X \qquad (2\cdot9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}}\right) + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{Y}} = Q_Y \qquad (2\cdot10)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i''}\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = Q_{yi}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2\cdot11)$$

を経て次のように求まる。ただし、考えている系は一般化力 $Q_X, Q_Y, Q_{yi} = 0$ である。

$$M\ddot{X} + c\dot{X} + kX$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\rho A\int_0^l\left\{(\ddot{y}_i - \omega^2 y_i)\sin(\omega t + \gamma_i) + 2\omega\dot{y}_i\cos(\omega t + \gamma_i)\right\}dx \qquad (2\cdot12)$$

$$M\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho A \int_0^l \left\{ -(\ddot{y}_i - \omega^2 y_i)\cos(\omega t + \gamma_i) + 2\omega \dot{y}_i \sin(\omega t + \gamma_i) \right\} dx \qquad (2\cdot 13)$$

$$\ddot{y}_i + c_1 \dot{y}_i - \omega^2 y_i + i_z^2 \ddot{y}'' + \frac{EI}{\rho A} y_i'''' - \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} y_i' \right]'$$

$$= \ddot{X}\sin(\omega t + \gamma_i) - \ddot{Y}\cos(\omega t + \gamma_i) \qquad (i = 1,2,\ldots.,n) \qquad (2\cdot 14)$$

ただし、$y_i(t,x)$は次の境界条件を満足する。

$$y_i(t,0) = y_i'(t,0) = y_i''(t,l) = y_i'''(t,l) = 0$$

図２・２示すように、ローターのふれまわりが小さな調和振動をするとき、

$$X = A_0 \cos \Omega t\,, \qquad Y = A_0 \sin \Omega t \qquad (2\cdot 15)$$

また、細長い梁を考えているので式（２・１4）の左辺第 4 項のたわみ角変化 $\dot{\theta} = \dot{y}_i'$による梁の回転慣性の項は小さく、この項を入れると後述の直交関係（２．２６）が成立しないため省くことにする。

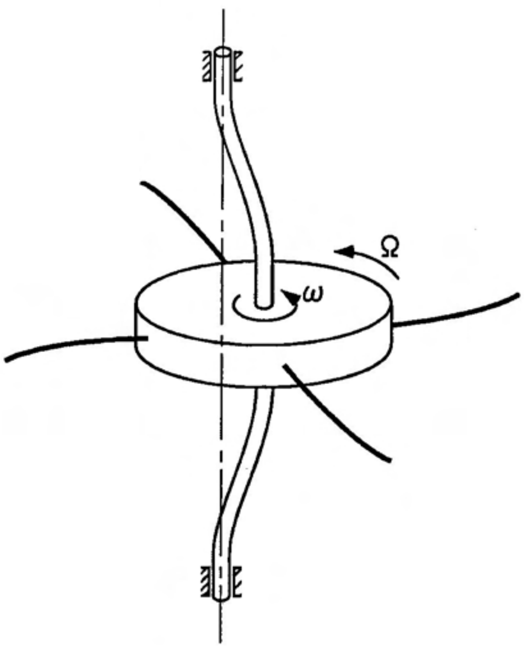


図２・２　ローターのふれまわり

運動方程式（２・１２）～（２・１４）は次のように表される。

$$A_0(k-\Omega^2 M)\cos\Omega t=\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left\{(\ddot{y}_i-\omega^2 y_i)\sin(\omega t+\gamma_i)+2\omega\dot{y}_i\cos(\omega t+\gamma_i)\right\}dx$$

（２・１６）

$$A_0(k-\Omega^2 M)\sin\Omega t=\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left\{-(\ddot{y}_i-\omega^2 y_i)\cos(\omega t+\gamma_i)+2\omega\dot{y}_i\sin(\omega t+\gamma_i)\right\}dx$$

（２・１７）

$$\ddot{y}_i-\omega^2 y_i+\frac{EI}{\rho A}y_i''''-\frac{1}{2}\omega^2\left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\}y_i'\right]'=-A_0\Omega^2\sin(qt+\gamma_i)$$

$(i=1,2....,n)$ （２・１８）

ただし、ｑ＝ω－Ωである。

２・１・２　梁の固有振動数

片持ち梁の振動を明らかにするため、はじめにローターが回転しているときの梁の固有振動数を求める。ローターが回転しているときの梁のｓ次モードの規準関数と固有振動数をそれぞれ $u_s(x)$ と λ_s で表し、梁のたわみを

$$y_i(t,x)=u_s(x)\sin\lambda_s t \tag{2・19}$$

と置く。また、$u_s(x)$ に関する微分演算子 $\mathbb{L}_1(u_s)$ を次のように定義する。

$$\mathbb{L}_1(u_s)\equiv\frac{EI}{\rho A}u_s''''-\frac{1}{2}\omega^2\left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\}u_s'\right]'-(\lambda_s^2+\omega^2)u_s \tag{2・20}$$

梁の運動方程式（２・１８）の同次方程式

$$\ddot{y}_i-\omega^2 y_i+\frac{EI}{\rho A}y_i''''-\frac{1}{2}\omega^2\left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\}y_i'\right]'=0 \tag{2・21}$$

に、$y_i(t,x)$ を代入すると、

$$\mathbb{L}_1(u_s)=0 \tag{2・22}$$

を得る。ただし、$u_s(x)$は次の境界条件を満たす。

$$u_s(0)=u_s'(0)=u_s''(l)=u_s'''(l)=0\,,\qquad (s=1,2,....,\infty) \tag{2・23}$$

ここで、u_s が直交関係を持つことを示す。式（２・２２）に u_r を掛け、また式（２・２２）で $s=r$ と置き u_sを掛けると

$$\frac{EI}{\rho A}u_s''''\ u_r+\frac{\omega^2}{2}\left[\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_s'\right]'u_r-(\lambda_s^2+\omega^2)u_su_r=0 \tag{2・24}$$

$$\frac{EI}{\rho A}u_r''''\ u_s+\frac{\omega^2}{2}\left[\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_r'\right]'u_s-(\lambda_r^2+\omega^2)u_ru_s=0 \tag{2・25}$$

式（２・２４）から式（２・２５）を引き，０からlで積分し，次に示すように部分積分を繰り返して，境界条件（２・２３）を用いれば

$$(\lambda_s^2-\lambda_r^2)\int_0^l u_su_rdx$$

$$=\frac{EI}{\rho A}\int_0^l(u_s''''\ u_r-u_r''''\ u_s)dx$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\int_0^l\left[\!\left[\left[\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_s'\right]'u_r-\left[\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_r'\right]'u_s\right]\!\right]dx$$

$$=\frac{EI}{\rho A}\left\{\left[u_s'''u_r-u_r'''u_s\right]_0^l-\int_0^l(u_s'''u_r'-u_r'''u_s')dx\right\}$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\left[\!\left[\left[\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_s'u_r-\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}u_r'u_s\right]_0^l\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^l\left\{(R+x)^2-(R+l)^2\right\}(u_s'u_r'-u_r'u_s')dx\right]\!\right]$$

$$=-\frac{EI}{\rho A}\int_0^l(u_s'''u_r'-u_r'''u_s')dx$$

$$= -\frac{EI}{\rho A}\left\{\left[u_s'' u_r' - u_r'' u_s'\right]_0^l - \int_0^l (u_s'' u_r'' - u_r'' u_s'')dx\right\}$$

$$= 0 \qquad (s \neq r)$$

よって、

$$\int_0^l u_s u_r dx = 0 \qquad (s \neq r) \tag{2・26}$$

すなわち、u_s は直交関係を持つことが分かる。

Galerkn 法を用いて梁の固有振動数 λ_s を得るため、ローターが回転していないときの梁の r 次モードの規準関数と固有振動数を導入し、それぞれ $f_r(x), \omega_r$ で表す。このとき、$f_r(x)$ は次の微分方程式と境界条件を満足する。

$$\frac{EI}{\rho A} f_r'''' = \omega_r^2 f_r , \qquad f_r(0) = f_r'(0) = f_r''(l) = f_r'''(l) = 0 \qquad (r = 1,2,\ldots,\infty)$$

(2・27)

また、ρ，A を一定とすれば f_r は次の直交関係を満足する。

$$\int_0^l f_s f_r dx = 0 \qquad (s \neq r) \tag{2・28}$$

ここで、梁の遠心力の影響を無視して

$$u_s(x) \fallingdotseq f_s(x) \tag{2・29}$$

と置き、式(2・22)に Galerkn 法を適用すると

$$\int_0^l \mathbb{L}_1(f_s) f_r dx = 0 \qquad (r, s = 1,2,\ldots,\infty)$$

$$\int_0^l \left\{\frac{EI}{\rho A} f_s'''' - \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left\{(R+l)^2 - (R+x)^2\right\} f_s'\right]' - (\lambda_s^2 + \omega^2) f_s\right\} f_r dx = 0$$

$$\int_0^l \left\{\omega_s^2 f_s - \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left\{(R+l)^2 - (R+x)^2\right\} f_s'\right]' - (\lambda_s^2 + \omega^2) f_s\right\} f_r dx = 0$$

また、

$$\int_0^l \left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\} f_s'\right]' f_r dx$$

$$=\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\} f_s' f_r' \Big|_0^l - \int_0^l \left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\} f_s' f_r'\right] dx$$

$$=-\int_0^l \left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\} f_s' f_r'\right] dx \qquad (2\cdot30)$$

より

$$\int_0^l \left\{(\lambda_s^2+\omega^2-\omega_s^2) f_s f_r - \frac{1}{2}\omega^2 \left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\} f_s' f_r'\right\} dx = 0$$

$$\left(\lambda_s^2+\omega^2-\omega_s^2\right) G_s = \frac{1}{2}\omega^2 F_{ss} \qquad (s=1,2,\dots,\infty) \qquad (2\cdot31)$$

ただし、

$$G_s = \int_0^1 f_s^2(\varepsilon) d\varepsilon, \quad F_{sr} = \int_0^1 \left\{(r+1)^2-(r+\varepsilon)^2\right\} f_s'(\varepsilon)\, f_r'(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l}, \qquad r = \frac{R}{l}$$

したがって、

$$\lambda_s \fallingdotseq \omega\sqrt{\frac{F_{ss}}{2G_s}+\frac{\omega_s^2}{\omega^2}-1} \qquad (s=1,2,\dots,\infty) \qquad (2\cdot32)$$

を得る。

2・1・3　梁の振動解

梁の s 次モードのたわみを $y_i = a_s u_s(x)\sin(qt+\gamma_i)$ と置き、u_sに関する微分演算子 $\mathbb{L}_2(u_s)$を次のように定義する。

$$\mathbb{L}_2\left(u_s\right) \equiv a_s\left[\!\!\left[\frac{EI}{\rho A}u_s'''' - \frac{1}{2}\omega^2\left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\}u_s'\right]' - (q^2+\omega^2)u_s\right]\!\!\right] + A_0\Omega^2$$

梁の運動方程式（２・１８）から次式が得られる。

$$\mathbb{L}_2\left(u_s\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{2・33}$$

Galerkin 法を適用し、

$$\int_0^l \mathbb{L}_2(u_s)u_r dx = 0 \qquad (s, r = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$a_s\int_0^l\left[\!\!\left[\frac{EI}{\rho A}u_s'''' - \frac{1}{2}\omega^2\left[\left\{(R+l)^2-(R+x)^2\right\}u_s'\right]' - (q^2+\omega^2)u_s\right]\!\!\right]u_r dx$$
$$+ A_0\Omega^2\int_0^l u_r dx = 0$$

$$a_s\int_0^l\left[(\lambda_s^2+\omega^2)-(q^2+\omega^2)\right]u_s u_r dx + A_0\Omega^2\int_0^l u_r dx = 0 \qquad (s, r = 1, 2, \ldots, \infty)$$

直交関係(２・２６)より

$$a_s(\lambda_s^2 - q^2)\int_0^l u_s^2 dx + A_0\Omega^2\int_0^l u_s dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \infty)$$

ここで、$u_s \fallingdotseq f_s$ と置くと、

$$a_s(\lambda_s^2 - q^2)\int_0^l f_s^2 dx + A_0\Omega^2\int_0^l f_s dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$a_s = \frac{A_0\Omega^2 H_s}{(q^2-\lambda_s^2)G_s} \quad , \qquad H_s = \int_0^1 f_s(\varepsilon)d\varepsilon \tag{2・34}$$

したがって、梁のたわみの振動解は次のように表される。

$$y_i \fallingdotseq \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s A_0\Omega^2 H_s}{(q^2-\lambda_s^2)G_s}f_s(x)\sin(qt+\gamma_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2・35}$$

ただし、c_s は初期条件によって求まる係数である。

２・２　系の動的安定性

２・２・１　振動数方程式

自励振動が発生する場合、片持ち梁の s 次モードの振動のみを考えればよいから、式（２・３５）より、梁の振動を次のように置く。

$$y_i = \frac{A_0 \Omega^2 H_s}{(q^2 - \lambda_s^2) G_s} f_s(x) \sin(qt + \gamma_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2・36}$$

次に調和バランス法を用いて系の振動数方程式を導く。ローターの変位 X に関する運動方程式（２・１６）に式（２・３６）を代入すると

$$\begin{aligned}
&(k - \Omega^2 M)\cos\Omega t \\
&= \rho A \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega^2 H_s}{(q^2 - \lambda_s^2) G_s} \int_0^l \Big\{ -(q^2 + \omega^2) f_s \sin(qt + \gamma_i) \sin(\omega t + \gamma_i) \\
&+ 2q\omega f_s \cos(qt + \gamma_i) \cos(\omega t + \gamma_i) \Big\} dx \\
&= \frac{\rho A l}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega^2 H_s^2}{(q^2 - \lambda_s^2) G_s} \Big\{ (q + \omega)^2 \cos[(q + \omega)t + 2\gamma_i] - \Omega^2 \cos\Omega t \Big\}
\end{aligned}$$

角周波数 Ω に対する調波が優勢であるとして、$\cos\Omega t$ の係数を比較すると、

$$k - \Omega^2 M = -\frac{\rho A l}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega^4 H_s^2}{(q^2 - \lambda_s^2) G_s}$$

$$\frac{k}{M} - \Omega^2 = -\frac{nm}{2M} \frac{\Omega^4 H_s^2}{(q^2 - \lambda_s^2) G_s}$$

すなわち、次の系の振動数方程式が得られる。

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = -\frac{n\sigma H_s^2}{2G_s} \frac{\Omega^4}{(q^2 - \lambda_s^2)} \tag{2・37}$$

ただし、$\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$, $\sigma = \dfrac{m}{M}$ で、左辺はローターに作用する慣性力とばね

力（ローター力）、右辺は梁に作用する慣性力（梁力）を示す。したがって、振動数方程式（２・３７）はローター力と梁力との釣合いを要求する式でもある。

同様に、ローターの変位 Y に関する運動方程式（２・１7）からも同じ結果（２・３７）を得る。

振動数方程式（２・３７）はΩに関する４次方程式に帰着され、全ての根が実根ならば系は安定であるが、もし共役な複素根、たとえば $\Omega=\alpha\pm i\beta$ $(i^2=-1,\ \beta>0)$ を持てば、系の運動は $e^{\beta t}\cos\alpha t$ の成分を持つことになり、s 次モードの梁の振動を伴った不安定挙動または自励振動が発生することになる。

次に、式（２・３７）を無次元量で表すために

$$\nu=\frac{\Omega}{\omega}\ ,\qquad \nu_0=\frac{\Omega_0}{\omega}\ ,\qquad \nu_s=\frac{\lambda_s}{\omega}$$

と置くと

$$F_1(\nu)=F_2(\nu) \tag{2・38}$$

ただし、

$$F_1(\nu)=\nu_0^2-\nu^2$$

$$F_2(\nu)=-\frac{n\sigma H_s^2}{2G_s}\frac{\nu^4}{\{\nu-(1-\nu_s)\}\{\nu-(1+\nu_s)\}}$$

２・２・２　安定性

図２・３にローター力 F_1 と梁力 F_2 の関係を模式的に示す。F_1 は上に凸な放物線である。F_2 は梁がローター振動に共振する $\nu=1\pm\nu_s$ で発散し不連続となる。式（２・３８）の実根は F_1 と F_2 の交点で与えられる。

図２・３に示すように、ν_s ＞１、すなわち梁の固有振動数がロー

ターの軸回転数より高いとき、F_1, F_2は常に4点で交わり、式（2・38）は四つの実根を持つから系は全回転数域で安定となる。

$\nu_s < 1$のとき、$\nu_0 = \Omega_0/\omega$ が変化すると、F_1が梁の共振点 $\nu = 1-\nu_s$ の近傍で F_2に交わらずに不連続部の隙間を通過し、交点が二つ減る場合が起こり得る。このようなν_0 に対して一対の共役複素根が存在し、系は不安定となる。

この不安定が起こるのは、F_1が F_2の漸近線

$$F_3(\nu) = -\frac{n\sigma H_s^2}{2G_s}\left\{(\nu+1)^2 + \nu_s^2 + 2\right\}$$

に $\nu = 1-\nu_s$の近傍で交わるときである。このときν_0 は $F_1(1-\nu_s) \fallingdotseq F_3(1-\nu_s)$ から

$$\nu_0 \fallingdotseq \Omega_0(1-\nu_s)/\Omega_1$$

したがって、不安定領域の中心的な軸回転数 ω_mは

$$\omega_m \fallingdotseq \lambda_s + \Omega_1 \qquad (2\cdot39)$$

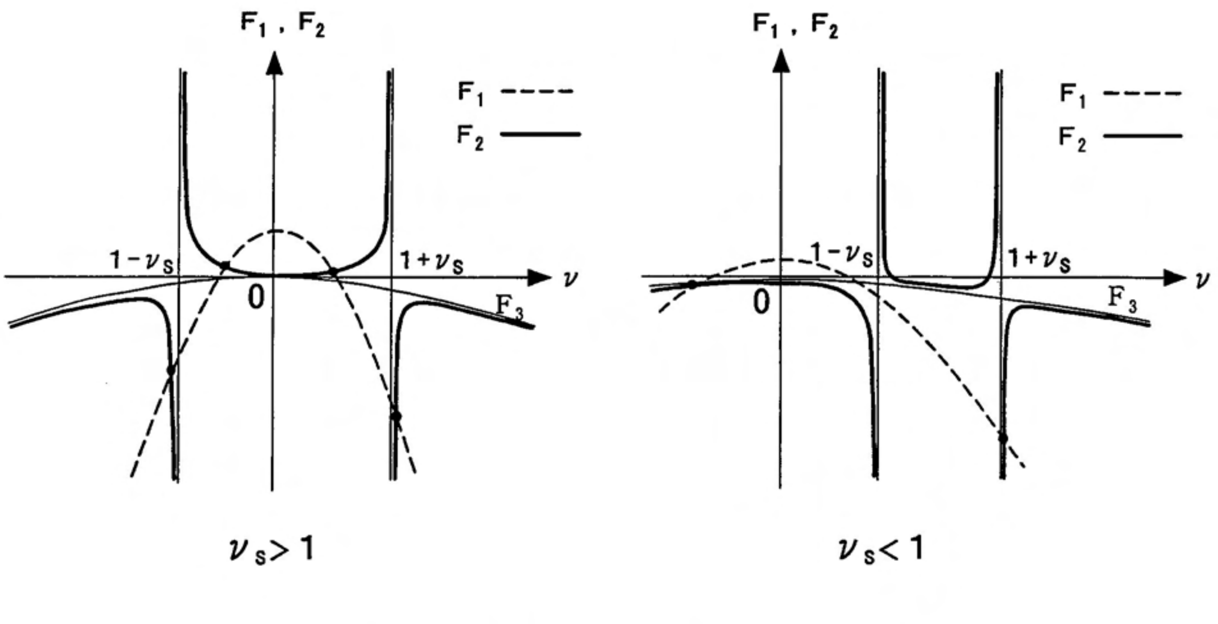


図２・３　ローター力と梁力の関係

ただし、

$$\Omega_1 = \frac{\mu_1\omega + \sqrt{\mu_1^2\omega^2 + (1-\mu_1)(\Omega_0^2 + \mu_1\lambda_s^2 + 3\mu_1\omega^2)}}{1-\mu_1} \quad , \qquad \mu_1 = \frac{n\sigma H_s^2}{2G_s}$$

Ω_1 はローターの高回転数域での系の１次固有振動数である。多くの場合、梁の質量はローターに比較して小さい、すなわち、$\mu_1 \ll 1$ であるから $\Omega_1 \fallingdotseq \Omega_0$ である。したがって、式（２・３９）は次のように表される。

$$\omega_m \fallingdotseq \lambda_s + \Omega_0 \qquad (2\cdot40)$$

図２・４はローター軸の回転数ωと梁の固有振動数 λ_sの関係を示

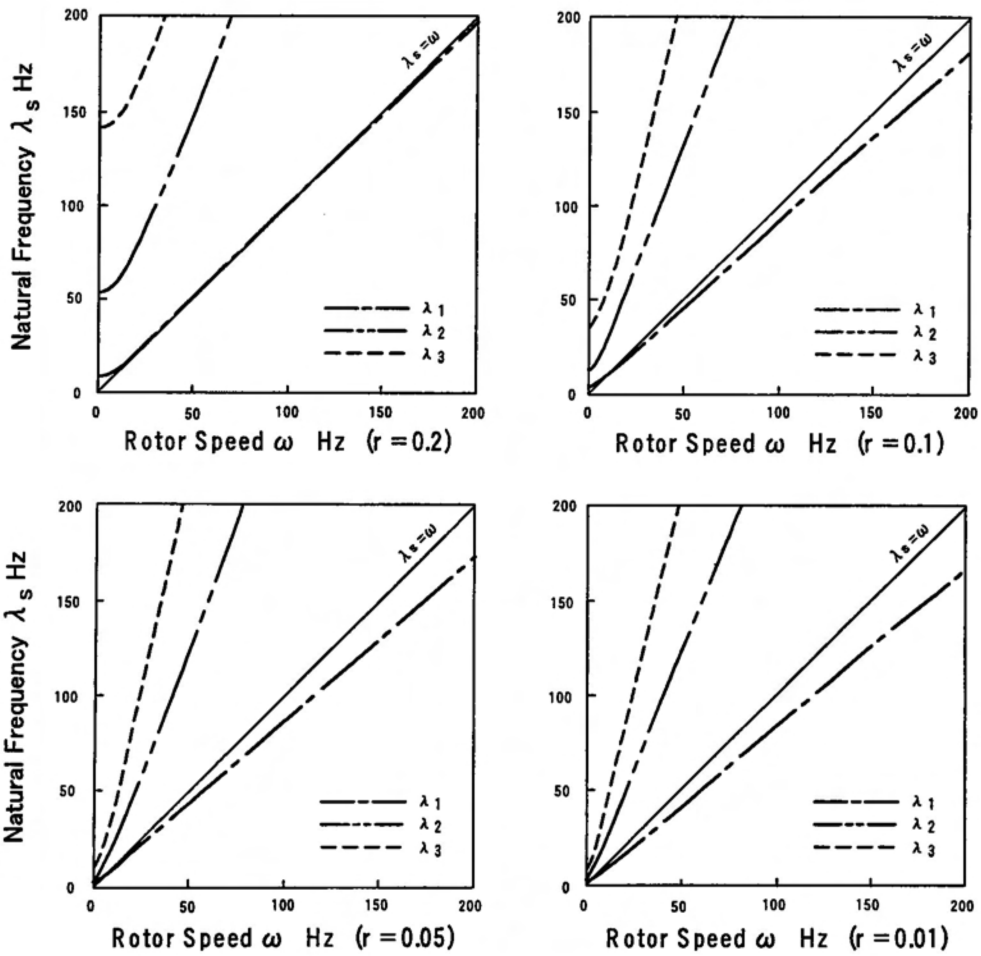


図２・４　ローター回転数と梁の固有振動数

したものである。図に示すように、梁の高次振動モード（s≧２）の場合、λ_sは直線$\lambda_s=\omega$より上部の領域に位置し安定の十分条件$\lambda_s>\omega$（$\nu_s>1$）を満足するから、梁の曲げ剛性や長さにかかわらず系は通常安定となる。しかし、梁の１次モードでは軸回転数が高くなると不安定の必要条件$\lambda_s<\omega$を満たし、系が不安定となる可能性があることを示唆する。

したがって、式（２・４０）は次のように書き改められる。

$$\omega_m \fallingdotseq \lambda_1+\Omega_0 \tag{2・41}$$

すなわち、これは軸回転数が梁の１次固有振動数とローターの危険速度との和にほぼ等しくなる領域で、系は不安定となり得ることを示している。

軸回転数ωをω_m近傍でF_1が隙間を通るように変化させれば、系の不安定領域を予測することが可能である。不安定領域の上限と下限はF_1とF_2の接点から求めることが出来る。また、式（２・３７）はΩの４次方程式の形に表せるから、Ferrari の公式[34]を用いても系の安定性を予測することが出来る。

図２・５は系が不安定な場合、ローターに固定された回転座標系から観察した梁運動の様子を示す。そのとき、式(２・４１)より軸に対するふれまわりの相対的角速度$q\equiv\omega-\Omega\fallingdotseq\lambda_1$である。黒丸は系の重心を示し、黒三角は軸のふれまわりによって励起される梁の運動で生じる不釣合い力、すなわち梁力の方向を表す。図に示すように梁の運動による不釣合い力が軸に対し相対的に軸回転と逆方向に作用し、軸のふれまわりと同期している。自励振動の発生機構とその特性は、転動球[6]-[8]や液体を内蔵する回転軸[9]-[11]の場合と基本的には同じで、減衰抵抗が作用する振動系では、この不釣合い力は図に示した方向よりある角度の位相の遅れを伴って軸のふれまわ

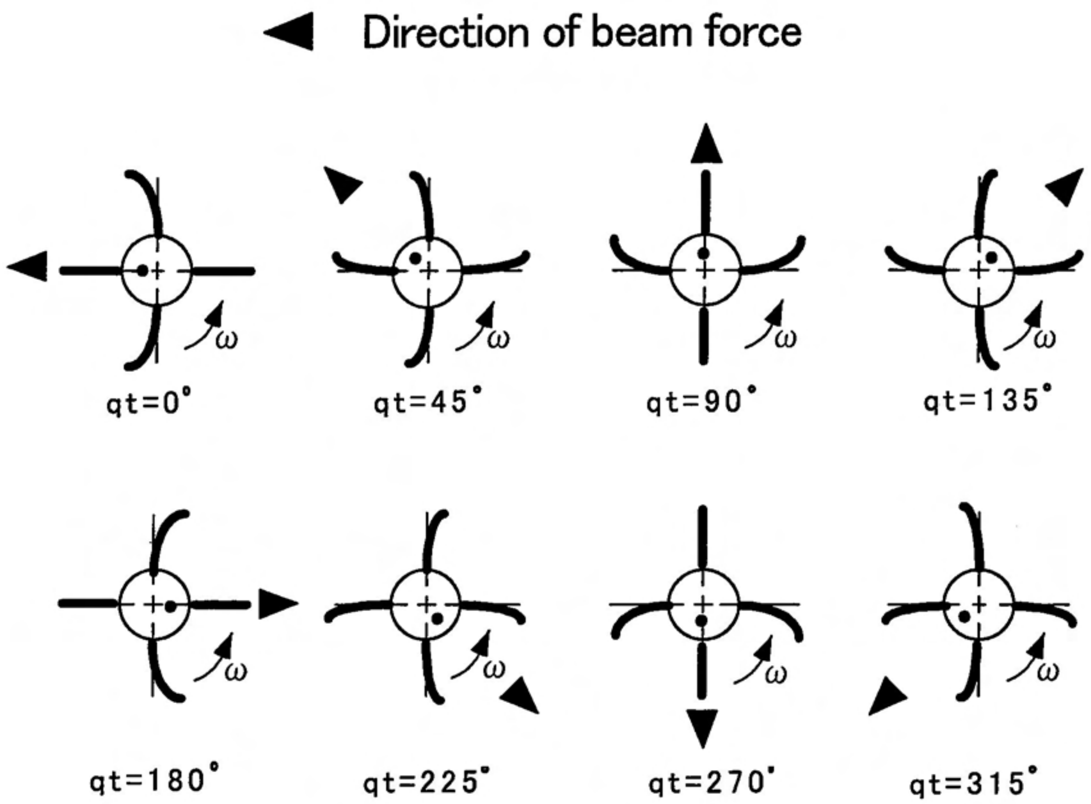


図２・５　系が不安定な場合の梁の運動

りに同期して回転する。ローターに固定した回転座標系から見たこの位相の遅れは、静止座標系から見ると進みになる。この進みのため、軸のふれまわりによって励起されたこの不釣合い力は軸のふれまわりをさらに成長，持続させる方向に作用し、系にエネルギーが蓄積され自励振動が発生する。

