AND-EXOR論理式の性質とその最小化に関する研究

神田 徳夫

概　要

LSIが複雑になるにつれて，論理回路を人手で設計することが極めて困難となり，論理回路の設計を自動的に行う論理自動合成システムが必須となっている．現在使用されている論理自動合成システムは，AND，OR，NOTを基本論理素子とした設計に基づいて開発されている．しかし，算術演算回路や誤り訂正回路などでは，AND，OR，NOTのみで構成するよりも，EXORゲートを併用すると，ゲート数を大幅に削減できる．そのため，これらの回路を自動合成するためには，AND，OR，NOT のほかに，EXORを効果的に活用した論理回路の設計法を確立する必要がある．EXORを用いた論理回路の設計の基本は，EXORを用いた論理式の簡単化である．本研究は，EXORを用いた論理式の表現のうち，最も一般的なAND-EXOR二段論理式(ESOP)を取り上げ，このESOPの性質およびこれを用いたESOPの最小化手法について検討し，これによって，EXORを用いた論理回路の設計法の確立の一助とすることを目的とする．

第1章では，本研究の背景と目的を示し，本研究で得られた新しい成果について概観している．

第2章では，論理関数の基本的性質及びAND-EXOR論理式の種々のクラスを定義し，それらの間の関係について述べている．

第3章では，4変数関数の最小ESOP(MESOP)を網羅的方法によって求め，任意の4変数関数は，積項数が高々6のESOPで表現できることを示す．また，4変数MESOPの表から得られるMESOPの一般的な性質を検討し，これらがESOPの簡単化に利用できることを示している．

第4章では，変数の置換とリテラルの変換に基づくLP同値関係を提案する．この同値関係のもとではMESOPの積項数は不変であるので，ESOPの分類に便利である．関数群を効率よくLP同値類に分類する方法を示し，これを用いて5変数関数を6936個のLP同値類に分類する．また，任意の5変数関数は，積項数が高々9のESOPで実現できることを示す．つぎに，論理関数のLP特徴ベクトルを定義し，それが5変数以下のLP同値類と一

対一に対応することを示す．また，これを用いて任意の5変数関数のMESOPを高速に得る方法を提案する．

第5章では，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法を示し，これを用いたESOPの簡単化アルゴリズムを与えている．このアルゴリズムの特徴は，1) 与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する．2)簡単化結果の最小性が保証されたらアルゴリズムを停止する．という点にある．このアルゴリズムを用いて，種々の関数のESOPを簡単化して，一部の関数については，簡単化結果の最小性が保証できることを示している．

第6章では，任意の n 変数関数を ESOP によって実現するために必要な積項数 $\Psi(n)$ について述べている． $n \leq 5$ の場合は，テーブル探索により，容易に最小解が得られるが， $n \geq 6$ の場合は，関数の個数が非常に多いので，全ての関数を素直に簡単化することは現実的ではない．そこで， $\Psi(n)$ の効率のよい評価アルゴリズムを与える．このアルゴリズムを用いて， $\Psi(6) = 15$ であることを示す．また，この結果を用いて， $\Psi(n) \leq 15 \cdot 10^{n-6}$ $(n \geq 6)$ であることを示している．また， $n \leq 6$ のとき，最も複雑な関数のなかに対称関数が含まれることを示している．

第7章では，本研究で得られた成果をまとめ，結論および今後の課題について述べている．

関連発表論文

主要論文

1) 神田徳夫，笹尾勤：
“４変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質”，
電子情報通信学会論文誌, Vol.J74-D-I, No.11, pp.765-773(1991).

2) 神田徳夫，笹尾勤：
“ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の積項数の上界について”，
電子情報通信学会論文誌, Vol.J75-D-I, No.3, pp.135-142(1992).

3) 神田徳夫，笹尾勤：
“下界定理を用いたＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式の簡単化法”，
電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-D-I, No.1, pp.1-10(1993).

4) 神田徳夫，笹尾勤：
“論理関数のＬＰ特徴ベクトルとその応用”，
電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-D-I, No.6, pp.260-268 (1993).

