

377.5

K-11

2-35

非線形システムの形式的線形化による 数値解法とその適用に関する研究

平成7年4月

小松 一男



目次

1	序論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	問題の設定	3
1.3	論文の構成	4
2	フーリエ展開による形式的線形化	6
2.1	緒言	6
2.2	連続フーリエ展開による形式的線形化	7
2.2.1	連続フーリエ展開型線形化 (スカラーシステム)	7
2.2.2	連続フーリエ展開型線形化 (多次元システム)	10
2.2.3	連続フーリエ展開型同次線形化	12
2.3	離散フーリエ展開による形式的線形化	15
2.3.1	離散フーリエ展開型線形化	15
2.3.2	離散フーリエ展開型同次線形化	20
2.4	誤差限界	21
2.5	数値実験	24
2.5.1	例題 1(連続フーリエ展開型線形化)	24
2.5.2	例題 2(連続フーリエ展開型同次線形化)	28

2.5.3	例題 3(離散フーリエ展開型同次線形化その 1)	31
2.5.4	例題 4(離散フーリエ展開型同次線形化その 2)	34
2.5.5	結言	39
3	フーリエ展開型線形化の適用例	40
3.1	緒言	40
3.2	非線形オブザーバの構成	41
3.2.1	連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ	41
3.2.2	連続フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ	42
3.2.3	離散フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ	43
3.2.4	離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ	44
3.3	非線形フィルタの構成	46
3.4	数値実験	48
3.4.1	例題 1(連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ)	48
3.4.2	例題 2(離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ)	51
3.4.3	例題 3(離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタ)	54
3.5	結言	57
4	チェビシェフ補間近似による形式的線形化	58
4.1	緒言	58
4.2	チェビシェフ補間近似による形式的線形化	59
4.3	誤差限界	64
4.4	数値実験	70
4.4.1	例題 1(スカラーシステムのチェビシェフ補間近似型線形化)	70
4.4.2	例題 2(多次元システムのチェビシェフ補間近似型線形化その 1)	75
4.4.3	例題 3(多次元システムのチェビシェフ補間近似型線形化その 2)	80

4.5	結言	86
5	チェビシェフ補間近似型線形化の適用例	87
5.1	緒言	87
5.2	非線形オブザーバの構成	88
5.3	非線形フィルタの構成	89
5.4	数値実験	91
5.4.1	例題 1(チェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバ)	91
5.4.2	例題 2(チェビシェフ補間近似型線形化による非線形フィルタ)	94
5.5	結言	97
6	結論	98

第 1 章

序論

1.1 研究の背景と目的

現実のシステムは何らかの意味で非線形性を有する非線形システムである。この非線形システムをそのまま取り扱うことは、多様であるがゆえに容易ではなく、システムティックな手法は確立されていない。そのため、取り扱いの容易な線形推定理論や線形制御理論を適用するために、非線形システムを線形化する方法が昔から用いられてきた。一般に用いられている線形化法は、非線形システムに対し状態方程式をテーラー展開の一次近似に基づいて線形化するものであるが、ある平衡点のみでの近似線形化でしかなく、また近似の精度も必ずしも十分であるとはいえない [1, 2]。それに対して、状態方程式と座標変換を用いることにより近似ではなく厳密に状態方程式を線形化する方法が提案された [3, 4]。この厳密な線形化法は近似を用いていないので、線形化されたシステムが元のシステムの全情報を保存する。そのためシステムの厳密な解析や制御系の設計に有用である。しかし、この線形化法は条件が非常に厳しくシステムが 3 次以上の場合には特殊な系しか成り立たないなどの種々の問題があると言われている [5]。そのためテーラー展開近似の精度を良くしようという考え方 [6] や、テーラー展開の一次近似ではあるが平衡点を一点でなくほかの平衡点でも議論の対象とする考え方 [7, 8] が進められた。これらの状態方程式の線形化についての研究は 1980 年代に盛んになった。この他に入出力関係の線形化が比較的早くから研究が進められ

ている [9, 10]。いずれの研究も実用化にむけ盛んに研究されており、注目されているテーマである。

本研究はこのような背景に対して、計算機により非線形システムをシステムティックに線形システムに変換する形式的線形化法 [11] について研究を行ったものである。すなわち本研究は、非線形システムを計算機によりさらに精度良く容易に線形化する形式的線形化法を開発する。一般に形式的線形化法は、用いられる線形化関数の次数を増やすことにより線形化の精度を高めることが可能であるが、線形化の際に積分などの計算が必要であったり、線形化関数の次数の増加と共に計算量が大幅に増大するという計算上の煩わしさがあった [12]。この問題点を解決するために、最小 2 乗近似を基にしたフーリエ展開 [13, 14, 15] とミニマックス近似を基にしたチェビシェフ補間近似 [16, 17] の二つの近似方法を導入した形式的線形化を提案する。

すなわち、システムとして非線形微分方程式が与えられたとする。一次から高次までの三角関数またはチェビシェフ多項式からなる線形化関数を導入し、この関数を新しい状態変数とみなし、この線形化関数に関する微分方程式を導く。次に関数近似の優れたフーリエ展開またはチェビシェフ補間近似をそれぞれ行う。結局、原システムはこれらの新変数に関する線形微分方程式に帰着される。ただしその際、線形化を自動的に行うところの連続フーリエ展開と離散フーリエ展開を用いる計算アルゴリズムを開発した。(さらに、高速フーリエ変換 (FFT) などを使えば計算機を使ってさらに有効に求めることが可能と思われる。) チェビシェフ補間近似の場合も同様に微分方程式の係数が単なる代数和で求められ、線形化の精度の向上のためのチェビシェフ多項式の次数増加も本計算アルゴリズム使用により容易である。逆変換はフーリエ展開型線形化の場合、逆三角関数により容易に求められ、チェビシェフ補間近似型線形化の場合も代数和計算で求められる。

さらに、以上のように求めた形式的線形化の誤差解析を行い、その誤差限界を示す。その結果から線形化関数の次数の増加と共に誤差の減少が可能であることを確認する。

本手法を用いれば、強度の非線形システムに対しても非線形オブザーバと非線形フィルタの構成が可能となり、本手法の有効性がわかる。まず非線形オブザーバであるが、非線形システムに対し本手法により線形化を施す。得られた形式的線形システムに対し同次元オブザーバを適用し、非線形オブザーバを構成する。非線形フィルタも同様に、非線形システムに対し本手法により線形化を施し、その形式的線形システムに対し線形定常カルマンフィルタを適用し、非線形フィルタを構成する。

本手法の有効性確認のための数値実験を各種行った。いずれの数値実験例も非線形性の強いシステムを取り扱った。

1.2 問題の設定

本研究の問題の設定を行う。次の n 次元非線形システムが与えられたとする。

$$\Sigma_1 : \dot{x} = f(x(t)) \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

ただし、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: n 次元状態ベクトル、 T : 転値記号、 $D \subset R^n$: 長方形定義域、 R^n : n 次元実数値空間、および $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。さて、形式的線形化関数

$$\phi(x) \equiv [\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots, \phi_N(x), \dots]^T \quad (1.2)$$

を考える。ただし、 \equiv : 定義記号である。線形化関数 $\phi(x)$ の各要素の時刻 t での微分方程式は、(1.1) 式より

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} \dot{x} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} f(x) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_k} f_k(x) \quad (1.3)$$

となる。右辺をこの $\phi(x)$ に関し線形近似表現すれば、

$$\dot{\phi}(x) \cong B\phi(x) + c \quad (1.4)$$

となり $\phi(x)$ を状態ベクトルと考えれば、(1.4)式は次の形式的線形システムへ変換される。

$$\begin{aligned}\Sigma_2 : \dot{z}(t) &= Bz(t) + c \\ z(0) &= \phi(x_0)\end{aligned}\tag{1.5}$$

ただし、 B : 定数行列、 c : 定数ベクトルである。問題はこの種の形式的線形化法において、簡便で高精度な計算アルゴリズムの開発を行うことである。ここでは、線形化関数 ϕ として三角関数とチェビシェフ多項式を導入し、この問題について考察した。

1.3 論文の構成

本研究は以下の構成となっている。

第1章は序論であり、本研究の背景と目的について述べ、対象とする問題の設定、論文の構成について述べる。

第2章では、フーリエ展開による形式的線形化について述べる。まず、連続フーリエ展開を用いた方法を説明し、次に計算機に適した離散フーリエ展開を使った方法について述べ、計算アルゴリズムを示す。また、それぞれの場合の誤差限界について考察する。さらに、各種の計算機シミュレーションにより本手法の有効性を確かめる。シミュレーション結果において原点に定常点をもつ非線形システムの場合、定常点での精度が悪くなる場合があり、その解決法として定常項のない形式的同次線形化についても考察した。

第3章では、フーリエ展開型線形化の適用例として、非線形オブザーバを構成する。与えられた非線形システムに対しフーリエ展開型線形化を施し、この形式的線形システムに同次元オブザーバを適用する方法について述べる。次に、非線形フィルタの構成を行う。非線形確率システムに本手法を適用し形式的線形システムに変換し、この線形システムに対し線形カルマンフィルタを適用する方法について述べる。最後に

計算機シミュレーションにより本手法の有効性を確かめる。

第4章では、チェビシェフ補間近似による形式的線形化について述べる。ミニマックス近似であるチェビシェフ補間近似を用いた形式的線形化について考察し、計算アルゴリズムを示し、誤差限界について述べる。最後に計算機シミュレーションにより本手法の有効性を確かめる。

第5章では、チェビシェフ補間近似型線形化の適用例として、非線形オブザーバを構成する。チェビシェフ補間近似型線形化により線形化されたシステムに同次元オブザーバを適用する。次に、非線形フィルタの構成を行う。非線形確率システムに対し本手法を適用し形式的線形システムに変換し、この線形システムに対し線形カルマンフィルタを適用する方法について述べる。最後に計算機シミュレーションにより本手法の有効性を確かめる。

第6章は、本研究の結論である。

第 2 章

フーリエ展開による形式的線形化

2.1 緒言

形式的線形化は、線形独立な座標変換関数を導入し非線形システムを線形システムへ変換するものである。ここでは、1次から高次までの線形独立な三角関数を導入し、この新変数を新しい状態変数とみなし、この新変数を要素にもつ線形化関数に関する線形システムへ変換するフーリエ展開型線形化について述べる。

まず連続フーリエ展開による形式的線形化について、簡単のためスカラーシステムで説明し、次に多次元システムについて説明する。この手法は線形化の際に積分などの計算が必要であるが、線形化関数の要素に原システムの状態変数を含むので逆変換が容易に得られる。次に計算機を用いたデジタル信号処理に適した離散フーリエ展開による形式的線形化について説明する。連続フーリエ展開型に比べ線形化の際の計算が容易であり、アルゴリズム的にも計算機に適している手法である。

最後に誤差限界について考察し、計算機シミュレーションによりフーリエ展開の次数の増加と共に形式的線形化の精度が向上することを確かめる。

2.2 連続フーリエ展開による形式的線形化

まず簡単のためスカラーシステムの線形化について述べ、つぎの節において多次元システムに拡張して述べる [18, 19]。

2.2.1 連続フーリエ展開型線形化 (スカラーシステム)

つぎの非線形システム (Σ_1) が与えられたとしよう。

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

ただし、 $\dot{\cdot} = d/dt$, $x \in R$: 状態値、 R : 実数値空間、 $D = [0, 2\ell] \subset R$: 定義域、および f : 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。ここで形式的線形化法の線形化関数 $\phi(x)$ として次を定義する。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= [x, \sin \frac{\pi}{\ell}x, \cos \frac{\pi}{\ell}x, \sin \frac{2\pi}{\ell}x, \cos \frac{2\pi}{\ell}x, \dots, \sin \frac{N\pi}{2\ell}x, \cos \frac{N\pi}{2\ell}x]^T \\ &= [x, \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x), \dots, \phi_{2N-1}(x), \phi_{2N}(x)]^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

以下 (2.2) 式を次数 N の線形化関数と呼ぶ。このときの ϕ の逆変換 (ϕ^{-1}) は容易であり、

$$x = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]\phi(x) \quad (2.3)$$

で求まる。さて (2.2) 式より $\phi(x)$ の時刻 t での微分方程式は、

$$\dot{\phi}(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \dot{x} = \frac{d\phi(x)}{dx} (Ax + f(x)). \quad (2.4)$$

右辺を ϕ に関し線形近似表現すれば、

$$\dot{\phi}(x) \cong B\phi(x) + c \quad (2.5)$$

となり、(2.1) が次の形式的線形化システム (Σ_2)

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Bz(t) + c \quad (2.6)$$

$$z(0) = \phi(x_0)$$

へ変換される。ここでシステム Σ_1 をこのシステム Σ_2 に変換するところの行列 B およびベクトル c について考える。まず、

$$f(x) \equiv G_0(x) \quad (2.7)$$

と定義し、さらに (2.1), (2.2) 式より、

r が奇数のとき:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_r(x) &= \frac{d}{dt} \sin \frac{(r+1)\pi}{2\ell} x = \left(\frac{d}{dx} \sin \frac{(r+1)\pi}{2\ell} x \right) \dot{x} \\ &= \frac{(r+1)\pi}{2\ell} \left(\cos \frac{(r+1)\pi}{2\ell} x \right) (Ax + f(x)) \equiv G_r(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

r が偶数のとき:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_r(x) &= \frac{d}{dt} \cos \frac{r\pi}{2\ell} x = \left(\frac{d}{dx} \cos \frac{r\pi}{2\ell} x \right) \dot{x} \\ &= -\frac{r\pi}{2\ell} \left(\sin \frac{r\pi}{2\ell} x \right) (Ax + f(x)) \equiv G_r(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

を定義する。 G_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) についてフーリエ展開すれば、

$$\dot{\phi}_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rk} \phi_k(x) + \alpha_{r0} \quad (2.10)$$

ただし、

$$\alpha_{r0} = \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} G_r(x) dx \quad (2.11)$$

$$\alpha_{rk} = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} G_r(x) \phi_k(x) dx \quad (2.12)$$

となり、フーリエ展開の性質からそれは x について $[0, 2\ell]$ 区間で二乗誤差が最小である [20]。結局、 $r = N$ 次で打ち切れば、

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \sin \frac{\pi}{\ell} x \\ \frac{d}{dt} \cos \frac{\pi}{\ell} x \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \sin \frac{N\pi}{2\ell} x \\ \frac{d}{dt} \cos \frac{N\pi}{2\ell} x \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} Ax + \sum_{k=1}^N \alpha_{0k} \phi_k(x) + \alpha_{00} \\ \sum_{k=1}^N \alpha_{1k} \phi_k(x) + \alpha_{10} \\ \sum_{k=1}^N \alpha_{2k} \phi_k(x) + \alpha_{20} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N \alpha_{N-1 k} \phi_k(x) + \alpha_{N-1 0} \\ \sum_{k=1}^N \alpha_{N k} \phi_k(x) + \alpha_{N 0} \end{pmatrix} \\ &= B\phi(x) + c \end{aligned} \quad (2.13)$$

となり、 ϕ を z で書き表すと、

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Bz(t) + c \quad (2.14)$$

$$z(0) = \phi(x_0), z \in R^{N+1}$$

ただし、

$$B = \begin{pmatrix} A & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0N} \\ 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{10} \\ \vdots \\ \alpha_{N0} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となり、 z に関する線形システム Σ_2 ((2.14) 式) が具体的に得られた。よって (2.1) 式の Σ_1 は、(2.6), (2.14) 式の Σ_2 へ線形化され、形式的線形化による近似解 \hat{x} が (2.3) 式より求まる。

2.2.2 連続フーリエ展開型線形化 (多次元システム)

次の n 次元非線形システムが与えられたとしよう。

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (2.16)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

ただし、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T : n$ 次元状態ベクトル、 $D = \prod_{i=1}^n [0, 2\ell_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。さて、区間 $[0, 2\ell_i]$ で定義される線形独立な三角関数として

$$T_{-1}(x_i) \equiv x_i \quad (2.17)$$

$$T_0(x_i) \equiv 1 \quad (2.18)$$

$$T_r(x_i) \equiv \begin{cases} \sin \frac{r\pi}{2\ell_i} x_i & (r : \text{偶数}) \\ \cos \frac{(r+1)\pi}{2\ell_i} x_i & (r : \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.19)$$

を定義する。従って

$$S_r(x_i) \equiv \frac{dT_r(x_i)}{dx_i} \quad (2.20)$$

に関し、

$$S_{-1}(x_i) = 1 \quad (2.21)$$

$$S_0(x_i) = 0 \quad (2.22)$$

$$S_r(x_i) = \begin{cases} \frac{r\pi}{2\ell_i} \cos \frac{r\pi}{2\ell_i} x_i & (r : \text{偶数}) \\ -\frac{(r+1)\pi}{2\ell_i} \sin \frac{(r+1)\pi}{2\ell_i} x_i & (r : \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.23)$$

となる。ここで線形化関数

$$\begin{aligned} \phi(x) = & [T_{(-1 \ 0 \dots 0)}(x), \dots, T_{(0 \dots 0 \ -1)}(x), T_{(10 \dots 0)}(x), T_{(20 \dots 0)}(x), \dots, \\ & T_{(N_1 \dots 00)}(x), T_{(010 \dots 0)}(x), T_{(020 \dots 0)}(x), \dots, T_{(0N_2 0 \dots 0)}(x), \\ & T_{(110 \dots 0)}(x), T_{(120 \dots 0)}(x), \dots, T_{(r_1 \dots r_n)}(x), \dots, T_{(N_1 N_2 \dots N_n)}(x)]^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

ただし、

$$T_{(r_1 \dots r_n)}(x) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(x_i) \quad (2.25)$$

を定義する。線形化関数 $\phi(x)$ の各要素の時刻 t での微分方程式は、

$$\begin{aligned} r_i = -1 : \quad \dot{T}_{(0 \dots 0 \ r_i \ 0 \dots 0)}(x) &= \dot{x}_i \quad \text{より} \\ f_i(x) &\equiv G_{(0 \dots r_i \dots 0)}(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$r_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(r_1 \dots r_n)}(x) &= \frac{\partial T_{(r_1 \dots r_n)}(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x)) \\ &= S_{(r_1 \dots r_n)}(x)(Ax + f(x)) \equiv G_{(r_1 \dots r_n)}(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

となり、これを各 x_i に関し N_i 次までの連続フーリエ展開式

$$\hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(x) = \sum_{q_1=0}^{N_1} \dots \sum_{q_n=0}^{N_n} C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} T_{(q_1 \dots q_n)}(x) \quad (2.28)$$

で近似する。ここで、

$$\begin{aligned} C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} &= \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\ell_i} \int_0^{2\ell_1} \dots \int_0^{2\ell_n} G_{(r_1 \dots r_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad T_{(q_1 \dots q_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

ただし、

$$\eta = \{q_i = 0 \text{ の個数} : 1 \leq i \leq n\} \quad (2.30)$$

として与えられる [20]。故に (2.26)、(2.27) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(x)$ を (2.28) 式の多項式 $\hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(x)$ で近似すれば (2.24) 式の $\phi(x)$ が、

$$\dot{\phi}(x) \cong B\phi(x) + c \quad (2.31)$$

となり次の形式的線形システムが得られる。

$$\Sigma_2 : \quad \dot{z}(t) = Bz(t) + c \quad (2.32)$$

$$z(0) = \phi(x_0), \quad z \in R^{(N_1+1)(N_2+1)\dots(N_n+1)+n-1}$$

ただし、

$$B = \begin{pmatrix} & & C_{[10\dots 0]}^{[-10\dots 0]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[-10\dots 0]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[-10\dots 0]} \\ & A & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & C_{[10\dots 0]}^{[0\dots 0 -1]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[0\dots 0 -1]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[0\dots 0 -1]} \\ 0 & \dots & 0 & C_{[10\dots 0]}^{[10\dots 0]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[10\dots 0]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[10\dots 0]} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{[10\dots 0]}^{[r_1\dots r_n]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[r_1\dots r_n]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[r_1\dots r_n]} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{[10\dots 0]}^{[N_1\dots N_n]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[N_1\dots N_n]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[N_1\dots N_n]} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$c = \begin{pmatrix} C_{[00\dots 0]}^{[-10\dots 0]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[00\dots -1]} \\ C_{[00\dots 0]}^{[10\dots 0]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[r_1 r_2 \dots r_n]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[N_1 N_2 \dots N_n]} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

逆変換 (ϕ^{-1}) については、形式的線形化による近似解 \hat{x} が (2.24) 式より容易に

$$\hat{x} = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]z(t) \quad (I: n \times n \text{ 単位行列}) \quad (2.35)$$

として求まる。

2.2.3 連続フーリエ展開型同次線形化

原点に定常点をもつ非線形システムに対しては、近似による非零定常項存在のため時間の経過と共に線形化の近似誤差が大きくなる場合がある。そこで定常項のない形

式的同次線形化について述べる [21]。

第 2.2.1 節で述べたスカラーシステム

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (2.36)$$

$$f(0) = 0, \quad x(0) = x_0 \in R$$

を考える。(2.2) 式の線形化関数を定義し、(2.36) 式のシステム Σ_1 を次の同次線形システム

$$\Sigma'_2 : \dot{z}(t) = Bz(t) \quad (2.37)$$

$$z(0) = \phi(x_0)$$

に変換することを考える。(2.2) 式の線形化関数と (2.36) 式より、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Ax + \beta_0 A_0 x) + (f(x) - \beta_0 A_0 x) \\ &= (A + \beta_0 A_0)x + G'_0(x) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{2r-1}(x) &= \frac{d}{dt} \sin \frac{r\pi}{\ell} x = \left(\frac{d}{dx} \sin \frac{r\pi}{\ell} x \right) \dot{x} \\ &= \frac{r\pi}{\ell} \left(\cos \frac{r\pi}{\ell} x \right) (Ax + f(x)) \\ &= G_{2r-1}(x) \\ &= \beta_{2r-1} A_{2r-1} x + G'_{2r-1}(x) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{2r}(x) &= \frac{d}{dt} \cos \frac{r\pi}{\ell} x = \left(\frac{d}{dx} \cos \frac{r\pi}{\ell} x \right) \dot{x} \\ &= -\frac{r\pi}{\ell} \left(\sin \frac{r\pi}{\ell} x \right) (Ax + f(x)) \\ &= G_{2r}(x) \\ &= \beta_{2r} A_{2r} x + G'_{2r}(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