図２・６に、式（２・３７）より得られた不安定領域を示す。一点鎖線は式（２・４１）で示される不安定領域の中心的な軸回転数を示す。

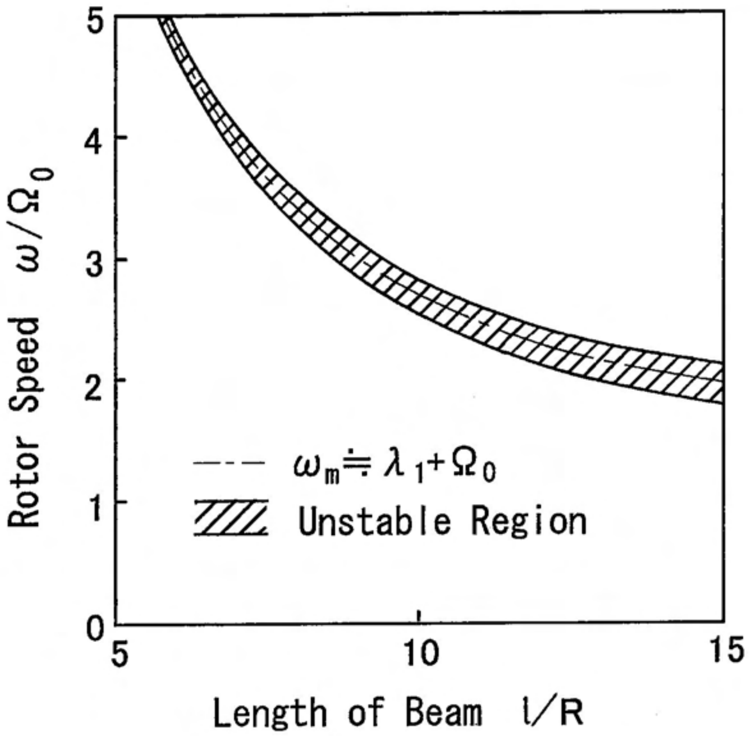

Rotor Speed ω/Ω0
0
1
2
3
4
5
5
10
15
Length of Beam l/R
ωm≒λ1+Ω0
Unstable Region

図２・６　不安定領域

2・3　実験および考察

実験装置の概略を図2・7に、その写真を図2・8に示す。ローターは半径方向に等間隔に4本の柔軟な片持ち梁を備え、モーター軸に直接取付けられている。ローターは直径3mmの細長い棒ばねにより支持されているため、水平面上でふれまわると考えてよい。系の全質量は0.76kg、危険速度は1.8Hzである。ローターが回転しないときの梁の1次固有振動数は長さ40cmのとき1.6Hzである。梁は直径2mmのエポキシ樹脂からなり、各梁はその平均密度が4.58g/cm^{3}となるように等間隔に錘が付加されている。ローターの回転は、周波数インバータを介して、誘導モーターにより制御される。ローターの振動は棒ばねに貼付したひずみゲージで、梁の運動はストロボにより観察した。

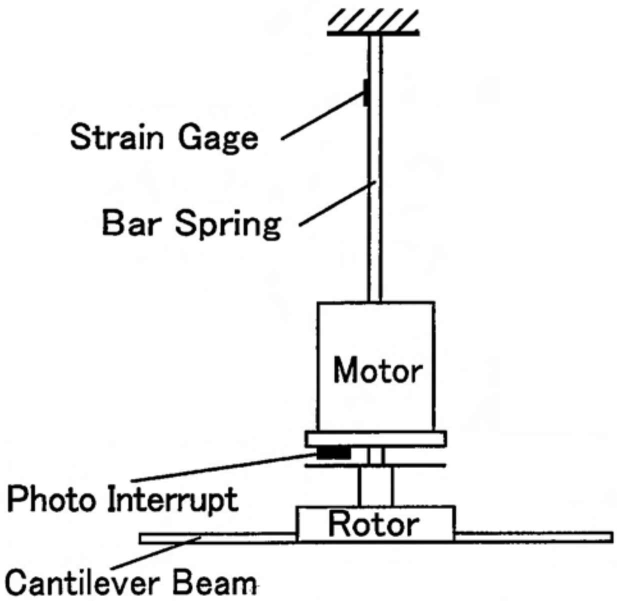
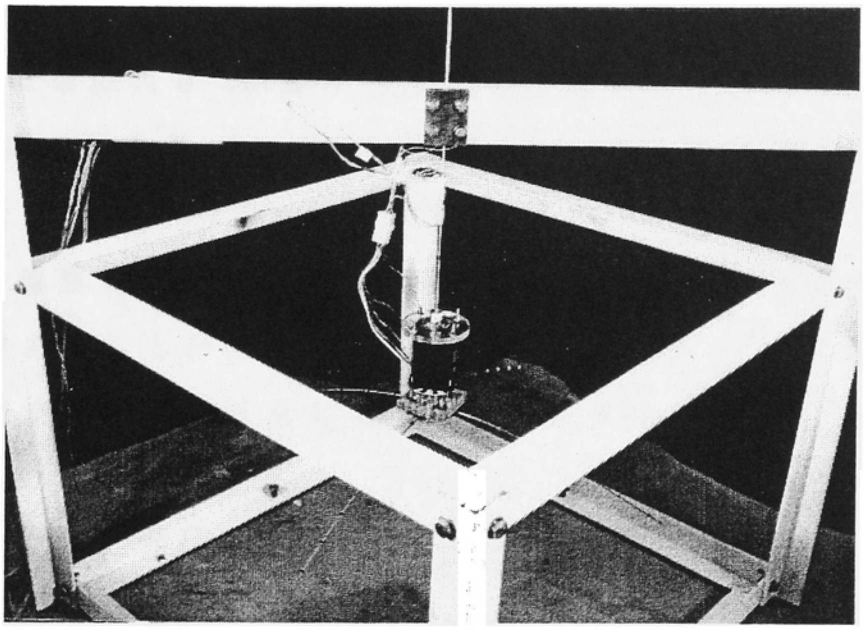
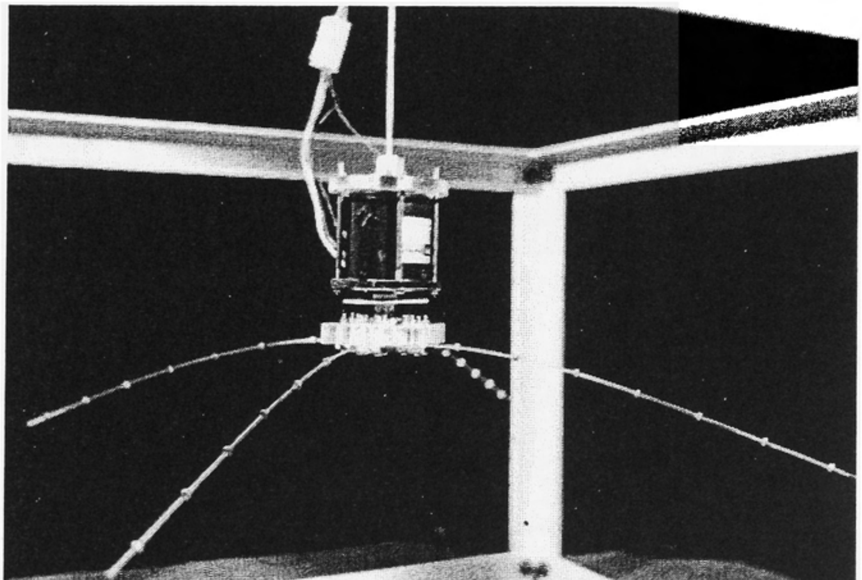


図2・7　実験装置



(a)



(b)

図２・８　実験装置写真

系の動的安定性を調べるために、ローターの半径Rを一定とし梁の長さを変えながら実験を行った。

図2・9は梁の長さ40cmの場合の軸回転数ωに対するローターの振幅A_0と系の振動数Ωを示す。○印と△印はそれぞれ強制振動と自励振動を示す。図中の矢印は軸回転数を徐々に上げた場合と下げた場合のΩの履歴を示すが、ともに5Hz付近で自励振動が発生し、系が不安定であることが分かる。それぞれの場合、不安定領域は異なるが、不安定の定義が外乱による定常状態からの発散であることか

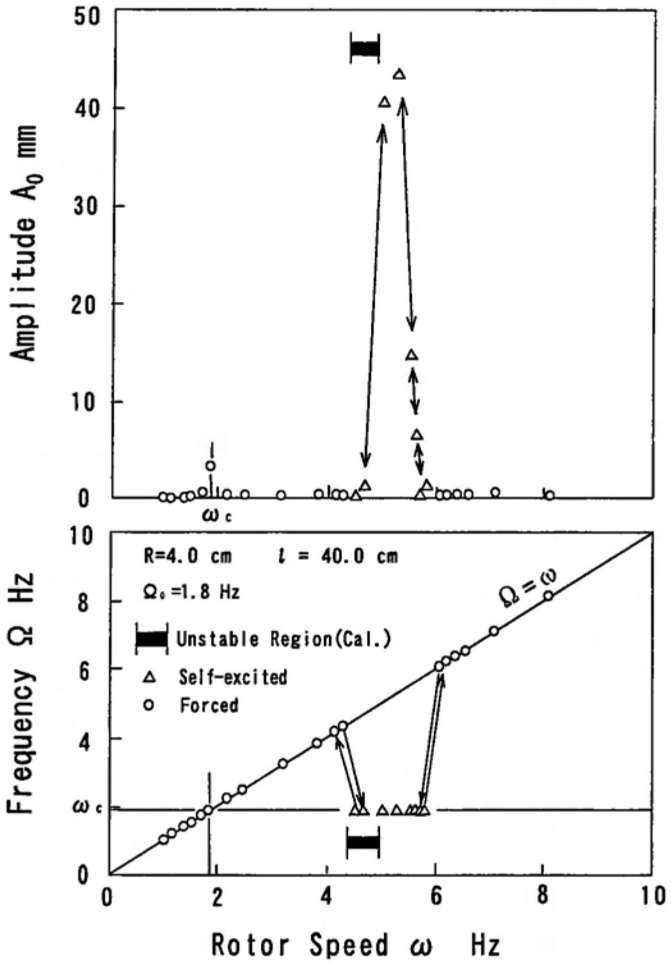


図2・9　定常応答

ら、両不安定領域のかさなった部分を実験における不安定領域とした。4.5Hz付近の水平な太い線は式（２・３７）より得られた不安定領域で、実験結果と比較的よく一致している。

図２・１０は不安定領域を示す。斜線部は図２・６で示したように式（２・３７）から得られた不安定領域である。図中の垂直な太い線は実験結果を示し、計算結果と比較的よく一致している。

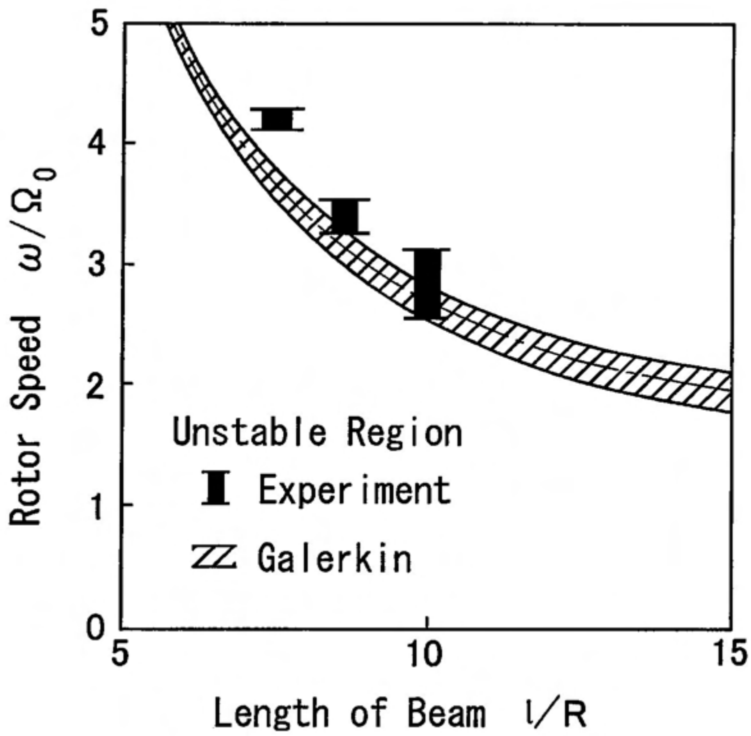


図２・１０　不安定領域

2・4　結論

本章では、断面が一様で柔軟な片持ち梁を放射状に等間隔に備えた弾性支持ローターが並進モードでふれまわる場合について、系の動的安定性を理論と実験の両面から調べた。回転する梁の振動モードは遠心力によって影響を受けるが、梁のモード変化や系の安定性に対するその影響については次章で述べる。ここでは解析を容易にし、基本的な自励振動の発生メカニズムとその特徴を明らかにするため、梁のモードを遠心力が作用しないときのモードで近似した。その結果をまとめると次のようである。

系が不安定となる可能性があるのは梁の1次固有振動モードのみで、軸回転数が軸の危険速度と片持ち梁の1次固有振動数の和にほぼ等しい領域で自励振動が発生し、系は不安定となる。

梁の固有振動数が軸回転数より高い場合系は安定であり、梁の振動が2次以上の高次モードでは梁の曲げ剛性や長さの如何にかかわらず系は安定である。

自励振動の発生メカニズムに関して次のように説明できる。梁の運動によって、軸に対し相対的に軸の回転方向と逆向きに作用する不釣合い力が生じ、この不釣合い力が軸のふれまわりと同期する。摩擦抵抗により、静止座標系から見れば不釣合い力は軸のふれまわりに対し僅かに位相が進んだ状態で同期するため、ふれまわりを成長させる。したがって、系にエネルギーが蓄積され自励振動が発生し、系を不安定にする。

第3章　遠心力による梁モードの変化とその安定性への影響

本章では、前章で無視した遠心力による梁の固有モードの変化および系の不安定性に対するその影響について述べる。前章の結果から、系が不安定となる可能性のある梁の1次モードの振動のみを考えることにする。遠心力によって梁の1次固有振動数と固有モードがどのように変わるかを調べるために遠心力が作用しない片持ち梁の1次から3次の規準モードを導入し、遠心力が働く梁の1次モードをそれらの1次結合で近似する(以下、3モード近似と呼ぶ)。また、回転する梁の固有モードを実験で正確に測定することは非常に困難なため、その固有モードを忠実に表現でき、計算効率のよいOrder N法[30]による数値計算も行って解析結果の妥当性を確認する。

3モード近似により、回転する梁の1次モード変化の遠心力の影響は遠心力が働かない2次と3次モードの規準関数の係数(モード振幅)によって表される。1次のモード振幅に対して2次と3次のモード振幅の値は小さいこと、軸回転速度の上昇に伴って遠心力を受ける梁の1次モードの形は直ちに一様となるため、系の不安定性に対して遠心力によるモード変化の影響は小さい。したがって、梁のモード変化に対し遠心力の作用を考慮した3モード近似と、前章の遠心力の作用を無視した場合(以下、1モード近似と呼ぶ)を比較すると両者の不安定領域にはほとんど差はなく、1モード近似した簡便な方法でも、実用上十分な精度で不安定領域を予測することが出来ることを示す。

3・1　梁の固有振動数と固有モード

3・1・1　Galerkin法による3モード近似解析

ローターが回転し、遠心力の影響を受ける梁の s 次規準関数 u_s と固有振動数 λ_s を求めるために、遠心力が作用しない場合の梁の r 次の規準関数 f_r と固有振動数 ω_r を導入する。 f_r と ω_r は次の式を満足する。

$$\frac{EI}{\rho A} f_r'''' = \omega_r^2 f_r\,, \qquad f_r(0) = f_r'(0) = f_r''(l) = f_r'''(l) = 0 \tag{3・1}$$

$$\int_0^l f_s f_r dx = 0 \qquad (s \neq r) \tag{3・2}$$

u_s を f_r の 1 次結合の形で

$$u_s(x) = \sum_{r=1}^{N} a_r f_r(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, N) \tag{3・3}$$

と表し、Galerkin 法を用いると

$$\int_0^l \mathbb{L}_1(u_s) f_s dx = 0$$

$$\sum_{r=1}^{N} a_r \int_0^l \left\{ \frac{EI}{\rho A} f_r'''' - \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' \right]' - (\lambda_s^2 + \omega^2) f_r \right\} f_s dx = 0$$

$$\sum_{r=1}^{N} a_r \int_0^l \left\{ \omega_r^2 f_r - \frac{1}{2}\omega^2 \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' \right]' - (\lambda_s^2 + \omega^2) f_r \right\} f_s dx = 0$$

ここで

$$\int_0^l \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' \right]' f_s dx$$

$$= \left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' f_s' \Big|_0^l - \int_0^l \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' f_s' \right] dx$$

$$= -\int_0^l \left[\left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' f_s' \right] dx$$

より

$$\sum_{r=1}^{N} a_r \int_0^l \left\{ (\lambda_s^2 + \omega^2 - \omega_r^2) f_r f_s + \frac{1}{2}\omega^2 \left\{ (R+l)^2 - (R+x)^2 \right\} f_r' f_s' \right\} dx = 0$$

$$\left(\lambda_s^2 - \omega_s^2 + \omega^2\right) a_s - \sum_{r=1}^{N} \frac{F_{sr}}{2G_s}\ \omega^2 a_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, N) \qquad (3\cdot4)$$

ただし、

$$G_s = \int_0^1 f_s^2(\varepsilon) d\varepsilon\,, \qquad F_{sr} = \int_0^1 \left\{ (r+1)^2 - (r+\varepsilon)^2 \right\} f_s'(\varepsilon)\, f_r'(\varepsilon)\, d\varepsilon\,,$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l}\,, \qquad r = \frac{R}{l}$$

式（３・４）は、モード振幅 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ に関する同次連立方程式である。自明でない解を得るには、式（３・４）より

$$\left| \mathbf{B} - \lambda_s^2 \mathbf{E} \right| = \mathbf{0} \qquad (3\cdot5)$$

を満足しなければならない。ただし、**E**は単位行列、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{F_{11}}{2G_1} - 1\right)\omega^2 + \omega_1^2 & \frac{F_{12}}{2G_1}\omega^2 & \cdots & \frac{F_{1N}}{2G_1}\omega^2 \\ \frac{F_{21}}{2G_2}\omega^2 & \left(\frac{F_{22}}{2G_2} - 1\right)\omega^2 + \omega_2^2 & \cdots & \frac{F_{2N}}{2G_2}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F_{N1}}{2G_N}\omega^2 & \frac{F_{N2}}{2G_N}\omega^2 & \cdots & \left(\frac{F_{NN}}{2G_N} - 1\right)\omega^2 + \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

これは行列**B**に関する固有値問題に帰する。このとき、モード振幅 $a_r\ (r = 1, 2, \ldots, N)$ は固有ベクトルとして表されるから、遠心力が作用しているときの規準関数 u_s を求めることができる。

遠心力が作用しているときの s 次固有振動数 λ_s は、その固有値より求めることができるが、$F_{sr} (s \neq r)$は F_{ss} に比較して非常に小さいので F_{sr} を無視すれば、第２章で示したように、軸回転数 ω が極端に大きくないとき λ_s は近似的に次のように表すことができる。

$$\lambda_s \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{F_{ss}}{2G_s}-1\right)\omega^2+\omega_s^2}=\omega\sqrt{\frac{F_{ss}}{2G_s}+\frac{\omega_s^2}{\omega^2}-1} \qquad (s=1,2,....,N) \tag{3・6}$$

ローターが回転し遠心力の作用を受ける梁の1次規準関数 u_1 を遠心力が作用しない場合の1次から3次モードの規準関数 f_1, f_2, f_3 の1次結合で近似(3モード近似)したとき、式(3・5)より得られた梁の1次固有振動数 λ_1 およびモード振幅 a_1, a_2, a_3 と軸回転数 ω の関係を図3・1の実線に示す。

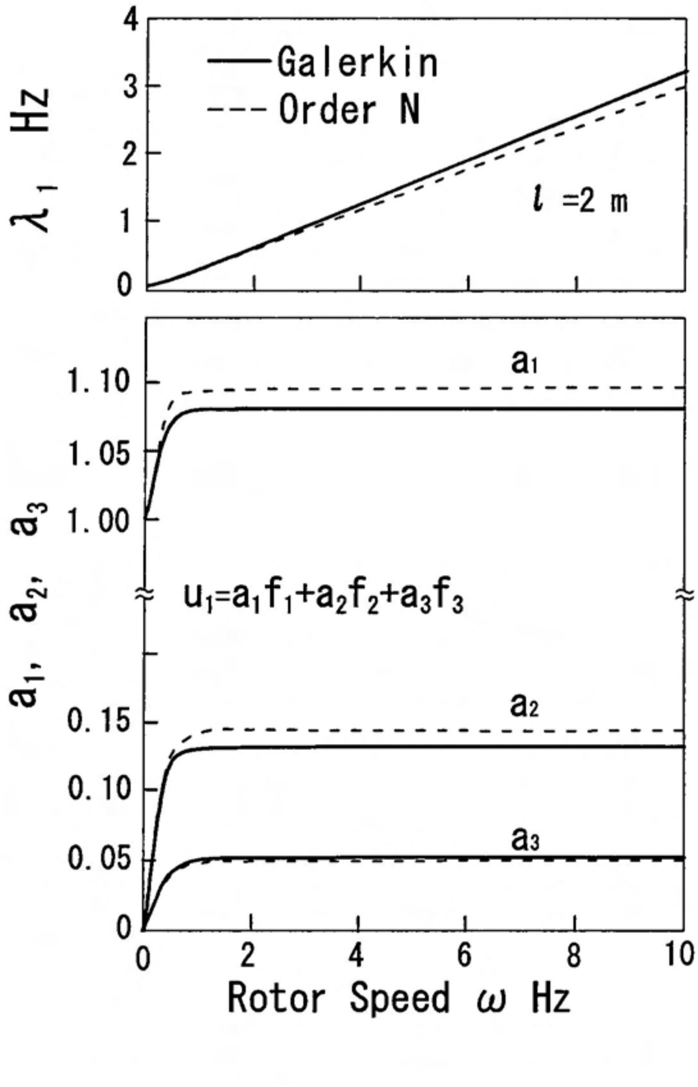


図3・1　遠心力の作用を受ける梁の1次固有振動数とモード振幅

遠心力が作用する場合の梁の1次規準関数 u_1 は遠心力が作用しない場合の高次モード f_2, f_3 の影響を含むが、その量は長い梁でモード振幅 a_1 に対し a_2 で約14%、a_3 で約5%とかなり小さい。梁の1次固有振動数 λ_1 は軸の回転が速くなるとほぼそれに比例して増加する。

遠心力を受ける梁の1次規準関数 u_1 を図3・2に示す。軸回転速度が上がると u_1 は直ちに一定の形に近づく。

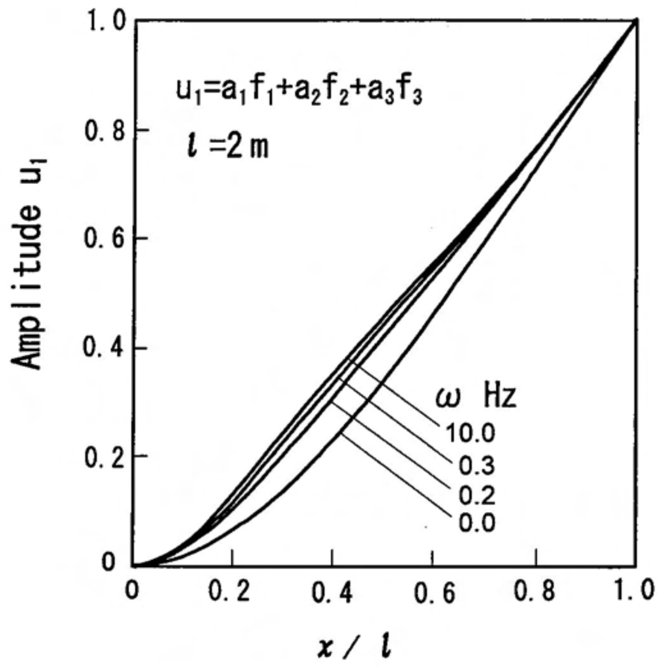


図3・2　遠心力の影響を受ける梁の1次振動モード

3・1・2　Order N 法による数値計算

回転する梁の固有モードを実験で正確に測定することは非常に困難なため、遠心力の作用を受ける梁のモード変化をより忠実に表現できる Order N 法による数値計算を行って、解析結果の妥当性を確

認する。Order N 法は、運動学や動力学の漸化的記述と加速度項に関して陽な運動方程式が直接得られるという特徴を有し、変形されたd'Alembertの原理に基づいて定式化された効率のよい手法である。

一般にシステムの自由度を N とすれば N^3 のオーダの計算量を要するが、Order N 法は N のオーダで計算することができ、システムを表す関数 (M_i, $\overline{G}_i$, P_i^u, P_i^c, $\overline{p}_i^c, i=1,2,\ldots,N$)をユーザが定義するだけで解析できる。ただし、M_i は質量マトリックス、$\overline{G}_i$ は力の総計ベクトル、P_i^u, P_i^c, $\overline{p}_i^c$ はシステムの拘束を表す行列とベクトルである（付録Ⅲ参照）。

本計算では梁を n_b 個の要素に分割した。各要素は図３・３に示すように二つの剛体から成り、左端から ξ_0 のところで回転ばねとピンで連結されている。l_i は要素の長さ、θ_i^L , θ_i^R は静止座標から見た二つの剛体の回転角で、$\Delta\theta_i = \theta_i^R - \theta_i^L$ である。$\Delta\delta_i$ は右部先端の y_i 方向の変位、M_i^L, M_i^R は要素の両端に作用する曲げモーメントである。

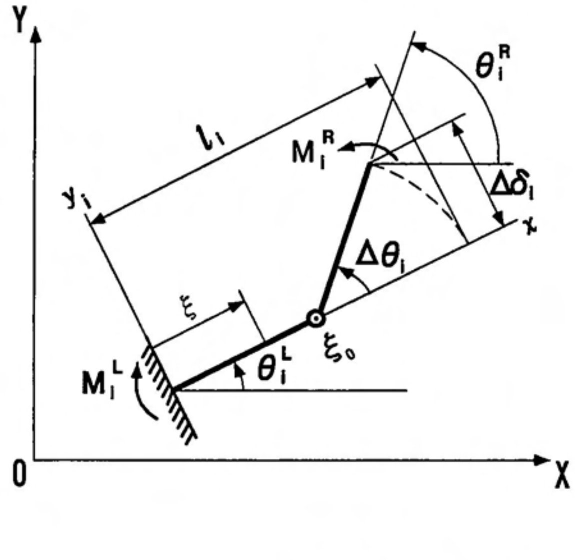


図３・３　Order N 法における梁の要素

このとき片持ち梁の関係から

$$\Delta\theta_i = \frac{M_i^R l_i}{EI}, \qquad \Delta\delta_i = \frac{M_i^R l_i^2}{2EI} \tag{3·7}$$

また、図から

$$\Delta\delta_i = (1-\eta_0) l_i \sin\Delta\theta_i \tag{3·8}$$

ただし、$\eta_0 = \xi_0 / l_i$。したがって、式(3・7),(3・8)より

$$\eta_0 = 1 - \frac{\Delta\theta_i}{2\sin\Delta\theta_i} \tag{3·9}$$

すなわち、$\Delta\theta_i$ が小さいときヒンジの位置 $\eta_0 \fallingdotseq 1/2$となる。

ローター軸を原点Oに固定し、ふれまわりのない状態で、軸回転したときに得られた梁の1次モードのたわみを数値計算し、最小2乗法により、次式からモード振幅 a_1, a_2, a_3を求めた。

$$a_i = \frac{\int_0^l u_1 f_i dx}{\int_0^l f_i^2 dx} \qquad (i = 1,2,3) \tag{3·10}$$