5) 神田徳夫，笹尾勤：
“多出力ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式簡単化の一手法”，
電子情報通信学会論文誌, Vol.J79-D-I, No.2, pp.43-52 (1996).

主要論文の英訳

1) N. Koda and T. Sasao:
“Four-variable AND-EXOR minimum expressions and their properties”,
Systems and Computers in Japan, Vol.23, No.10, pp.27-41 (1992).
(主要論文１の英訳)

2) N. Koda and T. Sasao:
“A minimization method for AND-EXOR expressions using lower bound theorem”,
Systems and Computers in Japan, Vol.24, No.13, pp.16-27 (1994).
(主要論文３の英訳)

査読を伴う国際会議

1) N. Koda and T. Sasao:
“LP characteristic vector of logic functions”,
IFIP WG 10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design, pp.99-106 (Sep. 1993).

2) N. Koda and T. Sasao:
“An upper bound on the number of products in minimum ESOPs”,
IFIP WG 10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design, pp.94-101 (Aug. 1995).

口頭発表

1) 神田徳夫, 笹尾勤：
“ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質”,
情報処理学会第39回全国大会, pp.1806-1807 (1989.10).

2) 神田徳夫, 笹尾勤：
“４変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質”,
電子情報通信学会ＦＴＳ研究会, FTS89-25, pp.7-14 (1989.10).

3) 神田徳夫, 笹尾勤：
“５変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式の簡単化について”,
電子情報通信学会秋季全国大会, pp.I-288 (1990.9).

4) 神田徳夫, 笹尾勤：
“ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式とその同値類について”,
電子情報通信学会春季全国大会, pp.I-119 (1991.3).

5) 神田徳夫, 笹尾勤：
“６変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の積項数について”,
電子情報通信学会春季全国大会, pp.I-120 (1991.3).

6) 神田徳夫, 笹尾勤：
“ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の積項数について”,
電子情報通信学会ＦＴＳ研究会, FTS91-22, pp.25-30 (1991.7).

7) 神田徳夫, 笹尾勤：
“論理関数のＬＰ特徴ベクトルとそのＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式簡単化への応用”,
電子情報通信学会ＶＬＤ研究会, VLD92-75, pp.41-48 (1993.1).

8) 神田徳夫, 笹尾勤：
“ＥＸＢＯＵＮＤ: 多出力ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式最小化プログラム”,
電子情報通信学会ＦＴＳ研究会, FTS93-35, pp.61-68 (1993.10).

9) 神田徳夫, 笹尾勤：
“対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化法について”,
情報処理学会設計自動化研究会, 74-5, pp.33-40 (1995.3).

目次

用語・記号表

SOP	AND-OR論理式 (Sum Of Products expression)
MSOP	最小SOP (Minimum Sum Of Products expression)
ESOP	AND-EXOR論理式(Exclusive-OR Sum Of Products expression)
MESOP	最小ESOP(Minimum Exclusive-OR Sum Of Products expression)
PPRM	正極性Reed-Muller論理式 (Positive Polarity Reed-Muller expression)
FPRM	固定極性Reed-Muller論理式 (Fixed Polarity Reed-Muller expression)
KRO	Kronecker論理式 (Kronecker expression)
PSDRM	擬似Reed-Muller論理式 (Pseudo Reed-Muller expression)
PSDKRO	擬似Kronecker論理式 (Pseudo Kronecker expression)
GRM	一般化Reed-Muller論理式 (Generalized Reed-Muller expression)
f, g	関数
F, G	論理式
$\mathcal{F}$	特性関数
$\alpha(f)$	関数 f の２進表現
$hex(f)$	関数 f の１６進表現
$uh(f)$	n 変数関数 f の２進表現の上位 2^{n-1} ビットが表現する関数
$lh(f)$	n 変数関数 f の２進表現の下位 2^{n-1} ビットが表現する関数
$\alpha(f) \circ \alpha(g)$	上位 2^n ビットを $\alpha(f)$，下位 2^n ビットを $\alpha(f)$ とする関数の２進表現
$(f \circ g)$	上位 2^n ビットを $\alpha(f)$，下位 2^n ビットを $\alpha(f)$ とする関数
$\tau(f)$	関数 f のMESOPの積項数
$\tau(F)$	ESOP F の積項数
$f \sim g$	関数 f と g はLP同値
$lp(f)$	関数 f のLP同値類代表関数
$EQV(f)$	関数 f とLP同値な関数の集合
$LP(n)$	n 変数LP同値類代表関数の集合
$LP(n,t)$	MESOPの積項数が t の n 変数LP同値類代表関数の集合