を定義する。ただし、

$$G_0(x) = f(x)$$

$$G'_r(x) = G_r(x) - \beta_r A_r x \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\beta_r = \frac{1}{A_r 2\ell^2} \int_0^{2\ell} G_r(x) dx, \quad A_r = \frac{\partial G_r}{\partial x} \Big|_{x=0} \text{ or } I$$

である。\$G'_r(x)\$ (\$r = 0, 1, 2, \dots\$) についてフーリエ展開すれば、

$$\dot{\phi}_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rk} \phi_k(x) + \alpha_{r0} \quad (2.41)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha_{r0} &= 0 \\ \alpha_{rk} &= \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} G'_r(x) \phi_k(x) dx \end{aligned}$$

となる。結局、\$r = N\$ 次で打ち切れば、

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \sin \frac{\pi}{\ell} x \\ \frac{d}{dt} \cos \frac{\pi}{\ell} x \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \sin \frac{N\pi}{2\ell} x \\ \frac{d}{dt} \cos \frac{N\pi}{2\ell} x \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} (A + \beta_0 A_0)x + \sum_{k=1}^N \alpha_{0k} \phi_k(x) \\ \beta_1 A_1 x + \sum_{k=1}^N \alpha_{1k} \phi_k(x) \\ \beta_2 A_2 x + \sum_{k=1}^N \alpha_{2k} \phi_k(x) \\ \vdots \\ \beta_{N-1} A_{N-1} x + \sum_{k=1}^N \alpha_{N-1 k} \phi_k(x) \\ \beta_N A_N x + \sum_{k=1}^N \alpha_{N k} \phi_k(x) \end{pmatrix} \\ &= B\phi(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

となり、あらためて \$\phi\$ を \$z\$ で書き表すと

$$\begin{aligned} \Sigma'_2 : \dot{z}(t) &= Bz(t) \\ z(0) &= \phi(x_0) \end{aligned} \quad (2.43)$$

ただし、

$$B = \begin{pmatrix} A + \beta_0 A_0 & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0N} \\ \beta_1 A_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_N A_N & \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

となり、 z に関する形式的線形システム Σ'_2 ((2.43) 式) が具体的に得られた。よって原点に定常点をもつ非線形システム (2.36) 式は、定常項のない同次線形システム (2.43) 式の Σ'_2 に変換され、逆変換は (2.3) 式より近似解 \hat{x} が求まる。

2.3 離散フーリエ展開による形式的線形化

2.3.1 離散フーリエ展開型線形化

計算機に適した手法である離散フーリエ展開を基にした形式的線形化について述べる [22]。ここで対象とするシステムは、

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \dot{x} &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \in D\end{aligned}\tag{2.45}$$

ただし、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: n 次元状態ベクトル、 $D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n$: 長方形定義域、 p_i : x_i 定義区間幅の半分、 m_i : 定義区間幅の中心、および $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。

(2.45) 式を離散フーリエ展開により形式的線形化を行う。まず、フーリエ展開の基本区間が $D_0 = \prod_{i=1}^n [0, 2\pi]$ であることから、

$$y = \pi P^{-1}(x - m) + \pi \mathcal{I}\tag{2.46}$$

ただし、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\tag{2.47}$$

と変数変換する。(2.46) 式を時刻 t で微分すれば、

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x^T} \dot{x} = \pi P^{-1} f(x) = \pi P^{-1} f\left(P\left(\frac{y}{\pi} - \mathcal{I}\right) + m\right) \equiv F(y)\tag{2.48}$$

でこの定義域は、基本区間の D_0 である。

さて、各 $y_i (i = 1, \dots, n)$ に関し基本区間 $[0, 2\pi]$ で定義される線形独立な三角関数として、

$$T_0(y_i) \equiv 1 \quad (2.49)$$

$$T_r(y_i) \equiv \begin{cases} \sin \frac{r}{2} y_i & (r : \text{偶数}) \\ \cos \frac{(r+1)}{2} y_i & (r : \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.50)$$

を考える。従って

$$S_r(y_i) \equiv \frac{dT_r(y_i)}{dy_i} \quad (2.51)$$

に関し、

$$S_0(y_i) = 0 \quad (2.52)$$

$$S_r(y_i) = \begin{cases} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} y_i & (r : \text{偶数}) \\ -\frac{r+1}{2} \sin \frac{r+1}{2} y_i & (r : \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.53)$$

となる。ここで線形化関数

$$\begin{aligned} \phi(y) = & [T_{(10\dots 0)}(y), T_{(20\dots 0)}(y), \dots, T_{(N_1\dots 00)}(y), \\ & T_{(010\dots 0)}(y), T_{(020\dots 0)}(y), \dots, T_{(0N_2 0\dots 0)}(y), \\ & T_{(110\dots 0)}(y), T_{(120\dots 0)}(y), \dots, T_{(r_1\dots r_n)}(y), \dots, T_{(N_1 N_2 \dots N_n)}(y)]^T \end{aligned} \quad (2.54)$$

ただし、

$$T_{(r_1\dots r_n)}(y) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_i) \quad (2.55)$$

を定義する。線形化関数 $\phi(y)$ の各要素の時刻 t での微分方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(r_1\dots r_n)}(y) &= \frac{\partial T_{(r_1\dots r_n)}(y)}{\partial y^T} F(y) \\ &= S_{(r_1\dots r_n)}(y) F(y) \equiv G_{(r_1\dots r_n)}(y) \end{aligned} \quad (2.56)$$

となり、これを各 y_i に関し N_i 次までの離散フーリエ展開式

$$\hat{G}_{(r_1\dots r_n)}(y) = \sum_{q_1=0}^{N_1} \dots \sum_{q_n=0}^{N_n} C_{[q_1\dots q_n]}^{[r_1\dots r_n]} T_{(q_1\dots q_n)}(y) \quad (2.57)$$

で近似する。このとき各 i で、

$$y_{ij} = \frac{2\pi}{N_i + 1} j \quad (j = 0, \dots, N_i) \quad (2.58)$$

とおけば係数が、

$$C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} = 2^{n-\eta} \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i + 1} \sum_{j_1=0}^{N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{N_n} G_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) T_{(q_1 \dots q_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) \quad (2.59)$$

ただし、

$$\eta = \{q_i = 0 \text{ の個数} : 1 \leq i \leq n\} \quad (2.60)$$

として与えられる [23]。故に (2.56) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(y)$ を (2.57) 式の多項式 $\hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(y)$ で近似すれば (2.54) 式の $\phi(y)$ が、

$$\hat{\phi}(y) \cong A\phi(y) + b \quad (2.61)$$

となり次の形式的線形システムが得られる。

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (2.62)$$

$$z(0) = \phi(y(0)) = \phi(\pi P^{-1}(x_0 - m) + \pi I)$$

$$z \in R^{(N_1+1)(N_2+1)\dots(N_n+1)-1}$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} C_{[10 \dots 0]}^{[10 \dots 0]} & \dots & C_{[q_1 \dots q_n]}^{[10 \dots 0]} & \dots & C_{[N_1 \dots N_n]}^{[10 \dots 0]} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{[10 \dots 0]}^{[r_1 \dots r_n]} & \dots & C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} & \dots & C_{[N_1 \dots N_n]}^{[r_1 \dots r_n]} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{[10 \dots 0]}^{[N_1 \dots N_n]} & \dots & C_{[q_1 \dots q_n]}^{[N_1 \dots N_n]} & \dots & C_{[N_1 \dots N_n]}^{[N_1 \dots N_n]} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$b = \begin{pmatrix} C_{[00\dots 0]}^{[10\dots 0]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[r_1\dots r_n]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[N_1\dots N_n]} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

ここで逆変換 (ϕ^{-1}) について考える。(2.54) 式のベクトル $\phi(y)$ より、

$$T_{(0\dots 0r_i 0\dots 0)}(y_i) = T_{r_i}(y_i).$$

要素のみを抽出するベクトル

$$\psi_{r_i i} = [0\dots 010\dots 0]^T$$

すなわち

$$T_{r_i}(y_i) = \psi_{r_i i}^T \phi(y)$$

を導入する。 $T_1(y_i) = \cos y_i$ と $T_2(y_i) = \sin y_i$ から

$$y_i = \begin{cases} \cos^{-1} T_1(y_i) & (T_2(y_i) \geq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi - \cos^{-1} T_1(y_i) & (T_2(y_i) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので本形式的線形化による y_i の近似値 \hat{y}_i を、例えば $i = 1, \dots, n$ に対し

$$\hat{y}_i(t) = \begin{cases} \cos^{-1} \psi_{1i}^T z(t) & (\psi_{2i}^T z(t) \geq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi - \cos^{-1} \psi_{1i}^T z(t) & (\psi_{2i}^T z(t) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と決める。 $\hat{y} = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n]^T$ と (2.46) 式より x の近似解 \hat{x} が

$$\hat{x}(t) = P(\hat{y}(t)/\pi - I) + m \quad (2.65)$$

として求められる。

以上まとめて以下の計算アルゴリズムを得る。

計算アルゴリズム

- (1) Given $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$
- (2) Set m_i, p_i and N_i ($1 \leq i \leq n$)
- (3) $F(y) = \pi P^{-1} f(P(y/\pi - \mathcal{I}) + m)$
- (4) For $i = 1, \dots, n$
 - For $j = 0, \dots, N_i$
 - (i) $y_{ij} = \cos \frac{2\pi}{N_i + 1} j$
 - (ii) $T_0(y_{ij}) = 1$
 $S_0(y_{ij}) = 0$
 - (iii) For $r_i = 1, 2, 3, \dots$
 - $T_{2r_i}(y_{ij}) = \sin r_i y_{ij}$
 - $T_{2r_i-1}(y_{ij}) = \cos r_i y_{ij}$
 - $S_{2r_i}(y_{ij}) = r_i \cos r_i y_{ij}$
 - $S_{2r_i-1}(y_{ij}) = -r_i \sin r_i y_{ij}$
 - until $T_{N_i}(y_{ij})$ and $S_{N_i}(y_{ij})$
- (5) For $i = 1, \dots, n$
 - For $r_i = 0, \dots, N_i$
 - For $j_i = 0, \dots, N_i$
 - $T_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1} \dots y_{nj_n}) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_{ij_i})$
 - $S_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1} \dots y_{nj_n}) = \prod_{i=1}^n S_{r_i}(y_{ij_i})$
- (6) $A = \left(C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} \right)$, $b = \left(C_{[0 \dots 0]}^{[r_1 \dots r_n]} \right)$

where

$$C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} = 2^{n-\eta} \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i + 1} \sum_{j_1=0}^{N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{N_n} S_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) F(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) T_{(q_1 \dots q_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n})$$

(7) Solve $\dot{z}(t) = Az(t) + b$, $z(0) = \phi(\pi P^{-1}(x_0 - m) + \pi \mathcal{I})$

(8) For $i = 1, \dots, n$

$$\hat{y}_i(t) = \begin{cases} \cos^{-1} \psi_{1i}^T z(t) & (\psi_{2i}^T z(t) \geq 0 \text{ のとき}) \\ 2\pi - \cos^{-1} \psi_{1i}^T z(t) & (\psi_{2i}^T z(t) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(9) $\hat{x}(t) = P(\hat{y}(t)/\pi - \mathcal{I}) + m$

2.3.2 離散フーリエ展開型同次線形化

離散フーリエ展開による線形化に対し、第 2.2.3 節と同様に定常項のない形式的同次線形化法について述べる [24]。

(2.45) 式の n 次元非線形システムにおいて、定常状態: $\dot{x} = f(x) = 0$ すなわち (2.48) 式より $\dot{y} = F(y) = 0$ となるときの定常値を $x = x_\infty$ または $y = y_\infty$ ($t \rightarrow \infty$) とする。

(2.62) 式の定常状態を

$$\dot{z}(\infty) = Az(\infty) + b = 0$$

とおき

$$\tilde{z}(t) = z(t) - z(\infty) \tag{2.66}$$

を定義すれば、

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{z}(\infty) \\ &= Az(t) + b - (Az(\infty) + b) \\ &= A(z(t) - z(\infty)) \\ &= A\tilde{z}(t) \end{aligned}$$

となり (2.62) 式の形式的線形システムが

$$\Sigma_2'' : \dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) \quad (2.67)$$

$$\tilde{z}(0) = \phi(\pi P^{-1}(x_0 - m) + \pi I) - \phi(\pi P^{-1}(x_\infty - m) + \pi I)$$

となる。また、このとき

$$z(t) = \tilde{z}(t) + z(\infty) \quad (2.68)$$

である。よって非線形システム Σ_1 ((2.45) 式) は、定常項のない形式的同次線形システム (2.67) 式の Σ_2'' に変換され、逆変換は (2.68) 式と第 2.3.1 節の計算アルゴリズムのステップ 8、9 により近似解 \hat{x} が求まる。

2.4 誤差限界

フーリエ展開による形式的線形化の誤差限界について考察する。ノルムとして、ベクトルのノルムは通常のユークリッドノルムまたは最大値ノルムとし、行列についてはそのユークリッドノルムから誘導される作用素ノルムとする。すなわち、 $\max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$ 。

まず、第 2.2 節の連続フーリエ展開による形式的線形化の誤差限界について考察する。(2.24) 式の線形化関数 $\phi(x)$ すなわち

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x))$$

の解とし、(2.32) 式の近似関数 $z(t)$ すなわち形式的線形化の解とすると誤差伝搬は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi(x(t)) - z(t)) &= \dot{\phi}(x) - \dot{z}(t) \\ &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x)) - (Bz(t) + c) \\ &= B\phi(x) + c - (Bz(t) + c) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x)) - (B\phi(x) + c) \\ &= B(\phi(x) - z(t)) + \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x)) - B\phi(x) - c \right) \quad (2.69) \end{aligned}$$

であり、この微分方程式を解けば、

$$\phi(x) - z(t) = e^{Bt}(\phi(x_0) - z(0)) + \int_0^t e^{B(t-\tau)} \varepsilon(x) d\tau \quad (2.70)$$

ただし、

$$\varepsilon(x) \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} (Ax + f(x)) - B\phi(x) - c \quad (2.71)$$

となる。ここで、

$$\varepsilon = \sup_x \|\varepsilon(x)\| \quad (2.72)$$

とおき (2.70) 式の両辺のノルムをとれば、

$$\|\phi(x) - z(t)\| \leq \|e^{Bt}\| \|\phi(x_0) - z(0)\| + \varepsilon \int_0^t \|e^{B(t-\tau)}\| d\tau \quad (2.73)$$

となる。逆変換 (2.35) 式より、誤差限界は

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}(t)\| &\leq \|\phi(x) - z(t)\| \\ &\leq \|e^{Bt}\| \|\phi(x_0) - z(0)\| + \varepsilon \int_0^t \|e^{B(t-\tau)}\| d\tau \end{aligned} \quad (2.74)$$

となる。第 1 項は初期値誤差で、 B が安定ならば $\phi(x_0) - z(0)$ が 0 でなくても時間とともに指数関数的に減衰する。第 2 項は関数近似誤差を表し、 B が安定ならば積分は有界であるから誤差限界は主として ε で決まる。

次に離散フーリエ展開による形式的線形化の誤差限界について考察する。まず、(2.54) 式の線形化関数 $\phi(y)$ と (2.62) 式の近似関数 $z(y)$ との誤差伝搬については、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi(y(t)) - z(t)) &= \dot{\phi}(y) - \dot{z}(t) \\ &= \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} f(y) - (Az(t) + b) \\ &= A\phi(y) + b - (Az(t) + b) + \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} f(y) - (A\phi(y) + b) \\ &= A(\phi(y) - z(t)) + \left(\frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} f(y) - A\phi(y) - b \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

であり、この微分方程式を解けば、

$$\phi(y) - z(t) = e^{At}(\phi(y(0)) - z(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \varepsilon'(y) d\tau \quad (2.76)$$

ただし、

$$\varepsilon'(y) = \sup_{D_0} \left\| \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} f(y) - A\phi(y) - b \right\| \quad (2.77)$$

となる。ここで、

$$\varepsilon' = \sup_y \|\varepsilon'(y)\| \quad (2.78)$$

とおき (2.76) 式の両辺のノルムをとれば、

$$\|\phi(x) - z(t)\| \leq \|e^{At}\| \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \varepsilon' \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| d\tau \quad (2.79)$$

となる。よって、逆変換 (2.65) 式より誤差限界は、

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}(t)\| &= \left\| P\left(\frac{y(t)}{\pi} - \mathcal{I}\right) + m - P\left(\frac{\hat{y}(t)}{\pi} - \mathcal{I}\right) - m \right\| \\ &= \|P/\pi\| \|y(t) - \hat{y}(t)\| \\ &\leq \|P/\pi\| \|\phi(y) - z(t)\| \\ &\leq \|P/\pi\| \left\{ \|e^{At}\| \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \varepsilon' \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| d\tau \right\} \quad (2.80) \end{aligned}$$

となり第1項は初期値誤差で、第2項は関数近似誤差を表す。フーリエ展開の性質 [23] より、連続及び離散フーリエ展開型線形化はそれぞれ (2.72)、(2.78) 式の ε , ε' を最小にする意味で最良である。よって (2.74)、(2.80) 式より次数 $N_i (i = 1, \dots, n)$ の増加と共に誤差の減少が可能である。

2.5 数値実験

以下に各種の計算機シミュレーションを示す。計算機シミュレーションは、パソコン(NEC PC9801)を用いてフォートランでプログラムを組み数值計算を行ったものであり、微分方程式はルンゲクッタ法やオイラー法 [25] を用いて解いた。

2.5.1 例題 1(連続フーリエ展開型線形化)

次のスカラーシステム

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \dot{x}(t) &= -x(t) + x^2(t) & (2.81) \\ x(0) &= x_0 \in [0, 2\ell] \subset R \\ &(x_0 = 0.8, \ell = 0.42)\end{aligned}$$

を考える。第 2.2.1 節により (2.81) 式は次の形式的線形システム

$$\begin{aligned}\Sigma_2 : \dot{z}(t) &= Bz(t) + c & (2.82) \\ z(0) &= \phi(x_0)\end{aligned}$$

に変換される。連続フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータとし、(2.82) 式を解き、逆変換 (2.3) 式によって得られた近似解 \hat{x} と、(2.81) 式の解 x (*true*) との精度比較を行う。このとき $z(t)$ 、および線形化係数 B, c は例えば $N = 4$ のとき、

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sin \frac{\pi}{\ell} x \\ \cos \frac{\pi}{\ell} x \\ \sin \frac{2\pi}{\ell} x \\ \cos \frac{2\pi}{\ell} x \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\ell^2 \\ \frac{2\ell}{\pi} \\ -1 + 2\ell \\ \frac{\ell}{\pi} \\ -1 + 2\ell \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4\ell^2}{\pi} & \frac{4\ell^2}{\pi^2} - \frac{4\ell^2}{\pi} & -\frac{2\ell^2}{\pi} & \frac{\ell^2}{\pi^2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \ell & -\pi + \frac{4}{3}\pi\ell + \frac{\ell}{2\pi} & \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\ell & \frac{20\ell}{9\pi} \\ 0 & \frac{\ell}{2\pi} + 1 - \frac{4}{3}\pi\ell & -\frac{1}{2} + \ell & -\frac{16\ell}{9\pi} & \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\ell \\ 0 & -\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\ell & \frac{9\pi}{40\ell} & \frac{1}{2} - \ell & \frac{\ell}{4\pi} - 2\pi + \frac{8}{3}\pi\ell \\ 0 & -\frac{32\ell}{9\pi} & -\frac{8}{3} + \frac{16}{3}\ell & \frac{\ell}{4\pi} + 2\pi - \frac{8}{3}\pi\ell & -\frac{1}{2} + \ell \end{pmatrix}$$

となる。なおこの線形化係数 B, c は第 2.2.1 節 (2.11)、(2.12) 式の積分計算を行い求めたものである。図 2.1はその結果である。図 2.2は近似解 \hat{x} と解 $x(true)$ の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。従って、誤差グラフの傾斜の急な箇所は誤差が増大していることを意味し、傾斜が平らな箇所は誤差が小さいことを意味している。