その結果を図3・1の破線に示す。これらのモード振幅より遠心力の作用を受ける場合の1次規準関数 u_1は図3・2の実線とほとんど一致するため区別できない。これらの図に示すように、Order N 法による数値計算結果と Galerkin 法による解析結果を比較するとよく一致している。

式(3・10)の積分は、Simpson の公式を用いて数値積分を行った。梁の分割数 n_b は、ローター静止時の遠心力が作用しない場合の規準関数 $f_1(x)$の結果がこれ以上分割数を増やしてもさほど影響を与えない数 n_b＝14とした。

3・2　安定性

ローターのふれまわりが

$X = A_0\cos\Omega t$,　$Y = A_0\sin\Omega t$

の小さな調和振動するとき、梁の運動方程式(2・18)に $y_i = d_s u_s(x)\sin(qt+\gamma_i)$ を代入し、u_s の直交関係を考慮して Galerkin 法を適用すると第2章と同様にして次の方程式を得る。

$$d_s(\lambda_s^2 - q^2)\int_0^l u_s^2 dx + A_0\Omega^2\int_0^l u_s dx = 0 \qquad (s = 1,2,\ldots,\infty) \tag{3・11}$$

これから

$$d_s = \frac{A_0\Omega^2 E_s}{\left(q^2 - \lambda_s^2\right)D_s} \tag{3・12}$$

$$D_s = \int_0^1 u_s^2(\varepsilon)d\varepsilon \text{ , } E_s = \int_0^1 u_s(\varepsilon)d\varepsilon$$

を得る。式(3・12)を用いてローターの運動方程式(2・16), (2・17)に調和バランス法を用いると、次の系の振動数方程式を求めることが出来る。

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = -\frac{n\sigma E_s^2}{2D_s}\frac{\Omega^4}{\left(q^2 - \lambda_s^2\right)} \tag{3・13}$$

ただし、

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \sigma = \frac{m}{M}$$

式(3・13)の左辺は、ローターの慣性力とばね力(ローター力)、右辺はローターに作用する梁の慣性力(梁力)を表す。式(3・13)はΩに関する4次方程式で表され、解Ωがすべて実根ならば系は安定であり、もし共役な複素根をもつならば系は不安定となり自励振

動が発生する危険性がある。

第2章で述べたように梁の高次モードの振動では系は安定となるから、不安定領域の中心的な軸回転数 ω_m は

$$\omega_m \fallingdotseq \Omega_1 + \lambda_1 \tag{3·14}$$

ただし、

$$\Omega_1 = \frac{\mu_3\omega + \sqrt{{\mu_3}^2\omega^2 + (1-\mu_3)(\Omega_0^2 + \mu_3\lambda_s^2 + 3\mu_3\omega^2)}}{1-\mu_3} \fallingdotseq \Omega_0 \quad , \qquad \mu_3 = \frac{n\sigma E_s^2}{2D_s}$$

したがって

$$\omega_m \fallingdotseq \Omega_0 + \lambda_1 \tag{3·15}$$

すなわち、軸回転数がローターの危険速度 Ω_0 と遠心力の作用を受ける梁の1次固有振動数 λ_1 との和にほぼ等しくなる領域で、系は不安定となる。

図3・4に系の不安定領域を示す。実線で挟まれた部分は方程式(3・13)から得られた不安定領域、すなわち遠心力が作用する場合の梁の1次規準関数 u_1 を、遠心力が作用しない場合の規準関数 f_1, f_2, f_3 の3モード近似で得られた不安定領域である。破線で挟まれた部分とI印は、遠心力の作用を無視し u_1 を f_1 のみで表して解析した1モード近似の場合と実験で求めた場合の不安定領域をそれぞれ示す。‡印はOrder N法により運動方程式(2・12)~(2・14)をシミュレーションして得られた不安定領域を表す。

実線部と破線部を比較すると、不安定領域にほとんど差はない。後者の場合梁が長いところで約2%不安定領域が狭くなっている程度である。この理由は節3・1で述べたように、u_1 の遠心力に関係するモード振幅 a_2, a_3 の影響は a_1 に比べて小さいこと、不安定領域の決定に直接関係する係数 E_s, D_s はそれぞれ積分と2乗されることにより求められるから a_2, a_3 の影響がさらに小さくなるた

めである。したがって、u_1 を f_1 のみで表した１モード近似の簡便な方法でも、実用上十分な精度で不安定領域を予測することができる。

実線部は、実験および Order N 法の結果と比較的よく一致している。

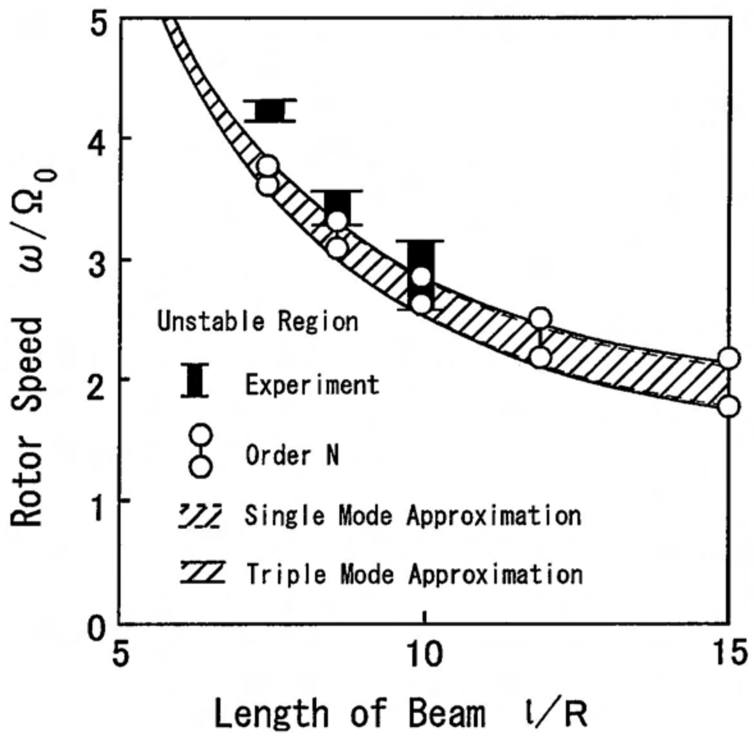


図３・４　不安定領域

3・3 結論

柔軟な片持ち梁を備えた回転軸の並進モードのふれまわりに関し、前章で無視した遠心力による梁の固有モードの変化および不安定性に対するその影響を検討するため、回転する梁の1次モードを遠心力が作用しない梁の1次から3次モードの規準関数の1次結合で近似し、Galerkin 法を用いて解析を行った。遠心力の作用によって梁の1次固有振動数と固有モードがどのように変化するかを調べた。回転する梁の固有モードを実験で正確に測定することは困難なので、計算精度と効率のよい Order N 法による数値計算も行った。梁の1次固有振動数とそのモードは Galerkin 法による解と Order N 法による数値解においてよく一致し、解析結果の妥当性を確認した。

その結果、回転する梁の1次モードの変化は、遠心力が作用しない場合のモードと比較して大きな違いはなく、モードの違いを考慮しても不安定領域にあまり差がない。このことから、回転する梁の1次モードを遠心力が作用しない片持ち梁の1次規準関数で近似する簡便な方法でも、実用上十分な精度で不安定領域を予測することができる。

第4章　円錐モードの動的安定性

本章では、曲げ剛性に強い異方性がある梁を取付けたローターが円錐モードでふれまわるときの安定性について調べる。梁の曲げ剛性に異方性がない場合、梁の振動はローターの回転軸を含む平面内のみ励起される。このとき梁の1次固有振動数は常に軸回転数より高いから円錐モードの自励ふれまわりは通常発生しない。しかし、発電用風車の翼等のように梁の曲げ剛性に強い異方性がある場合は梁が剛性の最も小さい平面内で振動し易いから、このような梁を回転軸に垂直な平面に対してある角度をなす方向に振動するように取付けると円錐モードのふれまわりによって梁の振動が励起され、梁の振動が逆にローターのふれまわりを励起するという正帰還的な力学構造が形成されて自励ふれまわりが発生する可能性があり得る。

解析では系の運動は微小とし、減衰力や重力を無視して運動方程式を導く。その際、梁の1次モードの振動のみが自励ふれまわりを引起し得ること、遠心力によるモードの変化は不安定領域に大きな影響を与えないこと等の前章の成果を踏まえて、梁のモードは遠心力が作用しない片持ち梁の1次曲げ振動のモードで近似する。系の安定性は、梁を含む系全体の振動数方程式が共役な複素根を有するか否かで判定する。理論の妥当性は実験で確認する。

解析結果を示すと次のようである。ローターの回転速度が、梁の無いローターの前進歳差ふれまわり固有振動数と梁の1次固有振動数との和にほぼ等しくなる領域で前進歳差モードの自励ふれまわりが起こる危険性がある。一方、後進歳差モードの自励ふれまわりは起こらない。梁を細長いローターに取付けたときジャイロ効果

によって、高回転数全域に渡って系が不安定となる危険な状況が起こり得る。

主な記号

A_0	：ローター振幅
EI	：梁の曲げ剛性
$\mathbf{e}_x$,$\mathbf{e}_y$,$\mathbf{e}_z$	：x,y,z 軸の単位ベクトル
$\mathbf{e}_{xi}$,$\mathbf{e}_{yi}$,$\mathbf{e}_{zi}$	：x_i, y_i, z_i 軸の単位ベクトル
$f_s(x_i)$	：ローター静止時の梁の s 次規準関数
I_x, I_y, I_z	：ローターの重心まわりの主慣性モーメント
k	：系のばね定数
l, m, n	：梁の長さ，質量，本数
O-XYZ	：静止座標系
O-xyz	：ローターに固定した動座標系
O_i -$x_i\,y_i\,z_i$	：相対静止時の各梁の中立軸に固定した動座標系
$q=\omega-\Omega$	：ローターに対する相対ふれまわり角速度
R	：ローター半径
$v_i=\lvert v_i\rvert$	：梁の微小要素 dm の速度
y_i	：i 番目の梁のたわみ
δ_i	：ローター平面に対する梁振動面の傾き角
$\gamma_i=2\pi(i-1)/n$	：i 番目の梁の取付け位置
λ_1	：ローター回転時の梁の 1 次固有振動数
ρ ,A	：梁の密度，断面積
Ω	：梁を取付けた回転ローターのふれまわり角速度
Ω_0	：梁無し静止ローターの固有円振動数
ω	：ローターの回転角速度

ω_1 ：ローター静止時の梁の一次固有振動数

4・1　運動方程式

解析する力学系を図4・1に示す。ローターはローター平面に垂直な z 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転しながら、静止したローター中心 O を通る X, Y 軸まわりに振れ角 α , β の円錐モードでふれまわる。ローターには曲げ剛性に強い異方性を持つ長さ l の一様な片持ち梁が半径方向に n 本等間隔に取付けられている。各梁はローター平面に対し δ_i 傾いた曲げ剛性が最も弱い y_i 軸方向にのみ振動する。O-XYZ は静止座標系、O-xyz はローターに固定された動座標系、O_i-$x_i y_i z_i$ は各梁の相対静止時の梁の中立軸に固定した動座標系である。ローターの不つりあいは無視する。

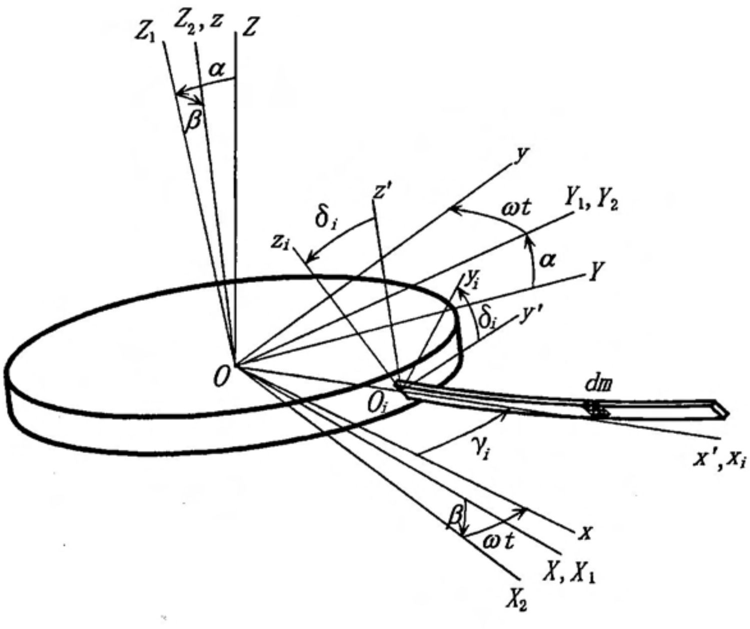


図4・1　座標系

ローターの角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_r$ は

$$\boldsymbol{\omega}_r = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z$$

ただし、$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は x, y, z 軸の単位ベクトル

$$\omega_x = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\omega t + \dot{\beta}\sin\omega t$$

$$\omega_y = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\omega t + \dot{\beta}\cos\omega t$$

$$\omega_z = \dot{\alpha}\sin\beta + \omega$$

第2章で述べたように、梁のたわみによって梁の微小要素 dm はローター回転軸へ接近するが、その接近効果を無視した場合の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ は

$$\boldsymbol{r}_i = (R + x_i)\mathbf{e}_{xi} + y_i \mathbf{e}_{yi}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i &= (R + x_i)\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{e}_{xi} + \dot{y}_i \mathbf{e}_{yi} + y_i \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{e}_{yi} \\ &= \left\{-\dot{y}_i \sin\gamma_i \cos\delta_i + y_i(\omega_y \sin\delta_i - \omega_z \cos\gamma_i \cos\delta_i) - (R + x_i)\omega_z \sin\gamma_i\right\}\mathbf{e}_x \\ &\quad + \left\{\dot{y}_i \cos\gamma_i \cos\delta_i - y_i(\omega_x \sin\delta_i + \omega_z \sin\gamma_i \cos\delta_i) + (R + x_i)\omega_z \cos\gamma_i\right\}\mathbf{e}_y \\ &\quad + \left\{\dot{y}_i \sin\delta_i + y_i(\omega_x \cos\gamma_i + \omega_y \sin\gamma_i)\cos\delta_i + (R + x_i)(\omega_x \sin\gamma_i - \omega_y \cos\gamma_i)\right\}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

ただし、$\mathbf{e}_{xi}, \mathbf{e}_{yi}, \mathbf{e}_{zi}$ は x_i, y_i, z_i 軸の単位ベクトル。dm の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_i$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_i &= \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_{zi} \\ &= \omega_{xi}\mathbf{e}_x + \omega_{yi}\mathbf{e}_y + \omega_{zi}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

ただし、$\theta_i = y_i'$ は梁のたわみ角で

$$\omega_{xi} = \omega_x + \dot{\theta}_i(-\cos\alpha\sin\beta\cos\omega t + \sin\alpha\sin\omega t)$$

$$\omega_{yi} = \omega_y + \dot{\theta}_i(\cos\alpha\sin\beta\sin\omega t + \sin\alpha\cos\omega t)$$

$$\omega_{zi} = \omega_z + \dot{\theta}_i\cos\alpha\cos\beta$$

系の運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー V および散逸関数 F は次のように表される。

$$T = \frac{1}{2}\left\{(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)\right\} + \frac{\rho A}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l (v_i^2 + i_{xi}^2\omega_{xi}^2 + i_{yi}^2\omega_{yi}^2 + i_{zi}^2\omega_{zi}^2)dx_i$$

$$-\frac{\rho A\omega^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2\left\{(R+l)^2-(R+x_i)^2\right\}dx_i \qquad (4\cdot1)$$

$$V=\frac{1}{2}k(\alpha^2+\beta^2)+\frac{EI}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial {x_i}^2}\right)^2 dx_i \qquad (4\cdot2)$$

$$F=\frac{1}{2}c(\dot\alpha^2+\dot\beta^2)+\frac{1}{2}c_1\rho A\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial t\,\partial x_i}\right)^2 dx_i \qquad (4\cdot3)$$

ただし、i_{xi} , i_{yi} , i_{zi} は静止状態の梁の微小要素 dm を平板と考えたとき、dm の重心を通り x_i, y_i, z_i 軸に平行なそれぞれの軸まわりの回転半径である。運動エネルギー T の最終項は、接近効果を考慮した補正項である（付録Ⅳ参照）。

系の運動方程式は Hamilton の原理より、$I_x = I_y$ とし、2次以上の微小量を無視して次のように導かれる。

$$I_x\ddot\alpha+c\dot\alpha+k\alpha+I_z\omega\dot\beta$$

$$\begin{aligned}
&=-\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l[\![\ddot y_i(R+x_i)\sin(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i+\omega^2 y_i(R+x_i)\sin(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i\\
&+(R+x_i)^2\left\{\tfrac{1}{2}\ddot\alpha[1-\cos2(\omega t+\gamma_i)]+\omega\dot\alpha\sin2(\omega t+\gamma_i)-\tfrac{1}{2}\ddot\beta\sin2(\omega t+\gamma_i)\right.\\
&\left.-\omega\dot\beta\cos2(\omega t+\gamma_i)+\omega\dot\beta\right\}+{i_{xi}}^2\left[\tfrac{1}{2}\ddot\alpha[1+\cos2(\omega t+\gamma_i)]-\omega\dot\alpha\sin2(\omega t+\gamma_i)\right.\\
&+\tfrac{1}{2}\ddot\beta\sin2(\omega t+\gamma_i)+\omega\dot\beta\cos2(\omega t+\gamma_i)+\{\omega\dot y_i'\cos(\omega t+\gamma_i)\\
&\left.-\omega^2 y_i'\sin(\omega t+\gamma_i)\}\sin\delta_i\right]+{i_{yi}}^2\left[\left\{\tfrac{1}{2}\ddot\alpha[1-\cos2(\omega t+\gamma_i)]+\omega\dot\alpha\sin2(\omega t+\gamma_i)\right.\right.\\
&\left.-\tfrac{1}{2}\ddot\beta\sin2(\omega t+\gamma_i)-\omega\dot\beta\cos2(\omega t+\gamma_i)\right\}\cos^2\delta_i+\{-\omega\dot y_i'\cos(\omega t+\gamma_i)\\
&\left.+\omega^2 y_i'\sin(\omega t+\gamma_i)\}\sin\delta_i+\omega\dot\beta\sin^2\delta_i\right]+{i_{zi}}^2\left[\left\{\tfrac{1}{2}\ddot\alpha[1-\cos(\omega t+\gamma_i)]\right.\right.\\
&\left.+\omega\dot\alpha\sin2(\omega t+\gamma_i)-\tfrac{1}{2}\ddot\beta\sin2(\omega t+\gamma_i)-\omega\dot\beta\cos2(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin^2\delta_i\\
&\left.+\{\ddot y_i'\sin(\omega t+\gamma_i)+\omega\dot y_i'\cos(\omega t+\gamma_i)\}\sin\delta_i+\omega\dot\beta\cos^2\delta_i\right]\\
&+g\,y_i\cos(\omega t+\gamma_i)\cos\delta_i]\!]dx_i
\end{aligned}$$

(4・4)

$$I_x\ddot{\beta} + c\dot{\beta} + k\beta - I_z\omega\dot{\alpha}$$

$$= -\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Big[\!\Big[-\ddot{y}_i(R+x_i)\cos(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i - \omega^2 y_i(R+x_i)\cos(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i$$

$$+(R+x_i)^2\left\{-\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i) - \omega\dot{\alpha}\cos 2(\omega t+\gamma_i) + \tfrac{1}{2}\ddot{\beta}[1+\cos 2(\omega t+\gamma_i)]\right.$$

$$\left.-\omega\dot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i) - \omega\dot{\alpha}\right\} + i_{xi}{}^2\left[\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i) + \omega\dot{\alpha}\cos 2(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}[1-\cos 2(\omega t+\gamma_i)] + \omega\dot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i) + \left\{\omega\dot{y}_i'\sin(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$\left.\left.+\omega^2 y_i'\cos(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin\delta_i\right] + i_{yi}{}^2\left[\left\{-\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i) - \omega\dot{\alpha}\cos 2(\omega t+\gamma_i)\right.\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}[1+\cos 2(\omega t+\gamma_i)] - \omega\dot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i)\right\}\cos^2\delta_i + \left\{-\omega\dot{y}_i'\sin(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$\left.\left.-\omega^2 y_i'\cos(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin\delta_i - \omega\dot{\alpha}\sin^2\delta_i\right] + i_{zi}{}^2\left[\left\{-\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i)\right.\right.$$

$$\left.-\omega\dot{\alpha}\cos 2(\omega t+\gamma_i) + \tfrac{1}{2}\ddot{\beta}[1+\cos 2(\omega t+\gamma_i)] - \omega\dot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin^2\delta_i$$

$$\left.-\left\{\ddot{y}_i'\cos(\omega t+\gamma_i) - \omega\dot{y}_i'\sin(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin\delta_i - \omega\dot{\alpha}\cos^2\delta_i\right]$$

$$+g\,y_i\sin(\omega t+\gamma_i)\cos\delta_i\Big]\!\Big]dx_i \qquad (4\cdot5)$$

$$\ddot{y}_i + c_1\dot{y}_i - \omega^2 y_i\cos^2\delta_i + \frac{EI}{\rho A}y_i'''' - \frac{1}{2}\omega^2\left\{[(R+l)^2-(R+x_i)^2]y_i'\right\}'$$

$$+\omega^2(i_{xi}{}^2 - i_{yi}{}^2)y_i''\sin^2\delta_i - i_{zi}^2\ddot{y}_i'' = -(R+x_i)\left\{\ddot{\alpha}\sin(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$\left.-\ddot{\beta}\cos(\omega t+\gamma_i) + 2\omega\dot{\alpha}\cos(\omega t+\gamma_i) + 2\omega\dot{\beta}\sin(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin\delta_i$$

$$-\mathrm{g}\left\{[\alpha\cos(\omega t+\gamma_i) + \beta\sin(\omega t+\gamma_i)]\cos\delta_i + \sin\delta_i\right\} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

(4・6)

ここで、粘性の項、重力の項および梁のたわみによる梁の回転慣性の項は影響が小さいので無視すると、上の運動方程式は次のようになる。

$$I_x\ddot{\alpha} + k\alpha + I_z\omega\dot{\beta}$$

$$= -\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Big[\!\Big[\ \ddot{y}_i(R+x_i)\sin(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i + \omega^2 y_i(R+x_i)\sin(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i$$

$$+(R+x_i)^2\left\{\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}[1-\cos 2(\omega t+\gamma_i)]+\omega\dot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i)-\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$\left.-\omega\dot{\beta}\cos 2(\omega t+\gamma_i)+\omega\dot{\beta}\right\}\Big]\!\Big]dx_i \qquad (4\cdot 7)$$

$$I_x\ddot{\beta}+k\beta-I_z\omega\dot{\alpha}$$

$$=-\rho A\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\Big[\!\Big[\ -\ddot{y}_i(R+x_i)\cos(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i-\omega^2 y_i(R+x_i)\cos(\omega t+\gamma_i)\sin\delta_i$$

$$+(R+x_i)^2\left\{-\tfrac{1}{2}\ddot{\alpha}\sin 2(\omega t+\gamma_i)-\omega\dot{\alpha}\cos 2(\omega t+\gamma_i)+\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}[1+\cos 2(\omega t+\gamma_i)]\right.$$

$$\left.-\omega\dot{\beta}\sin 2(\omega t+\gamma_i)-\omega\dot{\alpha}\right\}\Big]\!\Big]dx_i \qquad (4\cdot 8)$$

$$\ddot{y}_i-\omega^2 y_i\cos^2\delta_i+\frac{EI}{\rho A}y_i''''-\tfrac{1}{2}\omega^2\left\{[(R+l)^2-(R+x_i)^2]y_i'\right\}'$$

$$=-(R+x_i)\left\{\ddot{\alpha}\sin(\omega t+\gamma_i)-\ddot{\beta}\cos(\omega t+\gamma_i)+2\omega\dot{\alpha}\cos(\omega t+\gamma_i)\right.$$

$$\left.+2\omega\dot{\beta}\sin(\omega t+\gamma_i)\right\}\sin\delta_i \qquad (i=1,2,\ldots.,n) \qquad (4\cdot 9)$$

ただし、梁のたわみ $y_i(t,x_i)$は次の境界条件を満足しなければならない。

$$y_i(t,0)=y_i'(t,0)=y_i''(t,l)=y_i'''(t,l)=0 \qquad (4\cdot 10)$$

4・2　振動数方程式と系の安定性

系の運動方程式（4・7）～（4・9）の解析解を求めることは困難なので、Galerkin 法と調和バランス法を用いて系の振動数方程式を近似的に求め、この方程式が共役な複素根を持つか否かで系の安定性を判定する。

図4・2に示すようにローターが次のような振動数Ωと小さな振幅 A_0 の円錐モードでふれまわると考える。

$$\alpha = A_0 \cos \Omega t\ ,\quad \beta = A_0 \sin \Omega t \qquad (4\cdot 11)$$

式（4・11）を梁の運動方程式（4・9）に代入すると

$$\ddot{y}_i - \omega^2 y_i \cos^2 \delta_i + \frac{EI}{\rho A} y_i'''' - \tfrac{1}{2}\omega^2 \left\{[(R+l)^2 - (R+x_i)^2] y_i'\right\}'$$
$$= A_0 (R+x_i)\Omega(\Omega - 2\omega)\sin\delta_i \sin(qt+\gamma_i) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (4\cdot 12)$$

ただし、$q=\omega-\Omega$ である。

梁の曲げ振動モードの遠心力による変化は、第3章で述べたよう

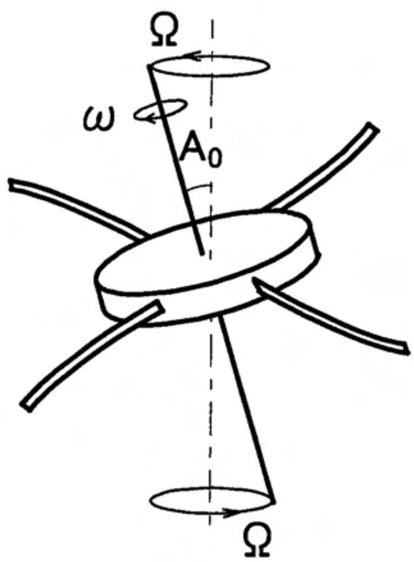


図4・2　円錐モードのふれまわり

に不安定領域に与える影響は小さいから、本章では梁の振動モードを遠心力の作用を受けない一様片持ち梁の1次曲げ振動モード $f_1(x_i)$ で近似する。

すなわち、

$$y_i(t,x_i) = a_1 f_1(x_i)\sin(qt+\gamma_i) \tag{4・13}$$

とおいて、式(4・12)に代入し、Galerkin法を用いると

$$a_1 = \frac{A_0 l\Omega(2\omega-\Omega)H_1\sin\delta_i}{\left(q^2-\lambda_1^2\right)G_1}$$

したがって、

$$y_i(t,x_i) = \frac{A_0 l\Omega(2\omega-\Omega)H_1\sin\delta_i}{\left(q^2-\lambda_1^2\right)G_1} f_1(x_i)\sin(qt+\gamma_i) \tag{4・14}$$

ただし、

$$\lambda_1=\omega\sqrt{\frac{F_{11}}{2G_1}-\cos^2\delta_i+\frac{\omega_1^2}{\omega^2}} \tag{4・15}$$

$$F_{11}=\int_0^1\left\{(r+1)^2-(r+\varepsilon)^2\right\}f_1'(\varepsilon)f_1'(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$G_1=\int_0^1 f_1^2(\varepsilon)d\varepsilon,\quad H_1=\int_0^1(r+\varepsilon)f_1(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$\varepsilon=\frac{x_i}{l},\ r=\frac{R}{l}$$