$M(n,t)$	$LP(n,t)$ の各関数を表現するMESOPの集合
$r(F)$	ESOP F の表現する関数
$F_m(f)$	論理関数 f を表現するMESOP
$MT(f)$	f の最小項の集合
$PT(n)$	n 変数のすべての積項の集合
$ETT(f)$	関数 f の拡張真理値表
$EWT(f)$	関数 f の拡張重み表
$LPV(f)$	関数 f のLP特徴ベクトル
$f(0)$	$f(0,x_2,\cdots,x_n)$
$f(1)$	$f(1,x_2,\cdots,x_n)$
$f(2)$	$f(0)\oplus f(1)$
$\tau(0)$	$\tau(f(0))$
$\tau(1)$	$\tau(f(1))$
$\tau(2)$	$\tau(f(2))$
$Q(v)$	$v\in MT(f)$ とし，v および v を包含する積項の集合
$\Phi(n)$	n 変数SOPの積項数の上界
$\Psi(n)$	n 変数ESOPの積項数の上界
$\Omega(n,k)$	次数が高々 k のESOPで表現可能な n 変数関数の個数
$\eta(n,k)$	${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_k$
S_k^n	n 変数基本対称関数
$SB(n,k)$	Sasao-Besslich 関数
$\mathcal{P}(M)$	集合Mのベキ集合
$\|S\|$	集合Sの要素の個数
$\emptyset$	空集合

第 1 章

序論

1.1 本研究の目的

最近のLSIは回路が非常に複雑になっており，論理回路を人手で設計することが極めて困難となっている．従って，論理回路の設計を自動的に行う論理自動合成システムが必須の設計ツールとなっている．

一般の論理回路は，AND，OR，NOT を基本論理素子として設計する．任意の積項をORで結合した式をAND-OR論理式という．AND，OR，NOT を基本論理素子とする論理自動合成システムにおいては，AND-OR 論理式の簡単化プログラムが必要となる．SOPの簡単化手法については，効率の良いアルゴリズムが開発されている．これを用いたAND-OR二段論理回路の設計手法は確立されており，PLA構造でLSI上に効率良く実現できるため，広く利用されている[39].

さて，任意の論理関数は，積項をEXORで結合したAND-EXOR二段論理式でも表現できる[29, 34]．算術演算回路，誤り訂正回路，通信用回路などにおいては，AND，OR，NOTのみで構成するよりも，EXOR を併用する方がゲート数を大幅に削減できることが経験的に知られている．例えば，n 変数パリティ関数 $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ を表現する場合，AND-OR論理式を用いて表現すると 2^{n-1} 個の積項が必要であるが，AND-EXOR論理式の場合は，n 個の積項で実現できる．従って，この関数の場合は，EXORを用いて表現した方が非常にコンパクトに表現できる．また，任意の $n(=2r)$ 変数対称関数は，積項数が高々 $3 \cdot 2^r$ のAND-EXOR論理式で実現できる [40]．『対称関数を実現する最小のAND-EXOR論理式の積項数は，最小のAND-OR論理式の積項数を越えない』ことが，$n \leq 7$ の場合に確かめられ，$n \geq 8$ の場合も成立すると推測されていたが[40]，最近，この推論が任意の n で成立することが証明された[36]．対称関数は計数の基本演算であり，計数はあらゆる算術演算回路の基本となる．従って，算術演算

回路の設計にはEXOR の利用が有効であることが，理論的にも裏付けられたといえる．また，従来から，任意の論理関数をAND-EXOR論理式によって実現するための積項数は，平均すると，AND-OR論理式によって実現する場合よりも少なくてよいと推測されている[4, 8, 40]．