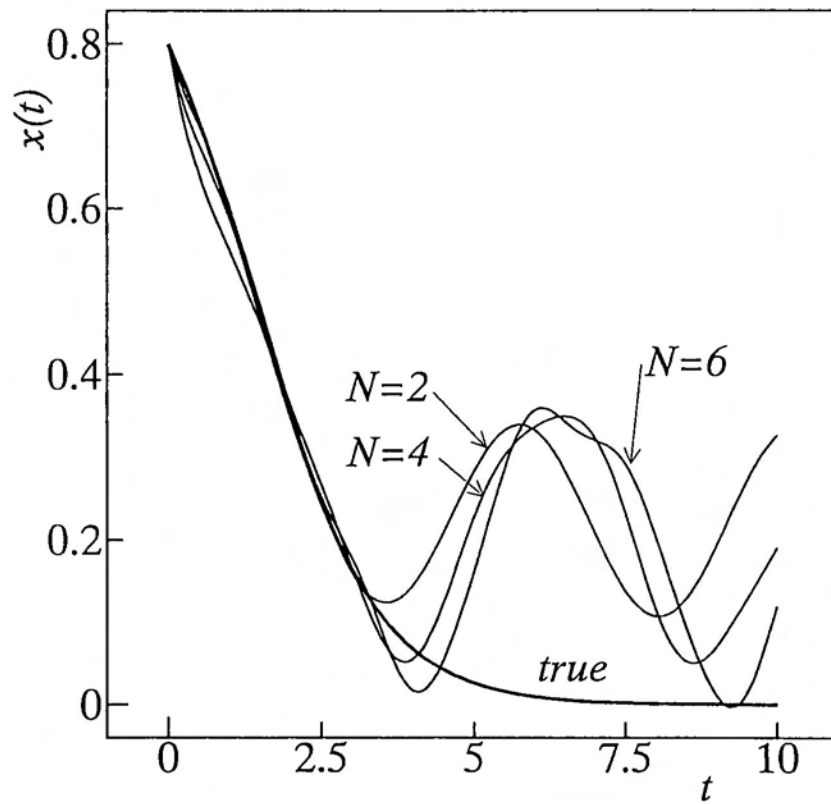


図 2.1 連続フーリエ展開型線形化による近似値

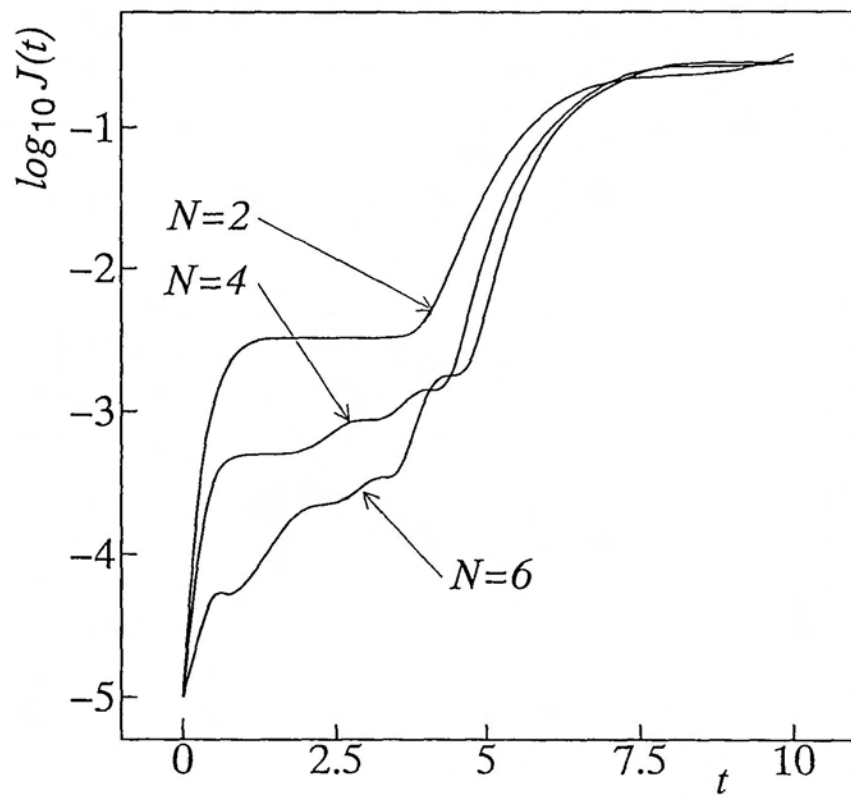


図 2.2 連続フーリエ展開型線形化による近似誤差

2.5.2 例題 2(連続フーリエ展開型同次線形化)

第 2.2.3 節の手法を第 2.5.1 節例題 1 と同様のシステム

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \quad (2.83)$$

$$x(0) = x_0 \in [0, 2\ell] \subset R$$

$$(x_0 = 0.8, \ell = 0.42)$$

に適用すると、(2.83) 式は次の形式的同次線形システム

$$\Sigma'_2 : \dot{z}(t) = Bz(t) \quad (2.84)$$

$$z(0) = \phi(0)$$

に変換される。連続フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータとし、(2.84) 式を解き、逆変換 (2.3) 式によって得られた近似解 \hat{x} と、(2.83) 式の解 x (*true*) との精度比較を行う。図 2.3 はその結果である。図 2.4 は近似値 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。第 2.5.1 節例題 1 の結果 (図 2.1、図 2.2) と比較した場合、形式的同次線形化は広い領域、特に定常点での精度が向上していることがわかる。

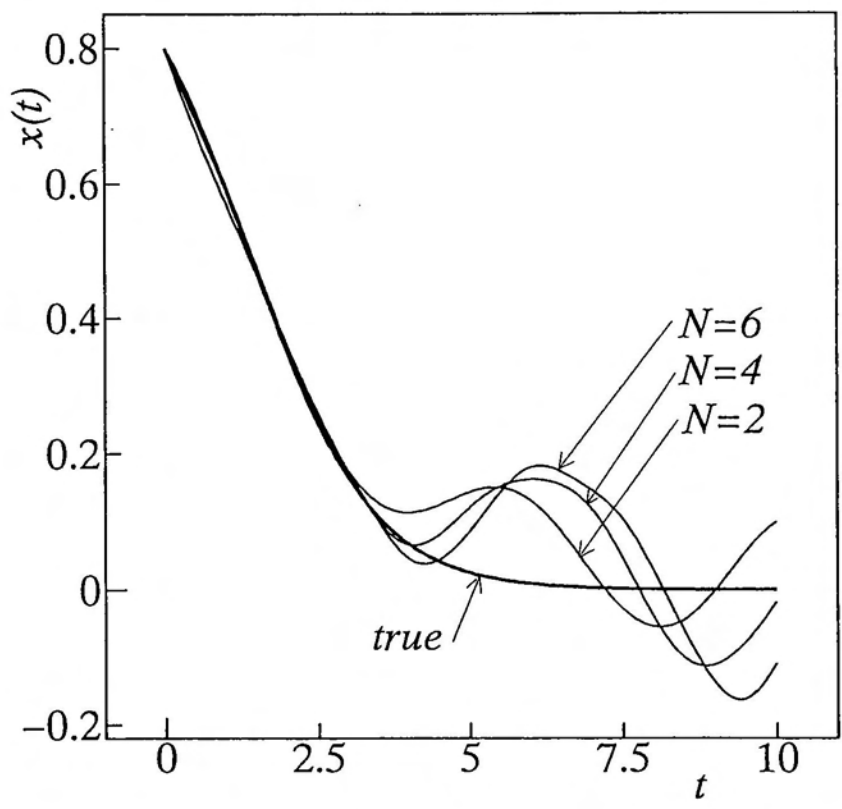


図 2.3 連続フーリエ展開型同次線形化による近似値

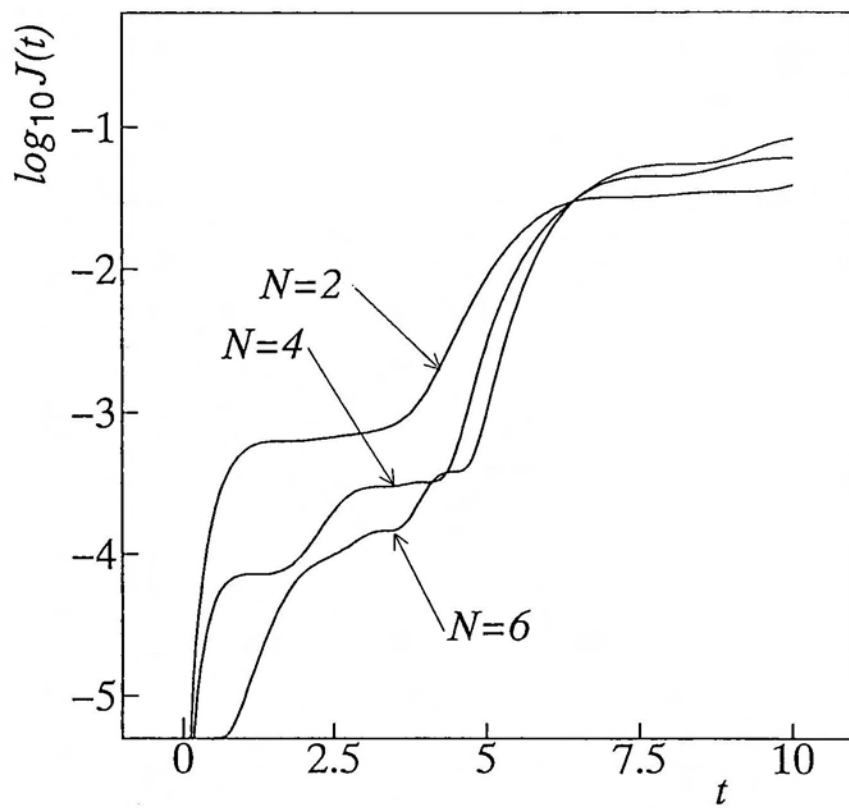


図 2.4 連続フーリエ展開型同次線形化による近似誤差

2.5.3 例題 3(離散フーリエ展開型同次線形化その 1)

第 2.3.2 節の手法を第 2.5.1 節例題 1 と同様のシステム

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \quad (2.85)$$

$$x_0 = 0.8, D = [0, 0.94], P = 0.47, m = 0.47$$

に適用すると、(2.85) 式は次の形式的同次線形システム

$$\Sigma_2'' : \dot{z}(t) = Az(t) \quad (2.86)$$

$$\tilde{z}(0) = \phi(\pi P^{-1}(x_0 - m) + \pi \mathcal{I}) - \phi(\pi P^{-1}(x_\infty - m) + \pi \mathcal{I})$$

に変換される。離散フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータにし、(2.86) 式を解き、逆変換によって得られた近似解 \hat{x} と、(2.85) 式の解 x (*true*) との精度比較を行う。図 2.5 はその結果である。図 2.6 は近似値 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。第 2.5.2 節例題 2 の結果 (図 2.3、図 2.4) と比較した場合、離散フーリエ展開型同次線形化は連続フーリエ展開型同次線形化より精度がよいことがわかる。

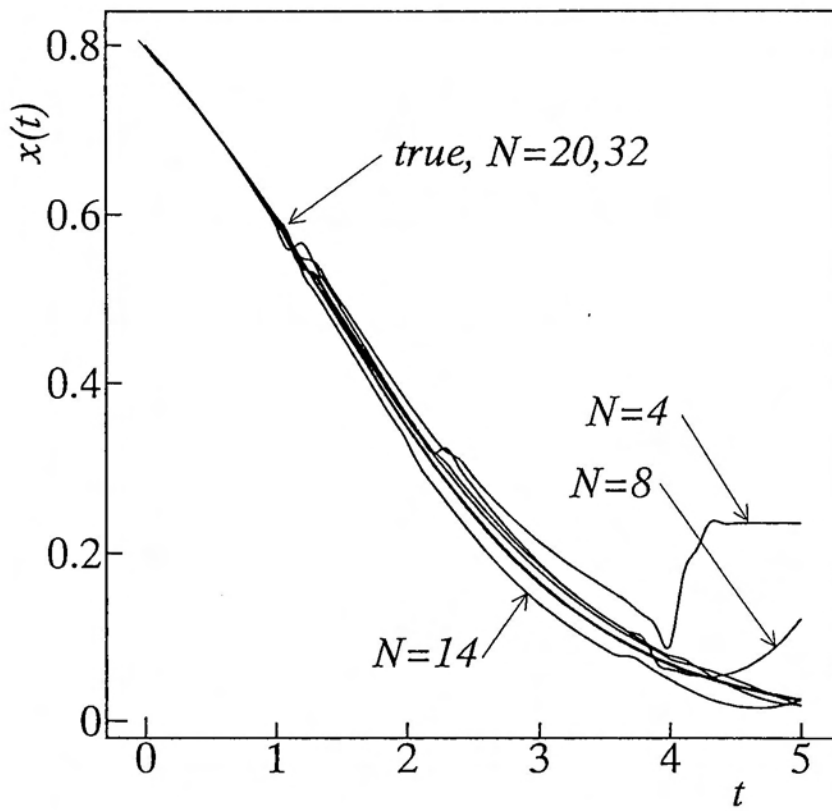


図 2.5 離散フーリエ展開型同次線形化による近似値 (スカラーシステム)

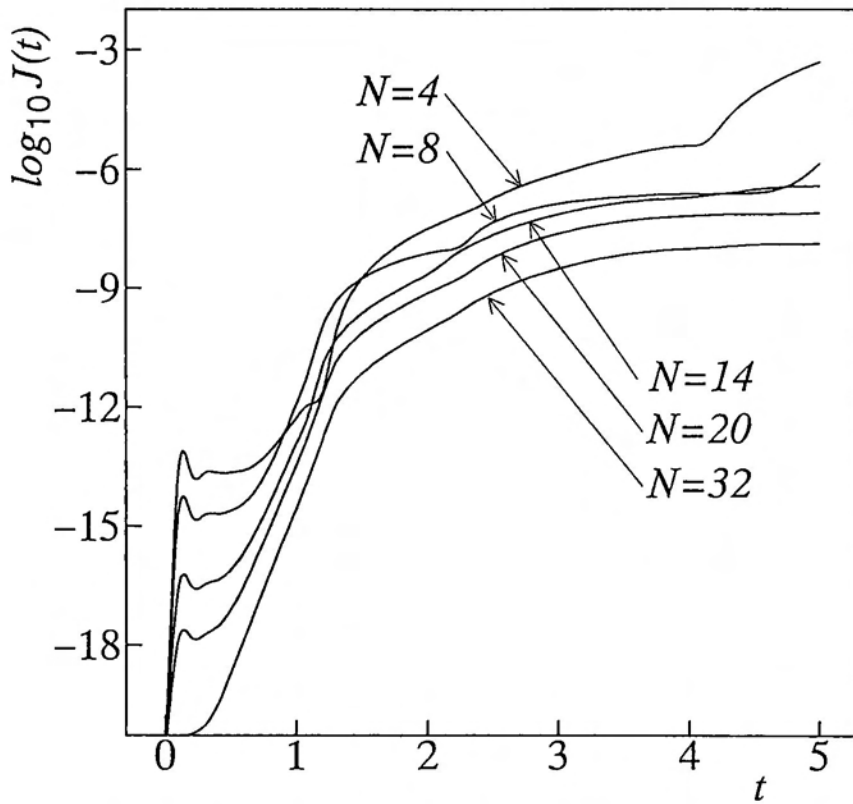


図 2.6 離散フーリエ展開型同次線形化による近似誤差 (スカラーシステム)

2.5.4 例題 4(離散フーリエ展開型同次線形化その 2)

第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化を用いて、次の電力系統の同期機動揺方程式

$$M\ddot{\delta} + D_0\dot{\delta} + P_{em} \sin \delta = P_{in} \quad (2.87)$$

を考える [26]。ただし、 δ : 発電機負荷角、 M : 発電機単位慣性定数、 D_0 : 相互制動係数、 P_{em} : 発電機の実出力、 P_{in} : 発電機の機械入力。負荷角 δ と角速度 $\dot{\delta}$ に対し、 $x_1(t) = \delta(t) - \delta(\infty)$ 、 $x_2(t) = \dot{\delta}(t)$ を状態変数に選べば次の 2 次元非線形システム

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_1 \sin(x_1(t) + \delta(\infty)) + a_2 x_2 + a_0 \end{cases} \quad (2.88)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} D &= [-0.41, 0.1] \times [-0.8, 1.0], x_1(0) = \delta(0) - \delta(\infty) = 0.6 - \delta(\infty), \\ x_2(0) &= \dot{\delta}(0) = 0.2, M = 0.0265, D_0 = 0.005, P_{em} = 1.0, P_{in} = 0.8, \\ a_0 &= P_{in}/M, a_1 = -P_{em}/M, a_2 = -D_0/M, \delta(\infty) = \sin^{-1}(P_{in}/P_{em}). \end{aligned}$$

第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化より、(2.88) 式は次の形式的同次線形システム

$$\begin{aligned} \Sigma_2'' : \dot{\tilde{z}}(t) &= A\tilde{z}(t) \\ \tilde{z}(0) &= \phi(\pi P^{-1}(x_0 - m) + \pi I) - \phi(\pi P^{-1}(x_\infty - m) + \pi I) \end{aligned} \quad (2.89)$$

へ変換される [27]。次数 $N = N_1 = N_2$ をパラメータにする。図 2.7 と図 2.8 は、(2.89) 式を解いて逆変換 ((2.65), (2.68) 式) より得られた近似解 \hat{x} と (2.88) 式の解 $x(true)$ のそれぞれ第 1 要素と第 2 要素のグラフである。図 2.9、図 2.10 はそれぞれそのときの近似解 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J_i(t) = \int_0^t (x_i(\tau) - \hat{x}_i(\tau))^2 d\tau, \quad (i = 1, 2)$$

のグラフである。

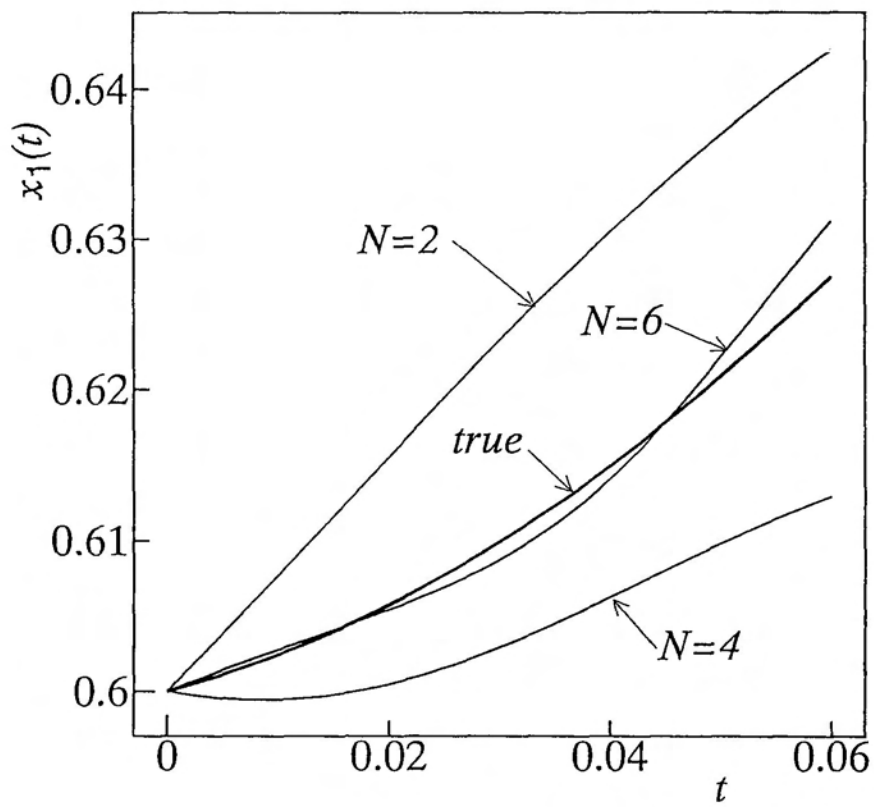


図 2.7 離散フーリエ展開型同次線形化による近似値 (\hat{x}_1) (電力系統)

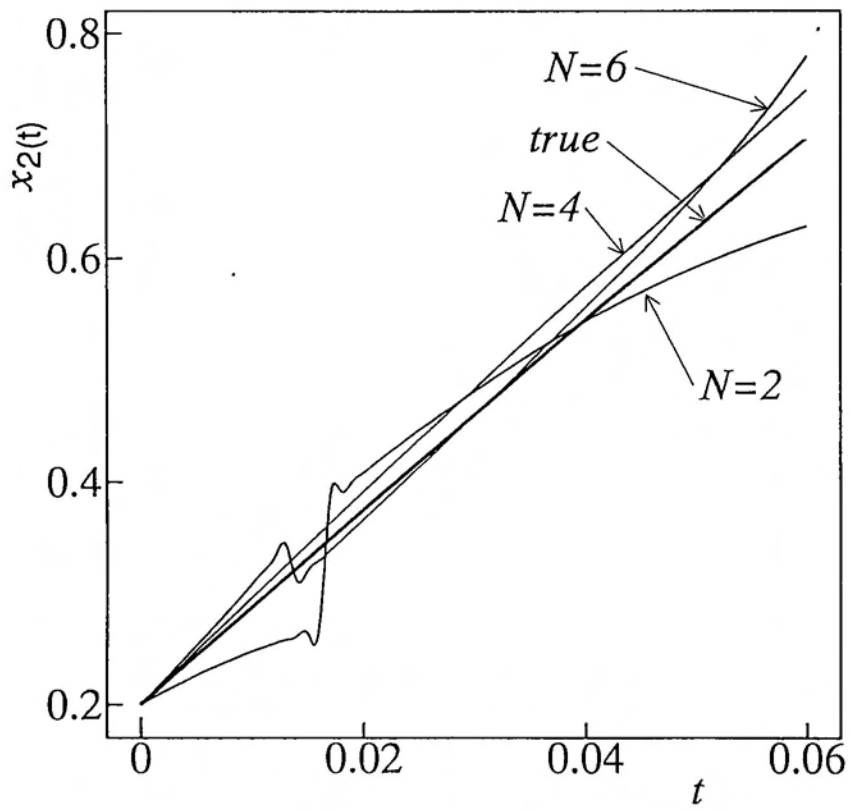


図 2.8 離散フーリエ展開型同次線形化による近似値 (\hat{x}_2) (電力系統)

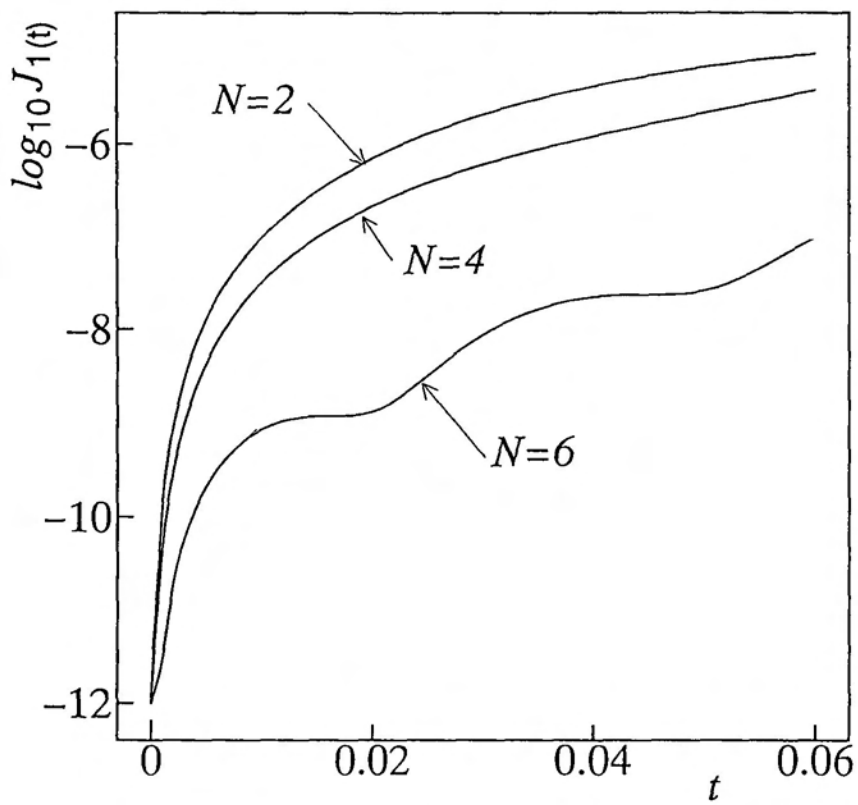


図 2.9 離散フーリエ展開型同次線形化による近似誤差 (J_1) (電力系統)