λ_1 はローター回転時の梁の1次固有振動数の近似値で、梁に遠心力が作用しない場合の1次規準振動(4・13)をローターがふれまわりを起こさない梁の運動方程式、すなわち、式(4・12)の同次方程式に代入し、Galerkin法を用いて求めたものである。

ローターの運動方程式(4・7),(4・8)にローターのふれまわり(4・11)と梁の曲げ振動(4・14)を代入し、調和バランス法を用いると次のような系全体の振動数方程式が得られる。

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \tag{4・16}$$

ただし、

$$F_1(\nu) = \nu_0^2 - \nu^2 + \mu_0 \nu$$

$$F_2(\nu) = b_0 \nu \left[b_1 \nu + b_2 - \frac{b_3 \nu + b_4}{\{\nu - (1-\nu_1)\}\{\nu - (1+\nu_1)\}} \right]$$

上式中の各無次元量および係数は

$$\nu = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \nu_0 = \frac{\Omega_0}{\omega}, \quad \nu_1 = \frac{\lambda_1}{\omega}, \quad \mu_0 = \frac{I_z}{I_x}$$

$$\mu_1 = \frac{ml^2}{I_x}, \quad \Omega_0 = \sqrt{k/I_x}$$

$$b_0 = \frac{n\mu_1}{2}, \quad b_1 = -\frac{H_1^2 \sin^2 \delta_i}{G_1} - \frac{1}{3}\left\{(1+r)^3 - r^3\right\}$$

$$b_2 = -\frac{2H_1^2 \sin^2 \delta_i}{G_1} - \frac{2}{3}\left\{(1+r)^3 - r^3\right\}$$

$$b_3 = \frac{H_1^2(\nu_1^2 + 15)\sin^2 \delta_i}{G_1}, \quad b_4 = \frac{2H_1^2(\nu_1^2 - 1)}{G_1}$$

式（4・16）の左辺 F_1 は軸のばね偶力とジャイロモーメントも含めたローターの慣性偶力の和（ローター偶力）を、右辺 F_2 は梁からローターに作用する偶力（梁偶力）を表す。この式はローターに作用する偶力の釣合いを表す式であるが、系の固有振動数Ωを与える振動数方程式でもある。

図4・3に、ローター偶力 F_1 と梁偶力 F_2 の関係を模式的に示す。$\nu_1 > 1$、すなわち梁の1次固有振動数がローターの軸回転数より高いとき（図（a））、F_1 と F_2 は常に4点で交わり系は全回転数域で安定である。一方、$\nu_1 < 1$ のとき（図（b））、式（4・16）が一対の共役な複素根を有して、系が不安定となる可能性がある。系の安定性は F_1 が F_2 の $\nu = 1 - \nu_1$ 近傍の隙間を交わらずに通過するか否かを数値的に調べて判定した。第2章と同様、交点が2個減る

事態は、ローター偶力 F_1 が梁の局所共振点 $1-\nu_1$ の近傍で零になる場合に起こるから

$$\omega \fallingdotseq \Omega_1 + \lambda_1 \qquad (4\cdot17)$$

$$\Omega_1 = \frac{\mu_0\omega}{2} \pm \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{\mu_0^2\omega^2}{4}}$$

ただし、Ω_1 は $F_1(\nu)=0$ の解で複号の＋および－は、梁を備えていないローターの前進歳差および後進歳差モードのふれまわり固有振動数である。 後者の値は常に負であるから後進歳差モードでは条件（４・１７）は $\lambda_1 > \omega$、すなわち特性根が全て実根となる $\nu_1 > 1$ の場合のみ成立つ。したがって、後進歳差モードの自励ふれまわりは起こらない。

以上のことから系が不安定となる条件は

$$\omega \fallingdotseq \Omega_{fp} + \lambda_1 \qquad (4\cdot18)$$

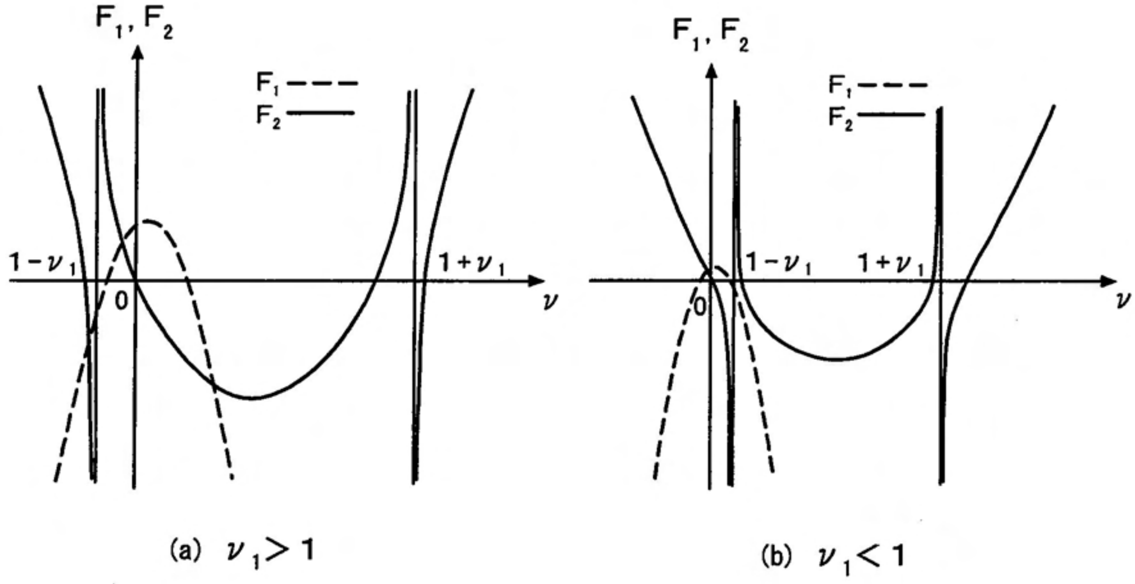


図４．３　ローター偶力と梁偶力の関係

$$\Omega_{fp} = \frac{\mu_0 \omega}{2} + \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{\mu_0^2 \omega^2}{4}} \tag{4・19}$$

この結果はローター角速度ωが梁の無いローターの前進歳差ふれまわり固有振動数 Ω_{fp} と梁の１次固有振動数 λ_1 との和にほぼ等しくなる領域で、前進歳差モードの自励ふれまわりが起る危険性があることを示唆する。

図４・４は、ローター平面に対する梁の振動面の傾き角 δ_i における梁の１次固有振動数 λ_1 とローター軸回転数ωとの関係を示したものである。同図から曲げ剛性に対し異方性の強い梁を振動面の角度 δ_i が小さくなるように取付けた場合、軸回転数が高くなると不安定の必要条件 $\lambda_1 < \omega$ が成立するようになるから、自励ふれまわりが発生する可能性があることが分かる。一方、梁の振動面の角度 δ_i が大

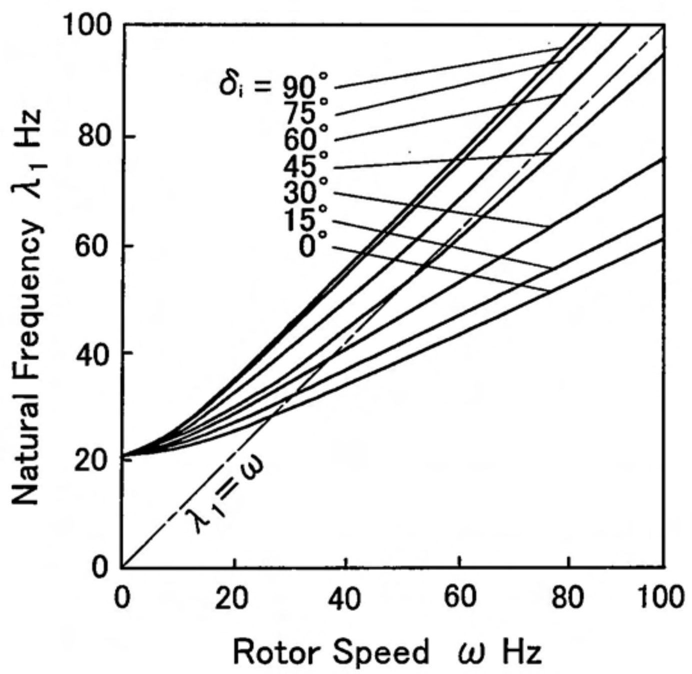


図４・４　梁の１次固有振動数とローター回転数の関係

きくなるように取付けた場合、λ_1 が ω より常に大きくなるから、梁の振動面の角度がある値以上になると系は全回転数域で安定となる。梁の曲げ剛性が等方あるいは異方性が小さい場合も、梁はローター平面に対してほぼ垂直な方向 $\delta_i \fallingdotseq 90°$ で振動するから、円錐モードの自励ふれまわり起らない。

高回転数域では、ωに比し ω_1 や Ω_0 が無視できるから、式（４・１５），（４・１９）は

$$\lambda_1 \fallingdotseq \omega\sqrt{\frac{F_{11}}{2G_1} - \cos^2\delta_i} \tag{4・20}$$

$$\Omega_{fp} \fallingdotseq \mu_0\omega \tag{4・21}$$

したがって、不安定条件（４・１８）は

$$1 \fallingdotseq \mu_0 + \sqrt{\frac{F_{11}}{2G_1} - \cos^2\delta_i} \tag{4・22}$$

この場合、回転軸まわりの慣性モーメントが直径まわりのそれより小さい細長いローターでは、ローター平面と梁の振動面との角度差が小さいとき、ジャイロ効果によって軸回転数に無関係に不安定条件（４・２２）を満たす場合があり得る。したがって、広い高回転数域に渡って自励ふれまわりが発生する危険がある。

回転軸まわりの慣性モーメントが直径まわりのそれより大きい平たいローターの円錐モードのふれまわりは条件（４・２２）を満足出来ないから、安定である。

図４・５に梁偶力とローター振動方向の関係示す。白三角はローターのふれまわりの振動方向を示し、矢印は各梁に関する梁偶力で黒三角は全体の梁偶力の振動方向を表す。図に示すように、円錐モードの不安定状態の梁偶力とローター偶力の関係は、ローターに固定された動座標系から見て、梁偶力の振動方向は軸回転と相対的に

逆方向に回転し、ローターのふれまわりの振動方向と同期していることが分かる。この相対的に逆方向作用する梁偶力が、第2章の並進モードの場合と同様、系を不安定にする。

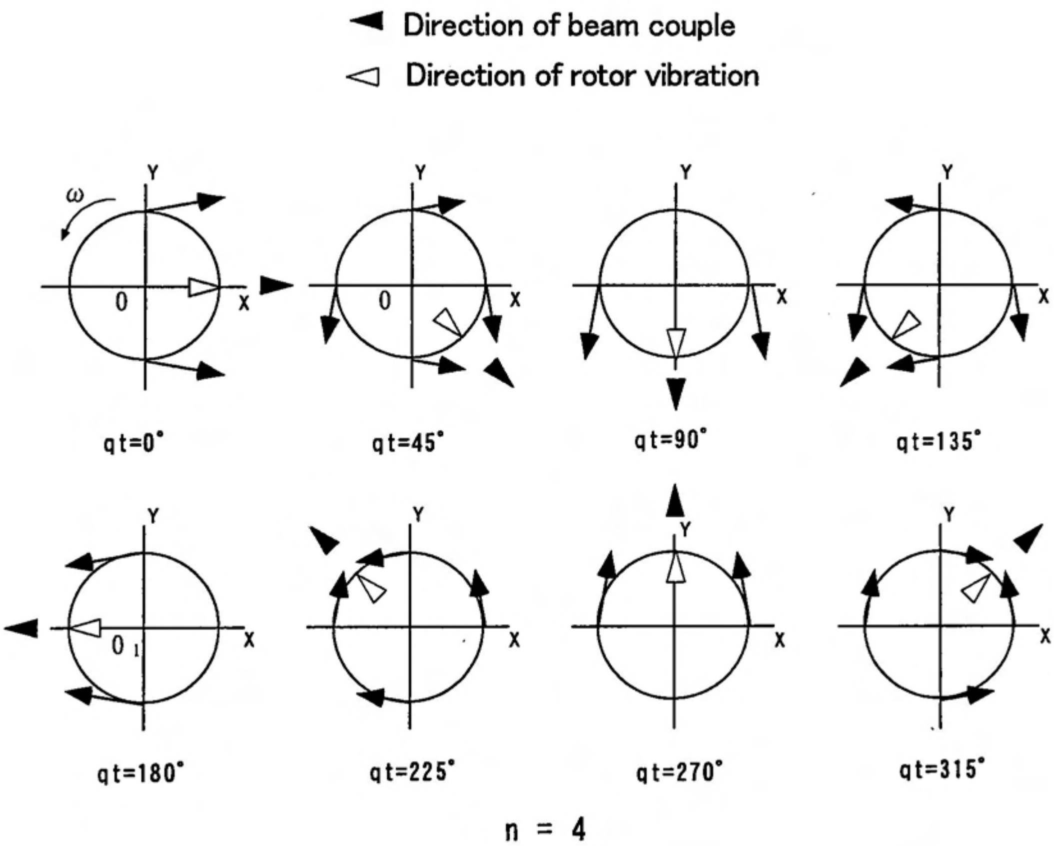


図4・5　梁偶力とローター振動方向の関係

4・3　実験装置および結果

図４・６に実験装置の概略を示す。図の４・７は装置の写真である。ローターはモーター軸に取付けられ、ローター中心点まわりに円錐モードでふれまわるよう水平面４５°の角度をなして四方から張られた４本の細いピアノ線で支持されている。ローターには４本の片持ち梁が放射状に等間隔に取付けられ梁の振動方向の傾き角 δ_i は任意に設定できる。

ローターの回転軸まわりの慣性モーメントは 2677 gcm^2 で、直径まわりのそれとの比 $\mu_0 = 0.0176$ である。梁は長さ 43.3cm、断面積 2.3mm×0.8mm のステンレス鋼板で、非回転時の 1 次固有振動数は 3.25Hz である。梁を取付けないときの系の危険速度は 1.38Hz、減衰比 0.015 である。ローターの振動はレザー変位計で、梁の運動の様子はストロボにより観察した。

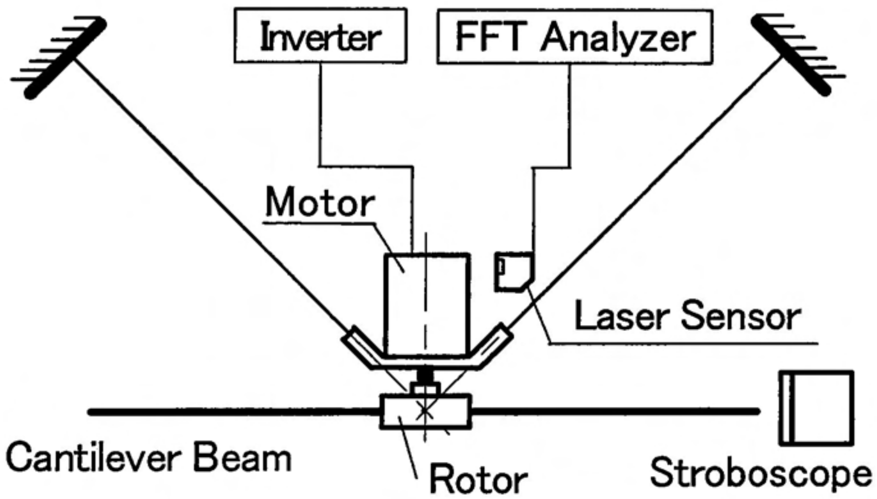
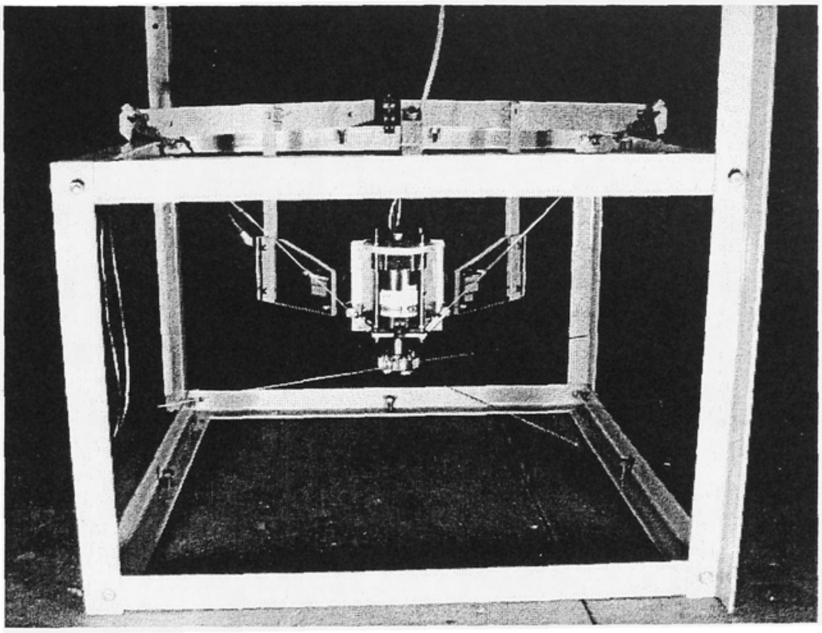
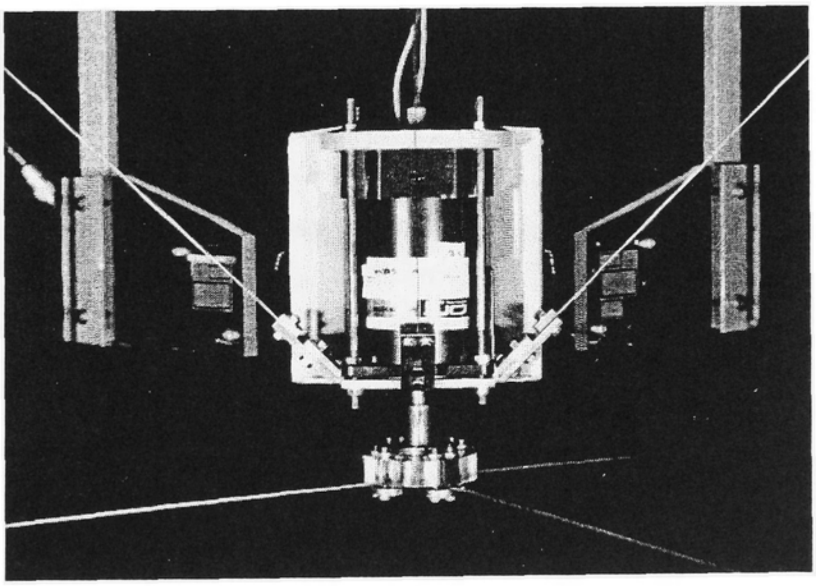


図４・６　実験装置



(a)



(b)

図 4 ・ 7　実験装置写真

図４・８に$\delta_i = 30^\circ$の場合の軸回転数ωに対するローターの振幅A_0と系の振動数Ωとの実験結果を示す。図中の水平な太い線は、振動数方程式（４・１６）の実根が２個減る回転数範囲を数値計算して得られた不安定領域である。

自励ふれまわりが起こり始めると直ちに大きく成長し、ローターがストッパに接触するため自励ふれまわりの振幅は測定出来なかったが、ほぼ理論の予測値通りに７Hz以上の軸回転数で自励ふれまわりの発生が確認された。

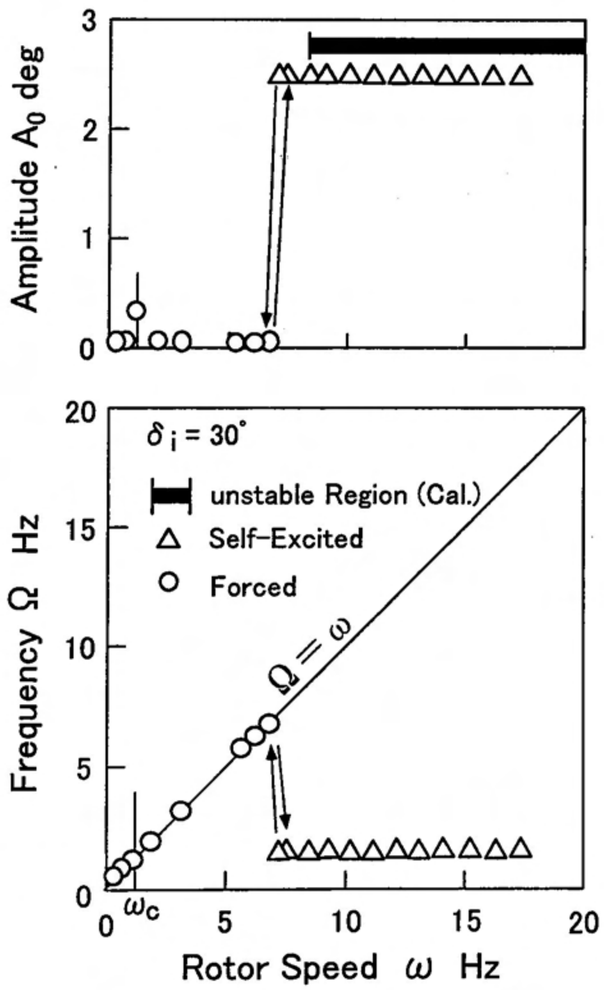


図４．８　定常応答

図４・９は、梁の振動方向の傾き角 δ_i と系の不安定領域の関係を示す。斜線の部分は式（４・１６）より得られた不安定領域を示し、破線は式（４・２０）で $\lambda_1 = \omega$ とおいて得られる安定限界角 δ_{i0}＝53.6°である。垂直な太い線は実験結果を示し、計算結果と実験結果は比較的よく一致している。δ_i＝45°の場合、不安定領域の下限は実験結果のほうがかなり低く目に表示されているが、これは空気抵抗により梁が煽られ実質的な梁の振動方向 δ_i が小さくなったためと考えられる。この例ではジャイロ効果により、高回転数全域で不安定となる危険な状況にあることが分かる。なお、後進歳差モードの自励ふれまわりは実験では観察されなかった。

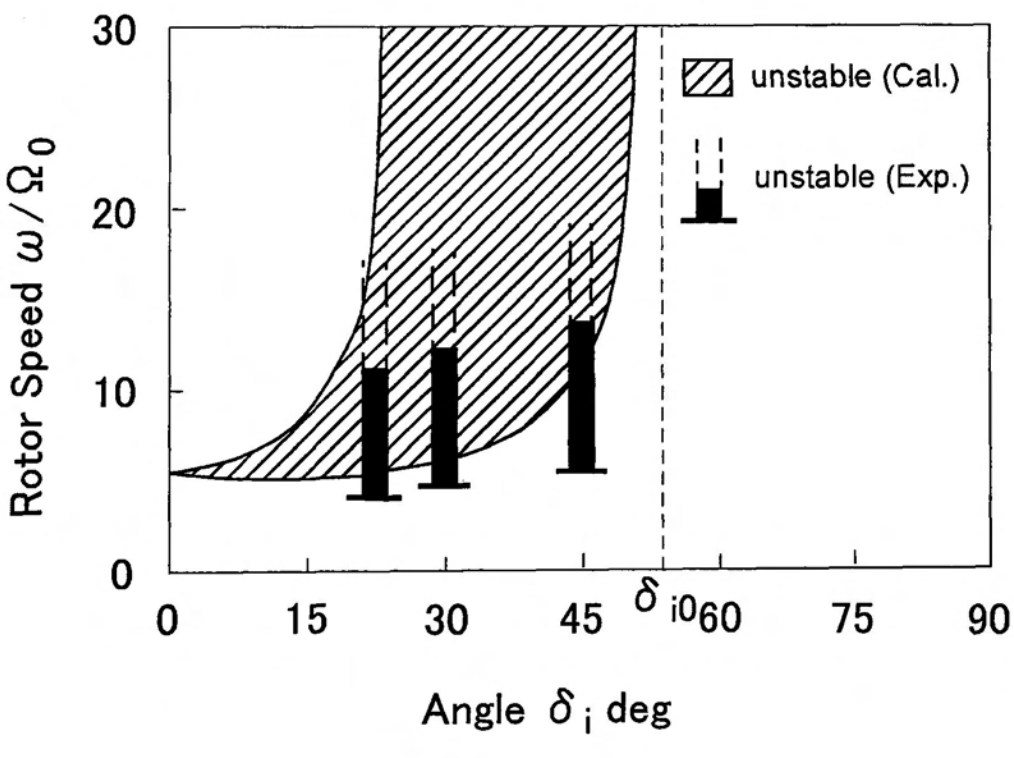


図４・９　不安定領域

4・4 結論

曲げ剛性に強い異方性を持つ片持ち梁を備えた回転軸の円錐モードふれまわりの動的安定性について理論的に解析を行い、その妥当性を実験によって確認した。理論解析では運動方程式の2次以上の微小項や減衰項を無視して系全体の振動数方程式を求め、その解が全て実根であるか否かで安定性を判別した。得られた結果は以下のように要約される。

梁の曲げ剛性に強い異方性がある場合、梁をローター平面とあまり大きく傾かない方向に振動するように取付けると系が不安定となる可能性がある。ローターの回転速度が梁を取付けないローターの前進歳差ふれまわり固有振動数と梁の1次固有振動数との和にほぼ等しくなる領域で前進歳差モードの自励ふれまわりが起こる危険性がある。一方、後進歳差モードの自励ふれまわりは起こらない。

梁が曲げ剛性に関して等方性であるかあるいはその異方性が小さい場合には円錐モードの自励振動は誘起されず系は常に安定である。

また、異方性の強い梁を細長いローターに取付けたとき、ジャイロ効果によって軸回転数に無関係に不安定条件を満たす場合があるから、広い高回転数域に渡って系が不安定となる非常に危険な状況が生じる可能性がある。

理論結果は実験結果と比較的よく一致する。

第5章　総括

長い振り子や弾性ブームを取付けた回転体は、ある回転数範囲で激しい自励ふれまわりや姿勢不安定を引起こす危険性がある。本研究では、この種の動的不安定現象の基本的な発生メカニズムや予防対策を把握するため、弾性支持され、一様断面の柔軟な片持ち梁を半径方向に等間隔に複数個取付けた単純な回転軸系の並進モードと円錐モードの動的安定性に的を絞って理論解析を行い、実験によってその妥当性を確認した。従来、数値シミュレーションに頼ってきた系の動的不安定性を簡便かつ見通し良く予知できる解析手法を提案するとともに、安定と思われてきた円錐モードのふれまわりも曲げ剛性に強い異方性を持つ弾性棒を取付けた場合は不安定化する危険性があることを示した。結果を要約すると次のようである。

第2章では、柔軟な片持ち梁を取付けたローターが一定の半径と角速度の並進モードでふれまわるとき、その動的不安定現象の基本的な特徴を明らかにした。解析を簡単にし現象が明確に把握できるよう、梁のモード変化に対する遠心力の作用を無視した場合について調べ、系を不安定にする自励振動の発生メカニズムを考察した。

その結果、軸回転数が軸の危険速度と片持ち梁の1次固有振動数との和にほぼ等しい領域で、かつそのような領域でのみで系が不安定となる可能性がある。梁の固有振動数が軸回転より高い場合系は安定で、梁の2次以上の高次振動モードでは梁の曲げ剛性や長さの如何によらず系は通常安定である。自励振動の発生機構は、軸のふれまわりによって励起される梁の運動が不釣合い力を生み、その不釣合い力が軸に対し相対的に軸回転と逆向き作用し、軸のふれまわりと同期することによって自励振動が発生し、系を不安定にする。

第3章では、前章で無視した遠心力の影響を考慮して解析を行った。梁のモードは遠心力によっても変化するから、遠心力による梁の固有モードの変化を調べ、それが系の不安定にどのように影響するかを理論解析により検討した。また、回転する梁の固有モードを実験で正確に測定することは困難であるため、計算精度と効率のよい Order N 法よる数値計算も行い、解析結果の妥当性を確認した。

ここでは、系の不安定化に関係する梁の1次モードのみを考える。梁の1次モードに対する遠心力の影響を評価するために、それを遠心力が作用しない梁の1次から3次の規準関数の1次結合で近似する。その結果、遠心力による梁の1次モードの形状変化はあまり大きくないこと、遠心力の作用を無視した簡便な方法でも、系の不安定領域を僅かに狭く評価するが、実用上十分な精度で不安定領域を予測することができることを示した。