以上のことから，EXORゲートを有効に活用すると，多くの場合，よりコンパクトな論理回路が実現できる．しかし，EXORゲートを用いた回路設計は，まだ広く実用化されていない．その原因の第一点は，EXORゲートが，AND，OR，NAND，NORゲート等に比較して高価なことが考えられる．例えば，CMOSによってゲートを実現する場合，NANDゲートは4個のMOSトランジスタで実現できるが，EXORゲートは6個のMOSトランジスタが必要である．第二点は，AND-EXOR論理式の効率のよい最小化法が確立されていないことである．与えられた論理関数をできるだけ簡単な論理式で表現する問題は，論理設計の基本である．AND-OR論理式の最小化は，主項の生成と最小被覆問題に帰着できる[30, 51]．しかし，AND-EXOR論理式には，主項に相当する概念はなく，変数の個数が多くなると，最小解に含まれると予想される積項の候補が非常に多くなる．これが，AND-EXOR論理式の最小化の困難な点の一つであると考えられる．

しかし，将来は，EXORを用いた論理設計が実際の回路で用いられるようになると考えられる．その第一の理由は，FPGA(Field Programmable Gate Array)の出現である[50]．FPGAでは，EXOR素子とANDやOR素子のコストは同じである．従って，コストの点でEXORが不利となることはない．現在，FPGAは，試作や多品種少量生産で利用されているが，２１世紀には，半数以上のゲートアレイがFPGAに置き代るという予測がある．第二の理由は，論理回路の設計が完全に自動化されると予想されることである．完全な設計自動システムでは，設計者は使用している素子を特に意識せずに回路を設計できる．また，安価で高性能な回路が得られるならば，回路の詳細は問題ではなくなる．AND-EXOR回路は，平均するとAND-OR回路よりも素子数が少なくてよい．従って，AND，ORの他にEXOR素子を用いた回路の多用化が予想できる．特に，通信用や演算系の回路では，EXOR素子の利用は必須と思われる．

EXORを用いた論理式の表現として，正極性Reed-Muller論理式，固定極性Reed-Mulller論理式，一般化Reed-Muller論理式，擬似Reed-Muller論理式，Kronecker論理式，擬似Kronecker論理式が提案されているが[7, 29, 34, 44, 46, 52]，これらの論理式の表現法には種々の制限がある．これに対して，任意の積項をEXORで結合した式

をAND-EXOR二段論理式（ESOP: Exclusive-OR Sum Of Products expression）という [40]．ESOPは，これらの中で最も一般的な論理式であるため，任意の論理関数をEXORを用いて表現した場合，ESOPの積項数が最も少ない[30, 39, 51]．本論文では，EXORを用いた論理式の表現として，ESOPを取りあげる．EXORゲートを含む論理回路自動合成システムを実現するためには，ESOPの最小化あるいは簡単化プログラムが必須となる．ESOPの簡単化に関しては，従来はヒューリスティックなアルゴリズム[3, 4, 8, 9, 12, 40, 47] しか知られていなかった．従って，得られた解の最小性に関しては，何ら保証が得られなかった．本論文では，ESOP の性質とその最小化，簡単化の手法について述べている．まず，4変数最小ESOPを網羅的方法によって求め，この結果から，ESOPの簡単化に寄与する最小ESOPの一般的性質を明らかにする．次に，LP同値関係の概念を導入し，これを用いて，5変数以下の関数を表現する最小ESOPを高速に得る方法を提案する．次に，与えられた関数を表現する最小ESOPの積項数の下界を評価する方法を提案し，これを用いたESOPの最小化法を提案する．最後に，任意の関数をESOPで表現するための積項数の上界を評価し，これによって，EXORを用いた論理回路設計の有効性を明らかにする．本論文で提案する簡単化法は，多くの場合，得られた解の最小性を保証できるのが特徴である．