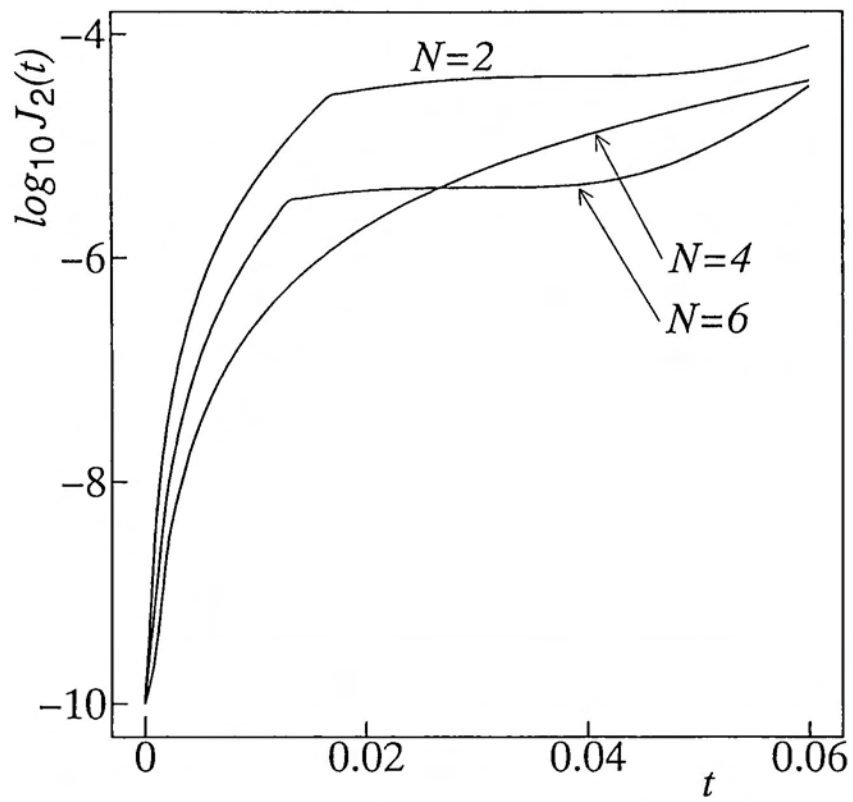


図 2.10 離散フーリエ展開型同次線形化による近似誤差 (J_2) (電力系統)

2.5.5 結言

本章ではフーリエ展開による形式的線形化について、第 2.2 節において連続フーリエ展開による形式的線形化、第 2.3 節では離散フーリエ展開による形式的線形化について述べ、第 2.4 節において誤差限界について考察した。

第 2.5 節の各種計算機シミュレーションにより本手法の有効性を確認した。まず、非線形スカラーシステムに対していくつかの線形化を行った。第 2.5.1 節例題 1(図 2.1、図 2.2) に示すように、連続フーリエ展開型線形化は定常点近傍において近似による非零定常項存在のため線形化の近似精度が悪くなる場合がある。そこで第 2.2.3 節の連続フーリエ展開型同次線形化を用いると、図 2.3、図 2.4 に示すように定常点近傍の線形化の近似精度の向上がみられた。さらに、第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化を用いると図 2.5、図 2.6 に示すように線形化の精度が向上していることがわかる。最後に多次元非線形システムの例として、離散フーリエ展開型同次線形化を電力システムの同期機動揺方程式に適用した(図 2.7~図 2.10)。以上の結果より、近似次数の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。また、問題点として設定した定義域 (l_i) に依存して結果が悪い場合があった。

連続フーリエ展開型線形化は、そのアルゴリズムより線形化係数 A と b の要素計算にやっかいな積分計算を必要とするが、線形化関数の要素に原システムの状態方程式を含むので逆変換が容易である。一方、離散フーリエ展開型線形化は計算機により自動的に線形化でき極めて機械的である。さらに高速フーリエ変換 (FFT) を用いれば計算量の簡略化が可能である。また、逆変換については連続フーリエ展開型線形化の場合ほど容易ではないが、特に問題はない。よって、計算機を使ってデジタル信号処理に適した手法である離散フーリエ展開型同次線形化がより実用的な線形化であろう。

第 3 章

フーリエ展開型線形化の適用例

3.1 緒言

第 2 章でフーリエ展開による形式的線形化について述べた。ここではその形式的線形化の適用例として、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行う。

まず非線形オブザーバであるが、構成するシステムは非線形時不変システムを対象にし、コントロールは一定または零 (ステップ入力) とする。このシステムに対し、第 2.2 節の連続フーリエ展開による形式的線形化と、第 2.3 節の離散フーリエ展開による形式的線形化により線形化を施し、それぞれの形式的線形システムに対し同次元オブザーバ [28, 29] を適用し、非線形オブザーバを構成する。次に非線形フィルタについて述べる。対象とするシステムは非線形オブザーバの場合と同じであり、観測値に白色正規性雑音があるものとする。このシステムに対し、第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化により線形化を行い、線形定常カルマンフィルタ [30] を適用し、非線形フィルタを構成する。

最後にいくつかの数値実験を行い、有効性の確認をする。連続フーリエ展開型、離散フーリエ展開型それぞれの形式的線形化による非線形オブザーバと、離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタの計算機シミュレーションを示し、フーリエ展開の近似次数の増加と共に本手法による非線形オブザーバや非線形フィルタの推定精度の向上の確認を行う。

3.2 非線形オブザーバの構成

3.2.1 連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ

まず第 2.2 節の連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバの構成について述べる。

次の n 次元非線形時不変システムが力学系、観測系それぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \\ \zeta(t) = Ex(t) + h(x(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$
$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。ただし、 $D = \prod_{i=1}^n [0, 2l_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。さて、(3.1) 式の力学系は第 2.2.2 節より次の形式的線形システム

$$\dot{z}(t) = Bz(t) + c \quad (3.2)$$

に変換される。次に観測系について線形化を行う。まず、(3.1) 式の観測系の非線形項 $h(x)$ について、

$$a \equiv \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} h(x) dx \quad (3.3)$$

と定義し、観測値 ζ について

$$\tilde{\zeta}(t) \equiv \zeta(t) - a \quad (3.4)$$

と置けば、観測系は $\tilde{\zeta}$ について

$$\tilde{\zeta}(t) = Ex(t) + h(x(t)) - a \quad (3.5)$$

となる。(3.5) 式の $h(x) - a$ を (2.26)~(2.29) 式と同様の計算手順により連続フーリエ

展開すれば、定常項のない形式的同次線形システム

$$\tilde{\zeta}(t) = Hz(t) \quad (3.6)$$

を得る。ただし、 $h(x) - a$ を (2.27) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(x)$ に対応させれば、 E が (2.32) 式の A に対応する。従って、(3.2)、(3.6) 式より例えば線形の同一次元オブザーバ [28] が適用できて、推定式が

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= B\hat{z}(t) + c + K(\tilde{\zeta}(t) - H\hat{z}(t)) \\ &= (B - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t) + c \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ただし、 K は $B - KH$ の固有値の実部がすべて負になるように選定される。推定値 $\hat{x}(t)$ は、(3.7) 式を解き逆変換

$$\hat{x}(t) = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]\hat{z}(t) \quad (3.8)$$

によって求まる。

3.2.2 連続フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ

次に定常点近傍での近似精度向上を考慮した、第 2.2.3 節の連続フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバを構成する。システムは (3.1) 式と同じ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) \\ \zeta(t) = Ex(t) + h(x(t)) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。この (3.9) 式の力学系は、第 2.2.3 節より

$$\dot{z}(t) = Bz(t) \quad (3.10)$$

となり、定常項のない形式的同次線形システムが得られる。この力学系と、(3.9) 式の観測系を線形化した (3.6) 式

$$\tilde{\zeta}(t) = Hz(t)$$

に対し線形の同一次元オブザーバ

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= B\hat{z}(t) + K(\tilde{\zeta}(t) - H\hat{z}(t)) \\ &= (B - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t)\end{aligned}\quad (3.11)$$

が得られる。ただし、 K は $B - KH$ の固有値の実部がすべて負になるように選定される。推定値は、(3.11) 式を解き逆変換 (3.8) 式によって $\hat{x}(t)$ が求まる。

3.2.3 離散フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ

第 2.3.1 節の離散フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバの構成について述べる [31]。

次の n 次元非線形時不変システムが力学系、観測系それぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \zeta(t) = h(x(t)) \end{cases}\quad (3.12)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。ただし、 $D = \prod_{i=1}^n [0, 2l_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。さて、(3.12) 式の力学系は第 2.3.1 節より次の形式的線形システム

$$\dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (3.13)$$

に変換される。次に観測系について線形化を行う。まず、(3.12) 式の観測系の非線形項 $h(x)$ を (2.46) 式より、

$$g(y) = h\left(P\left(\frac{y}{\pi} - \mathcal{I}\right) + m\right)$$

とおき離散フーリエ展開すれば、(2.56)~(2.59) 式と同様の計算手順により、

$$g(y) = Hz(t) + h_0 \quad (3.14)$$

を得る。ただし、 $g(y)$ を (2.56) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(y)$ に対応させれば、 H と h_0 がそれぞれ (2.62) 式の A と b に対応する。従って、(3.13)、(3.14) 式より線形の同次元オブザーバが適用できて、推定式が

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + b + K(\zeta(t) - H\hat{z}(t) - h_0) \\ &= (A - KH)\hat{z}(t) + K(\zeta(t) - h_0) + b\end{aligned}\quad (3.15)$$

となる。ただし、 K は $A - KH$ の固有値の実部がすべて負になるように選定される。推定値は (3.15) 式を解き、逆変換 (2.65) 式より $\hat{x}(t)$ が求まる。

3.2.4 離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ

次に定常点近傍での近似精度向上を考慮した、第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバの構成について述べる。

システムは (3.12) と同じ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \zeta(t) = h(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in D \end{cases}\quad (3.16)$$

で与えられたとする。さて、(3.16) 式の力学系は第 2.3.2 節より

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t)\quad (3.17)$$

となり、定常項のない形式的同次線形システムが得られる。

次に観測系について線形化を行う。観測系の非線形項を離散フーリエ展開して (3.14) 式が得られ、定常値での (3.14) 式は一定値の

$$g(y_\infty) = Hz(y_\infty) + h_0$$

であるので、

$$\tilde{\zeta}(t) \equiv \zeta(t) - g(y_\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= g(y) - g(y_\infty) \\
&= H(z(t) - z(\infty)) \\
&= H\hat{z}(t)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。従って、(3.17)、(3.18) 式より線形の同次元オブザーバ

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + K(\tilde{\zeta}(t) - H\hat{z}(t)) \\
&= (A - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

が得られる。ただし、 K は $A - KH$ の固有値の実部がすべて負になるように選定される。推定値は (3.19) 式を解き、 $\hat{z}(t) = \hat{z}(t) + \phi(y_\infty)$ とおき逆変換 (2.65) 式より $\hat{x}(t)$ が求まる。

3.3 非線形フィルタの構成

第 2.3.2 節の離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタの構成について述べる。

次の n 次元非線形確率システムが力学系、観測系それぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \zeta(t) = h(x(t)) + v \end{cases} \quad (3.20)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。ただし、 $D = \prod_{i=1}^n [0, 2l_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分、 v は独立な白色正規性雑音で平均と共分散が、

$$Ev(t) = 0$$

$$E(v(t)v^T(\tau)) = V\delta(t - \tau)$$

とする。さて、(3.20) 式の力学系は第 2.5.3 節より次の形式的同次線形システム

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A\tilde{z}(t) \quad (3.21)$$

に変換される。次に観測系の非線形項 $h(x)$ について第 3.2.4 節と全く同様にして線形化を行うと、

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(t) &\equiv \zeta(t) - g(y_\infty) \\ &= g(y) + v - g(y_\infty) \\ &= H\tilde{z}(t) + v \end{aligned} \quad (3.22)$$

と変換される。従って、(3.21)、(3.22) 式より線形カルマンフィルタ [30] が適用できて、推定式が

$$\dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) + K(\tilde{\zeta}(t) - H\hat{z}(t))$$

$$= (A - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t) \quad (3.23)$$

となる。ただし、フィルタゲイン K は Riccati 方程式：

$$A\Gamma + \Gamma A^T - \Gamma H^T V^{-1} H \Gamma + Q = 0$$

$$K = \Gamma H^T V^{-1}, \quad \Gamma, Q : \text{正定値対象行列}$$

で定まる。よって推定値 $\hat{x}(t)$ は (3.23) 式を解き $\hat{z}(t) = \hat{z}(t) + \phi(y_\infty)$ とおき、逆変換 (2.65) 式より $\hat{x}(t)$ が求まる。

3.4 数値実験

フーリエ展開型線形化の適用例の計算機シミュレーションを示す。まず、非線形オブザーバを連続フーリエ展開型線形化と離散フーリエ展開型同次線形化で構成した数値実験例を示し、最後に非線形フィルタを離散フーリエ型同次線形化で構成した例を示す。

3.4.1 例題 1(連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ)

次の非線形システムの力学系、観測系がそれぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \\ \zeta(t) = -2x(t) + px(t) + \sin qx(t) \end{cases} \quad (3.24)$$
$$x_0 \in [0, 2\ell]$$

$$(x_0 = 0.8, \ell = 0.42, p = -\frac{9}{8\pi\ell^2}, q = \frac{\pi}{6\ell})$$

として第 3.2.1 節の連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバを適用すれば、(3.7) 式

$$\dot{\hat{x}}(t) = (B - KH)\hat{x}(t) + K\tilde{\zeta}(t) + c \quad (3.25)$$

となる。連続フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータにし (3.25) 式を解き、逆変換 (3.8) によって得られた推定値 \hat{x} と (3.24) 式の解 $x(true)$ との精度比較を行う。このときゲイン K は $B - KH$ の固有値がすべて -2 になるように選んだ。図 3.1 は、オブザーバ初期値 $\hat{x}(0) = 0.2$ としたときの結果である。図 3.2 はそのときの推定値 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。この結果より次数 N の増加と共に線形化の精度が向上していることがわかる。

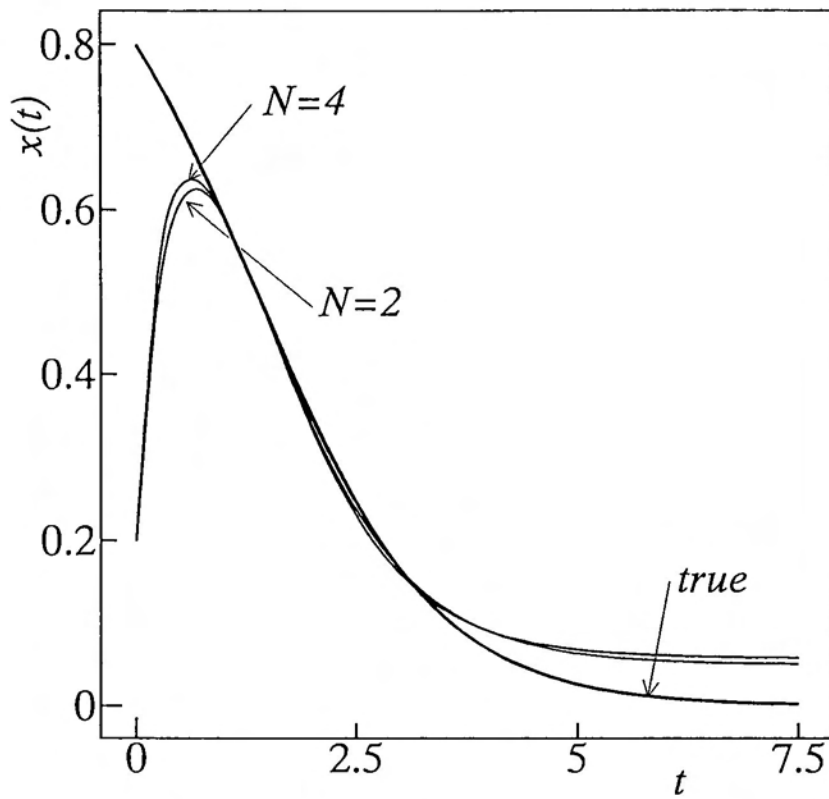


図 3.1 連続フーリエ展開型線形化による非線形オブザーバ

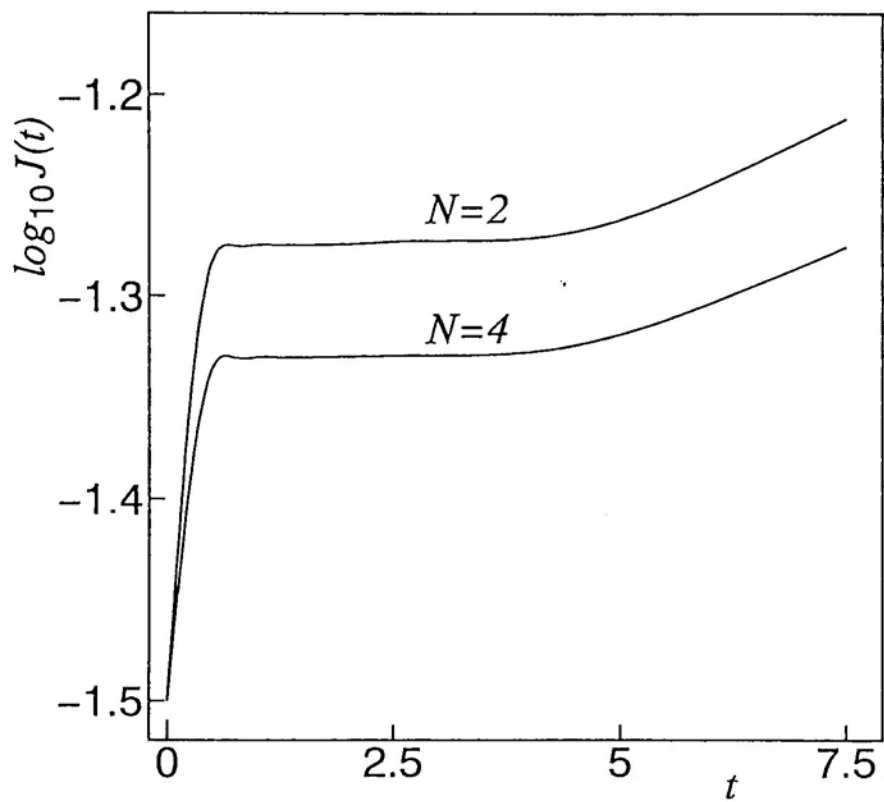


図 3.2 連続フーリエ展開型非線形オブザーバの近似誤差

3.4.2 例題 2(離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ)

次に第 3.2.4 節の離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバの計算機シミュレーション例を示す。非線形システム例として

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \\ \zeta(t) = \sin \frac{2\pi}{\ell} x(t) \end{cases} \quad (3.26)$$

$$x_0 \in [0, \ell]$$

$$(x_0 = 0.8, \ell = 0.9, P = 0.45, m = 0.45)$$

に適用すると、(3.19) 式のオブザーバ

$$\dot{\hat{z}}(t) = (A - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t) \quad (3.27)$$

となる。連続フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータにし (3.26) 式を解き、 $\hat{z}(t) = \hat{z} + \phi(y_\infty)$ とおき逆変換 (2.65) 式より得られた推定値 \hat{x} と (3.26) 式の解 $x(true)$ との精度比較を行う。このときゲイン K は $A - KH$ の固有値がすべて -2.5 になるように選んだ。図 3.3 はオブザーバ初期値 $\hat{x}(0) = 0.4$ としたときの結果である。図 3.4 はそのときの推定値 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。第 3.4.1 節例題 1 の結果 (図 3.1、図 3.2) と比較した場合、形式的同次線形化は特に定常点での精度が向上している。