第4章では、曲げ剛性に強い異方性がある梁を取付けたローターが円錐モードでふれまわるときの動的不安定について調べた。梁の曲げ剛性に強い異方性がある場合、梁が剛性の最も小さい方向に振動するから、このような梁をローター平面に対して浅い角度で振動するように取付けると梁の固有振動数が軸回転数より低くなる可能性が生じて、円錐モードの自励ふれまわりを引起こす可能性がある。軸回転数が梁を取り除いたローターの前進歳差ふれまわり固有振動数と梁の1次固有振動数との和にほぼ等しくなる領域で、前進歳差モードの自励ふれまわりが生じ、系が不安定となる危険性がある。梁の曲げ剛性に異方性がない場合あるいはそれが小さい場合、梁の振動はローター平面にほぼ垂直な方向に振動し、梁の1次固有振動数は常に軸回転数より高くなるから円錐モードの自励ふれまわりは通常発生しない。

特に、異方性の強い梁を細長いローターに取付けたとき、ジャイロ効果によって高回転数全域に渡って系が不安定となる非常に危険な状況が発生し得ることが分かった。

本論文では、独立な並進モードと円錐モードに的を絞って研究を行った。今後の課題として、並進モードと円錐モードの連成が考えられるオーバーハング軸のような回転軸系があげられる。この種の回転軸系では複雑な系となり、解析はさらに難しくなるが次のようなことが予想される。連成により系の自由度が増し、不安定領域は並進および円錐モード単独の不安定領域よりも広がる可能性がある。連成がない場合、梁の2次以上の高次モードでは系は不安定とならなかったが、連成がある場合梁の1次モードだけでなく、2次モードにおいても系が不安定となる可能性がある。

謝辞

本論文を終えるに当たり、本課題を与えられ終始ご指導、ご鞭撻を賜り、熱心にご指導頂いた九州工業大学工学部　陣内靖介教授に厚く感謝の意を表します。

本論文の作成に際しては、特に九州工業大学工学部　兼田楨宏教授、和田知之教授、村上周太教授より懇切丁寧なご指導と貴重なご助言を頂きました。そのご厚意に対して厚くお礼を申し上げます。

また、東亜大学　荒木嘉昭教授、久留米工業大学　久保省蔵教授、元西日本工業大学　大高勝夫教授には親身なるご指導とご助言を賜りました。九州工業大学　長田隆講師には Order N 法の資料とご指導を頂きました。心より深甚の謝意を表します。

実験・データ整理などに関して、ご協力頂いた九州工業大学工学部ダイナミクス研究室の井上助手、高良技官、卒業生諸氏、ならびに西日本工業大学の関係各位に感謝の意を表します。

付　録

付録Ⅲ　Order N 法の解説

付録Ⅲ・1　柔軟多体構造物の定式化法

Newton の第2法則から直接導かれる d'Alembert の原理は

$$0 = d\overline{f} - \ddot{\overline{x}}dm \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 1)$$

ここで、dm はシステム内の任意微小質量、$\overline{x}$はその慣性系における位置ベクトル、$d\overline{f}$はそれに働く力の慣性系表示である。

システムの一般化座標ベクトルを$\overline{q}$とすれば、システムの幾何学的拘束を満たす仮想変位は次のように表される。

$$\delta\overline{x} = \left[\overline{x}_{\overline{q}}\right]\delta\overline{q} \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 2)$$

ただし、$\left[\overline{x}_{\overline{q}}\right] \equiv \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{q}}$である。（Ⅲ・1）と（Ⅲ・2）の内積をとってシステム全体にわたって積分すると、

$$0 = \delta\overline{q}^T \int_s \left[\overline{x}_{\overline{q}}\right]^T (d\overline{f} - \ddot{\overline{x}}dm)$$

ホロノミック（積分可能）系では$\overline{q}$は独立であるので、次のような修正された d'Alembert の原理が得られる。

$$0 = \int_s \left[\overline{x}_{\overline{q}}\right]^T d\overline{f} - \int_s \left[\overline{x}_{\overline{q}}\right]^T \ddot{\overline{x}}dm \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 3)$$

これは、一般化力（第1項）と一般化慣性力（第2項）の釣合いを表している。

付録Ⅲ・2　速度および加速度

システム内の任意の点の慣性系における位置ベクトルは時間と一般化座標の関数($\bar{x}=\bar{x}(t,\bar{q})$)であるから、対応する速度と加速度は次のように表される。

$$\dot{\bar{x}} = \left[\bar{x}_{\bar{q}}\right]\dot{\bar{q}} + \dot{\bar{x}}\Big|_{\dot{\bar{q}}=0} \qquad (Ⅲ・4)$$

ただし、$\dot{\bar{x}}\Big|_{\dot{\bar{q}}=0} \equiv \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial t}$である。ここで、次に定義される非ホロノミック速度ベクトルを導入する。

$$\bar{u} = \left[\bar{u}_{\dot{\bar{q}}}\right]\dot{\bar{q}} + \bar{u}\Big|_{\dot{\bar{q}}=0} \qquad (Ⅲ・5)$$

ただし、$\left[\bar{u}_{\dot{\bar{q}}}\right] \equiv \left[\bar{u}_{\dot{\bar{q}}}\right](t,\bar{q})$ $\left(\det\left[\bar{u}_{\dot{\bar{q}}}\right] \neq 0\right)$、$\bar{u}\Big|_{\dot{\bar{q}}=0} \equiv \bar{u}\Big|_{\dot{\bar{q}}=0}(t,\bar{q})$である。(Ⅲ・4)と(Ⅲ・5)から$\dot{\bar{q}}$を消去すると、慣性系における速度と加速度が次のように得られる。

$$\dot{\bar{x}} = \left[\dot{\bar{x}}_{\bar{u}}\right]\bar{u} + \dot{\bar{x}}\Big|_{\bar{u}=0} \qquad (Ⅲ・6)$$

$$\ddot{\bar{x}} = \left[\dot{\bar{x}}_{\bar{u}}\right]\dot{\bar{u}} + \ddot{\bar{x}}\Big|_{\dot{\bar{u}}=0} \qquad (Ⅲ・7)$$

$\dot{\bar{x}}$と$\bar{u}$、また$\ddot{\bar{x}}$と$\dot{\bar{u}}$が線形の関係にあることに注意されたい。また、式(Ⅲ・6)より

$$\left[\bar{x}_{\bar{q}}\right] = \left[\dot{\bar{x}}_{\dot{\bar{q}}}\right] = \left[\dot{\bar{x}}_{\bar{u}}\right]\left[\bar{u}_{\dot{\bar{q}}}\right] \qquad (Ⅲ・8)$$

の関係が得られる。

付録Ⅲ・3　運動方程式

式(Ⅲ・7)、(Ⅲ・8)を修正された d'Alembert の原理(Ⅲ・3)に代入し、最高次の微係数($\dot{\bar{u}}$)に関して陽な表現になるように変形すると、次のようなシステムの運動方程式が得られる。

$$\mathbf{M}\dot{\bar{u}} = \bar{Q} + \bar{F} = \bar{G} \qquad (Ⅲ・9)$$

ただし、

$$\mathbf{M} \equiv \int_S \left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]^T \left[\dot{x}_{\overline{u}}\right] dm \qquad \text{(質量行列)}$$

$$\overline{Q} \equiv \int_S \left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]^T d\overline{f} \qquad \text{(一般化力)}$$

$$\overline{F} \equiv \int_S -\left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]^T \ddot{x}\Big|_{\dot{\overline{u}}=0} dm \qquad \text{(一般化力以外の力)}$$

$$\overline{G} \equiv \overline{Q} + \overline{F} \qquad \text{(力の総計)}$$

システムのダイナミクスは、拘束に依存する $\left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]$ と $\ddot{x}\Big|_{\dot{\overline{u}}=0}$ の２つの量によって特徴づけられる。

付録Ⅲ・４　変数変換則

多体系の定式化は、数学的には拘束などに応じてさまざまに変化するシステムの状態変化に関する変数変換にほかならない。変数変換によって運動方程式がどのように変化するか考察する。

システムの一般化座標が $\overline{q}$ から $\overline{q}^c$ に、また対応する速度ベクトルが $\overline{u}$ から $\overline{u}^c$ に変化したとする。そして、速度 $\overline{u}$ と $\overline{u}^c$、加速度 $\dot{\overline{u}}$ と $\dot{\overline{u}}^c$ がそれぞれ以下のような線形の関係にあるとする。

$$\overline{u} = \left[\overline{u}_{\overline{u}^c}\right]\overline{u}^c + \overline{u}\Big|_{\overline{u}^c=0} \quad , \quad \dot{\overline{u}} = \left[\overline{u}_{\overline{u}^c}\right]\dot{\overline{u}}^c + \dot{\overline{u}}\Big|_{\dot{\overline{u}}^c=0} \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 10)$$

ただし、$\left[\overline{u}_{\overline{u}^c}\right] \equiv \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{u}^c}$ である。式（Ⅲ・１０）を（Ⅲ・６）と（Ⅲ・７）に代入すると、慣性系での速度および加速度の表現は次のように変化する。

$$\dot{x} = \left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]\left(\left[\overline{u}_{\overline{u}^c}\right]\overline{u}^c + \overline{u}\Big|_{\overline{u}^c}\right) + \dot{x}\Big|_{\overline{u}=0}$$

$$\ddot{x} = \left[\dot{x}_{\overline{u}}\right]\left(\left[\overline{u}_{\overline{u}^c}\right]\dot{\overline{u}}^c + \dot{\overline{u}}\Big|_{\dot{\overline{u}}^c}\right) + \ddot{x}\Big|_{\dot{\overline{u}}=0}$$

また、前述の拘束を特徴づける2つの量は次のように変わる。

$$\left[\dot{x}_{\bar{u}^c}\right] = \left[\dot{x}_{\bar{u}}\right]\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right] \quad , \qquad \ddot{x}\Big|_{\dot{\bar{u}}^c=0} = \ddot{x}\Big|_{\dot{\bar{u}}=0} + \left[\dot{x}_{\bar{u}}\right]\dot{\bar{u}}\Big|_{\dot{\bar{u}}^c=0}$$

したがって、式(Ⅲ・7)から変換後の$\bar{u}^c$に関する運動方程式が次のように得られる。

$$\mathbf{M}^c\dot{\bar{u}}^c = \bar{G}^c \qquad (Ⅲ\cdot 11)$$

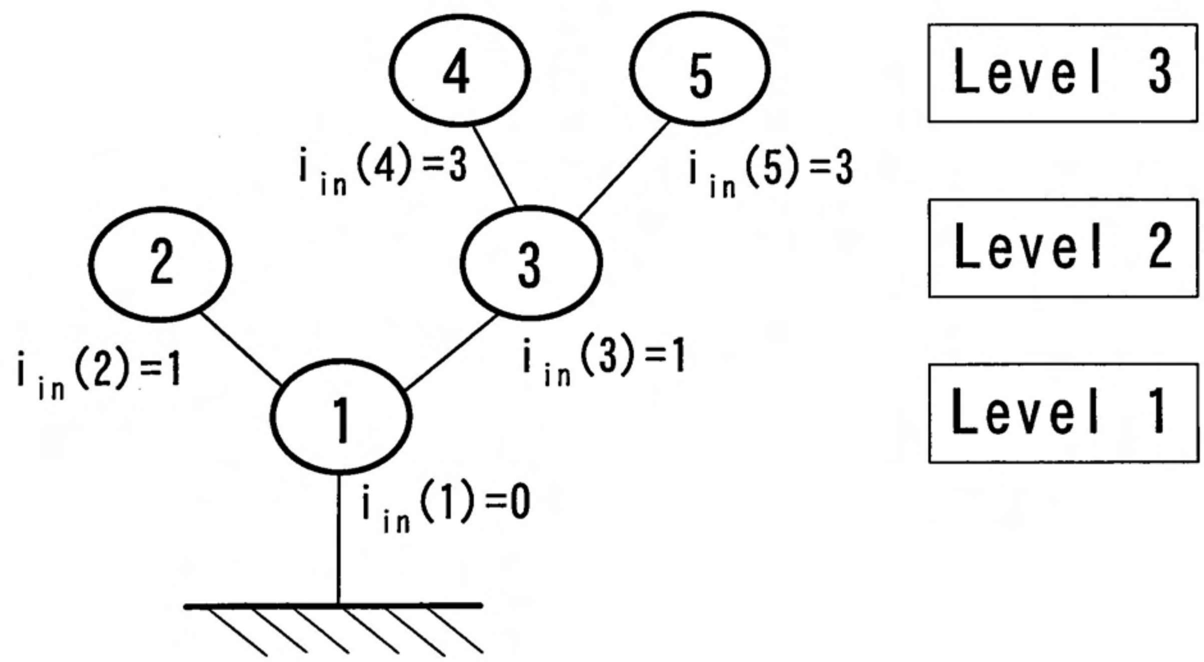
ただし、

$$\mathbf{M}^c = \left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right]^T \mathbf{M}\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right] \quad , \qquad \bar{G} = \left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right]^T \left\{\bar{G} - \mathbf{M}\dot{\bar{u}}\Big|_{\dot{\bar{u}}^c=0}\right\} \qquad (Ⅲ\cdot 12)$$

変数変換も、$\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right]$および$\dot{\bar{u}}\Big|_{\dot{\bar{u}}^c=0}$の2つの量によって特徴づけられる。

付録Ⅲ・5　多体システムへの適用

ここまで明らかにされた力学的原理式(Ⅲ・11)と変数変換則



図Ⅲ・1　システム・トポロジーの例

（Ⅲ・１２）に従って、一般の多体システムの定式化を行う。ここでは図Ⅲ・１のようなツリー・トポロジーを持ったシステムを考える。システムは N_B 個のボディから成り、各ボディは番号 $i(i=1,2,\ldots,N_B)$ を持ち、その内側のボディの番号は $i_{in}(i)$であるとする。

拘束のない状態では、ボディ i はそれぞれ次のような独自のダイナミクスを持っており、

$$\mathbf{M}\dot{\bar{u}}_i = \bar{G}_i \qquad (i=1,2,..N_B) \tag{Ⅲ・13}$$

システムの運動方程式は

$$\mathbf{M}\dot{\bar{u}} = \bar{G} \tag{Ⅲ・14}$$

の様になる。多体システムの運動方程式は式（Ⅲ・１１）で計算できるが、$\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right]$および $\dot{\bar{u}}\big|_{\dot{\bar{u}}^c=0}$ はシステムの自由度を n（拘束前），n_c（拘束後）としてそれぞれ $n\times n_c$ と $n\times 1$ の行列であり、特に大規模な系では巨大かつ複雑な関数となる。そこで、$(\bar{u},\dot{\bar{u}})$を、$(\bar{u}^c,\dot{\bar{u}}^c)$を用いて漸化的に表すことを考える。システムがジョイントによって拘束されると、ボディ i の状態 $\bar{u}_i$は、その内側のボディ i_{in} の状態 $\bar{u}_{i_{in}}$と、両者の間にあるジョイント i の状態 $\bar{u}_i^c$とによって規定されるので、その速度および加速度は、以下の様に漸化的に記述される。

$$\bar{u}_i = \mathbf{P}_i^u \bar{u}_{i_{in}} + \mathbf{P}_i^c \bar{u}_i^c + \bar{p}_i^{cu} \quad , \qquad \dot{\bar{u}}_i = \mathbf{P}_i^u \dot{\bar{u}}_{i_{in}} + \mathbf{P}_i^c \dot{\bar{u}}_i^c + \bar{p}_i^c \tag{Ⅲ・15}$$

これらをシステム全体に対してまとめると

$$\bar{u} = \mathbf{P}^u \bar{u}_{i_{in}} + \mathbf{P}^c \bar{u}_i^c + \bar{p}^{cu} \quad , \qquad \dot{\bar{u}} = \mathbf{P}^u \dot{\bar{u}} + \mathbf{P}^c \dot{\bar{u}}^c + \bar{p}^c \tag{Ⅲ・16}$$

ただし、

$$\mathbf{P}^u = \left[\delta_{i_{in}(i),j}\mathbf{P}_i^u\right] \quad , \qquad \mathbf{P}^c = \left[\delta_{i,j}\mathbf{P}_i^c\right] \tag{Ⅲ・17}$$

であり、$\delta_{i,j}$は Kronecker delta である。$\mathbf{E}$を単位行列とすれば、式（Ⅲ・１６）より

$$(\mathbf{E}-\mathbf{P}^u)\bar{u} = \mathbf{P}^c \bar{u}^c + \bar{p}^{cu} \quad , \qquad (\mathbf{E}-\mathbf{P}^u)\dot{\bar{u}} = \mathbf{P}^c \dot{\bar{u}}^c + \bar{p}^c$$

であるから

$$\bar{u} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}(\mathbf{P}^c \bar{u}^c + \bar{p}^{cu}) \quad , \quad \dot{\bar{u}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}(\mathbf{P}^c \bar{u}^c + \bar{p}^c) \qquad (\text{Ⅲ} \cdot 18)$$

となる。拘束を特徴づける２つの量は

$$\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}^c} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\mathbf{P}^c \quad , \quad \dot{\bar{u}}\Big|_{\dot{\bar{u}}^c = 0} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\bar{p}^c \qquad (\text{Ⅲ} \cdot 19)$$

であるから、これらをの式（Ⅲ・１１）に代入すると拘束後のシステムの運動方程式における各項が次の様に求まる。

$$M^c = \left[(\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\mathbf{P}^c\right]^T M \left[(\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\mathbf{P}^c\right] \qquad (\text{Ⅲ} \cdot 20)$$

$$\bar{G}^c = \left[(\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\mathbf{P}^c\right]^T \left\{\bar{G} - \mathbf{M}(\mathbf{E} - \mathbf{P}^u)^{-1}\bar{p}^c\right\} \qquad (\text{Ⅲ} \cdot 21)$$

付録Ⅲ・６　見かけ上切り離された等価システム

式（Ⅲ・１１）と式（Ⅲ・２０）、（Ⅲ・２１）より直ちに加速度項 $\dot{\bar{u}}^c$ を求めることも可能であるが、この手法の計算コストは n をシステムの自由度として n^3 のオーダであるため、大規模な多体システム系のシミュレーションには一般に適していない。

ここで、計算効率を改善するために有効な概念について述べる。図Ⅲ・２に示すように、拘束された二体システム（Ｉ）を考える。拘束前の運動方程式は

$$\mathbf{M}\dot{\bar{u}} = \bar{G} \qquad (\text{Ⅲ} \cdot 22)$$

ただし、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_a \\ \bar{u}_b \end{Bmatrix}$$

であり、$\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b$ および $\bar{u}_a, \bar{u}_b$ は個々のボディの質量行列と一般化速度ベクトルである。ここで、２つのボディが速度ベクトル $\bar{u}_b^c$ を持つジ

ョイントによって拘束されたとすると、

$$\bar{u}^c = \begin{Bmatrix} \bar{u}_a \\ \bar{u}_b{}^c \end{Bmatrix}$$

によって定義される拘束後のシステムの速度ベクトルは、拘束前のそれと

$$\bar{u}_b = \mathbf{P}_b^u \bar{u}_a + \mathbf{P}_b^c \bar{u}_b^c + \bar{p}_b^{cu} \quad , \qquad \dot{\bar{u}}_b = \mathbf{P}_b^u \dot{\bar{u}}_a + \mathbf{P}_b^c \dot{\bar{u}}_b^c + \bar{p}_b^c$$

の様に関係づけられ、拘束を特徴づける量は次のように与えられる。

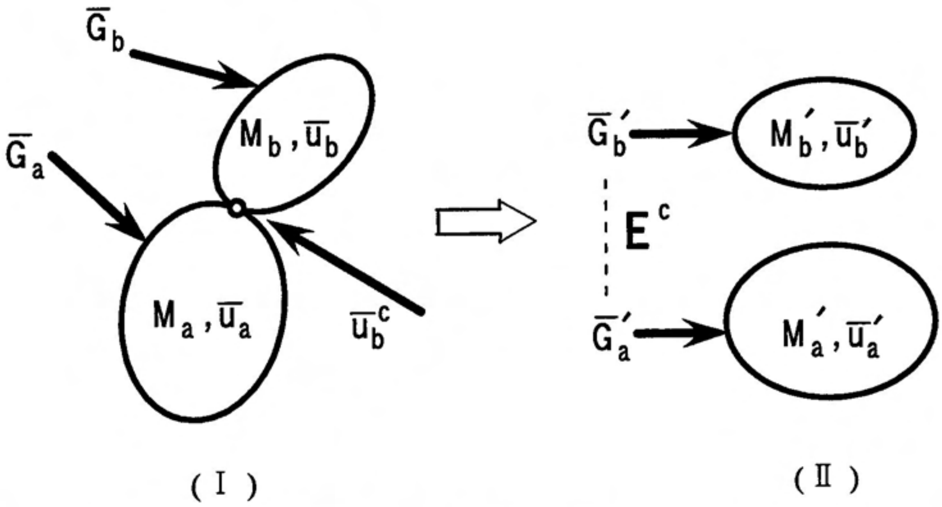
$$\left[\bar{u}_{\bar{u}^c}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_b^u & \mathbf{P}_b^c \end{bmatrix} \quad , \qquad \bar{u}\big|_{\bar{u}^c=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{p}_b^c \end{Bmatrix}$$

これらを式(Ⅲ・１１)に代入すると、拘束後の運動方程式は次のようになる。

$$\mathbf{M}^c \dot{\bar{u}}^c = \bar{G}^c \tag{Ⅲ・23}$$

ただし、

$$\mathbf{M}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a + (\mathbf{P}_b^u)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^u & sym. \\ (\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^u & (\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^c \end{bmatrix} \tag{Ⅲ・24}$$



図Ⅲ・２　拘束された２体システム(Ⅰ)とその切り離された等価システム(Ⅱ)

このように、拘束後は質量行列に非対角項を生じることが、一般に計算コストを高くする大きな原因となっている。質量行列（Ⅲ・２４）は次のように容易にブロック対角化出来る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -(\mathbf{E}_b^c)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{M}^c \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_b^c & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_b' \end{bmatrix} \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 25)$$

ただし、

$$\mathbf{E}_b^c \equiv ((\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^c)^{-1} (\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^u$$
$$\mathbf{M}_a' \equiv \mathbf{M}_a + (\mathbf{P}_b^u)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^u - ((\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^u)^T \mathbf{E}_b^c$$
$$\mathbf{M}_b' \equiv (\mathbf{P}_b^c)^T \mathbf{M}_b \mathbf{P}_b^c$$

ここで再び式（Ⅲ・２３）を用いると、拘束後のシステムの速度ベクトルを $\bar{u}^c$ から $\bar{u}' = \bar{u}^c + \mathbf{E}^c \bar{u}$ に変えると、この新しい速度ベクトルに対する運動方程式は、次のようになる。

$$\mathbf{M}' \dot{\bar{u}}' = \bar{G}' \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 26)$$

ただし、

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a' & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_b' \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{E}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{E}_b^c & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{G}' = (\mathbf{E} - \mathbf{E}^c)^T \left\{ \bar{G}^c - \mathbf{M}^c \dot{\bar{u}} \Big|_{\dot{\bar{u}}'=0} \right\}$$

質量行列が拘束前と同様にブロック対角になっていることに注目されたい。すなわち図Ⅲ・２に示すように，等価な変換後のシステム（Ⅱ）は、$\mathbf{M}_a'$ および $\mathbf{M}_b'$ なる質量行列を持つ見かけ上切り離されたボディから成るが、変換前のシステムに存在したカップリング効果は $\mathbf{E}^c$ を通じて力の項 $\bar{G}'$ に存在する。

一般のツリー･システムの場合にも、この切り離しのプロセスを先端のボディから順に適用していくことで、対応する見かけ上切り離されたの等価な系へと導くことが出来る。そのときの、変数変換後の質量行列は、

$$\mathbf{M}' = diag\left[\ldots, \mathbf{M}_i', \ldots. \right]$$

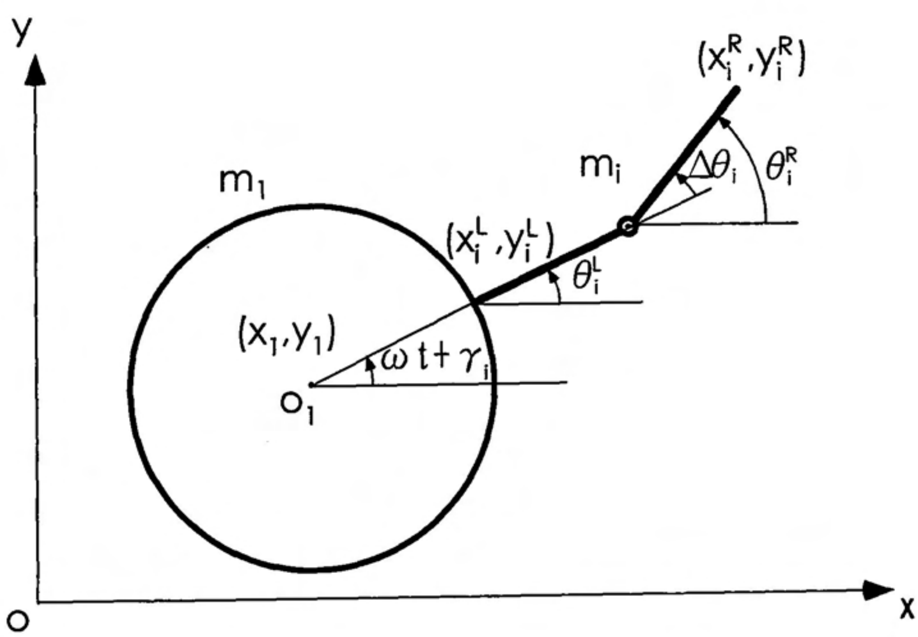
のようにブロック対角となり、これはシミュレーションや制御のための効率のよいアルゴリズムを導出する上で重要な特性となる。具体的なアルゴリズムは文献(30)を参照されたい。

付録Ⅲ・7　ローターの質量行列と力の総計 $\mathbf{M}_1, \bar{G}_1$

図Ⅲ・3に示すように、ローターの重心の質量と位置ベクトルをそれぞれ m_1, $\bar{x}_1 = \{x_1, y_1\}^T$ とし、ばねのばね定数 k、およびローターの減衰係数 c とすれば

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \tag{Ⅲ・27}$$

$$\bar{G}_1 = \bar{F}_1 + \bar{Q}_1 \quad , \qquad \bar{F}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \bar{Q}_1 = \begin{Bmatrix} -kx_1 - c\dot{x}_1 \\ -ky_1 - c\dot{y}_1 \end{Bmatrix} \tag{Ⅲ・28}$$



図Ⅲ・3　ローターと弾性棒

付録Ⅲ・8　弾性棒の質量行列と力の総計 $\mathbf{M}_i, \bar{G}_i$

図Ⅲ・4に示すような質量 m_iの i 番目 $(i=2,3,\ldots,N_B)$の弾性棒要素を考える。要素の左右端点の慣性系における位置ベクトル $\bar{x}_i^L, \bar{x}_i^R$を

$$\bar{x}_i^L = \left\{x_i^L, y_i^L, \theta_i^L\right\}^T \quad , \quad \bar{x}_i^R = \left\{x_i^R, y_i^R, \theta_i^R\right\}^T \tag{Ⅲ・29}$$

とすると、

一般化速度ベクトルは

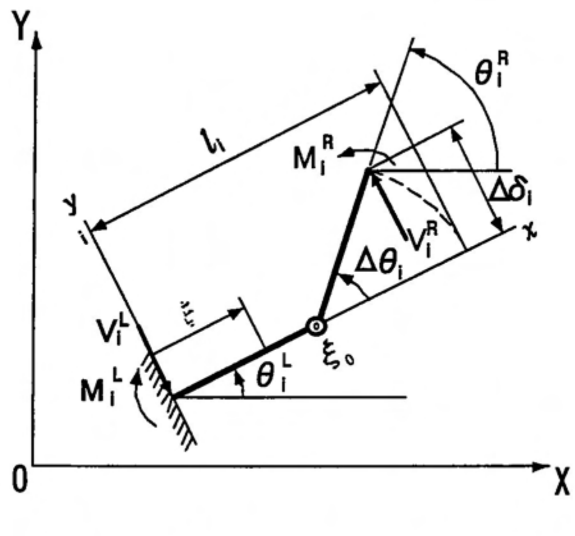
$$\bar{u}_i = \left\{\dot{\bar{x}}_i^R, \dot{\bar{x}}_i^L\right\}^T \tag{Ⅲ・30}$$