1.2 本論文の構成

本論文は，7章からなる．本章以降の各章の内容は以下の通りである．

1) 第2章 諸定義および論理関数の基本的性質

本章では，まず，論理関数の基本的性質について述べる．次に，AND-EXOR二段論理式の種々のクラスを定義し，それらの間の関係について述べる．本論文では，これらのクラスのうち，ESOP を取り上げる．また，後章の議論で必要となる事項の諸定義を行う．

2)第3章 4変数MESOPとその性質

ESOPの最小化は極めて困難な問題であるが，変数の数が少ない場合は最小ESOP (MESOP: Minimum ESOP) を網羅的方法によって求めることができる．本章では，4

変数関数をNP同値類に分類し，その代表関数のMESOPの表を示す．MESOPは，まず第1に積項数が最小，次に，ESOP中のリテラル数が最小のものを求めている．その結果，任意の4変数関数は積項数が高々6のESOPで実現できることを示す．また，4変数関数をESOPで実現する場合，SOPで実現する場合よりも，平均すると少ない積項数で実現できることを示す．次に，4変数MESOPから得られるMESOPの一般的な性質について述べる．これらの性質はESOPの簡単化に利用できる．4変数以下のMESOPは本章で求めた表により，直ちに得られる．また，4変数MESOPは，5変数以上のESOPの簡単化や複雑度の解析に有用な情報となる．

3)第4章 LP同値関係とその応用

第3章においては，4変数関数をNP同値類に分類して検討したが，5変数関数の場合，NP同値類の個数は，約 1.2×10^6 となり，非常に多い．このため，5変数以上の関数をNP同値類に分類して検討することは現実的ではない．本章では，変数の置換とリテラルの変換に基づくLP同値関係を導入する．この同値関係の基では，MESOPの積項数は不変であるため，ESOPの分類に有用である．次に，関数群を効率良くLP同値類に分類する方法を示し，これを用いて5変数関数を6936個のLP同値類に分類する．次に，5変数関数のLP同値類代表関数のMESOPを求め，任意の5変数関数は，高々9積項のESOPで実現できることを示す．次に，論理関数のLP特徴ベクトルを定義し，それが n 変数関数 $(n \leq 5)$ のLP同値類を一意的に分類できることを示す．また，この性質を用いて，任意の関数のMESOPを高速に得る方法を提案し，この方法を5変数関数に適用し，その有用性を確認する．5変数以下のESOPは本方法によって高速に最小化できる．5変数MESOPは6変数以上のESOPの簡単化に利用できる．また，論理関数のLP特徴ベクトルは，$n \leq 14$ の場合，通常の計算機で容易に求められるため，他の応用も期待できる．

4)第5章 下界定理を用いたESOPの簡単化法

5変数以下のESOPは第4章の方法により，容易に最小化できる．しかし，6変数以上の場合は，一般にESOPの最小化は困難であり，ヒューリスティクなアルゴリズムによって簡単化を行うことにより，準最小解を得ている．しかし，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムは，その簡単化結果の最小性を保証しない．本章では，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法を示し，これを用いたESOPの簡

単化アルゴリズムを与える．このアルゴリズムの特徴は，1) 与えられた関数を表現するESOP の積項数の下界を評価する．2)簡単化結果の最小性が保証されたらアルゴリズムを停止する．という点にある．本アルゴリズムを5変数関数に適用した結果，全5変数関数の約98%に対して，簡単化結果の最小性を保証できることを示す．また，1出力関数の場合，10変数で積項数が15程度のESOPならば，ほとんどの場合，最小性の保証が可能である．また，多出力関数の場合，算術演算回路の一部については，簡単化結果の最小性が保証できることを示す．本アルゴリズムによって得られた簡単化結果は，従来のヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化された結果よりも信頼性が高い．