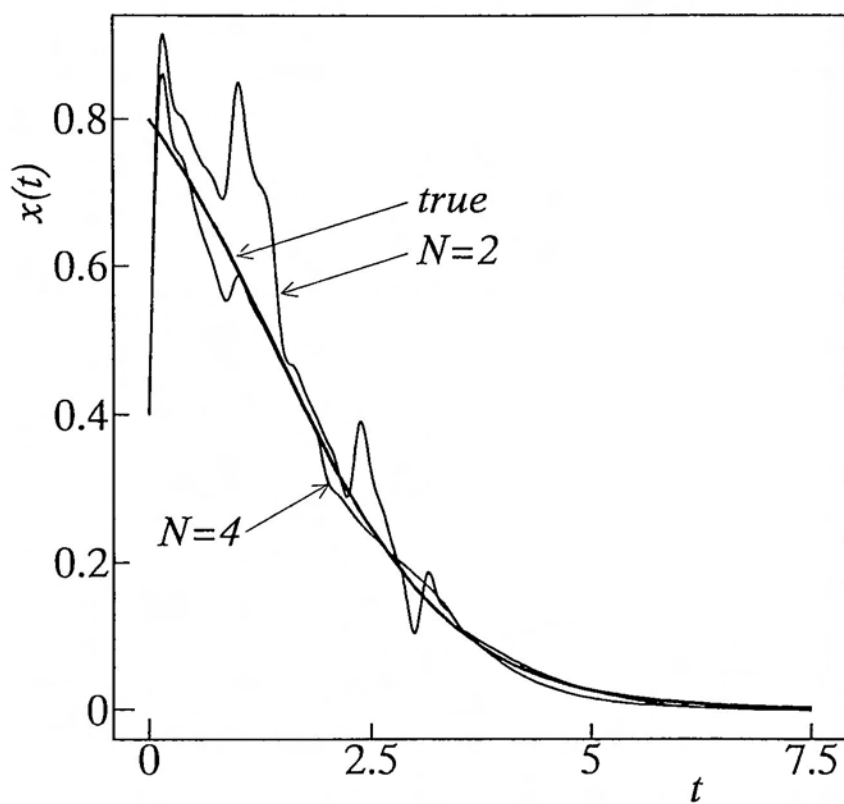


図 3.3 離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバ

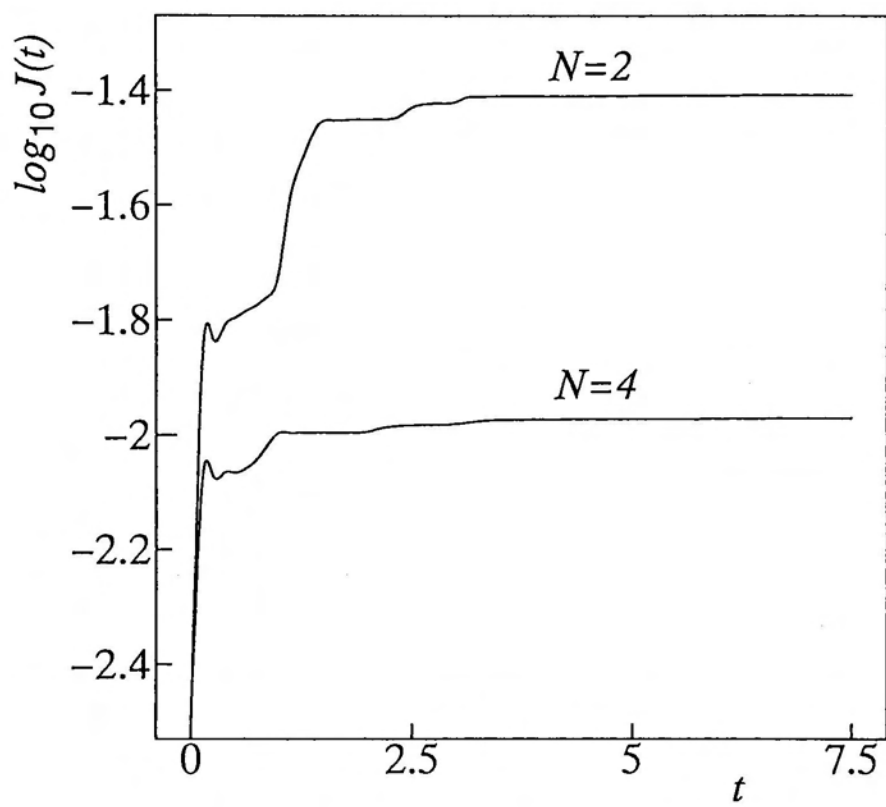


図 3.4 離散フーリエ展開型非線形オブザーバの近似誤差

3.4.3 例題 3(離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタ)

第 3.3 節の離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタの数値実験例を示す。非線形システム例として

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \\ \zeta(t) = \sin \beta x(t) + v \end{cases} \quad (3.28)$$

$$x_0 \in [0, \ell]$$

$$(x_0 = 0.8, \ell = 0.94, \beta = 6.68, V = 0.01, P = 0.47, m = 0.47)$$

に適用すると、(3.23) 式のカルマンフィルタ

$$\dot{\hat{z}}(t) = (A - KH)\hat{z}(t) + K\tilde{\zeta}(t) \quad (3.29)$$

となる。離散フーリエ展開の線形化関数の次数 N をパラメータにし (3.28) 式を解き、 $\hat{z}(t) = \hat{z}(t) + \phi(y_\infty)$ とおき逆変換 (2.65) 式より得られた推定値 \hat{x} と (3.28) 式の解 $x(true)$ との精度比較を行う。ただし、(3.23) 式のゲイン計算時の Q は $Q = 0.1I$ とした。図 3.5 はフィルタ初期値 $\hat{x}(0) = 0.5$ としたときの結果である。なお比較のため、拡張カルマンフィルタ [32] による結果も同時に示す。図 3.6 はそのときの推定値 \hat{x} と解 x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。この結果より本手法による非線形フィルタは、拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保されていることがわかる。

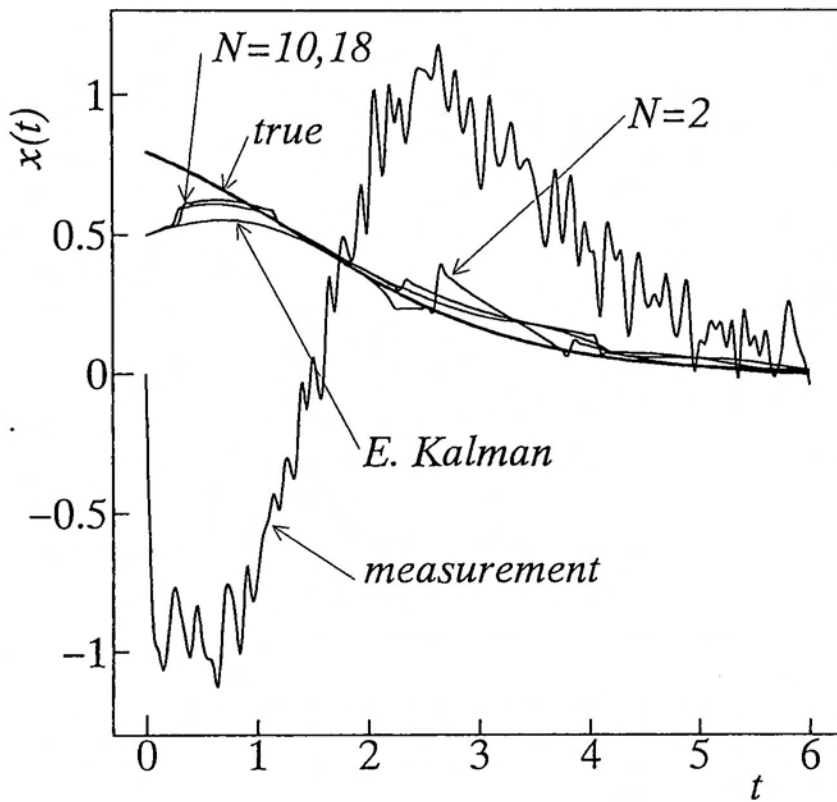


図 3.5 離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタ

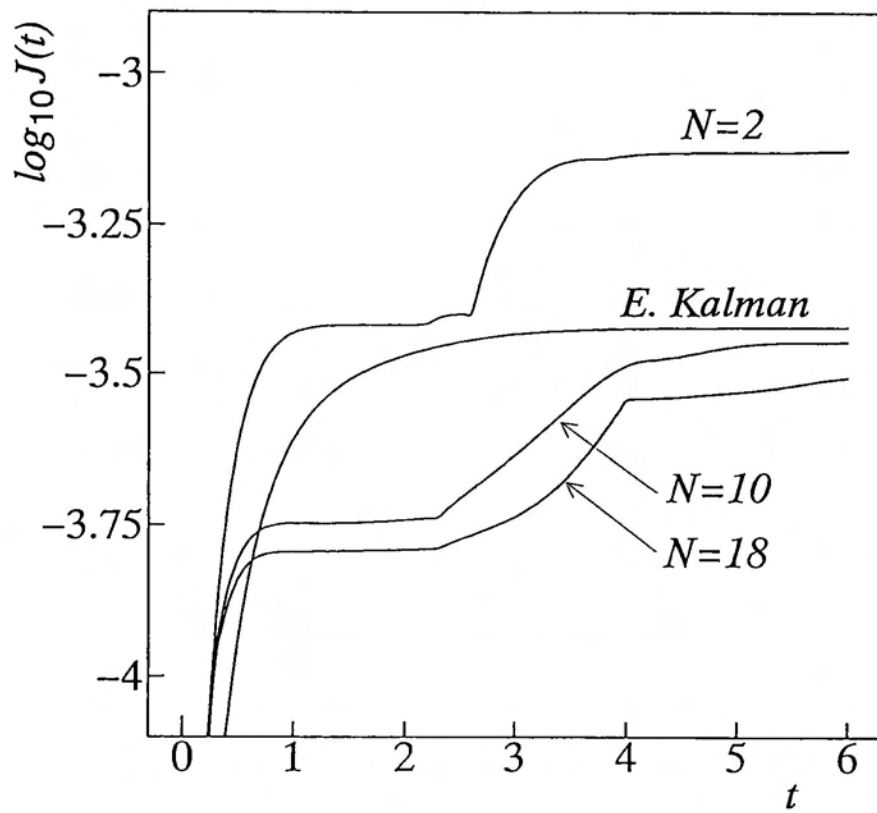


図 3.6 離散フーリエ展開型非線形フィルタの近似誤差

3.5 結言

本章ではフーリエ展開による形式的線形化の適用例として、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行った。

第 3.2 節で連続フーリエ展開および離散フーリエ展開による形式的線形化を用いて非線形オブザーバの構成を、第 3.4.1 節例題 1 と第 3.4.2 節例題 2 においてそれぞれの手法で計算機シミュレーションを行った。その結果、近似次数の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられ、離散フーリエ展開型同次線形化の方が特に定常点での近似精度が向上した。

次に第 3.3 節で離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタの構成を行った。第 3.4.3 節例題 3 においては、計算機シミュレーションを行い近似次数と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。また、比較のため拡張カルマンフィルタによる結果も示した。PC9801BX 上でフォートランを使いオイラー法により解いたとき要した計算時間は、 $N = 2$ の基準に対し $N = 10$ でその 2.2 倍、 $N = 18$ で 4.6 倍、および拡張カルマンフィルタで 0.8 倍であった。よって計算時間をいとわねば、本手法は拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保される。さらに形式的線形化に対し高速フーリエ変換 (FFT) を用いれば計算量の簡略化が可能である。

以上のように本手法は、強度の非線形システムにも応用可能であることがわかる。

第 4 章

チェビシェフ補間近似による形式的線形化

4.1 緒言

第 2.2 章ではフーリエ展開による形式的線形化について述べた。これは形式的線形化の際の関数近似が最小 2 乗近似を基礎としている。さらにもう一つの関数近似の考え方としてミニマックス近似または最良近似ともいべきチェビシェフ補間近似がある。

本章ではこのチェビシェフ補間近似による形式的線形化について述べる [33, 34, 35]。この手法は、一次から高次までのチェビシェフ多項式を新しい状態変数とみなし、この新変数に関する運動方程式に関数近似の優れたチェビシェフ補間近似 [36] を行う。このとき運動方程式は、係数が単なる代数和で求められ、積分などの計算が不要である。結局、原システムは新変数に関する線形微分方程式に帰着され、その逆変換も簡単に得られる。これらは、いずれも計算アルゴリズムより自動的に生成されるものであり、誤差限界についても考察する。

最後に数値実験により、チェビシェフ多項式の次数の増加と共に形式的線形化精度の向上が確かめられた。

4.2 チェビシェフ補間近似による形式的線形化

次の n 次元非線形システムが与えられたとしよう。

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \dot{x} &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \in D\end{aligned}\tag{4.1}$$

ただし、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T : n$ 次元状態ベクトル、 $D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n$: 長方形定義域、 $p_i : x_i$ の定義区間の半分、 m_i : 定義区間の中心、および $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。(4.1) 式をチェビシェフ補間近似により形式的線形化を行う。まず、チェビシェフ直交多項式の基本区間が $D_0 = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ であることから、

$$y = P^{-1}(x - m)\tag{4.2}$$

ただし、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\tag{4.3}$$

と変数変換する。(4.2) 式を時刻 t で微分すれば、

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x^T} \dot{x} = P^{-1} f(x) = P^{-1} f(Py + m) \equiv F(y)\tag{4.4}$$

でこの定義域は基本区間の D_0 である。

さて、各 $y_i (i = 1, \dots, n)$ に関し基本区間 $[-1, 1]$ で定義されるチェビシェフ多項式は、

$$\begin{aligned}T_r(y_i) &\equiv \frac{(-1)^r}{(2r-1)!!} \sqrt{1-y_i^2} \frac{d^r}{dy^r} (1-y_i^2)^{r-1/2} \\ &= \cos(r \cdot \cos^{-1} y_i) \quad (r = 0, 1, 2, \dots)\end{aligned}\tag{4.5}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}T_0(y_i) &= 1, \quad T_1(y_i) = y_i, \quad T_2(y_i) = 2y_i^2 - 1 \\ T_3(y_i) &= 4y_i^3 - 3y_i, \quad T_4(y_i) = 8y_i^4 - 8y_i^2 + 1\end{aligned}$$

$$T_5(y_i) = 16y_i^5 - 20y_i^3 + 5y_i, \dots$$

であり、次の漸化式で与えられる [36]。

$$\begin{cases} T_{r+1}(y_i) = 2y_i T_r(y_i) - T_{r-1}(y_i) \\ T_0(y_i) = 1, T_1(y_i) = y_i \end{cases} \quad (4.6)$$

それゆえ、

$$S_r(y_i) \equiv \frac{dT_r(y_i)}{dy_i} \quad (4.7)$$

に関する漸化式は (4.6) 式を y_i で微分して、

$$\begin{cases} S_{r+1}(y_i) = 2T_r(y_i) + 2y_i S_r(y_i) - S_{r-1}(y_i) \\ S_0(y_i) = 0, S_1(y_i) = 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

となる。ここで線形化関数

$$\begin{aligned} \phi(y) = & [T_{(100\dots 0)}(y), T_{(200\dots 0)}(y), \dots, T_{(N_1 00\dots 00)}(y), \\ & T_{(010\dots 0)}(y), T_{(020\dots 0)}(y), \dots, T_{(0N_2 0\dots 0)}(y), \\ & T_{(001\dots 0)}(y), T_{(002\dots 0)}(y), \dots, T_{(00N_3\dots 0)}(y), \dots, \\ & T_{(110\dots 0)}(y), T_{(120\dots 0)}(y), \dots, T_{(r_1 \dots r_n)}(y), \dots, T_{(N_1 N_2 \dots N_n)}(y)]^T \end{aligned} \quad (4.9)$$

ただし、

$$T_{(r_1 \dots r_n)}(y) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_i) \quad (4.10)$$

を定義する。線形化関数 $\phi(y)$ の各要素の時刻 t での微分方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{T}_{(r_1 \dots r_n)}(y) &= \frac{\partial T_{(r_1 \dots r_n)}(y)}{\partial y^T} F(y) \\ &= S_{(r_1 \dots r_n)}(y) F(y) \equiv G_{(r_1 \dots r_n)}(y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となり、これを各 y_i に関し N_i 次までのチェビシエフ補間近似式で近似する。すなわち、

$$\begin{aligned} T_{(N_1 \dots N_n)}(y) &= \prod_{i=1}^n T_{N_i}(y_i) \text{ の } \prod_{i=1}^n (N_i + 1) \text{ 個の零点において (4.11) 式と一致する多項式} \\ \hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(y) &= \sum_{q_1=0}^{N_1} \dots \sum_{q_n=0}^{N_n} C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} T_{(q_1 \dots q_n)}(y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

を導入する。このとき各 i で、零点は

$$y_{ij} = \cos \frac{2j+1}{2N_i+2} \pi \quad (j = 0, \dots, N_i) \quad (4.13)$$

であり、直交条件

$$\sum_{j=0}^{N_i} T_r(y_{ij}) T_s(y_{ij}) = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ \frac{N_i+1}{2} & r = s \neq 0 \\ N_i + 1 & r = s = 0 \end{cases}$$

が満たされ、係数が

$$C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} = 2^{n-\eta} \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i + 1} \sum_{j_1=0}^{N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{N_n} G_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) T_{(q_1 \dots q_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) \quad (4.14)$$

ただし、

$$\eta = \{q_i = 0 \text{ の個数} : 1 \leq i \leq n\} \quad (4.15)$$

として与えられる [36]。ゆえに、(4.11) 式の $G_{(r_1 \dots r_n)}(y)$ を (4.12) 式の多項式 $\hat{G}_{(r_1 \dots r_n)}(y)$ で近似すれば (4.9) 式の $\phi(y)$ が、

$$\dot{\phi}(y) \cong A\phi(y) + b \quad (4.16)$$

となり次の形式的線形システムが得られる。

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (4.17)$$

$$z(0) = \phi(y(0)) = \phi(P^{-1}(x_0 - m))$$

$$z \in R^{(N_1+1)(N_2+1)\dots(N_n+1)-1}$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} C_{[10\dots 0]}^{[10\dots 0]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[10\dots 0]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[10\dots 0]} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{[10\dots 0]}^{[r_1\dots r_n]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[r_1\dots r_n]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[r_1\dots r_n]} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{[10\dots 0]}^{[N_1\dots N_n]} & \dots & C_{[q_1\dots q_n]}^{[N_1\dots N_n]} & \dots & C_{[N_1\dots N_n]}^{[N_1\dots N_n]} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$b = \begin{pmatrix} C_{[00\dots 0]}^{[10\dots 0]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[r_1\dots r_n]} \\ \vdots \\ C_{[00\dots 0]}^{[N_1\dots N_n]} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

逆変換 (ϕ^{-1}) は (4.2)、(4.9) 式より

$$x = Py + m = PH\phi(y) + m \quad (4.20)$$

ただし、

$$H = [I : 0] \quad I : n \times n \text{ 単位行列}$$

となる。すなわち、形式的線形化を介して得られる x の近似解 \hat{x} は

$$\hat{x}(t) = PHz(t) + m \quad (4.21)$$

として求められる。

緒言にも述べたように、チェビシェフ補間近似による形式的線形化は (4.6)、(4.8)、(4.14) 式から単なる繰り返し計算で線形化でき、以下に示すように計算アルゴリズムに適した手法である。

計算アルゴリズム

(1) Given $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$

(2) Set m_i, p_i and N_i ($1 \leq i \leq n$)

(3) $F(y) = P^{-1}f(Py + m)$

(4) For $i = 1, \dots, n$

For $j = 0, \dots, N_i$

(i) $y_{ij} = \cos \frac{2j+1}{2N_i+2}\pi$

(ii) $T_0(y_{ij}) = 1, T_1(y_{ij}) = y_{ij}$

$S_0(y_{ij}) = 0, S_1(y_{ij}) = 1$

(iii) For $r_i = 1, 2, 3, \dots, N_i - 1$

$T_{r_i+1}(y_{ij}) = 2y_{ij}T_{r_i}(y_{ij}) - T_{r_i-1}(y_{ij})$

$S_{r_i+1}(y_{ij}) = 2T_{r_i}(y_{ij}) + 2y_{ij}S_{r_i}(y_{ij}) - S_{r_i-1}(y_{ij})$

(5) For $i = 1, \dots, n$

For $r_i = 0, \dots, N_i$

For $j_i = 0, \dots, N_i$

$T_{(r_1 \dots r_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n}) = \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_{ij_i})$

$S_{(r_1 \dots r_n)}^i(y_{j_i}) = T_{r_1}(y_{1j_1}) \cdots T_{r_{i-1}}(y_{i-1j_{i-1}}) S_{r_i}(y_{ij_i}) T_{r_{i+1}}(y_{i+1j_{i+1}}) \cdots T_{r_n}(y_{nj_n})$

(6) $A = \left(C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} \right), b = \left(C_{[0 \dots 0]}^{[r_1 \dots r_n]} \right)$

where

$$C_{[q_1 \dots q_n]}^{[r_1 \dots r_n]} = 2^{n-\eta} \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_i + 1} \sum_{j_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{N_n} \sum_{i=1}^n S_{(r_1 \dots r_n)}^i(y_{j_i}) F_i(y_{j_i}, \dots, y_{nj_n}) T_{(q_1 \dots q_n)}(y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n})$$

$$(7) \text{ Solve } \dot{z}(t) = Az(t) + b, z(0) = \phi(P^{-1}(x_0 - m))$$

$$(8) \hat{x}(t) = P[I : 0]z(t) + m$$

4.3 誤差限界

チェビシェフ補間近似による形式的線形化の誤差限界について考察する。(4.1) 式の解 $x(t)$ と (4.21) 式の形式的線形化を介して求められた近似解 $\hat{x}(t)$ との差に関し次が成立する。

[定理 1]

本形式的線形化法の誤差限界は次式で与えられる。

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \max_i p_i (\|e^{At}\| \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \varepsilon \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| d\tau) \quad (4.22)$$

ただし、

$$\varepsilon = \sup_{D_0} \left\| \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) - A\phi(y) - b \right\| \quad (4.23)$$

□

(4.22) 式の括弧内第 1 項は初期誤差、第 2 項は関数近似誤差に起因する。

(証明)

まず、(4.9) 式の線形化関数 $\phi(y)$ と、その近似関数 z との誤差伝播について考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\phi(y(t)) - z(t)] &= \dot{\phi}(y) - \dot{z} \\ &= \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) - Az - b \\ &= A\{\phi(y) - z\} + \left(\frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) - A\phi(y) - b\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

この微分方程式を解けば、

$$\phi(y(t)) - z(t) = e^{At}[\phi(y(0)) - z(0)] + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \varepsilon(y(\tau)) d\tau \quad (4.25)$$

ただし、

$$\varepsilon(y) \equiv \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) - A\phi(y) - b. \quad (4.26)$$

ここで、

$$\varepsilon = \sup_{D_0} \|\varepsilon(y)\| \quad (4.27)$$

とおき (4.25) 式の両辺のノルムをとれば、

$$\|\phi(y(t)) - z(t)\| \leq \|e^{At}\| \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \varepsilon \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| d\tau \quad (4.28)$$