要素内の微小質量 dm_iの慣性系における位置ベクトル $\bar{x}_i$は

$$\bar{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i(\eta) \\ y_i(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i^L + \eta l_i \cos\theta_i^L + C(\eta-\eta_0) l_i (\cos\theta_i^R - \cos\theta_i^L) \\ y_i^L + \eta l_i \sin\theta_i^L + C(\eta-\eta_0) l_i (\sin\theta_i^R - \sin\theta_i^L) \end{Bmatrix} \tag{Ⅲ・31}$$

ただし、

$$\eta = \frac{\xi}{l_i} \quad , \quad \eta = \frac{\xi_0}{l_i} \quad , \quad C = \begin{cases} 0 & (0 \le \eta \le \eta_0) \\ 1 & (\eta_0 \le \eta \le 1) \end{cases}$$



図Ⅲ・4　弾性棒要素

また、加速度ベクトル $\ddot{\bar{x}}_i$ は

$$\ddot{\bar{x}}_i = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i(\eta) \\ \ddot{y}_i(\eta) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i^L - \eta l_i \left\{ \ddot{\theta}_i^L \sin\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \cos\theta_i^L \right\} \\ \quad -\dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \left\{ \ddot{\theta}_i^R \sin\theta_i^R + \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 \cos\theta_i^R - \ddot{\theta}_i^L \sin\theta_i^L - \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \cos\theta_i^L \right\} \\ \ddot{y}_i^L + \eta l_i \left\{ \ddot{\theta}_i^L \cos\theta_i^L - \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \sin\theta_i^L \right\} \\ \quad +\dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \left\{ \ddot{\theta}_i^R \cos\theta_i^R - \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 \sin\theta_i^R - \ddot{\theta}_i^L \cos\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \sin\theta_i^L \right\} \end{Bmatrix}$$

幾何学的拘束を特徴づける2つの量は

$$\left[\dot{\bar{x}}_{i\bar{u}}\right] = \left[\ddot{\bar{x}}_{i\dot{\bar{u}}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \sin\theta_i^R & 1 & 0 & \left\{\dfrac{C}{2}(2\eta-1)-\eta\right\} l_i \sin\theta_i^L \\ 0 & 0 & \dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \cos\theta_i^R & 0 & 1 & \left\{-\dfrac{C}{2}(2\eta-1)+\eta\right\} l_i \cos\theta_i^L \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\bar{x}}_i\Big|_{\ddot{\bar{u}}=0} = \begin{bmatrix} -\eta l_i \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \cos\theta_i^L - \dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \left\{ \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 \cos\theta_i^R - \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \cos\theta_i^L \right\} \\ -\eta l_i \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \sin\theta_i^L - \dfrac{C}{2}(2\eta-1) l_i \left\{ \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 \sin\theta_i^R - \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 \sin\theta_i^L \right\} \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{m_i l_i^2 (\eta_0-1)^3}{3} & -\dfrac{m_i l_i (\eta_0-1)^2 \sin\theta_i^R}{2} & \dfrac{m_i l_i (\eta_0-1)^2 \cos\theta_i^R}{2} & \dfrac{m_i l_i^2 (\eta_0-1)^2 \eta_0 \cos(\theta_i^L-\theta_i^R)}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{m_i l_i (\eta_0-1)^2 \sin\theta_i^R}{2} & m_i & 0 & \dfrac{m_i l_i (\eta_0-2)\eta_0 \sin\theta_i^L}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{m_i l_i (\eta_0-1)^2 \cos\theta_i^R}{2} & 0 & m_i & -\dfrac{m_i l_i (\eta_0-2)\eta_0 \cos\theta_i^L}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{m_i l_i^2 (\eta_0-1)^2 \eta_0 \cos(\theta_i^L-\theta_i^R)}{2} & \dfrac{m_i l_i (\eta_0-2)\eta_0 \sin\theta_i^L}{2} & -\dfrac{m_i l_i (\eta_0-2)\eta_0 \cos\theta_i^L}{2} & -\dfrac{m_i l_i^2 (2\eta_0-3)\eta_0^2}{3} \end{bmatrix}$$

(Ⅲ・32)

$$\bar{G}_i = \bar{F}_i + \bar{Q}_i \qquad \text{(Ⅲ・33)}$$

ただし $\bar{F}_i, \bar{Q}_i$ は次のように表され、M_i^L, M_i^R および V_i^L, V_i^R はそれぞれ弾性棒要素両端に作用する曲げモーメントとせん断力である。

$$\overline{F}_i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} m_i l_i^2 (\dot{\theta}_i^L)^2 (\eta_0 - 1)^2 \eta_0 \sin(\theta_i^L - \theta_i^R) \\ -\frac{1}{2} m_i l_i \left\{ \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 ((\eta_0 - 2)\eta_0 \cos\theta_i^L - \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 (\eta_0 - 1)^2 \cos\theta_i^R \right\} \\ -\frac{1}{2} m_i l_i \left\{ \left(\dot{\theta}_i^L\right)^2 ((\eta_0 - 2)\eta_0 \sin\theta_i^L - \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 (\eta_0 - 1)^2 \sin\theta_i^R \right\} \\ -\frac{1}{2} m_i l_i^2 \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2 (\eta_0 - 1)^2 \eta_0 \sin(\theta_i^L - \theta_i^R) \end{array} \right\}$$

$$\overline{Q}_i = -\left\{ \begin{array}{c} V_i^R \sin\theta_i^L \\ -V_i^R \cos\theta_i^L \\ -M_i^R \\ -V_i^R \sin\theta_i^L \\ V_i^R \cos\theta_i^L \\ M_i^R + V_i^R l_i \left\{ \eta_0 + (1 - \eta_0) \cos\Delta\theta_i \right\} \end{array} \right\}$$

付録Ⅲ・9　構成要素の結合

(i) ローターと弾性棒要素

図Ⅲ・3に示すように、ローターの重心の一般化座標ベクトルと一般化速度ベクトルを

$$\overline{q}_1 = \left[\overline{x}_1\right] = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right\} \quad , \quad \overline{u}_1 = \overline{u}_1^c = \left[\dot{\overline{x}}_1\right] \qquad (Ⅲ・34)$$

とすれば、一般化加速度ベクトルは

$$\ddot{\overline{u}}_1 = \left\{\ddot{\overline{x}}_1\right\} = \mathbf{P}_1^u \dot{\overline{u}}_0 + \mathbf{P}_1^c \dot{\overline{u}}_1^c + \overline{p}_1^c \qquad (Ⅲ・35)$$

ただし、

$$\mathbf{P}_1^u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}_1^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \overline{p}_1^c = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

また、弾性棒要素の一般化座標ベクトルを

$$\overline{q}_i = \begin{Bmatrix} x_i^R \\ y_i^R \\ \theta_i^R \\ x_i^L \\ y_i^L \\ \theta_i^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + R\cos\theta_i^L + (1-\eta_0)l_i(\cos\theta_i^L + \cos\theta_i^R) \\ y_1 + R\sin\theta_i^L + (1-\eta_0)l_i(\sin\theta_i^L + \sin\theta_i^R) \\ \theta_i^L + \Delta\theta_i \\ x_1 + R\cos\theta_i^L \\ y_1 + R\sin\theta_i^L \\ \theta_i^L \end{Bmatrix} \qquad (i = 2,3,\ldots,N_B)$$

（Ⅲ・36）

拘束後の速度ベクトルを

$$\overline{u}_i^c = \left\{\Delta\dot{\overline{\theta}}_i\right\} \qquad (i = 2,3,\ldots,N_B)$$

とすると、弾性棒要素の一般化加速度ベクトルは

$$\dot{\overline{u}}_i = \left\{\ddot{x}_i^R, \ddot{y}_i^R, \ddot{\theta}_i^R, \ddot{x}_i^L, \ddot{y}_i^L, \ddot{\theta}_i^L\right\}^T = \mathbf{P}_i^u \dot{\overline{u}}_0 + \mathbf{P}_i^c \dot{\overline{u}}_i^c + \overline{p}_i^c \quad (i = 2,3,\ldots,N_B) \qquad (Ⅲ・37)$$

ただし、このとき $\theta_i^L = \omega t + \gamma_i$ で、

$$\mathbf{P}_i^u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_i^c = \begin{bmatrix} -(1-\eta_0)l_i\sin\theta_i^R \\ (1-\eta_0)l_i\cos\theta_i^R \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_i^c = \begin{Bmatrix} -R\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\cos\theta_i^L - (1-\eta_0)l_i\left\{\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\cos\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2\cos\theta_i^R\right\} \\ -R\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\sin\theta_i^L - (1-\eta_0)l_i\left\{\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\sin\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2\sin\theta_i^R\right\} \\ 0 \\ -R\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\cos\theta_i^L \\ -R\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\sin\theta_i^L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

（ii）弾性棒要素と弾性棒要素

（i）と同様にして図Ⅲ・4から弾性棒要素の一般化座標ベクトルを

$$\overline{q}_i = \begin{Bmatrix} x_i^R \\ y_i^R \\ \theta_i^R \\ x_i^L \\ y_i^L \\ \theta_i^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i + R\cos\theta_i^L + (1-\eta_0)l_i(\cos\theta_i^L + \cos\theta_i^R) \\ y_i + R\sin\theta_i^L + (1-\eta_0)l_i(\sin\theta_i^L + \sin\theta_i^R) \\ \theta_i^L + \Delta\theta_i \\ x_i + R\cos\theta_i^L \\ y_i + R\sin\theta_i^L \\ \theta_i^L \end{Bmatrix} \qquad (i = 2,3,\ldots,N_B)$$

（Ⅲ・38）

拘束後の速度ベクトルを

$$\overline{u}_i^c = \left\{\Delta\dot{\overline{\theta}}_i\right\} \qquad (i = 2,3,\ldots,N_B)$$

とすると、弾性棒要素の一般化加速度ベクトルは

$$\dot{\overline{u}}_i = \left\{\ddot{x}_i^R, \ddot{y}_i^R, \ddot{\theta}_i^R, \ddot{x}_i^L, \ddot{y}_i^L, \ddot{\theta}_i^L\right\}^T = \mathbf{P}_i^u \dot{\overline{u}}_0 + \mathbf{P}_i^c \dot{\overline{u}}_i^c + \overline{p}_i^c \qquad (i = 2,3,\ldots,N_B) \qquad \text{（Ⅲ・39）}$$

ただし、このとき $\theta_i^L = \omega t + \gamma_i$ で

$$\mathbf{P}_i^u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(1-\eta_0)l_i(\sin\theta_i^L + \sin\theta_i^R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1-\eta_0)l_i(\cos\theta_i^L + \cos\theta_i^R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_i^c = \begin{bmatrix} -(1-\eta_0)l_i\sin\theta_i^R \\ (1-\eta_0)l_i\cos\theta_i^R \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_i^c = \begin{Bmatrix} -(1-\eta_0)l_i\left\{\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\cos\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2\cos\theta_i^R\right\} \\ -(1-\eta_0)l_i\left\{\left(\dot{\theta}_i^L\right)^2\sin\theta_i^L + \left(\dot{\theta}_i^R\right)^2\sin\theta_i^R\right\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

付録Ⅳ　運動エネルギー式（4・1）の補正項

梁のたわみによる梁要素 dm のローター回転軸への接近効果を考慮したとき、dm の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i+\Delta\boldsymbol{r}_i$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i$ は

$$\boldsymbol{r}_i+\Delta\boldsymbol{r}_i=\left\{R+x_i-\frac{1}{2}\int_0^{x_i}(y_i')^2d\xi\right\}\mathbf{e}_{xi}+y_i\mathbf{e}_{yi} \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 1)$$

$$\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i-\left(\int_0^{x_i}y_i'\dot{y}_i'd\xi\right)\mathbf{e}_{xi}-\frac{1}{2}\left\{\int_0^{x_i}(y_i')^2d\xi\right\}\boldsymbol{\omega}_r\times\mathbf{e}_{xi} \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 2)$$

ここで

$$\mathbf{e}_{xi}=\cos\gamma_i\mathbf{e}_x+\sin\gamma_i\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_{yi}=-\sin\gamma_i\cos\delta_i\mathbf{e}_x+\cos\gamma_i\cos\delta_i\mathbf{e}_y+\sin\delta_i\mathbf{e}_z$$

を用いて3次以上の微小量を無視すれば、i 番目の梁の運動エネルギー T_i は次のようになる。

$$T_i=\frac{\rho A}{2}\int_0^l\left|\boldsymbol{v}_i+\Delta\boldsymbol{v}_i\right|^2dx_i=T_{i1}+T_{i2} \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 3)$$

ただし、

$$T_{i1}=\frac{\rho A}{2}\int_0^l{v_i}^2dx_i$$
$$\begin{aligned}T_{i2}&=-\frac{\rho A\omega^2}{2}\int_0^l\left\{(R+x_i)\int_0^{x_i}(y_i')^2d\xi\right\}dx_i\\&=-\frac{\rho A\omega^2}{4}\left\{\left[(R+x_i)^2\int_0^{x_i}(y_i')^2d\xi\right]_0^l-\int_0^l(R+x_i)^2(y_i')^2dx_i\right\}\\&=-\frac{\rho A\omega^2}{4}\left\{(R+l)^2\int_0^l(y_i')^2d\xi-\int_0^l(R+x_i)^2(y_i')^2dx_i\right\}\\&=-\frac{\rho A\omega^2}{4}\int_0^l(y_i')^2\left\{(R+l)^2-(R+x_i)^2\right\}dx_i\end{aligned}$$

T_{i1} は dm の接近効果を無視した運動エネルギー、T_{i2} は接近効果を考慮したその補正項である。

また、

$$T_{i2} = -\frac{1}{2}\int_0^l (y_i')^2 \left\{ \int_{x_i}^l \rho A \omega^2 (R+\xi) d\xi \right\} dx_i$$

と表されるから、この補正項の dx_i に関する被積分関数は梁の単位長さあたりの遠心力の仮想仕事から求めたものに等しい。

プログラムリスト

```
//-------------- Order N unit1.h ---------------------------------------------
#ifndef Unit1H
#define Unit1H

#include <stdio.h>
//---------------------------------------------------------------------------
#include <Classes.hpp>
#include <Controls.hpp>
#include <StdCtrls.hpp>
#include <Forms.hpp>
#include <Buttons.hpp>
#include <ExtCtrls.hpp>
//---------------------------------------------------------------------------
class TForm1 : public TForm
{
__published:        // IDE 管理のコンポーネント
    TButton *Button1;
    TBitBtn *BitBtn1;
    TMemo *Memo1;
    TImage *Image1;
    TButton *Button2;
    TEdit *Edit1;
    TLabel *Label1;
    TCheckBox *CheckBox1;
    TCheckBox *CheckBox2;
    void __fastcall Button1Click(TObject *Sender);
    void __fastcall Button2Click(TObject *Sender);
    void __fastcall CheckBox1Click(TObject *Sender);
    void __fastcall CheckBox2Click(TObject *Sender);
private: // ユーザー宣言
    void u1_main();
public:             // ユーザー宣言
    __fastcall TForm1(TComponent* Owner);
    void output(String st);
};
//---------------------------------------------------------------------------
extern PACKAGE TForm1 *Form1;

extern  void cls_memo();
extern  void mout(String str);
extern  void fout(char str[]);
```

```
extern  void graph_init(double tmin,double tmax,double td1,double td2,
              double ymin,double ymax,double yd1,double yd2);
extern  void graph_xy(double x0,double x1,double y0,double y1,int cl,
              double tmin,double tmax,double ymin,double ymax,double t);
//-------------------------------------------------------------------------
#endif
```

```
//---------------- Order_N unit1.cpp ------------------------------------------
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop

#include "Unit1.h"
#include "Unit2.h"

#include "matrix.h"
#include <math.h>
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
    : TForm(Owner)
{
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
    cls_memo();
    Edit1->Text="10";
    u1_main();
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{
int err;
u2_prg   test;

    err=test.u2_graphic();
    mout("");
    mout("u2_graphic():  err="+IntToStr(err));
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::CheckBox1Click(TObject *Sender)
{
    //初期値データ入力
}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::CheckBox2Click(TObject *Sender)
{
    //初期値ファイルを更新しない
```

```
}
//---------------------------------------------------------------------------

void TForm1::u1_main()
{
int err;
u2_prg   test;

    err=test.u2_main();
    mout("");
    mout("u2_main():  err="+IntToStr(err));
}

void TForm1::output(String st)
{
    Memo1->Lines->Add(st);
}

void cls_memo()
{
    Form1->Memo1->Lines->Clear();
}

void mout(String str)           // 広域関数
{
     Form1->output(str);
}

void fout(char str[])           // 広域関数
{
FILE *fp;

    if((fp=fopen("abc.txt","wt"))==NULL){
        return;
    }
    fprintf(fp,"%s¥n",str);
    fclose(fp);
}

void graph_init(double tmin,double tmax,double td1,double td2,
                        double ymin,double ymax,double yd1,double yd2)
{
int     i;
double  gx0,gx1,gy0,gyh;
double  gkx,gky;
```

```
double  gxgen,gygen;
double  gxd,gyd,gzxmin,gzxmax,gzymin,gzymax;

    gzxmin=tmin;
    gzxmax=tmax;

    gzymin=ymin;
    gzymax=ymax;

    gx0=60.0;      gx1=510.0;
    gy0=180.0;     gyh=150.0;
    gkx=(gx1/(gzxmax-gzxmin));
    gky=(2.0*gyh/(gzymax-gzymin));

    gxgen=gx0-gkx*gzxmin;
    gygen=gy0+gyh+gky*gzymin;


    Form1->Canvas->Brush->Color=clWhite;
    Form1->Canvas->Rectangle(gx0-50,gy0+gyh+110,gx0+gx1+20,gy0-gyh-20);
    Form1->Canvas->Pen->Style=psSolid;

    gxd=td1;
    for(i=0;i<=(gzxmax-gzxmin)/gxd;i++){
        Form1->Canvas->MoveTo(gx0+gkx*gxd*i,gygen);
        Form1->Canvas->LineTo(gx0+gkx*gxd*i,gygen-10);
        Form1->Canvas->Font->Size=9;
        Form1->Canvas->TextOut(gx0+gkx*gxd*i,gygen+5,
                            FloatToStr(gzxmin+gxd*i));
    }
    gxd=td2;
    for(i=1;i<=(gzxmax-gzxmin)/gxd;i++){
        Form1->Canvas->MoveTo(gx0+gkx*gxd*i,gygen);
        Form1->Canvas->LineTo(gx0+gkx*gxd*i,gygen-5);
    }

    Form1->Canvas->MoveTo(gx0,     gygen);
    Form1->Canvas->LineTo(gx0+gx1,gygen);

    gyd=yd1;
    for(i=0;i<=(gzymax-gzymin)/gyd;i++){
        Form1->Canvas->MoveTo(gxgen,gy0+gyh-gky*gyd*i);
        Form1->Canvas->LineTo(gxgen+10,gy0+gyh-gky*gyd*i);
        Form1->Canvas->Font->Size=9;
        Form1->Canvas->TextOut(gxgen-35,gy0+gyh-gky*gyd*i,
```

```
                            FloatToStr(gzymin+gyd*i));
    }

    gyd=yd2;
    for(i=0;i<=(gzymax-gzymin)/gyd;i++){
        Form1->Canvas->MoveTo(gxgen,gy0+gyh-gky*gyd*i);
        Form1->Canvas->LineTo(gxgen+5,gy0+gyh-gky*gyd*i);
/*
        Form1->Image1->Canvas->MoveTo(gxgen,gy0+gyh-gky*gyd*i);
        Form1->Image1->Canvas->LineTo(gxgen+5,gy0+gyh-gky*gyd*i);
*/
    }

    Form1->Canvas->MoveTo(gxgen,gy0+gyh);
    Form1->Canvas->LineTo(gxgen,gy0-gyh);
/*
    Form1->Image1->Canvas->MoveTo(gxgen,gy0+gyh);
    Form1->Image1->Canvas->LineTo(gxgen,gy0-gyh);
*/
}

void graph_xy(double x0,double x1,double y0,double y1,int cl,
                double tmin,double tmax,double ymin,double ymax,double t)
{
double   gx0,gx1,gy0,gyh;
double   gkx,gky;
double   gxgen,gygen;
double   gzxmin,gzxmax,gzymin,gzymax;

    gzxmin=tmin;
    gzxmax=tmax;

    gzymin=ymin;
    gzymax=ymax;

    gx0=60.0;        gx1=510.0;
    gy0=180.0;       gyh=150.0;
    gkx=( gx1/(gzxmax-gzxmin));
    gky=(2.0*gyh/(gzymax-gzymin));

    gxgen=gx0-gkx*gzxmin;
    gygen=gy0+gyh+gky*gzymin;

    Form1->Canvas->Pen->Color=cl;
    Form1->Canvas->MoveTo(gxgen+gkx*x0,gygen-gky*y0);
```

```
    Form1->Canvas->LineTo(gxgen+gkx*x1,gygen-gky*y1);
/*
    Form1->Image1->Canvas->Pen->Color=cl;
    Form1->Image1->Canvas->MoveTo(gxgen+gkx*x0,gygen-gky*y0);
    Form1->Image1->Canvas->LineTo(gxgen+gkx*x1,gygen-gky*y1);
*/
    Form1->Canvas->Font->Size=14;
    Form1->Canvas->TextOut(gxgen+80,gy0-gyh," t=          ");
    Form1->Canvas->TextOut(gxgen+100,gy0-gyh,FloatToStr(int(100000*t+0.5)/100000.0));

}
```

```
//---------------- Order_N unit2.h -------------------------------------------
#ifndef Unit2H
#define Unit2H
//---------------------------------------------------------------------------
class u2_prg
{
public:
    int u2_main();
    int u2_graphic();
};
//---------------------------------------------------------------------------
#endif
```

```
//---------------- Order_N unit2.cpp ------------------------------------------
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop

#include "Unit1.h"
#include "Unit2.h"
#include "matrix.h"

#include <math.h>
//---------------------------------------------------------------------------
// グローバル変数
//---------------------------------------------------------------------------
const   double   pai=3.14159265358979;  // π
const   double     g=9.80;                          // 重力[m/s^2]

const   double      aL=2.0;                         // 弾性棒の全長[m]
const   double     whz=3.7;                         // whz = 角速度 [Hz]

const   int       nbun=20;                          // 弾性棒の分割数

const   double    tmin=0;
const   double    tmax=30;
const   double    td1=5;
const   double    td2=1;

const   double kbai1=10;                          // ロータ変位の倍率
const   int      nmax=6000;                     // 時間の全分割数
const   double        dt=(tmax-tmin)/nmax;   // 出力間隔  ht>=dt

const   double    ymin=-1;
const   double    ymax= 1;
const   double    yd1=0.5;
const   double    yd2=0.1;

const   int       nb=4*nbun+1;       // システムの全個数(弾性棒4本の場合のみ可!!)

const   int       Lmax=nbun+1;
const   int       nb1=nb+1;          // システムの全個数+1
const   int       snc=2+1*(nb-1);     // 拘束条件の全個数 nc
const   double    Tsyuki0=0.362986;  //  回転させないときの弾性棒の周期

// ロータ
const   double    w=2*pai*whz;       // w = 角速度    [rad/s]
const   double    m1=0.756;          // ロータの質量 [kg]
const   double     R=0.04;           // ロータの半径 [m]
```

```
const   double   kx=104.0;          // ばね定数     [N/m]
const   double   ky=104.0;          // ばね定数     [N/m]
const   double   cc=2*sqrt(m1*kx);  // 臨界減衰係数
const   double   c1=0.01*cc;        // 粘性減衰係数

// 弾性棒
const   double  rouA=4.58*1000*pai*pow(0.002,2)/4;          // ρA
const   double  EIz=367.0*1000000*g*pai*pow(0.002,4)/64;    // 曲げ剛性[Nm^2]
const   double   ai=aL/nbun;                                // 分割弾性棒の長さ[m]
const   double   mi=rouA*ai;                                // 分割弾性棒の質量[kg]
const   double   ks=EIz/ai;
//const   double    ks=1*pow(1.875/nb,4)/12.0*EIz/ai;           // 分割弾性棒のばね定数
const   double   mu1=1.875/aL;
const   double   mu2=4.694/aL;
const   double   mu3=7.854/aL;
const   double    mu=mu1;
//--------------------------------------------------------------------------
double  etr(double dss);
void    rotor_h(mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i);
void    banebo_r(double thL,double dthL,double thR,double dthR,
                 mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i,double etr0);
void    banebo(double thL,double dthL,double thR,double dthR,
                 mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i,double etr0);
mat     fgc(double t,mat vqc,mat vuc);
double  heni(double x,double mu);
double  tawamikaku(double x,double mu);
double  cd(double vr,double D);
//--------------------------------------------------------------------------

void aux(double t,mat y,mat &f,int snc)
{
mat q(snc),u(snc),gc(snc);

    for(int i=0;i<snc;i++){
        q(i)=y(2*i);
        u(i)=y(2*i+1);
    }
    gc=fgc(t,q,u);
    for(int i=0;i<snc;i++){
            f(2*i)=u(i);
        f(2*i+1)=gc(i);
    }
}
```

```
/*   ルンゲ・クッタ法  */
/*                    (戸川隼人 「科学技術計算ハンドブック」 サイエンス社 1992, p503-505)  */
/*        進み幅調節付きの公式C          */

/*   ＲＫ５ＳＣ   */
int rk5sc(double *t,mat *q,mat *u,double tmax,double dt,int snc)
{
//       m;                  /* 階数 */
//       tmax;               /* 終点 */
//       dt;                 /* 表示間隔 */
//       t[NMAX];            /* 解のｘ値が入る */
//       y[NMAX][MM];        /* 解が入る */


/* 初期条件は t[0] と y[0][i] に入れて呼び出す */

char str[100];
    int     m=2*snc;
         int       step,i,k,kai,kq;
         double    a0,a1,a2,a3,a4;
         double    b10,b20,b21,b30,b31,b32;
         double    b40,b41,b42,b43;
         double    c0a,c1a,c2a,c3a,c4a;
         double    c0b,c1b,c2b,c3b,c4b;
         double    nextt,h,t0,ta,T,hq;
         mat       d0(m),d1(m),d2(m),d3(m),d4(m);
         mat       ya(m),yb(m),y0(m),sa(m),f(m);

         /*  係数の設定  */
         a1=0.08;  a2=0.45;  a3=0.989;  a4=1.000;
         b10=  0.08;
         b20=(-0.8526230049);
         b21=  1.3026230005;
         b30= 10.21993945;
         b31=(-12.51012764);
         b32=  3.279188184;
         b40=  11.42460231;
         b41=(-14.00569438);
         b42=  3.593644467;
         b43=(-0.01255238858);
         c0a=  0.0;
         c1a=  0.2141446734;
         c2a=  0.5017656464;
         c3a=  2.455981361;
         c4a=(-2.171891681);
```

```
        c0b=  0.02875145115;
        c1b=  0.1720268482;
        c2b=  0.5246602649;
        c3b=  2.220063891;
        c4b=(-1.945502455);

        /*  出発準備  */
        k=1;
        h=hq=(tmax-t[0])/nmax;
        t0=t[0];
        nextt=t0+dt;
        if ( t0+h*(1+0.001)>nextt ) h=nextt-t0;
        for ( i=0 ; i<snc ; ++i){
                y0(2*i)=q[0](i);
      y0(2*i+1)=u[0](i);
   }

//------------------- グラフィック初期化 ----------------------------------------
double tt1,tt0,Ax,Ax0,dss[nb1],dss0[nb1],yy[nb1],yy0[nb1];
double s,kbai;
double gyy,gyy0;
double etr0;

    cls_memo();
    kbai=StrToFloat(Form1->Edit1->Text);

    yy[0]=0.0; yy0[0]=0.0; dss[0]=0.0;

    tt1=t[0];
    Ax=q[0](0);
    s=0;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss[ii]=u[0](4*(ii-1)+2);
        etr0=etr(dss[ii]);

        s=s+dss[ii];
        yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));    // 2段リンク
    }

    tt0=tt1;
    Ax0=Ax;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss0[ii]=dss[ii];
        yy0[ii]=yy[ii];
    }
```

```
//------------------------------------------------------------------------
        /*  積分進行  */

        for ( step=0 ; k<=nmax ; ++step )
        {
                kai=0;
                again: ++kai;
                /*  第 0 段  */
                aux(t0,y0,f,snc);
                for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                {
                        d0(i)=h*f(i);
                        ya(i)=y0(i)+b10*d0(i);
                }
                /*  第 1 段  */
                ta=t0+a1*h;
                aux(ta,ya,f,snc);
                for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                {
                        d1(i)=h*f(i);
                        ya(i)=y0(i)+b20*d0(i)+b21*d1(i);
                }
                /*  第 2 段  */
                ta=t0+a2*h;
                aux(ta,ya,f,snc);
                for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                {
                        d2(i)=h*f(i);
                        ya(i)=y0(i)+b30*d0(i)+b31*d1(i)+b32*d2(i);
                }
                /*  第 3 段  */
                ta=t0+a3*h;
                aux(ta,ya,f,snc);
                for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                {
                        d3(i)=h*f(i);
                        ya(i)=y0(i)+b40*d0(i)+b41*d1(i)+b42*d2(i)+b43*d3(i);
                }
                /*  第 4 段  */
                ta=t0+a4*h;
                aux(ta,ya,f,snc);
                T=0.0;
                for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                {
                        d4(i)=h*f(i);
```

```
                                ya(i)=y0(i)+c1a*d1(i)+c2a*d2(i)+c3a*d3(i)+c4a*d4(i);
                                yb(i)=y0(i)+c0b*d0(i)+c1b*d1(i)+c2b*d2(i)+c3b*d3(i)+c4b*d4(i);
                                sa(i)=fabs(ya(i)-yb(i));
                                if ( sa(i)>T ) T=sa(i);
                        }
                        /*  中間出力（観察用）*/
/*
                        if ( (step%10)==0 ){
                sprintf(str,"k=%5d t=%8.5lf h=%15.12lf T=%15.12lf",step,t0,h,T);
                mout(str);
        }
*/
                        /*  再計算の必要性のチェック  */

        //if ( T>0.000001 && kai<8 )
                        if ( T>0.000001 && kai<8 )
                        {
                                h*=0.5;
                                goto again;
                        }
                        /*  ステップを進める  */

                        t0+=h;
                        for ( i=0 ; i<m ; ++i )
                                y0(i)=yb(i);
                        /*  出力配列への書き込み  */
                        if ( t0>=nextt-h*0.01 )
                        {
                            t[k]=t0;
                            for ( i=0 ; i<snc ; ++i){
                                    q[k](i)=y0(2*i);
                  u[k](i)=y0(2*i+1);
                }
                  cls_memo();
                  sprintf(str," whz=%6.2lf   aL=%5.2lf",whz,aL); mout(str);
                  sprintf(str,"nbun=%6d       t=%8.3lf  ",nbun,t0); mout(str);
                  sprintf(str,"x[%2d]=%8.5lf",0,y0(0)); mout(str);
                  sprintf(str,"y[%2d]=%8.5lf",4*nbun-2,y0(2*(4*nbun-2))); mout(str);
                  sprintf(str,"k=%5d",k); mout(str);
                  sprintf(str,"T=%15.10lf",T); mout(str);
                  sprintf(str,"h=%15.10lf",h); mout(str);

                //---------------------グラフィック--------------------------------
                  tt1=t0;
                  Ax=q[k](0);
```

```
    s=0;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss[ii]=q[k](4*(ii-1)+2);
        etr0=etr(dss[ii]);

        s=s+dss[ii];
        yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));
    }

    gyy=kbai1*Ax;   gyy0=kbai1*Ax0;
    graph_xy(tt0,tt1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,tt1);

    gyy=yy[nbun];   gyy0=yy0[nbun];
    graph_xy(tt0,tt1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clTeal,tmin,tmax,ymin,ymax,tt1);

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                ,kbai*yy0[ii-1]+ymin,kbai*yy0[ii]+ymin
                ,clWhite,tmin,tmax,ymin,ymax,tt1);
    }

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                ,kbai*yy[ii-1]+ymin,kbai*yy[ii]+ymin
                ,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,tt1);
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii,0+ymin,0+ymin
                ,clBlack,tmin,tmax,ymin,ymax,tt1);
    }

    tt0=tt1;
    Ax0=Ax;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss0[ii]=dss[ii];
        yy0[ii]=yy[ii];
    }
//---------------------------------------------------------------
            nexttt+=dt;
            ++k;
        }
        /*  終了判定  */
        if ( t0>=tmax ) return 0;
        /*  進み幅調節  */
        if ( kq==k )
//h*=pow(1.0e-8/(T+1.0e-12),0.2);
h*=pow(1.0e-8/(T+1.0e-12),0.2);
```

```
                    else
                            h=hq;
                    if ( t0+h>nextt )
                    {
                            hq=h;
                            h=nextt-t0;
                    }
                    kq=k;
//          step=k;
            }
    return 1;
}
//-----------------------------------------------------------------------------
int u2_prg::u2_main()
{
FILE *fp,*fp1;
char fname[20],fname1[20],str[100];

int     k,n,err;
double  t[nmax+1];
mat     vqc[nmax+1];for(int i=0;i<=nmax;i++)  vqc[i]=mat(snc);
mat     vuc[nmax+1];for(int i=0;i<=nmax;i++)  vqc[i]=mat(snc);

// --------------グラフィック初期化---------------------------------------------

    graph_init(tmin,tmax,td1,td2,ymin,ymax,yd1,yd2);
                                        // TForm1 のTがないことに注意
//-----------------  出力条件  ------------------------------------------------

    for(int i=0;i<=nmax;i++) vqc[i]=mat(snc); // vqc の次元=nc
    for(int i=0;i<=nmax;i++) vuc[i]=mat(snc); // vuc の次元=nc
//--------------------  初期値  -----------------------------------------------
          t[0]=tmin;

    if(Form1->CheckBox1->Checked==false){
        for(int i=0;i<snc;i++){
            vqc[0](i)=0;
            vuc[0](i)=0;
        }
        vqc[0](0)=0.001;        // ロータ振幅  A0=0.001 [m]
    }

    //--------------ファイルからの初期値データ読込み---------------------------
    if(Form1->CheckBox1->Checked==true){
        int kosu,nbun0;
```

```
 sprintf(fname1,"shokiti.txt");
 if((fp1=fopen(fname1,"rt"))==NULL){
     return 1;
 }

 fscanf(fp1,"%d¥n",&kosu);
 nbun0=(kosu-2)/4;          // m は初期値ファイルの分割数,分母の 4 は梁 4 つの意

 for(int i=0;i<2;i++){
     fscanf(fp1,"%lf %lf¥n",&vqc[0](i),&vuc[0](i));
 }

 double  pyq,pyu,ny,x[21],z[21],yq[4][21],yu[4][21];          // 4 は梁 4 つの意

 for(int i=2;i<kosu;i++){
     int m,n;

     m=(i-2) % 4;                                       // 4 は梁 4 つの意
     n=(i-2)/4+1;                                       // 4 は梁 4 つの意
     fscanf(fp1,"%lf %lf¥n",&yq[m][n],&yu[m][n]);
 }
 fclose(fp1);

if(Form1->CheckBox2->Checked==true){
 //----- 初期値データのバックアップ(shokiti_bak.txt)------------------------
 sprintf(fname1,"shokiti_bak.txt");
 if((fp1=fopen(fname1,"wt"))==NULL){
     return 1;
 }
 fprintf(fp1,"%d¥n",kosu);
 nbun0=(kosu-2)/4;          // m は初期値ファイルの分割数,分母の 4 は梁 4 つの意

 for(int i=0;i<2;i++){
     fprintf(fp1,"%lf %lf¥n",vqc[0](i),vuc[0](i));
 }

 for(int i=2;i<kosu;i++){
     int m,n;

     m=(i-2) % 4;                                       // 4 は梁 4 つの意
     n=(i-2)/4+1;                                       // 4 は梁 4 つの意
     fprintf(fp1,"%lf %lf¥n",yq[m][n],yu[m][n]);
 }
 fclose(fp1);
```

```
        //-----------------------------------------------------------------
      }
        x[0]=0;
        for(int m=0;m<4;m++){yq[m][0]=0; yu[m][0]=0;}

        for(int i=1;i<=nbun0;i++){
            x[i]=(double)i/(double)nbun0;
        }
        for(int i=1;i<=nbun;i++){
            z[i]=(double)i/(double)nbun;
        }

        for(int m=0;m<4;m++){
            for(int n=1;n<=nbun;n++){
                pyq=0; pyu=0;
                for(int i=0;i<=nbun0;i++){
                    ny=1;
                    for(int j=0;j<=nbun0;j++){
                        if(i != j){
                            ny=ny*(z[n]-x[j])/(x[i]-x[j]);
                        }
                    }
                    pyq=pyq+yq[m][i]*ny;
                    pyu=pyu+yu[m][i]*ny;
                }
                vqc[0](4*n-2+m)=pyq;
                vuc[0](4*n-2+m)=pyu;
            }
        }
//          vqc[0](0)=vqc[0](0)+0.001;    // 定常状態から A0=0.001[m]の外乱を与える
    }
//-----------------------------------------------------------------------

    if(nmax<(tmax-tmin)/dt-1){
        mout("rk5sc:  nmax<(tmax-tmin)/dt-1");
        return 1;
    }

        err=rk5sc(t,vqc,vuc,tmax,dt,snc);

    sprintf(str,"rk5sc: err=%d",err); mout(str);
    mout("");

        n=(tmax-tmin)/dt+0.001;
```

```
//-------------- データ書込み------------------------------------------------

    sprintf(fname,"aL%dw%dt%d.txt",int(100*aL),int(100*whz),int(tmax));

    if((fp=fopen(fname,"wt"))==NULL){
        return 1;
    }
          for ( k=0 ; k<=n ; k++){
        fprintf(fp,"%lf ",t[k]);
        for(int i=0;i<snc;i++){
            fprintf(fp,"%lf ",vqc[k](i));
        }
        fprintf(fp,"¥n");
    }
    fclose(fp);
    if(Form1->CheckBox2->Checked==true){
        //----- 再計算用に初期値データとしての書込み---------------------------
        sprintf(fname1,"shokiti.txt");
        if((fp1=fopen(fname1,"wt"))==NULL){
            return 1;
        }
        fprintf(fp1,"%d¥n",snc);
        for(int i=0;i<snc;i++){
            fprintf(fp1,"%lf %lf¥n",vqc[nmax](i),vuc[nmax](i));
        }
        fclose(fp1);
        //-------------------------------------------------------------
    }
//-------------- グラフィック -----------------------------------------------

double  gyy,gyy0,Ax,Ax0,s;
double   yy[nb1];
double  yy0[nb1];
double  dss[nb1];
double.dss0[nb1];

double t0,t1,kbai;
double etr0;

      cls_memo();

      kbai=StrToFloat(Form1->Edit1->Text);

      graph_init(tmin,tmax,td1,td2,ymin,ymax,yd1,yd2);
                                          // TForm1 のTがないことに注意
```

```
yy[0]=0.0; yy0[0]=0.0; dss[0]=0.0;

t1=t[0];
Ax=vqc[0](0);
s=0;
for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
    dss[ii]=vqc[0](4*(ii-1)+2);
    etr0=etr(dss[ii]);

    s=s+dss[ii];
    yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));
}

t0=t1;
Ax0=Ax;
for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
    dss0[ii]=dss[ii];
    yy0[ii]=yy[ii];
}

     for ( k=0 ; k<=n ; k++ ){
    t1=t[k];
    Ax=vqc[k](0);
    s=0;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss[ii]=vqc[k](4*(ii-1)+2);
        s=s+dss[ii];
        yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));
    }

    gyy=kbai1*Ax;  gyy0=kbai1*Ax0;
    graph_xy(t0,t1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);

    gyy=yy[nbun];  gyy0=yy0[nbun];
    graph_xy(t0,t1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clTeal,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                        ,kbai*yy0[ii-1]+ymin,kbai*yy0[ii]+ymin
                        ,clWhite,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
    }

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                        ,kbai*yy[ii-1]+ymin,kbai*yy[ii]+ymin
```

```
                        ,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
            graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii,0+ymin,0+ymin
                        ,clBlack,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
        }

        t0=t1;
        Ax0=Ax;
        for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
            dss0[ii]=dss[ii];
             yy0[ii]=yy[ii];
        }
    }

    return 0;
}

//-------------------------------------------------------------------------
mat fgc(double t,mat vqc,mat vuc)
{
int    in[nb1];
int   niL[nb1];
int niout[nb1];

int    nu[nb1];
int    nc[nb1];
int   snu[nb1];
int   snc[nb1];
int     **iL=new int*[Lmax+1];

//-------------- 弾性棒 4 本の場合のみ可!! -------------------------------------
    in[1]=0;

    for(int i=2;i<=nb;i++){
        if(i<=5)
            in[i]=1;
        else
            in[i]=i-4;
    }

    niL[1]=1; iL[1]=new int[niL[1]];
    iL[1][0]=1;
    niout[1]=4;

    for(int i=2;i<=Lmax;i++){
        niL[i]=4; iL[i]=new int[niL[i]];
```

```
        for(int j=0;j<niL[i];j++){
            iL[i][j]=2*(2*i-3)+j;
            if(i<Lmax)
                niout[2*(2*i-3)+j]=1;
            else
                niout[2*(2*i-3)+j]=0;   // 末端 i=Lmax
        }
    }
//------------------------------------------------------------------------

    nu[1]=nu[0]=2;   nc[1]=nc[0]=2;     // 変数の数 nu[i], 拘束変数の数 nc[i]

    for(int i=2;i<=nb;i++){
        nu[i]=6;   nc[i]=1;
    }

    snu[0]=0;   snc[0]=0;
    for(int i=1;i<=nb;i++){
        snu[i]=0;   snc[i]=0;
        for(int j=1;j<=i;j++){
            snu[i]=snu[i]+nu[j];
            snc[i]=snc[i]+nc[j];
        }
    }

// ------------------------------------------------------------------------
double mir,vir,s;
double etr0;

double  dss[nb1];
double  uss[nb1];
double  thL[nb1];
double dthL[nb1];
double  thR[nb1];
double dthR[nb1];

mat   m0[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   m0[i]=mat(nu[i],nu[i]);
mat   pu[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   pu[i]=mat(nu[i],nu[i]);
mat   pc[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   pc[i]=mat(nu[i],nc[i]);
mat  vpc[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)  vpc[i]=mat(nu[i]);
mat   vg[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   vg[i]=mat(nu[i]);


// <ロータの計算>
```

```
double xx0,yy0,dxx0,dyy0;

    xx0=vqc(0);     dxx0=vuc(0);
    yy0=vqc(1);     dyy0=vuc(1);

    rotor_h(m0[1],pu[1],pc[1],vpc[1]);

    vg[1](0)=-kx*xx0-c1*dxx0;
    vg[1](1)=-ky*yy0-c1*dyy0;

// <弾性棒の計算>

double rouair,cD1,cD2,D,dxL[60],dyL[60],dxR[60],dyR[60];
double vr1x,vr1y,vr2x,vr2y,dd1x,dd1y,dd2x,dd2y;
double vr1,vr2,fair1,fair2,ddxd1,ddxd2,qair[6],qair1[6],qair2[6];

        rouair=1.184; D=0.002;

    for(int i=2;i<=nb;i++){

        dss[i]=vqc(i);  uss[i]=vuc(i);

        if(i<=5){
            etr0=etr(dss[i]);
            thL[i]=w*t+2*pai*(i-2)/4;  dthL[i]=w;
            dxL[i]=-R*dthL[i]*sin(thL[i]);
            dyL[i]= R*dthL[i]*cos(thL[i]);

            thR[i]=thL[i]+dss[i]    ;  dthR[i]=dthL[i]+uss[i];
            dxR[i]=dxL[i]-ai*dthL[i]*sin(thL[i])
                    +(1-etr0)*ai*(dthL[i]*sin(thL[i])-dthR[i]*sin(thR[i]));
            dyR[i]=dyL[i]+ai*dthL[i]*cos(thL[i])
                    +(1-etr0)*ai*(-dthL[i]*cos(thL[i])+dthR[i]*cos(thR[i]));

            banebo_r(thL[i],dthL[i],thR[i],dthR[i],m0[i],pu[i],pc[i],vpc[i],etr0);
        }
        else{
            etr0=etr(dss[i]);
            thL[i]=thR[i-4];            dthL[i]=dthR[i-4];
            dxL[i]=dxR[i-4];
            dyL[i]=dyR[i-4];

            thR[i]=thL[i]+dss[i]    ;  dthR[i]=dthL[i]+uss[i];
            dxR[i]=dxL[i]-ai*dthL[i]*sin(thL[i])
                    +(1-etr0)*ai*(dthL[i]*sin(thL[i])-dthR[i]*sin(thR[i]));
```

```
    dyR[i]=dyL[i]+ai*dthL[i]*cos(thL[i])
            +(1-etr0)*ai*(-dthL[i]*cos(thL[i])+dthR[i]*cos(thR[i]));

    banebo(thL[i],dthL[i],thR[i],dthR[i],m0[i],pu[i],pc[i],vpc[i],etr0);
}


vr1x=dxL[i]-ai/4*dthL[i]*sin(thL[i]);
vr1y=dyL[i]+ai/4*dthL[i]*cos(thL[i]);

vr2x=dxL[i]-ai/4*(2*dthL[i]*sin(thL[i])+dthR[i]*sin(thR[i]));
vr2y=dyL[i]+ai/4*(2*dthL[i]*cos(thL[i])+dthR[i]*cos(thR[i]));

vr1=sqrt(vr1x*vr1x+vr1y*vr1y);  cD1=cd(vr1,D);
vr2=sqrt(vr2x*vr2x+vr2y*vr2y);  cD2=cd(vr2,D);

dd1x=ai/2*cos(thL[i]);
dd1y=ai/2*sin(thL[i]);

dd2x=ai/2*cos(thR[i]);
dd2y=ai/2*sin(thR[i]);


fair1=-rouair*cD1*D
      *sqrt((vr1*ai)*(vr1*ai)/4-(dd1x*vr1x+dd1y*vr1y)*(dd1x*vr1x+dd1y*vr1y));
fair2=-rouair*cD2*D
      *sqrt((vr2*ai)*(vr2*ai)/4-(dd2x*vr2x+dd2y*vr2y)*(dd2x*vr2x+dd2y*vr2y));

qair1[0]=0;
qair1[1]=0;
qair1[2]=0;
qair1[3]=vr1x/2;
qair1[4]=vr1y/2;
qair1[5]=ai/8*(cos(thL[i])*vr1y-sin(thL[i])*vr1x);

qair2[0]=0;
qair2[1]=0;
qair2[2]=ai/8*(cos(thR[i])*vr2y-sin(thR[i])*vr2x);
qair2[3]=vr2x/2;
qair2[4]=vr2y/2;
qair2[5]=ai/4*(cos(thL[i])*vr2y-sin(thL[i])*vr2x);

qair[0]=fair1*qair1[0]+fair2*qair2[0];
qair[1]=fair1*qair1[1]+fair2*qair2[1];
qair[2]=fair1*qair1[2]+fair2*qair2[2];
```

```
        qair[3]=fair1*qair1[3]+fair2*qair2[3];
        qair[4]=fair1*qair1[4]+fair2*qair2[4];
        qair[5]=fair1*qair1[5]+fair2*qair2[5];

        mir=ks*(-6*(1-etr0)*sin(dss[i])+4*dss[i]);
        vir=0*6*ks/ai*(2*(1-etr0)*sin(dss[i])-dss[i]);

        vg[i](0)=vir*sin(thL[i])+qair[0];
        vg[i](1)=-vir*cos(thL[i])+qair[1];
        vg[i](2)=-mir-0.05*mi*uss[i]+qair[2]
                -mi*ai*ai*dthL[i]*dthL[i]*sin(thR[i]-thL[i])*etr0*pow(etr0-1,2)/2;
        vg[i](3)=-vir*sin(thL[i])+qair[3]
                +mi*ai*(etr0*(etr0-2)*dthL[i]*dthL[i]*cos(thL[i])
                        -pow(etr0-1,2)*dthR[i]*dthR[i]*cos(thR[i]))/2;
        vg[i](4)=vir*cos(thL[i])+qair[4]
                +mi*ai*(etr0*(etr0-2)*dthL[i]*dthL[i]*sin(thL[i])
                        -pow(etr0-1,2)*dthR[i]*dthR[i]*sin(thR[i]))/2;
        vg[i](5)=mir+qair[5]
                +vir*ai*(etr0+(1-etr0)*cos(dss[i]))
                +mi*ai*ai*dthR[i]*dthR[i]*sin(thR[i]-thL[i])*etr0*pow(etr0-1,2)/2;
    }
// ---------------------------------------------------------------------------

mat  vgc[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)  vgc[i]=mat(nc[i]);
mat vdu0[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++) vdu0[i]=mat(nu[i]);

mat  uuc[nb1][nb1];    // uuc[i][j](nu[i],nc[j])

    for(int i=0;i<=nb;i++){
        for(int j=0;j<=nb;j++){
            uuc[i][j]=mat(nu[i],nc[j]);
        }
    }

    for(int l1=1;l1<=Lmax;l1++){
        for(int i0=0;i0<niL[l1];i0++){

            mat vgtmp(6);
            int i,j;

            i=iL[l1][i0];
            vdu0[i]=pu[i]*vdu0[in[i]]+vpc[i];

            vgtmp=vg[i]-m0[i]*vdu0[i];
```

```
            for(int l2=1;l2<=l1;l2++){
                for(int j0=0;j0<niL[l2];j0++){
                    j=iL[l2][j0];

                    if(j==i){
                        uuc[i][j]=pc[i];
                    }
                    else{
                        uuc[i][j]=pu[i]*uuc[in[i]][j];
                    }

                    vgc[j]=vgc[j]+trn(uuc[i][j])*vgtmp;
                }
            }
        }
    }

mat inv_md[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++) inv_md[i]=mat(nu[i],nu[i]);
mat     ec[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     ec[i]=mat(nc[i],nu[i]);
mat   d_md[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   d_md[i]=mat(nu[i],nu[i]);
mat     md[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     md[i]=mat(nu[i],nu[i]);


mat     vb[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     vb[i]=mat(nc[i]);
mat     vd[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     vd[i]=mat(nu[i]);
mat   vduc[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)   vduc[i]=mat(nc[i]);

mat mcb(1,1);
mat mtmp(6,6);
mat mcba(1,6);
mat d_mca(6,6);

    for(int i=0;i<=nb;i++){
        md[i]=m0[i];
    }

    for(int l=Lmax;l>=1;l--){
        for(int i0=0;i0<niL[l];i0++){

            int i;

            i=iL[l][i0];

            mcb=trn(pc[i])*md[i]*pc[i];
```

```
            if(l != 1){
                mtmp=md[i]*pu[i];
                d_mca=trn(pu[i])*mtmp;
                mcba=trn(pc[i])*mtmp;
                ec[i]=inv(mcb)*mcba;
                d_md[in[i]]=d_mca-trn(mcba)*ec[i];
                md[in[i]]=md[in[i]]+d_md[in[i]];
            }

            md[i]=mcb;                  // md[i]の次元が(nc,nc)に変化!!
            inv_md[i]=inv(md[i]);

            if(niout[i] == 0){
                vb[i]=vgc[i];
            }
            else{
                vb[i]=vgc[i]-trn(pc[i])*vd[i];
            }

            if(niout[i] == 0){
                vd[in[i]]=vd[in[i]]+trn(ec[i])*vb[i];
            }
            else if (l != 1){
                vd[in[i]]=vd[in[i]]+trn(ec[i])*vb[i]+trn(pu[i])*vd[i];
            }
        }
    }

mat     va[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     va[i]=mat(nc[i]);
mat     vc[nb1]; for(int i=0;i<=nb;i++)     vc[i]=mat(nu[i]);

    for(int i=1;i<=nb;i++){
        va[i]=inv_md[i]*vb[i];
    }

    for(int i0=0;i0<niL[1];i0++){

        int i;
        i=iL[1][i0];

        vduc[i]=va[i];
        vc[i]=pc[i]*va[i];
    }
    for(int l=2;l<=Lmax;l++){
        for(int i0=0;i0<niL[l];i0++){
```

```
            int i;

            i=iL[l][i0];

            vduc[i]=va[i]-ec[i]*vc[in[i]];
            vc[i]=pu[i]*vc[in[i]]+pc[i]*vduc[i];
        }
    }

 mat vduct(snc[nb]);                          // vduct[nc], nc=1*nb

    for(int i=1;i<=nb;i++){
        sonyu(vduct,snc[i-1],vduc[i]);
    }

    for(int i=1;i<=Lmax;i++)
        delete[] iL[i];
    delete []   iL;

    return(vduct);
}
//--------------------------------------------------------------------------
double heni(double x,double mu)
{
double y;

    y=cosh(mu*x)-cos(mu*x)
        -(sinh(mu*x)-sin(mu*x))*(cosh(mu*aL)+cos(mu*aL))/(sinh(mu*aL)+sin(mu*aL));
    return(y);
}

double tawamikaku(double x,double mu)
{
double y;

    y=mu*(sinh(mu*x)+sin(mu*x))
        -mu*(cosh(mu*x)-cos(mu*x))*(cosh(mu*aL)+cos(mu*aL))/(sinh(mu*aL)+sin(mu*aL));
    return(y);
}
//--------------------------------------------------------------------------
double etr(double dss)
{
double x,a;
```

```
    a=0.5;
    if (dss ==0) x=1-a; else x=1-a*(dss/sin(dss));

    return(x);
}
//------------------------------------------------------------------------
double  cd(double vr,double D)
{
double Re,nyu,cD;

    nyu=0.00000149;          //  動粘性係数
    Re=vr*D/nyu;

    if(Re<4)                   cD=4*pow(0.25*Re,-0.735);
    if(Re>=4 && Re<1000)       cD=4*pow(0.25*Re,-0.218);
    if(Re>=1000 && Re<400000)  cD=1.2;
    if(Re>=400000)             cD=0.34;

    cD=0;
    return(cD);
}
//------------------------------------------------------------------------

void rotor_h(mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i)
{
    m0_i=mat(2,2);
    m0_i(0,0)=m1;    m0_i(0,1)=0.0;
    m0_i(1,0)=0.0;   m0_i(1,1)=m1;

    pu_i=mat(2,2);
    pu_i(0,0)=0.0;   pu_i(0,1)=0.0;
    pu_i(1,0)=0.0;   pu_i(1,1)=0.0;



    pc_i=mat(2,2);
    pc_i(0,0)=1.0;   pc_i(0,1)=0.0;
    pc_i(1,0)=0.0;   pc_i(1,1)=1.0;

    vpc_i=mat(2);
    vpc_i(0)=0.0;
    vpc_i(1)=0.0;

 }
//------------------------------------------------------------------------
void banebo_r(double thL,double dthL,double thR,double dthR,
```

```
                              mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i,double etr0)
{
    m0_i=mat(6,6);
    m0_i(0,0)=0;                m0_i(0,1)=0;
    m0_i(1,0)=0;                m0_i(1,1)=0;
    m0_i(2,0)=0;                m0_i(2,1)=0;
    m0_i(3,0)=0;                m0_i(3,1)=0;
    m0_i(4,0)=0;                m0_i(4,1)=0;
    m0_i(5,0)=0;                m0_i(5,1)=0;

    m0_i(0,2)=0;
    m0_i(1,2)=0;
    m0_i(2,2)=-mi*ai*ai*pow(etr0-1,3)/3;
    m0_i(3,2)=-mi*ai*sin(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(4,2)= mi*ai*cos(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(5,2)= mi*ai*ai*cos(thR-thL)*etr0*pow(etr0-1,2)/2;

    m0_i(0,3)=0;                                  m0_i(0,4)=0;
    m0_i(1,3)=0;                                  m0_i(1,4)=0;
    m0_i(2,3)=-mi*ai*sin(thR)*pow(etr0-1,2)/2;  m0_i(2,4)=mi*ai*cos(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(3,3)=mi;                                 m0_i(3,4)=0;
    m0_i(4,3)=0;                                  m0_i(4,4)=mi;
    m0_i(5,3)=mi*ai*sin(thL)*etr0*(etr0-2)/2;   m0_i(5,4)=-mi*ai*cos(thL)*etr0*(etr0-2)/2;

    m0_i(0,5)=0;
    m0_i(1,5)=0;
    m0_i(2,5)=mi*ai*ai*cos(thR-thL)*etr0*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(3,5)=mi*ai*sin(thL)*etr0*(etr0-2)/2;
    m0_i(4,5)=-mi*ai*cos(thL)*etr0*(etr0-2)/2;
    m0_i(5,5)=mi*ai*ai*(3-2*etr0)*pow(etr0,2)/3;

    pu_i=mat(6,2);
    pu_i(0,0)=1; pu_i(0,1)=0;
    pu_i(1,0)=0; pu_i(1,1)=1;
    pu_i(2,0)=0; pu_i(2,1)=0;
    pu_i(3,0)=1; pu_i(3,1)=0;
    pu_i(4,0)=0; pu_i(4,1)=1;
    pu_i(5,0)=0; pu_i(5,1)=0;

    pc_i=mat(6);
    pc_i(0)=-ai*sin(thR)*(1-etr0);
    pc_i(1)= ai*cos(thR)*(1-etr0);
    pc_i(2)=1;
    pc_i(3)=0;
    pc_i(4)=0;
```

```
    pc_i(5)=0;

    pc_i=mat(6);
    pc_i(0)=-ai*sin(thR)*(1-etr0);
    pc_i(1)= ai*cos(thR)*(1-etr0);
    pc_i(2)=1;
    pc_i(3)=0;
    pc_i(4)=0;
    pc_i(5)=0;

    vpc_i=mat(6);
    vpc_i(0)=-ai*(dthL*dthL*cos(thL)+dthR*dthR*cos(thR))*(1-etr0)-R*dthL*dthL*cos(thL);
    vpc_i(1)=-ai*(dthL*dthL*sin(thL)+dthR*dthR*sin(thR))*(1-etr0)-R*dthL*dthL*sin(thL);;
    vpc_i(2)=0;
    vpc_i(3)=-R*dthL*dthL*cos(thL);
    vpc_i(4)=-R*dthL*dthL*sin(thL);
    vpc_i(5)=0;
}
//----------------------------------------------------------------------------
void banebo(double thL,double dthL,double thR,double dthR,
                             mat &m0_i,mat &pu_i,mat &pc_i,mat &vpc_i,double etr0)
{
    m0_i=mat(6,6);
    m0_i(0,0)=0;                    m0_i(0,1)=0;
    m0_i(1,0)=0;                    m0_i(1,1)=0;
    m0_i(2,0)=0;                    m0_i(2,1)=0;
    m0_i(3,0)=0;                    m0_i(3,1)=0;
    m0_i(4,0)=0;                    m0_i(4,1)=0;
    m0_i(5,0)=0;                    m0_i(5,1)=0;

    m0_i(0,2)=0;
    m0_i(1,2)=0;
    m0_i(2,2)=-mi*ai*ai*pow(etr0-1,3)/3;
    m0_i(3,2)=-mi*ai*sin(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(4,2)= mi*ai*cos(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(5,2)= mi*ai*ai*cos(thR-thL)*etr0*pow(etr0-1,2)/2;

    m0_i(0,3)=0;                                m0_i(0,4)=0;
    m0_i(1,3)=0;                                m0_i(1,4)=0;
    m0_i(2,3)=-mi*ai*sin(thR)*pow(etr0-1,2)/2;  m0_i(2,4)=mi*ai*cos(thR)*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(3,3)=mi;                               m0_i(3,4)=0;
    m0_i(4,3)=0;                                m0_i(4,4)=mi;
    m0_i(5,3)=mi*ai*sin(thL)*etr0*(etr0-2)/2;   m0_i(5,4)=-mi*ai*cos(thL)*etr0*(etr0-2)/2;

    m0_i(0,5)=0;
```

```
    m0_i(1,5)=0;
    m0_i(2,5)=mi*ai*ai*cos(thR-thL)*etr0*pow(etr0-1,2)/2;
    m0_i(3,5)=mi*ai*sin(thL)*etr0*(etr0-2)/2;
    m0_i(4,5)=-mi*ai*cos(thL)*etr0*(etr0-2)/2;
    m0_i(5,5)=mi*ai*ai*(3-2*etr0)*pow(etr0,2)/3;

    pu_i=mat(6,6);
    pu_i(0,0)=1; pu_i(0,1)=0; pu_i(0,2)=-ai*(sin(thL)+sin(thR))*(1-etr0);
    pu_i(1,0)=0; pu_i(1,1)=1; pu_i(1,2)= ai*(cos(thL)+cos(thR))*(1-etr0);
    pu_i(2,0)=0; pu_i(2,1)=0; pu_i(2,2)=1;
    pu_i(3,0)=1; pu_i(3,1)=0; pu_i(3,2)=0;
    pu_i(4,0)=0; pu_i(4,1)=1; pu_i(4,2)=0;
    pu_i(5,0)=0; pu_i(5,1)=0; pu_i(5,2)=1;

    pu_i(0,3)=0; pu_i(0,4)=0; pu_i(0,5)=0;
    pu_i(1,3)=0; pu_i(1,4)=0; pu_i(1,5)=0;
    pu_i(2,3)=0; pu_i(2,4)=0; pu_i(2,5)=0;
    pu_i(3,3)=0; pu_i(3,4)=0; pu_i(3,5)=0;
    pu_i(4,3)=0; pu_i(4,4)=0; pu_i(4,5)=0;
    pu_i(5,3)=0; pu_i(5,4)=0; pu_i(5,5)=0;

    pc_i=mat(6);
    pc_i(0)=-ai*sin(thR)*(1-etr0);
    pc_i(1)= ai*cos(thR)*(1-etr0);
    pc_i(2)=1;
    pc_i(3)=0;
    pc_i(4)=0;
    pc_i(5)=0;

    vpc_i=mat(6);
    vpc_i(0)=-ai*(dthL*dthL*cos(thL)+dthR*dthR*cos(thR))*(1-etr0);
    vpc_i(1)=-ai*(dthL*dthL*sin(thL)+dthR*dthR*sin(thR))*(1-etr0);
    vpc_i(2)=0;
    vpc_i(3)=0;
    vpc_i(4)=0;
    vpc_i(5)=0;
}

int u2_prg::u2_graphic()
{
int     k,n;
//----------------- 入力変数 ---------------------------------------------
double  t[nmax+1];
mat     vqc[nmax+1];for(int i=0;i<=nmax;i++) vqc[i]=mat(snc); // vqc の次元=nc
//-------------------------------------------------------------------------
```

```
double  gyy,gyy0,Ax,Ax0,s;                 // グラフィック
double   yy[nb1];
double  yy0[nb1];
double  dss[nb1];
double dss0[nb1];
double t0,t1,kbai;
double etr0;

FILE *fp;
char fname[20];

          n=nmax;

    sprintf(fname,"aL%dw%dt%d.txt",int(100*aL),int(100*whz),int(tmax));

    if((fp=fopen(fname,"rt"))==NULL){
        return 1;
    }
          for ( k=0 ; k<=n ; k++ ){
        fscanf(fp,"%lf ",&t[k]);mout("t["+IntToStr(k)+"]="+FloatToStr(t[k]));
        for(int i=0;i<snc;i++){
            fscanf(fp,"%lf ",&vqc[k](i));
        }
    }
    fclose(fp);

    cls_memo();
    kbai=StrToFloat(Form1->Edit1->Text);

    graph_init(tmin,tmax,td1,td2,ymin,ymax,yd1,yd2);
                                             // TForm1 のTがないことに注意
    yy[0]=0.0; yy0[0]=0.0; dss[0]=0.0;

    t1=t[0];
    Ax=vqc[0](0);
    s=0;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss[ii]=vqc[0](4*(ii-1)+2);
        etr0=etr(dss[ii]);

        s=s+dss[ii];
        yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));    // 2段リンク
    }

    t0=t1;
```

```
AxO=Ax;
for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
    dss0[ii]=dss[ii];
    yy0[ii]=yy[ii];
}

      for ( k=0 ; k<=n ; k++ ){
    t1=t[k];
    Ax=vqc[k](0);
    s=0;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss[ii]=vqc[k](4*(ii-1)+2);
        etr0=etr(dss[ii]);

        s=s+dss[ii];
        yy[ii]=yy[ii-1]+ai*(etr0*sin(s-dss[ii-1])+(1-etr0)*sin(s));
    }

    gyy=kbai1*Ax;  gyy0=kbai1*Ax0;
    graph_xy(t0,t1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);

    gyy=yy[nbun];  gyy0=yy0[nbun];
    graph_xy(t0,t1,kbai*gyy0,kbai*gyy,clTeal,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                        ,kbai*yy0[ii-1]+ymin,kbai*yy0[ii]+ymin
                        ,clWhite,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
    }

    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii
                        ,kbai*yy[ii-1]+ymin,kbai*yy[ii]+ymin
                        ,clRed,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
        graph_xy(tmax/nbun*(ii-1),tmax/nbun*ii,0+ymin,0+ymin
                        ,clBlack,tmin,tmax,ymin,ymax,t1);
    }

    t0=t1;
    Ax0=Ax;
    for(int ii=1;ii<=nbun;ii++){
        dss0[ii]=dss[ii];
         yy0[ii]=yy[ii];
    }
}
```

```
    return 0;
}
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
```

```
//------------------------------------------------------------------------
//      matrix.h  ver.1.1
//------------------------------------------------------------------------
#ifndef ___Matrix_H
#define ___Matrix_H

#include "Unit2.h"
//------------------------------------------------------------------------
class mat
{
private:
    int m;
    int n;
    double *mx;

//------------------------------------------------------------------------
// 内部定義: a[i]=  ai ﾍﾞｸﾄﾙ成分表示,  a[i][j]=aij ﾏﾄﾘｯｸｽ成分表示
//    main() では使用しない. ( mat a[i][j] の配列と間違う!! )

            double* operator[](int i)       {return(mx+i*n);}
    const   double* operator[](int i) const {return(mx+i*n);}
//------------------------------------------------------------------------

public:
    mat();
    mat(int mm,int nn);                 // コンストラクタ(void をつけてはいけない)
    mat(int mm);              // ベクトル  コンストラクタ ( m=mm, n=1 )
    mat(const mat &a);        // コピーコンストラクタ
    ~mat(void);               // デストラクタ~mat()関数の内部定義

    double& operator ()(int i){return mx[i];}          //   a(i)= ai  ﾍﾞｸﾄﾙ成分表示
    double& operator ()(int i,int j){return mx[n*i+j];} // a(i,j)=aij ﾏﾄﾘｯｸｽ成分表示

    mat  operator+(void) {return(*this);}
    mat  operator-(void);
    mat  operator!(void);     // 転置行列
    mat  operator~(void);     //   逆行列

    mat& operator=(const mat &a);
    mat& operator+=(const mat &a);
    mat& operator-=(const mat &a);
    mat& operator*=(const mat &a);

    friend mat operator+(const mat &a1, const mat &a2);
    friend mat operator-(const mat &a1, const mat &a2);
```

```
    friend mat operator*(const mat &a1, const mat &a2);
    friend mat operator*(const double keisu, const mat &a);
    friend mat operator*(const mat &a, const double keisu);

    friend double operator==(const mat &a1, const mat &a2);
    friend double operator!=(const mat &a1, const mat &a2);

    int EqSize(const mat& a) const
    {
        return(m == a.m && n == a.n);
    }

    int     getm(){return m;}
    int     getn(){return n;}
    void    disp();

    friend mat     trn(mat &b);                    // 転置行列
    friend mat     inv(const mat &b);   //   逆行列
    friend double determ(const mat &b);
    friend double simeq(const mat &a);

    friend void    sonyu(mat &b,int i0,mat &a);
    friend void    sonyu(mat &b,int i0,int j0,mat &a);
};
//---------------------------------------------------------------------------
#endif
```

```
//---------------------------------------------------------------------------
//      matrix.cpp  ver.1.1
//---------------------------------------------------------------------------
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop

#include "matrix.h"
#include "Unit1.h"
#include "Unit2.h"

#include <new.h>
#include <iomanip.h>
#include <iostream.h>                // exit(1) を使用

//---------------------------------------------------------------------------
mat::mat()
{
    m=1;
    n=1;
    mx=new double[1];
    (*this)[0][0]=0;
}

mat::mat(int mm,int nn)
{
    m=mm;
    n=nn;

    mx=new double[n*m];
    for(int i=0;i<m;i++){
        for(int j=0;j<n;j++)
            (*this)[i][j]=0;
    }
//    mout("nomal");
}

mat::mat(int mm)
{
    m=mm;
    n=1;

    mx=new double[n*m];
    for(int i=0;i<m;i++){
            (*this)[i][0]=0;
    }
```

```
}

mat::mat(const mat& a)
{
    m=a.m;
    n=a.n;
    mx=new double[n*m];
    for(int i=0;i<m;i++){
        for(int j=0;j<n;j++)
            (*this)[i][j]=a[i][j];
    }
}

mat::~mat(void)
{
    delete[] mx;
}

mat mat::operator-(void)
{
    mat temp(m,n);
    for(int i=0;i<m;i++){
        for(int j=0;j<n;j++)
            temp[i][j]=-(*this)[i][j];
    }
    return(temp);
}

mat mat::operator!(void)    // 転置行列
{
    mat temp(n,m);
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<m;j++)
            temp[i][j]=(*this).mx[n*j+i];   // (*this)[j][i] は不可

    return(temp);
}

mat mat::operator~(void)    //  逆行列
{
    return inv(*this);
}

mat& mat::operator=(const mat &a)
{
```

```
    if(a.m<1 || a.n<1)
        exit(1);

    if(m<1 || n<1 || m*n != a.m*a.n){
        delete [] mx;
        mx=new double[a.m*a.n];
    }

    m=a.m;
    n=a.n;
    for(int i=0;i<m;i++)
        for(int j=0;j<n;j++)
            (*this)[i][j]=a[i][j];

    return(*this);
}

mat& mat::operator+=(const mat& a)
{
    if(a.m<1 || a.n<1)
        exit(1);

    if(m<1 || n<1 || m*n != a.m*a.n){
        delete [] mx;
        mx=new double[a.m*a.n];
    }

    m=a.m;
    n=a.n;
    for(int i=0;i<m;i++)
        for(int j=0;j<n;j++)
            (*this)[i][j]+=a[i][j];
    return(*this);
}

mat& mat::operator-=(const mat& a)
{
    if(a.m<1 || a.n<1)
        exit(1);

    if(m<1 || n<1 || m*n != a.m*a.n){
        delete [] mx;
        mx=new double[a.m*a.n];
    }
```

```
    m=a.m;
    n=a.n;
    for(int i=0;i<m;i++)
        for(int j=0;j<n;j++)
            (*this)[i][j]-=a[i][j];
    return(*this);
}

mat& mat::operator*=(const mat& a)
{
    if(m<1 || n<1 || a.m<1 || a.n<1)
        exit(1);

    if(n==a.m){
        mat temp(m,a.n);
        for(int i=0;i<m;i++)
            for(int j=0;j<a.n;j++)
                for(int k=0;k<n;k++)
                    temp[i][j]+=(*this)[i][k]*a[k][j];
        *this=temp;

        return(*this);
    }
    exit(1);
}

mat operator+(const mat& a1,const mat& a2)
{
    mat temp(a1);
    return(temp += a2);
}

mat operator-(const mat& a1,const mat& a2)
{
    mat temp(a1);
    return(temp -= a2);
}

mat operator*(const mat& a1,const mat& a2)
{
    mat temp(a1);
//    mout("a*b ope");
    return(temp *= a2);
}
```

```
mat operator*(const double keisu,const mat& a)
{
    mat temp(a.m,a.n);
    for(int i=0;i<a.m;i++)
        for(int j=0;j<a.n;j++)
            temp[i][j]=keisu*a[i][j];

    return(temp);
}

mat operator*(const mat& a,const double keisu)
{
    mat temp(a.m,a.n);
    for(int i=0;i<a.m;i++)
        for(int j=0;j<a.n;j++)
            temp[i][j]=keisu*a[i][j];

    return(temp);
}

double operator==(const mat& a1,const mat& a2)
{
    if(!a1.EqSize(a2)) return(0);
    for(int i=0;i<a1.m;i++)
        for(int j=0;j<a1.n;j++)
            if(a1[i][j] != a2[i][j])
                return(0);
    return(1);
}

double operator!=(const mat& a1,const mat a2)
{
    return(!(a1 == a2));
}

void mat::disp()
{
char str[100];
int i,j;
String S;

    sprintf(str,"m=%d   n=%d",m,n); mout(str);

    for(i=0;i<m;i++){
        S="";
```

```
        for(j=0;j<n;j++){
            sprintf(str,"%5.1lf  ",mx[n*i+j]);
            S=S+str;
        }
        mout(S);
    }
    mout("");
}

//-----------------------------------------------------------------------
void sonyu(mat &b,int i0,mat &a)
{
    for(int i=0;i<a.m;i++)
            b(i0+i)=a(i);
}

void sonyu(mat &b,int i0,int j0,mat &a)
{
    for(int i=0;i<a.m;i++)
        for(int j=0;j<a.n;j++)
            b(i0+i,j0+j)=a(i,j);
}

mat trn(mat &b)
{
    return (!b);
}

mat inv(const mat &b)
{
double  d;
int     i,j,mm,nn;

    if (b.m != b.n){
        mat c(1,1);
        mout("行と列の数が異なる");
        return (c);
    }

    mm=b.m;
    nn=mm+mm;

    mat c(b);
    mat a(mm,nn);
```

```
    for(i=0;i<mm;i++)
        for(j=0;j<mm;j++)
            a.mx[nn*i+j]=b.mx[mm*i+j];

    for(i=0;i<mm;i++)
        for(j=0;j<mm;j++)
            if(i == j)
                a.mx[nn*i+j+mm]=1.0;
            else
                a.mx[nn*i+j+mm]=0.0;

    d=simeq(a);                              // d=行列式|b[mm,mm]|
    if (d==0){
        mout("逆行列は存在しません. ");
        mat c(1,1);
        return(c);
    }

    c.m=mm;
    c.n=mm;
    for(i=0;i<mm;i++)
        for(j=0;j<mm;j++)
            c.mx[mm*i+j]=a.mx[nn*i+j+mm];

    return(c);
}

double determ(const mat &b)
{
double  d;
int     i,j,mm,nn;

    mm=b.m;
    nn=b.n;
    if (mm != nn){
        mout("m と n が一致していません. ");
        d=0.0;
        return (d);
    }

    nn=mm+mm;
    mat a(nn,nn);

    for(i=0;i<mm;i++)
```

```
        for(j=0;j<mm;j++)
            a.mx[nn*i+j]=b.mx[mm*i+j];

    for(i=0;i<mm;i++)
        for(j=0;j<mm;j++)
            if(i == j)
                a.mx[nn*i+j+mm]=1.0;
            else
                a.mx[nn*i+j+mm]=0.0;

    d=simeq(a);
    if (d==0){
        mout("逆行列は存在しません. ");
        d=0.0;
        return(d);
    }

    return(d);                              // d=行列式|b[mm,mm]|
}

double simeq(const mat &a)
//  線形同次方程式
//
{
double ax,d;
int i,j,k,mm,nn;

    mm=a.m;
    nn=a.n;
    if(mm<1 || mm>a.n)
        return(0.0);

    if(mm==1){
        if((d=a.mx[0]) !=0)
            for(i=0;i<nn;i++)
                a.mx[i] /= d;
        return(d);
    }
//  2<=mm<=nn

    d=1.0;
    for(i=0;i<mm;i++){
        for(j=i; ;j++){
            if(j>=mm)
                return(0.0);
```

```
                if(a.mx[nn*j+i])
                    break;
            }

            if(j != i){
                for(k=i;k<nn;k++){
                    ax=a.mx[nn*i+k];
                    a.mx[nn*i+k]=a.mx[nn*j+k];
                    a.mx[nn*j+k]=ax;
                }
                d=-d;
            }

            ax=a.mx[nn*i+i];
            d *= ax;
            a.mx[nn*i+i]=1.0;

            for(j=i+1;j<nn;j++)
                a.mx[nn*i+j] /= ax;

            for(j=0;j<mm;j++)
                if(i != j){
                    ax=a.mx[nn*j+i];
                    a.mx[nn*j+i]=0.0;
                    for(k=i+1;k<nn;k++)
                        a.mx[nn*j+k] -= a.mx[nn*i+k]*ax;
                }
        }
        return(d);
}
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
```