一方 (4.20)、(4.21) 式より

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}(t)\| &= \|\{PH\phi(y(t)) + m\} - \{PHz(t) + m\}\| \\ &= \|PH\| \|\phi(y(t)) - z(t)\| \\ &\leq \max_i p_i \|\phi(y(t)) - z(t)\|. \end{aligned} \quad (4.29)$$

(4.28)、(4.29) 式より (4.22) 式を得る。

(QED)

本形式的線形化近似は (4.12) ~ (4.14) 式のチェビシェフ補間近似式を基にしており、各要素 $\{y_i\}$ ごとに独立に計算される。すなわち、各変数 y_i ごと他の変数を固定して取り扱っているので、1変数のチェビシェフ補間近似式の性質が保存される [36]。それゆえ、(4.13) 式の零点 y_{ij} は各 y_i ごとに

$$\pi(y_i) = (y_i - y_{i0})(y_i - y_{i1}) \cdots (y_i - y_{iN_i}) \quad (4.30)$$

が最良近似

$$\min_{\{y_{ij}\}} \max_{-1 \leq y_i \leq 1} |\pi(y_i)| = 2^{-N_i}$$

になるように選ばれているので、

$$|\pi(y_i)| \leq 2^{-N_i} \quad (4.31)$$

である。

一般にベクトル値関数 $\bar{G}(y)$ において、 y_i 要素についてのみチェビシェフ補間近似を行う演算子 Ψ_i を

$$\Psi_i : \bar{G}(y) \rightarrow \sum_{q_i=0}^{N_i} C_{(q_i)}(\bar{y}_i) T_{(q_i)}(y_{ij_i}) \quad (4.32)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &\equiv [y_1, \dots, y_{i-1}, y_{ij_i}, y_{i+1}, \dots, y_n]^T \\ C_{(q_i)}(\bar{y}_i) &\equiv \frac{2^\eta}{N_i + 1} \sum_{j_i=0}^{N_i} \bar{G}(\bar{y}_i) T_{(q_i)}(y_{ij_i}) \\ \eta &= \begin{cases} 0 & q_i = 0 \\ 1 & q_i \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と定義すれば、補間の性質 [36] より

$$\bar{G}(y) - \Psi_i \bar{G}(y) = \frac{1}{(N_i + 1)!} \frac{\partial^{N_i+1}}{\partial y_i^{N_i+1}} \bar{G}(y) \Big|_{y_i=\xi_i} \pi(y_i) \quad (4.33)$$

である。さらに、 y_1 から y_i 要素に関する演算子積 $\Psi^{[i]}$ を

$$\Psi^{[i]} \equiv \Psi_i \circ \dots \circ \Psi_2 \circ \Psi_1$$

ただし、 \circ は (4.32) 式の演算を意味し、また $i = 0$ のときは

$$\Psi^{[0]} G(y) = G(y)$$

と定義する。ここで、(4.26) 式第 1 項を

$$\frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) = G(y) \quad (4.34)$$

と表記すれば、(4.12) 式の近似から (4.16) 式右辺が

$$\Psi^{[n]} G(y) = A\phi(y) + b$$

となり、(4.26) 式から

$$\begin{aligned}
\| \varepsilon(y) \| &= \left\| \frac{\partial \phi(y)}{\partial y^T} F(y) - A\phi(y) - b \right\| \\
&= \left\| \Psi^{[0]}G(y) - \Psi^{[n]}G(y) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left\| \Psi^{[i-1]}G(y) - \Psi^{[i]}G(y) \right\| \\
&= \sum_{i=1}^n \left\| \Psi^{[i-1]}G(y) - \Psi_i(\Psi^{[i-1]}G(y)) \right\| \tag{4.35}
\end{aligned}$$

となる。\$G(y)\$ すなわち、(4.34) 式から \$F(y)\$ が

$$F \in \bigcap_{i=1}^n C^{N_i+1}(y_i)$$

と仮定する。ただし、\$\bigcap_{i=1}^n C^{N_i+1}(y_i)\$ は各 \$y_i (i = 1, \dots, n)\$ に関し \$N_i + 1\$ 回連続微分可能な関数の全体を表す。\$\bar{G}(y) = \Psi^{[i-1]}G(y)\$ とおき (4.35) 式に (4.33) 式を適用すれば

$$\begin{aligned}
\| \varepsilon(y) \| &\leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{1}{(N_i + 1)!} \frac{\partial^{N_i+1}}{\partial y_i^{N_i+1}} \Psi^{[i-1]}G(y) \Big|_{y_i=\xi_i} \pi(y_i) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{(N_i + 1)!} |\pi(y_i)|
\end{aligned}$$

ただし、

$$M_i = \sup_{D_0} \left\| \frac{\partial^{N_i+1}}{\partial y_i^{N_i+1}} \Psi^{[i-1]}G(y) \right\| .$$

すなわち、(4.23)、(4.31) 式より

$$\varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2^{N_i}(N_i + 1)!} \equiv \varepsilon' \tag{4.36}$$

となり、次を得る。

[系]

(4.1) 式の非線形関数が \$f \in \bigcap_{i=1}^n C^{N_i+1}(x_i)\$ ならば、[定理 1] における (4.22) 式の \$\varepsilon\$ が (4.36) 式の \$\varepsilon'\$ で置換できる。

□

さらに、誤差に関し次が成立する。

[定理 2]

非線形関数が $f \in \bigcap_{i=1}^n C^{N_i+1}(x_i)$ で、形式的線形化定数行列 A の固有値の実部がすべて負のとき

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq K_1 e^{-Ct} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + K_2 (1 - e^{-Ct}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{N_i} (N_i + 1)!} \quad (4.37)$$

なる正数 K_1, K_2, C が存在する。ただし、 N_i は x_i に関するチェビシェフ補間次数である。

□

[定理 2] の (4.37) 式は時刻 t の経過とともに第 1 項が、および次数 $\{N_i\}$ の増加とともに第 2 項が、指数関数的に減少することを示している。すなわち、

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t) \quad [t \rightarrow \infty, N_i \rightarrow \infty \quad (i = 1, \dots, n)]$$

である。なお、 A の固有値の実部がすべて負となるための必要条件は、(4.1) 式の $\dot{x} = f(x)$ の解が一様に終局有界 [37] となることである。

(証明)

A の固有値の実部 $\{\text{Re}\lambda_j\}$ がすべて負であれば

$$\max_j (\text{Re}\lambda_j) < -C < 0$$

$$\|e^{At}\| \leq K e^{-Ct}$$

となる正数 C と K が存在する (例えば、文献 [38] 参照)。(4.28) 式は

$$\begin{aligned} \|\phi(y(t)) - z(t)\| &\leq K e^{-Ct} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \varepsilon \int_0^t K e^{-C(t-\tau)} d\tau \\ &= K e^{-Ct} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \frac{\varepsilon K}{C} (1 - e^{-Ct}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。(4.29)、(4.36)、(4.38) 式から

$$\begin{aligned}\|x(t) - \hat{x}(t)\| &\leq \max_i p_i \left\{ K e^{-Ct} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \frac{K}{C} (1 - e^{-Ct}) \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2^{N_i} (N_i + 1)!} \right\} \\ &\leq K_1 e^{-Ct} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + K_2 (1 - e^{-Ct}) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{N_i} (N_i + 1)!}\end{aligned}$$

ただし、

$$K_1 = \max_i p_i K, \quad K_2 = \max_i \max_j \frac{p_i M_j K}{C}$$

を得る。

(QED)

4.4 数値実験

チェビシェフ補間近似型線形化の計算機シミュレーションを示す。まず、スカラーシステムに適用した例を示し、次に多次元システムの適用例を示す。

4.4.1 例題 1(スカラーシステムのチェビシェフ補間近似型線形化)

次のスカラーシステム

$$\Sigma_1 : \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \quad (4.39)$$

$$x_0 = 0.8$$

$$D = [0, 0.8], p = 0.4, m = 0.4$$

を考える。これは、第 2.5.1 節の例題 1 と同じシステムで単調減少関数である。第 4.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化の計算アルゴリズムより (4.39) 式は次の形式的線形システム

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (4.40)$$

$$z(0) = \phi\left(\frac{x_0 - m}{p}\right)$$

に変換される。チェビシェフ補間近似型線形化の線形化関数の次数 N をパラメータにし、(4.40) 式を解き、逆変換 (4.21) 式によって得られた近似解 \hat{x} と、(4.39) 式の解 x (*true*) との精度比較を行う。

図 4.1 は最大値ノルムで初期誤差なし ($z(0) = \phi(y(0))$) の場合の定理 1 (4.22) 式の誤差限界値

$$EB(t) \equiv \frac{p\varepsilon(e^{\|A\|t} - 1)}{\|A\|}$$

のグラフである。この結果より次数 N の増加と共に誤差限界値が小さくなっていることがわかる。

図 4.2は近似解 \hat{x} と解 x の時間変化曲線で、 N を $N = 1 \sim 50$ 次までとした。図 4.3はこのときの近似解 \hat{x} と解 x の絶対値誤差

$$J(t) = \int_0^t |x(\tau) - \hat{x}(\tau)| d\tau$$

のグラフである。

これらの結果より、チェビシェフ補間近似型線形化は定常点での精度が良く第 2 章のフーリエ展開型線形化のように同次線形化を必要とせず線形化の設計に適している。

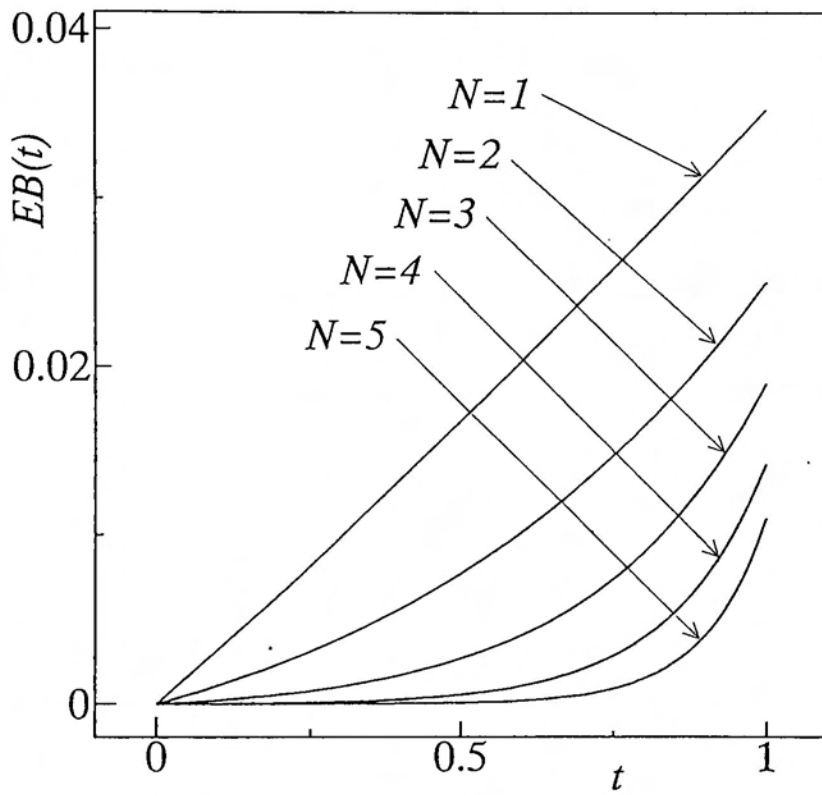


図 4.1 チェビシエフ補間近似型線形化によるスカラー系の誤差限界

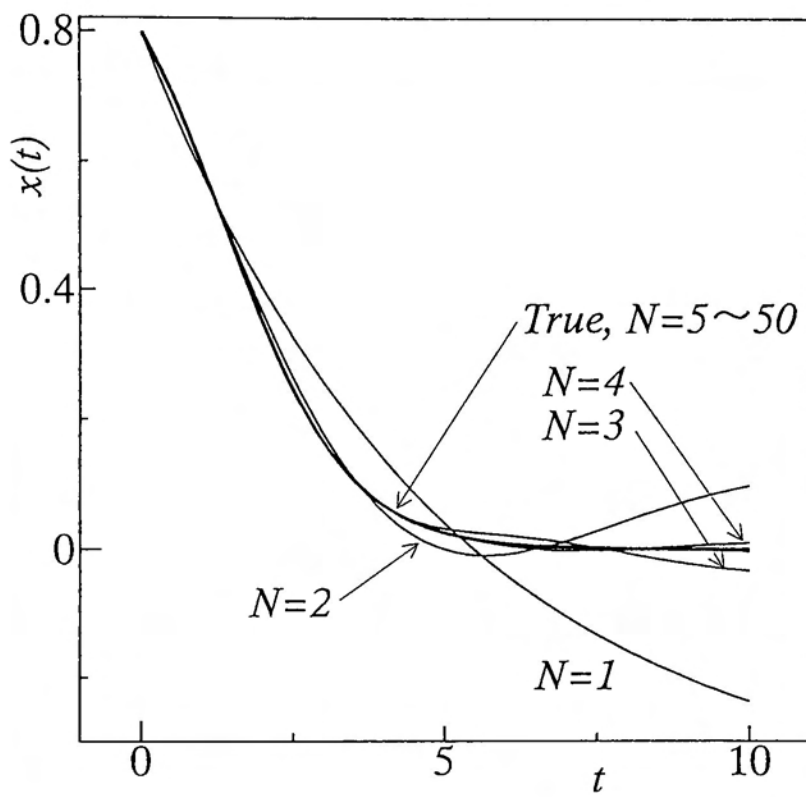


図 4.2 チェビシエフ補間近似型線形化によるスカラー系の近似値

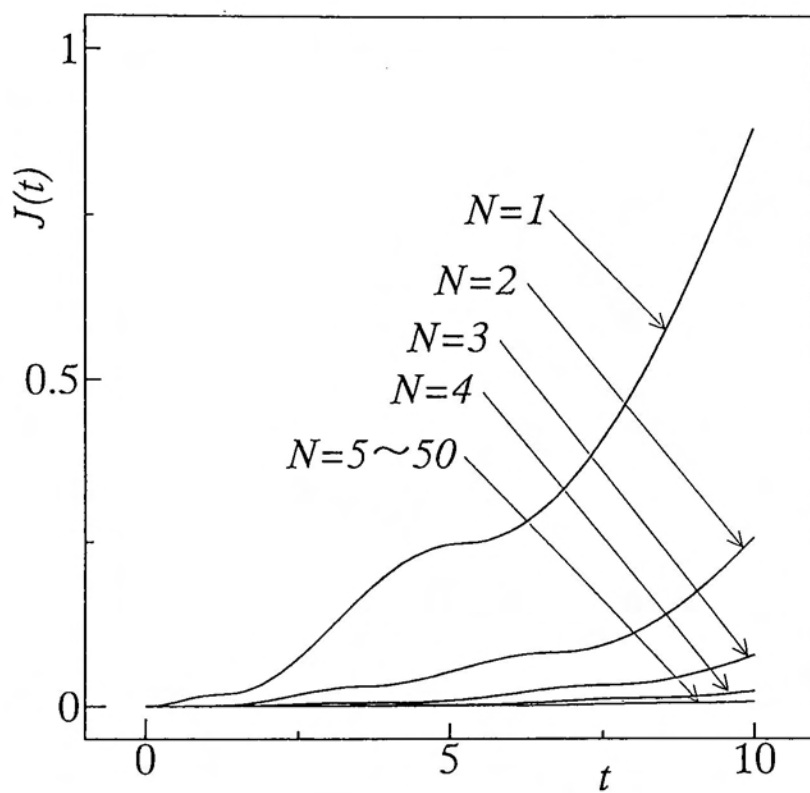


図 4.3 チェビシエフ補間近似型線形化によるスカラー系の近似誤差

4.4.2 例題 2(多次元システムのチェビシェフ補間近似型線形化その 1)

次に多次元システムに対し、チェビシェフ補間近似型線形化を適用する。多次元システムの例として、

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \\ x_0 = [0.3, 0.3]^T \end{cases} \quad (4.41)$$

を考える。ここで、

$$D = [-0.971, 0.3] \times [0.3, 1.572], \quad m_1 = -0.3355, \quad m_2 = 0.936, \quad p_1 = 0.6355, \quad p_2 = 0.636$$

とした。(4.41) 式は次の形式的線形システム

$$\begin{aligned} \Sigma_2 : \quad \dot{z}(t) &= Az(t) + b \\ z(0) &= \phi(P^{-1}(x_0 - m)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

に変換される。チェビシェフ補間の近似次数 $N = N_1 = N_2$ をパラメータにする。図 4.4 と図 4.5 は、(4.42) 式を解き逆変換によって得られた近似解 \hat{x} と、(4.41) 式の解 x (*true*) のそれぞれ第 1 要素と第 2 要素のグラフである。図 4.6、図 4.7 はそれぞれそのときの絶対値誤差

$$J_i(t) = \int_0^t |x_i(\tau) - \hat{x}_i(\tau)| d\tau, \quad (i = 1, 2)$$

のグラフである。この結果より、多次元システムに対しても次数 N の増加と共に精度が向上していることがわかる。

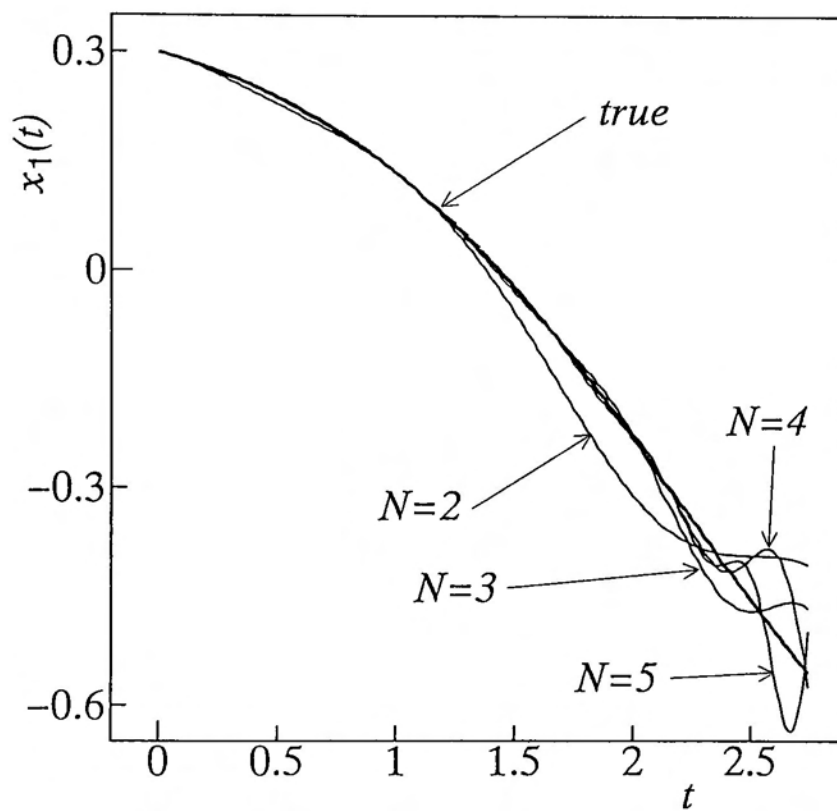


図 4.4 チェビシェフ補間近似型線形化による多次元系の近似値 (x_1)

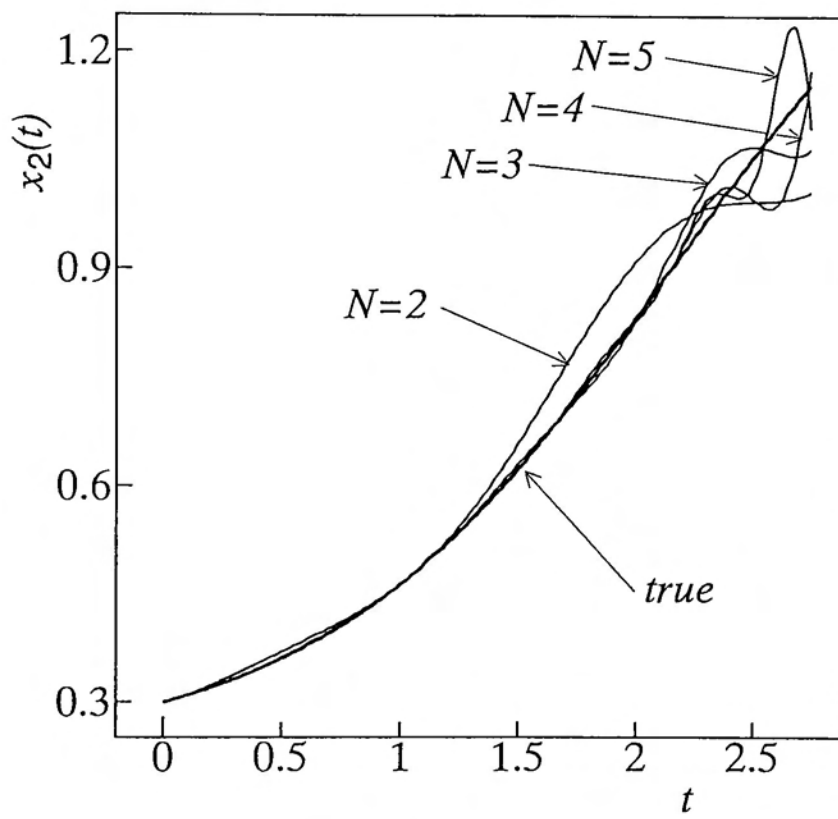


図 4.5 チェビシエフ補間近似型線形化による多次元系の近似値 (x_2)

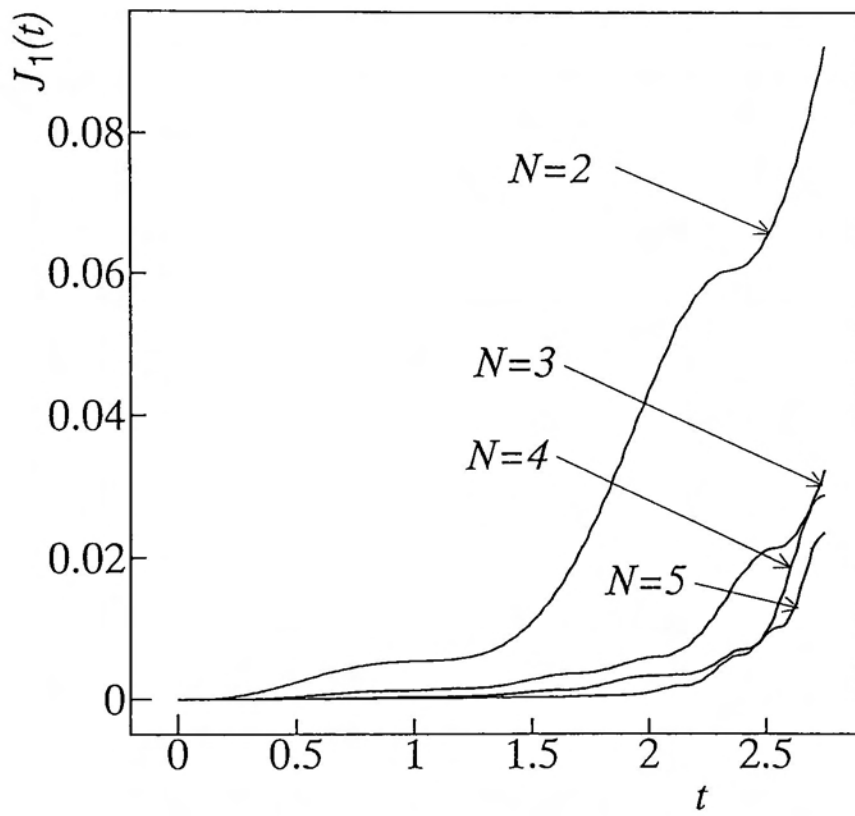


図 4.6 チェビシエフ補間近似型線形化による多次元系の近似誤差 (J_1)

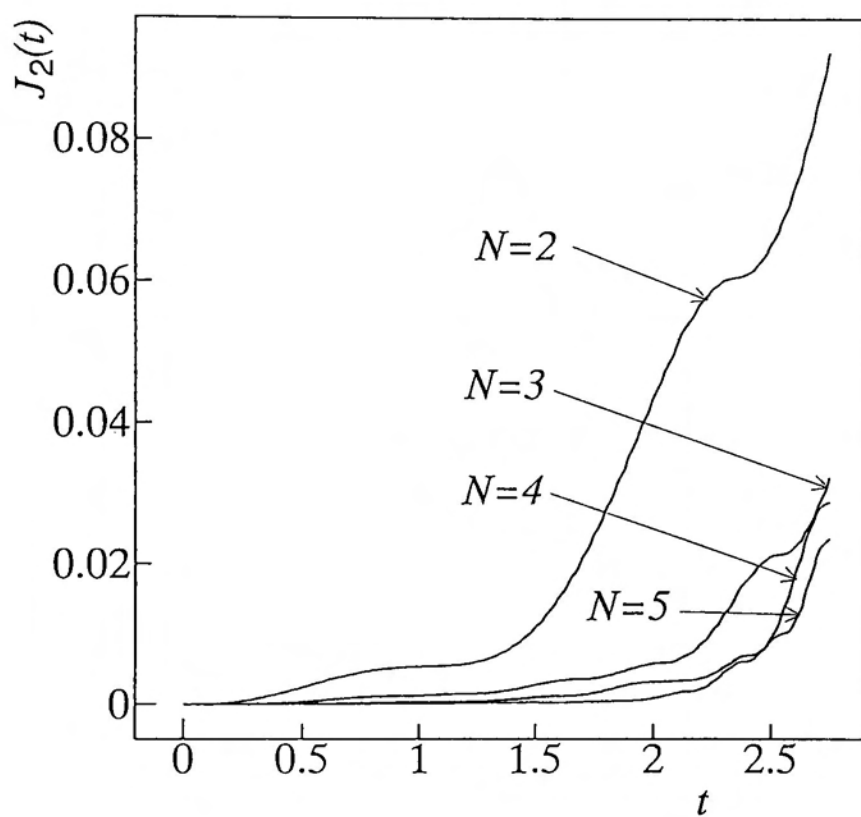


図 4.7 チェビシエフ補間近似型線形化による多次元系の近似誤差 (J_2)

4.4.3 例題 3(多次元システムのチェビシェフ補間近似型線形化その 2)

第 2.5.4 節例題 4 と同様の電力システムの同期機動揺方程式

$$M\ddot{\delta} + D_0\dot{\delta} + P_{em} \sin \delta = P_{in} \quad (4.43)$$

を考える。 $x_1(t) = \delta(t) - \delta(\infty)$ 、 $x_2(t) = \dot{\delta}(t)$ を状態変数に選べば次の 2 次元非線形システム

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_1 \sin(x_1(t) + \delta(\infty)) + a_2 x_2 + a_0 \end{cases} \quad (4.44)$$

が得られる。ただし、

$$D = [-0.43, 0.5] \times [-1.99, 2.14], x_1(0) = \delta(0) - \delta(\infty) = 0.5 - \delta(\infty),$$

$$x_2(0) = \dot{\delta}(0) = 0.2, M = 0.0265, D_0 = 0.005, P_{em} = 1.0, P_{in} = 0.8,$$

$$a_0 = P_{in}/M, a_1 = -P_{em}/M, a_2 = -D_0/M, \delta(\infty) = \sin^{-1}(P_{in}/P_{em})$$

$$m_1 = 0.035, m_2 = 0.075, p_1 = 0.465, p_2 = 2.065$$

とした。(4.44) 式は次の形式的線形システム

$$\Sigma_2 : \dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (4.45)$$

$$z(0) = \phi(P^{-1}(x_0 - m))$$

に変換される。チェビシェフ補間の近似次数 $N = N_1 = N_2$ をパラメータにする。なお比較のため、テーラー展開の 1 次近似を基にした従来の線形化 (1 次近似線形化) の結果も同時に示す。ただし、(4.44) 式は 1 次近似線形化により

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \cos \delta(\infty) & a_2 \end{pmatrix} x(t)$$

と近似される。図 4.8 と図 4.9 は、(4.45) 式を解き逆変換によって得られた近似解 \hat{x} と、(4.44) 式の解 x (*true*) のそれぞれ第 1 要素と第 2 要素のグラフである。図 4.10、図 4.11

はそれぞれそのときの絶対値誤差

$$J_i(t) = \int_0^t |x_i(\tau) - \hat{x}_i(\tau)| d\tau, \quad (i = 1, 2)$$

のグラフである。

これらの結果 (図 4.8~図 4.11) より、本手法は従来法 (1 次近似線形化) より線形化の近似精度がよく、また次数 N の増加と共に近似精度が向上している。

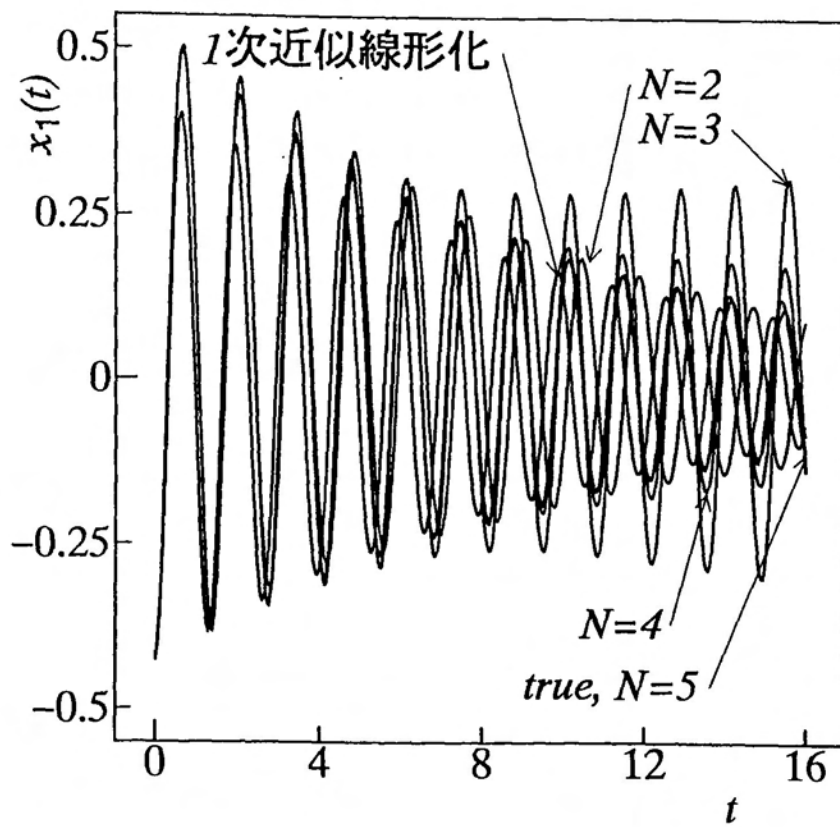


図 4.8 チェビシェフ補間近似型線形化による電力系統の近似値 (x_1)

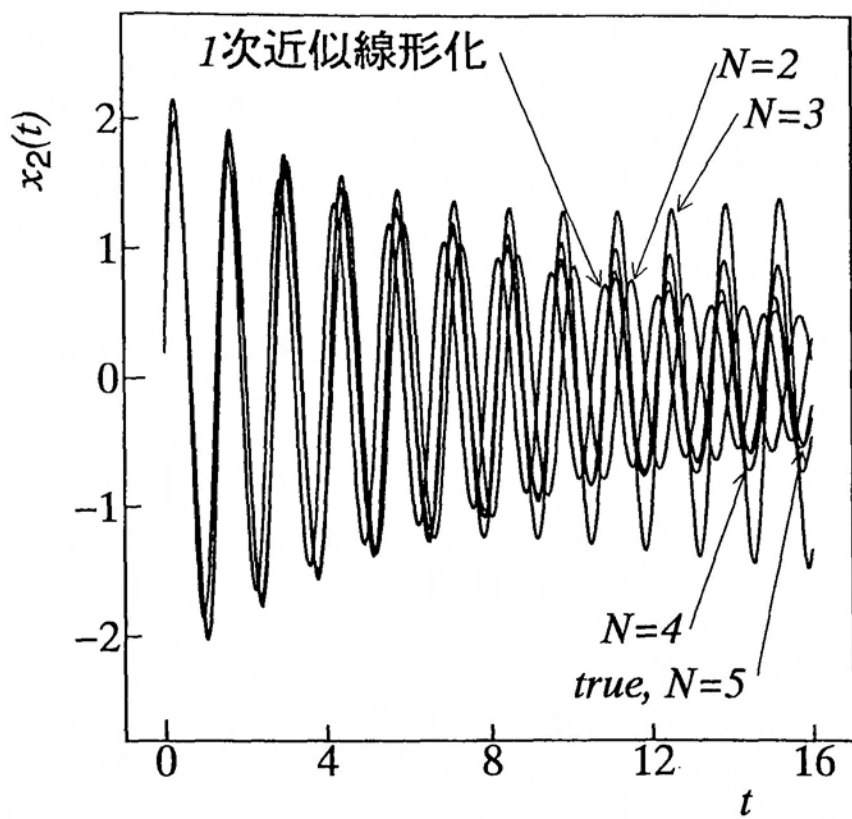


図 4.9 チェビシェフ補間近似型線形化による電力系統の近似値 (x_2)

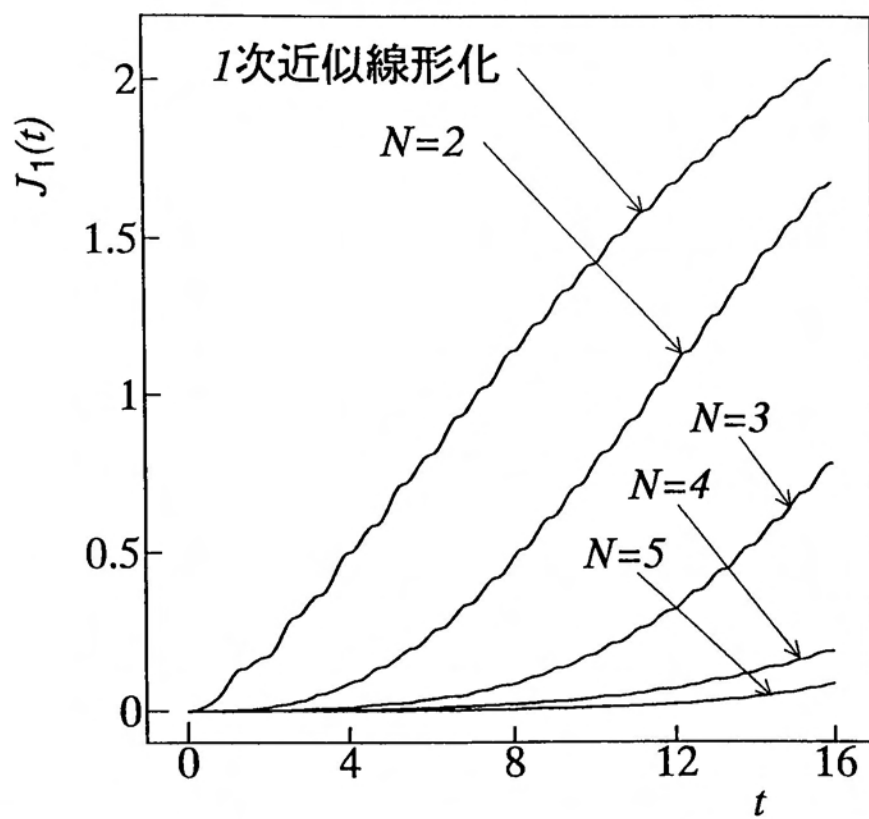


図 4.10 チェビシエフ補間近似型線形化による電力系統の近似誤差 (J_1)

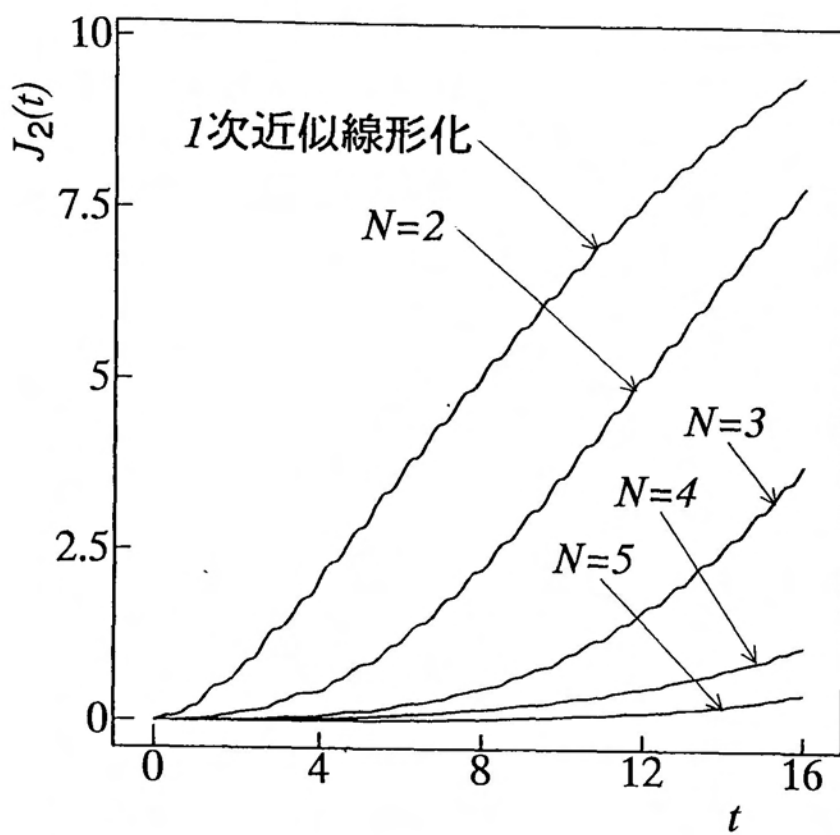


図 4.11 チェビシエフ補間近似型線形化による電力系統の近似誤差 (J_2)

4.5 結言

本章ではチェビシェフ補間近似による形式的線形化について述べた。第 4.2 節においてそのアルゴリズムを、第 4.3 節において誤差限界について考察した。第 4.4 節のスカラーおよび多次元システムの計算機シミュレーション結果 (図 4.1~図 4.11) から、テーラー展開を基にした従来の線形化より本手法は線形化近似精度がよく、チェビシェフ補間の近似次数の増加と共に本手法の精度の向上が実証された。

本形式的線形化法はチェビシェフ補間近似を基にしているので、線形化次数などにかかわらずアルゴリズムが単純な繰り返し計算ですみ、しかも精度がよい。すなわち、本手法は高精度な計算機向き線形化法である。また、第 2.5.1 節の連続フーリエ展開型線形化のように、時間領域の長い問題には時刻の経過と共に大きな誤差を生じる場合があり、形式的同次線形化を提案した。しかし、本手法ではその必要がなく、また逆変換も第 2.3 節の離散フーリエ展開型線形化のようにめんどろな計算をせずに得られる特徴がある。

第 5 章

チェビシェフ補間近似型線形化の適用例

5.1 緒言

第 4 章でチェビシェフ補間近似による形式的線形化について述べた。ここでは第 3 章のフーリエ展開型線形化の適用例と同様に、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行う。

まず非線形オブザーバであるが、構成するシステムは第 3.2 節と同じ非線形時不変システムで、コントロールは一定または零 (ステップ入力) とする。このシステムに対し、第 4.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化により線形化を施し、その形式的線形システムに対し同次元オブザーバ [28] を適用し、非線形オブザーバを構成する。非線形フィルタについても、対象とするシステムは非線形オブザーバの場合と同じであり、観測値に白色正規性雑音があるものとする。チェビシェフ補間近似型線形化により線形化されたシステムに対し、線形定常カルマンフィルタ [30] を適用し、非線形フィルタを構成する。

最後に計算機シミュレーションを行い、チェビシェフ補間の近似次数の増加と共に本手法による非線形オブザーバや非線形フィルタの推定精度の向上を確認し、本手法の有効性を確かめる。

5.2 非線形オブザーバの構成

まず第 4.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバの構成について述べる。

次の n 次元非線形時不変システムが力学系、観測系それぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \zeta(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。ただし、 $D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分とする。さて、(5.1) 式の力学系は第 4.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化より次の形式的線形システム

$$\dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (5.2)$$

に変換される。次に観測系について線形化を行う。(5.1) 式の観測系の非線形項 $h(t)$ をチェビシェフ補間近似式で近似すれば、(4.11)~(4.14) 式と同様の計算手順により、

$$h(t) = Cz(t) + d \quad (5.3)$$

となる。ただし、 $h(t)$ を (4.11) 式の $G_{(r_1, \dots, r_n)}(y)$ に対応させれば、 C と d がそれぞれ (4.17) 式の A と b に対応する。よって、観測系について次の形式的線形システム

$$\zeta(t) = Cz(t) + d \quad (5.4)$$

を得る。従って、(5.2)、(5.4) 式より線形の同次元オブザーバ [28] が適用できて、推定式が

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + b + K(\zeta(t) - C\hat{z}(t) - d) \\ &= (A - KC)\hat{z}(t) + K(\zeta(t) - d) + b \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。ただし、 K は $A - KC$ の固有値の実部がすべて負になるように選定される。推定値 $\hat{x}(t)$ は、(5.5) 式を解き (4.21) 式の逆変換

$$\hat{x}(t) = P[I : 0]\hat{z}(t) + m$$

によって求まる。

5.3 非線形フィルタの構成

第 4.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化による非線形フィルタの構成について述べる [39]。

次の n 次元非線形確率システムが力学系、観測系それぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ \zeta(t) = h(x(t)) + v \end{cases} \quad (5.6)$$

$$x(0) = x_0 \in D$$

で与えられたとする。ただし、 $D = \prod_{i=1}^n [m_i - p_i, m_i + p_i] \subset R^n$: 長方形定義域、および $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$: 連続微分可能な非線形関数で 2 乗可積分、および v は独立な白色正規性雑音で平均と共分散がそれぞれ、

$$Ev(t) = 0$$

$$E(v(t)v^T(\tau)) = V\delta(t - \tau)$$

とする。さて、(5.6) 式の力学系は第 4.2 節より次の形式的線形システム

$$\dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (5.7)$$

に変換される。次に観測系の非線形項 $h(t)$ について線形化すると (5.3) 式より、

$$\zeta(t) = Cz(t) + d + v \quad (5.8)$$

と変換される。従って、(5.7)、(5.8) 式より線形カルマンフィルタ [30] が適用できて、推定式が

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + b + K(\zeta(t) - C\hat{z}(t) - d) \\ &= (A - KC)\hat{z}(t) + K(\zeta(t) - d) + b\end{aligned}\tag{5.9}$$

となる。ただし、フィルタゲイン K は Riccati 方程式：

$$A\Gamma + \Gamma A^T - \Gamma C^T V^{-1} C \Gamma + Q = 0$$

$$K = \Gamma C^T V^{-1}, \quad \Gamma, Q : \text{正定値対象行列}$$

で定まる。よって推定値 $\hat{x}(t)$ は (5.9) 式を解き (4.21) 式の逆変換

$$\hat{x}(t) = P[I : 0]\hat{z}(t) + m$$

によって求まる。

5.4 数値実験

チェビシェフ補間近似型線形化の適用例の計算機シミュレーションを示す。まず、非線形オブザーバを構成した数値実験例を示し、次に非線形フィルタを構成した例を示す。

5.4.1 例題 1(チェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバ)

非線形システムの力学系、観測系がそれぞれ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \\ \zeta(t) = x(t) + \sin x(t) \end{cases} \quad (5.10)$$
$$x_0 \in [m - p, m + p]$$

$$(x_0 = 0.8, m = 0.4, p = 0.4,)$$

として第 5.2 節のチェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバを適用すれば、(5.5) 式

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + K(\zeta(t) - d) + b \quad (5.11)$$