参考文献

(1) 例えば 加藤寛一朗、今永勇生，"ヘリコプタ入門"，東京大学出版会，1989,pp.192-196

(2) 陣内靖介，大塚芳臣，荒木嘉昭，"物理振り子を備えた回転軸の動的安定性"，日本機械学会論文集，第 65 巻，632 号,C 編,1999, pp.42-47

(3) 久保省蔵，陣内靖介，荒木嘉昭，井上順吉，"自動平衡装置(遠心力振子を利用した場合)"，日本機械学会論文集，第 51 巻，467 号，C 編，1985, pp.1772-1777

(4) S.Kubo, Y.Jinnouchi, Y.Araki, J.Inoue, "Automatic Balancer (Pendulum Balancer)", Bulletin of JSME, Vol.29, No.249, 1986, pp.924-928

(5) F.R.Vigneron,A.M.Jablonski, "Damped Gyroscopic Modes of Spinning Tethered Space Vehicles with Flexible Booms", Journal of Spacecraft and Rockets", Vol.34,No.5, Sep.-Oct.,1997, pp.662-669

(6) 井上順吉，陣内靖介，荒木嘉昭，中原章，"自動平衡装置(その基礎的な特性)"，日本機械学会論文集,第 45 巻，394 号，C 編,1989, pp.646-652

(7) 陣内靖介，荒木嘉昭，井上順吉，大塚芳臣，譚青，“自動平衡装置(多数の転動球による静つりあわせおよび過渡応答)”，日本機械学会論文集,第 59 巻，557 号，C 編,1993, pp.79-84

(8) Y. Jinnouchi, Y. Araki, J. Inoue, Y. Ohtsuka, C. Tan, " Static Balancing and Transient Response of Multiball-type Automatic Balancer", Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '93, Vol. 2,1993, pp.493-498

(9) 陣内靖介，荒木嘉昭，井上順吉，久保省蔵，松下修巳，“2 種類の液体で満たされ分割された高速中空回転軸の動的不安定(粘性および減衰を無視した場合)”，日本機械学会論文集,第 55 巻，511 号，C 編,1989, pp.573-580

(10) Y.Jinnouch, Y.Araki, J.Inoue, S.Kubo, "Dynamic Instability of a High-Speed Rotor Containing a Partitioned Cavity Filled with Two Kinds of Liquids", Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.111, No.4, 1989, pp.450-456

(11) S.Kubo,S.Yamashita,Y.Jinnouchi,Y.Ohtsuka,Y.Araki, " Asynchronous Whirl in a Rotating Cylinder Filled with Two Kinds of Liquids", Proceedings of the Third Asia-Pacific Conference on Aerospace Technology and Science,2000, pp.135-140

(12) A.Nachman, "Buckling and Vibration of a Rotating Beam", Journal of Sound Vibration, Vol.109, No3, 1986, pp.435-443

(13) R.C.Kar, T.Sujata, "Dynamic Stability of a Rotating, Pretwisted and Preconed Cantilever Beam Including Coriolis Effects", Computers & Structures, Vol.42, No.5, 1992, pp.741-750

(14) C.K.Chen, S.H.Ho, "Transverse Vibration of a Rotating Twisted Timoshenko Beams under Axial Loading Using Differential Transform", International Journal of Mechanical Science, Vol.41, No.11, 1999, pp.1339-1356

(15) H.Du, M.K.Lim, K.M.Liew, "A Power Series Solution for Vibration of a Rotating Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol.175, No.4, 1994, pp.505-523

(16) C.L.Lee, M.F.Al-Salem, T.G.Woehrle, "Natural Frequency Measurements for Rotating Spanwise Uniform Cantilever Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol.240, No.5, 2001, pp.957-961

(17) R.P.Coleman, A.M.Feingold,"Theory of Self-Excited Mechanical Oscillation of Helicopter Rotors with Hinged Blades", National Advisory Committee for Aeronautics, 1958, pp.1-30

(18) R.E.Donham, S.V.Cardinale, I.B.Sachs ,"Ground and Air Resonance Characteristics of a Soft In-Plane Rigid-Rotor System", Journal of the American Helicopter Society, Vol.14,No.4, 1969, pp.33-41

(19) R.T.Lytwyn, W.Miao, W.Woitsch, "Airborne and Ground Resonance of Hingeless Rotors", Journal of the American Helicopter Society, Vol.16,No.2, 1971, pp.2-9

(20) R.G.Loewy, "Review of Rotary-Wing V/STOL Dynamic and Aeroelastic Problems", Journal of the American Helicopter Society,Vol.14, No.3, 1969, pp.3-23

(21) E.Dick, H.Sioen, D.Zeoli, "A Basic Analysis of Helicopter Ground Resonance", European Jounal Mech. Eng., Vol.39, No.2, 1994, pp.91-101

(22) X.Zhang, "Investigation of Helicopter Air Resonance in Hover by Complex Coordinates and Mutual Excitation Analysis", Journal of the American Helicopter Society, Vol.38, No.2, 1993, pp.15-24

(23) 沢村勲，湯浅邦彦，森崎秀行，東功二，"風力発電の動向"，とりしまレビュー,No.13, 1999, 36-40

(24) A.D.Garrad,"Dynamics of wind turbines", IEE Proceedings ,Part A, Vol.130,N0.9,1983, pp523-530

(25) 牛山泉，小堀与一，柴国鐘 "小型風車のタワーの振動に関する簡易計算法"，風力エネルギー，Vol.12, No.1, 1988, pp.2-8

(26) 岡野雅史，吉田聡，河口秀樹，中条裕一，牛山泉，“風車ロータとタワーの振動に関する研究”，風力エネルギー，Vol.21, No.2, 1997, pp.27-33

(27) S.Mitchell, “Attitude Determination and Control for DARPASAT, a Simple Spinning Spacecraft”, Advance in the Astronautical Sciences, Vol.92,1996, pp.667-680

(28) C.Hubert, “The Attitude Dynamics of Dynamics Explorer A”, Advance in the Astronautical Sciences, Vol.46, No.Pt1, 1982, pp.281-300

(29) Y. Jinnouchi, Y. Ohtsuka, Y. Araki, M. Inoue, “ Dynamic Stability of Rotor Equipped with Flexible Cantilever Beams”, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '95, Vol. 2, 1995, pp.486-491

(30) T.Nagata,,"Dynamics of Flexible Multibody System: A Formulation with Applications", Ph. D. Thesis, 1995, 14-51, 182-194, The University of Tokyo

(31) Y. Ohtsuka, Y. Jinnouchi, T. Nagata M. Inoue, “Dynamic Stability of a Rotor Equipped with Flexible Cantilever Beams”, Proceedings of the Third Asia-Pacific Conference on Aerospace Technology and Science, 2000, pp.385-390

(32) 大塚芳臣，陣内靖介，長田隆，井上昌信，“弾性棒を備えた回転体の動的安定性”，日本機会学会論文集，67巻，657号，C編，2001，pp.161-166

(33) 大塚芳臣，陣内靖介，長田隆，井上昌信，“弾性棒を備えた回転体のコニカルモード不安定”，日本機会学会論文集，68巻，665号，C編，2002，pp.24-29

(34) 例えば 小林幹雄，数学公式集，(1980)，18，共立出版