となる。チェビシェフ補間の近似次数 N をパラメータにし (5.11) 式を解き、逆変換 (4.21) 式によって得られた推定値 \hat{x} と (5.10) 式の解 $x(true)$ との精度比較を行う。このときゲイン K は $A - KC$ の固有値がすべて -2.5 になるように選んだ。図 5.1 はオブザーバ初期値 $\hat{x}(0) = 0.3$ としたとき、 $N = 2 \sim 6$ 次まで変化したときの推定値 \hat{x} と解 x である。図 5.2 はそのときの \hat{x} と x の 2 乗誤差

$$J(t) = \int_0^t (x(\tau) - \hat{x}(\tau))^2 d\tau$$

のグラフである。

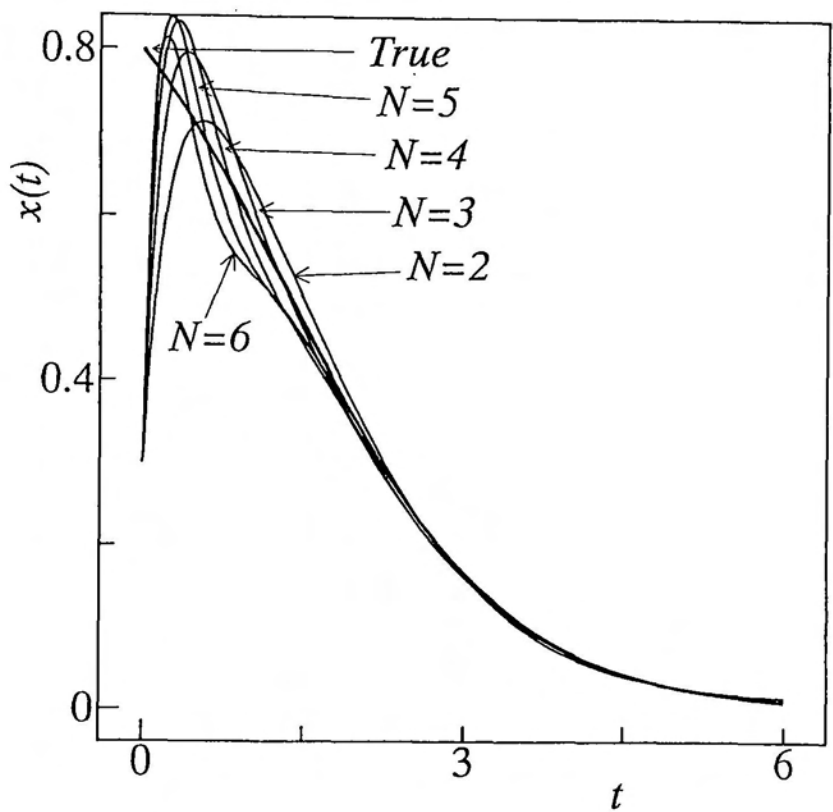


図 5.1 チェビシエフ補間近似型線形化による非線形オブザーバ

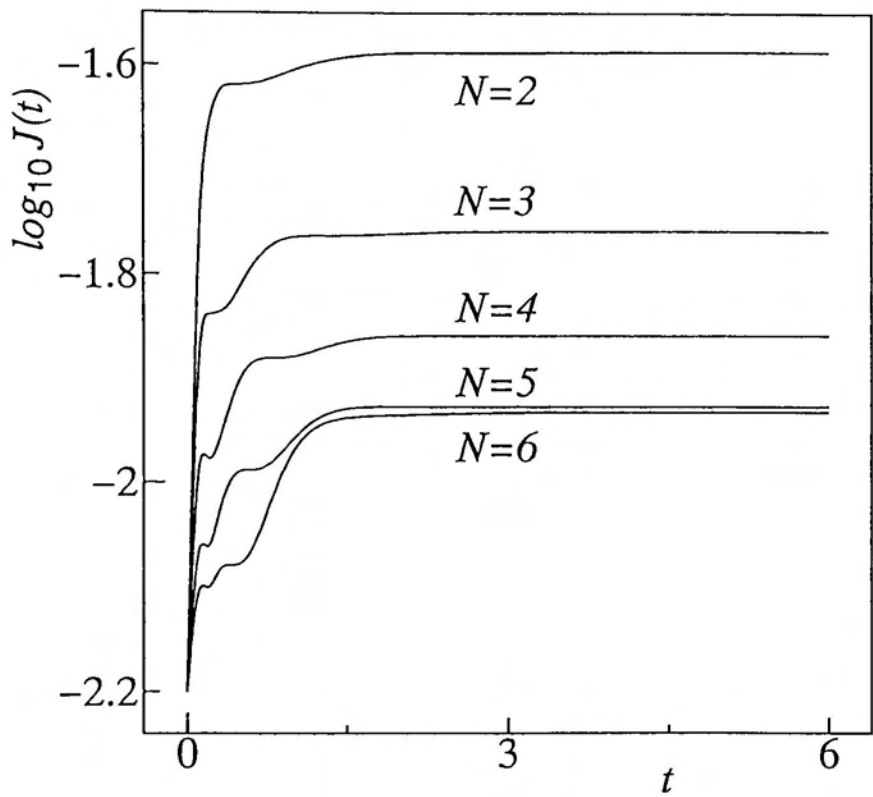


図 5.2 チェビシェフ補間近似型非線形オブザーバの近似誤差

5.4.2 例題 2(チェビシェフ補間近似型線形化による非線形フィルタ)

第 5.3 節のチェビシェフ補間近似型線形化による非線形フィルタの計算機シミュレーションを示す。非線形システム例として

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \\ \zeta(t) = x(t) + v \end{cases} \quad (5.12)$$

$$x_0 \in [m - p, m + p]$$

$$(x_0 = 0.8, m = 0.4, p = 0.4, V = 0.01)$$

に適用すると、(5.9) 式のカルマンフィルタ

$$\dot{\hat{z}}(t) = (A - KC)\hat{z}(t) + K(\zeta(t) - d) + b \quad (5.13)$$

となる。チェビシェフ補間の近似次数 N をパラメータにし (5.13) 式を解き、逆変換 (4.21) 式より得られた推定値 \hat{x} と (5.12) 式の解 $x(\text{true})$ との精度比較を行う。ただし、(5.9) 式のゲイン計算時の Q は $Q = 0.1I$ とした。図 5.3 はフィルタ初期値 $\hat{x}(0) = 0.3$ としたとき、 $N = 2 \sim 6$ まで変化したときの推定値 \hat{x} と解 x である。なお比較のため、拡張カルマンフィルタ [32] による結果も同時に示す。図 5.4 はそのときの推定値 \hat{x} と解 x の絶対値誤差

$$J(t) = \int_0^t |x(\tau) - \hat{x}(\tau)| d\tau$$

のグラフである。この結果より、本手法による非線形フィルタは拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保されていることがわかる。

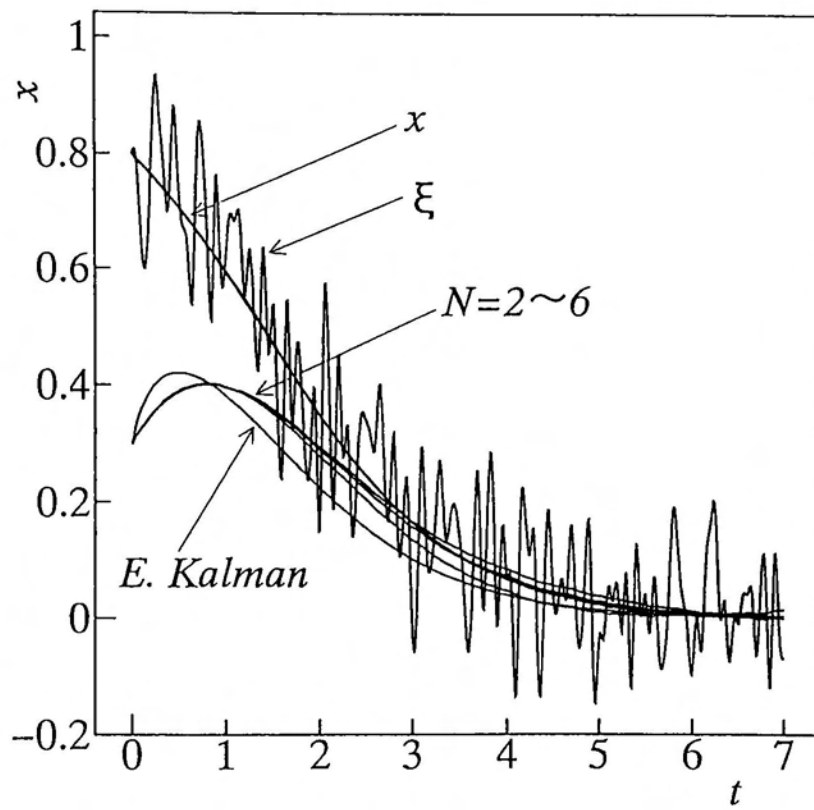


図 5.3 チェビシエフ補間近似型線形化による非線形フィルタ

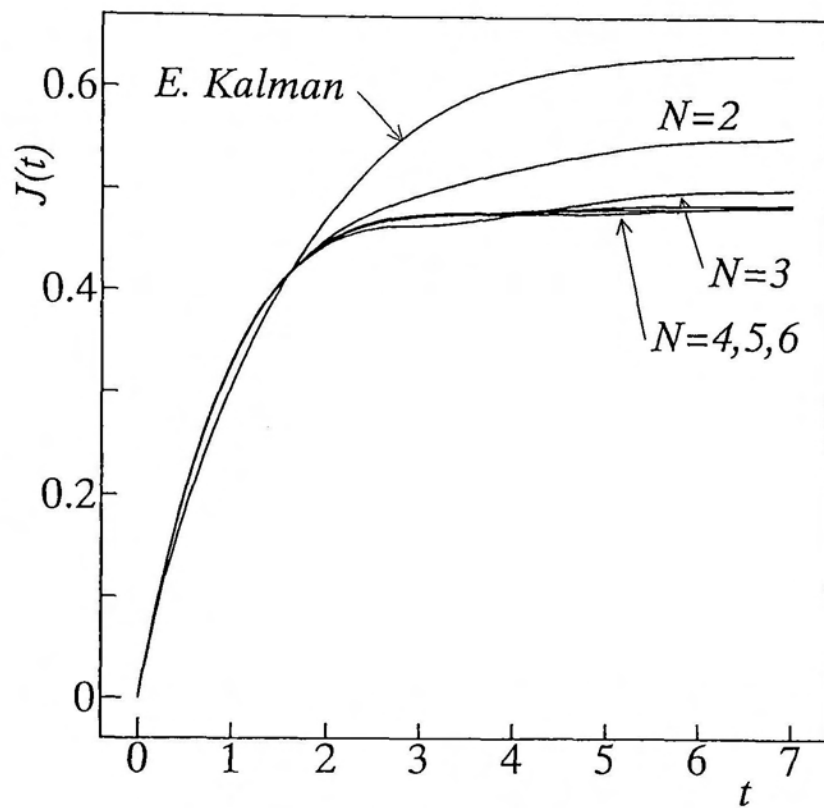


図 5.4 チェビシェフ補間近似型非線形フィルタの近似誤差

5.5 結言

本章ではチェビシェフ補間近似による形式的線形化の適用例として、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行った。

第 5.2 節でチェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバの構成を、第 5.3 節で非線形フィルタの構成を行った。また、第 5.4.1 節例題 1 において非線形オブザーバの、第 5.4.2 節例題 2 において非線形フィルタの計算機シミュレーションをそれぞれ行った。その結果チェビシェフ補間の近似次数 N の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。また、非線形フィルタについて比較のため拡張カルマンフィルタによる結果も示し、本手法は拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保されることが実証された。

本形式的線形化法はチェビシェフ補間近似を基にしており、線形化の際の計算が簡単な繰り返し計算で求められ、計算アルゴリズムが容易である。また、第 2 章のフーリエ展開による形式的線形化に比べ、線形化の精度が設定した定義域 (フーリエ展開型の場合 l_i 、チェビシェフ補間近似型の場合 p_i, m_i) に影響されない点で計算機での設計に適している。

以上のように、チェビシェフ補間近似を用いれば本手法もより有用であることがわかる。

第 6 章

結論

本論文は、計算機により非線形システムをシステムティックに線形システムに変換する形式的線形化について考察した。

第 2 章では、フーリエ展開による形式的線形化について、まず連続フーリエ展開を用いた形式的線形化について考察し、次に離散フーリエ展開による形式的線形化について考察し計算アルゴリズムを示した。また、それぞれの場合の誤差限界について考察を行った。原点に定常点をもつ非線形システムにおいて、近似による非零定常項存在のため線形化の近似精度が悪くなる場合があり、その解決法として定常項のない形式的同次線形化についても考察を行った。本手法の有効性確認のため計算機シミュレーションを行い、フーリエ展開の近似次数の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。

連続フーリエ展開型線形化は、線形化係数の要素計算にやっかいな積分計算を必要とするが、離散フーリエ展開型線形化は計算機により自動的に係数が計算でき極めて機械的である。さらに高速フーリエ変換 (FFT) を用いれば計算量の簡略化が可能である。よって、離散フーリエ展開型同次線形化がより計算機の使用に適した手法であると思われる。

第 3 章では、フーリエ展開による形式的線形化の適用例として、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行った。連続フーリエ展開型線形化と離散フーリエ展開型同次線形化による非線形オブザーバの構成を行い、それぞれの手法で計算機シミュレー

ションを行い、フーリエ展開の近似次数の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられ、有効性が確認された。また、離散フーリエ展開型同次線形化のほうが特に定常点での近似精度の向上がみられた。次に離散フーリエ展開型同次線形化による非線形フィルタの構成を行い、計算機シミュレーションにより近似次数と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。また、比較のため拡張カルマンフィルタによる結果も示し、計算時間をいとわねば本手法は拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保されることが実証された。

これによって本手法は、強度の非線形システムにも応用可能であることがわかる。

第4章では、チェビシェフ補間近似による形式的線形化について考察した。計算アルゴリズムを示し、誤差限界について考察した。有効性の確認のための計算機シミュレーションより、従来のテーラー展開を基にした線形化より線形化近似精度がよく、チェビシェフ補間の近似次数の増加と共に本手法の精度の向上が実証された。

本形式的線形化法はチェビシェフ補間近似を基にしているので、線形化次数にかかわらずアルゴリズムが単純な繰り返し計算ですみ、しかも精度がよい。フーリエ展開型線形化のように、時間領域の長い問題には時刻の経過と共に大きな誤差を生じる場合があり、同次形式的線形化を提案したが、本手法ではその誤差が小さいためその必要がない。また、チェビシェフ補間近似型線形化はフーリエ展開型線形化に比べ線形化の精度が、設定した定義域への依存性が少ない点で設計に適している。

第5章ではチェビシェフ補間近似による形式的線形化の適用例として、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成を行った。有効性の確認のため、チェビシェフ補間近似型線形化による非線形オブザーバと非線形フィルタの計算機シミュレーションを行った結果、チェビシェフ補間の近似次数の増加と共に線形化近似精度の向上が確かめられた。また、非線形フィルタについて比較のため拡張カルマンフィルタによる結果も示し、本手法は拡張カルマンフィルタと同等以上の精度が確保されることが実証された。

このようにチェビシェフ補間近似を用いれば、本手法がより有用になることがわ

かった。

以上、本形式的線形化により非線形システムを計算機を使ってシステムティックに線形システムに変換することが可能となり、非線形オブザーバと非線形フィルタの構成が可能となった。

謝辞

本研究を行うにあたり、終始全般的なご指導と有益なご助言を賜りました鹿児島大学工学部 高田 等 教授に心から感謝の意を表します。本論文をまとめるに際し九州工業大学工学部 辻 輝生 教授、同 望月 琢郎 教授、同 荒木 嘉昭 教授、同 小林 敏弘 教授には終始ご指導、ご助言を賜りました。特に辻教授には多面的に有意義な御討論を頂き、深く感謝の意を表します。

また、折に触れ有益なご助言を頂きました熊本電波工業高等専門学校 森本 義廣 教授に厚く感謝致します。

参考文献

- [1] Y. N. Yu, K. Vongsuria and L. N. Wedman : Application of an Optimal Control Theory to a Power System, IEEE Trans. on Power Apparatus and System, PAS-89, No.1, pp.55-62, 1970.
- [2] システム制御情報学会 : 最近の現代制御理論応用特集号、システム制御情報学会論文誌、Vol.34、No.9、1990.
- [3] R. W. Brockett : Feedback Invariants for Nonlinear Systems, Proc. of IFAC Congress, Helsinki, pp.1115-1120, 1978.
- [4] R. Su : On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems , Systems and Control Letters, Vol.2, No.1, pp.48-52, 1982.
- [5] 石島、三平 : 非線形システム理論の最近の話題、システム制御情報学会論文誌、Vol.33、No.9、pp.437-444、1989.
- [6] A. J. Krener : Approximate Linearization by State Feedback and Coordinate Change, Systems and Control Letters, Vol.5, pp.181-185, 1984.
- [7] W. T. Baumann and W. J. Rugh : Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-31, No.1, pp.40-46, 1986.

- [8] W. T. Baumann and W. J. Rugh : Feedback Control of Analytic Nonlinear Systems by Extended Linearization, SIAM J. of Control and Optimization, Vol.25, No.5, pp.1341-1352, 1987.
- [9] S. N. Singh and W. J. Rugh : Decoupling in a Class of Nonlinear Systems by State Variable Feedback, ASME J. of Dynamic Systems Measurement and Control, pp.323-328, 1972.
- [10] A. Ishidori and A. Ruberti : On the Synthesis of Linear Input-Output Responses for Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, Vol.4, No.1, pp.17-22, 1984.
- [11] H. Takata : Transformation of a Nonlinear Systems into an Augmented Linear System, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, No.5, pp.736-741, 1979.
- [12] 高田 : 重みつき残差法による非線形システムの形式的線形化計算法、計測自動制御学会論文集、Vol.27、No.3、pp.283-290、1991.
- [13] H. Takata and K. Komatsu : A Formal Linearization of Nonlinear Systems based on the Trigonometric Fourier Expansion, '89 Korean Automatic Control Conference, pp.939-942, 1989.
- [14] H. Takata and K. Komatsu : A Formal Linearization of Nonlinear Systems based on the Discrete-Fourier Transform, '91 Korean Automatic Control conference, Vol.2, pp.1823-1827, 1991.
- [15] 小松、高田、辻 : 離散フーリエ展開による非線形システムの形式的線形化法とその応用、電気学会論文誌、Vol114-C、No.7/8、pp.789-795、1994.
- [16] 小松、高田、辻 : チェビシェフ補間近似による非線形システムの形式的線形化計算法、電気学会論文誌、Vol114-C、No.7/8、pp.835-840、1994.

- [17] K. Komatsu, H. Takata and T. Tsuji : A Formal Linearization of Nonlinear Systems by the Chebyshev Interpolation and a Nonlinear Filter as an Application, IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E77-A, No.11, pp.1753-1757, 1994.
- [18] 高田、小松：状態空間上三角フーリエ展開を基にした非線形システムの平易逆変換型形式的線形化法、九州工業大学研究報告(工学)、第58号、pp.55-59、1989.
- [19] K. Komatsu and H. Takata : A Computer Method of Formal Linearization using the Trigonometric Fourier Expansion, The 29th SICE Annual Conference, Vol.III of III, pp.757-760, 1990.
- [20] H. P. スウ：フーリエ解析、森北出版、1979.
- [21] 高田、小松：非線形システムの三角フーリエ展開による形式的同次線形化法、平成2年度電気関係学会九州支部連合会大会論文集、p511、1990.
- [22] 高田、小松：離散値フーリエ展開による非線形システムの形式的線形自動化法、平成3年度電気学会全国大会講演論文集、13-48、1991.
- [23] 矢野、宮本：数学ハンドブック、4章、森北出版、1985.
- [24] 小松、高田：非線形システムの離散フーリエ展開型形式的同次線形化法、第11回計測自動制御学会九州支部学術講演会予稿集、71/72、1992.
- [25] 州之内：数値計算、サイエンス社、1984.
- [26] R. H. Park : Two Reaction Theory of Synchronous Machine-I, AIEE, Trans. Vol. 48, 1929.
- [27] 高田、小松：離散値フーリエ展開型形式的線形化法と電力系統への応用、平成3年度電気関係学会九州支部連合会大会論文集、p514、1991.

- [28] 小郷、美多：システム制御入門、実務出版株式会社、1987.
- [29] 小松、高田：離散フーリエ展開型形式的同次線形化法と非線形オブザーバ、平成5年度電気学会全国大会講演論文集、13-63、1993.
- [30] 榎木、添田、中溝：確率システム制御の基礎、日新出版、1987.
- [31] 小松、高田：離散値フーリエ展開による形式的線形化と非線形オブザーバ、第10回計測自動制御学会九州支部学術講演会予稿集、pp.21-22、1991.
- [32] A. P. Sage and C. C. White, III : Optimum Systems Control, 2nd edition, pp.207, Prentice-Hall, Inc., 1977.
- [33] 小松、高田、辻：チェビシェフ補間近似による非線形システムの形式的線形化計算法、平成5年度電気関係学会九州支部連合大会講演論文集、pp.45、1993.
- [34] K. Komatsu, H. Takata and T. Tsuji : A Formal Linearization of Nonlinear Systems by the Chebyshev Interpolation, 1993 Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Vol.4, pp.1209-1212, 1993.
- [35] K. Komatsu, H. Takata and T. Tsuji : A Numerical Computing Method of a Formal Linearization of Nonlinear Systems by the Chebyshev Interpolation and Its Applications, 1994 Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp.311-314, 1994.
- [36] 赤坂：数値計算、3章、コロナ社、1974.
- [37] 吉沢：微分方程式入門、pp.98、朝倉書店、1967.
- [38] 白岩：常微分方程式論序説、4章、サイエンス社、1975.

- [39] 小松、高田、辻：チェビシェフ近似型形式的線形化と非線形フィルタ、第12回計測自動制御学会九州支部学術講演会予稿集、pp.91-92、1993.