5) 第6章 MESOPの積項数の上界

任意の論理関数は SOP でも ESOP でも実現できる．任意の n 変数関数をSOP または ESOP によって実現するために必要な積項数を，それぞれ，$\Phi(n)$，$\Psi(n)$ で表す．$\Phi(n) = 2^{n-1}$ であることが知られている．SOP によって関数を実現する場合，n 変数パリティ関数は，$\Phi(n)$ 個の積項を必要とするので，最も複雑な関数と言える．本章では，ESOP によって実現する場合の最も複雑な関数について検討している．ESOP の場合，$n \leq 5$ のときは，$\Psi(n)$ 個の積項数を必要とする関数は得られているが，$n \geq 6$ のときは，最も複雑な関数の一般形は知られていない．6変数関数は $2^{64} \approx 1.8 \times 10^{19}$ 個存在し，非常に多いので，これらを全て簡単化して検討することは不可能である．対象とする関数の個数を削減するために，6変数関数を LP 同値類に分類すると，少なくとも 5.5×10^{11} 個存在し，これらの同値類の代表関数を簡単化することも現実的ではない．本章では，まず，$\Psi(n)$ の効率の良い評価アルゴリズムを与える．このアルゴリズムにより，$\Psi(6) = 15$ であることを証明する．次に，この結果を用いて，$\Psi(n) \leq 15 \cdot 10^{n-6}$ $(n \geq 6)$ であることを示す．$\Psi(6) = 15$ を証明するために考慮した関数の個数は約 3×10^{8} である．また，$n \leq 6$ のとき，最も複雑な関数の中に対称関数が含まれることを示す．

6)第7章 結論

本章では，本研究で得られた成果をまとめると共に，今後の課題について述べる．

第 2 章

諸定義および論理関数の基本的性質

2.1 まえがき

本章では，本論文で用いる基本事項の定義及び論理関数の基本的性質について述べる．また，任意の論理関数はAND-EXOR二段論理式で表現できることを示す．つぎに，AND-EXOR二段論理式のクラスを定義し，これらの間の関係について述べる．

2.2 論理関数の基本的性質

[定義 2.1] x と $\bar{x}$ を変数 x のリテラルという．

[定義 2.2] $S_i \subseteq \{0,1\}$， $S_i \neq \phi$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき， $T = x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n}$ を積項という．ここで， $x_i^{\{0\}} = \bar{x}_i, x_i^{\{1\}} = x_i, x_i^{\{0,1\}} = 1, x_i^{\phi} = 0$ である． $x_i^{\{0\}} = x_i^0$， $x_i^{\{1\}} = x_i^1$， $x_i^{\{0,1\}} = x_i^2$ と略記することがある．

[定義 2.3] n 変数関数について考えるとき， n 個のリテラルの論理積で，各変数のリテラルが1個だけ含まれているものを最小項という．関数 f に包含される最小項を f の最小項という．関数 f の最小項の個数を $|f|$ で表す． $|f|$ を f の重みともいう．

[定義 2.4] 積項の論理和

$$\bigvee_{(S_1, S_2, \cdots, S_n)} x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n} \tag{2.1}$$

をSOP(Sum Of Products expression)という．

[定義 2.5] 関数 f を表現する積項数最小のSOPを最小SOP(MSOP: Minimum SOP)という．

[定理 2.1] [10] 任意の n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，次のように一意的に展開できる．

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \cdots, a_n)} f(a_1, a_2, \cdots, a_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \tag{2.2}$$

ここで，$a_i \in \{0, 1\}$，$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \{0, 1\}$ である．式(2.2)を，最小項展開という．

[定義 2.6] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を最小項展開し，

$$f = p_\eta \cdot x_1 x_2 \cdots x_n \vee p_{\eta-1} \cdot x_1 x_2 \cdots \bar{x}_n \vee \cdots \vee p_0 \cdot \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$$

その係数の列 $p_\eta p_{\eta-1} \cdots p_0$ を 2^n ビット2進数と見たとき，これを論理関数 f の2進表現といい，$\alpha(f)$ で表す．また，2進表現を16進に変換したものを論理関数 f の16進表現といい，$hex(f)$ で表す．ここで，$\eta = 2^n - 1$ である．

[例 2.1] 表2.1に示す3変数関数 f において，

$$\alpha(f) = 01101101, \quad hex(f) = 6d$$

である． (例終)

表 2.1 3変数関数

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

[定理 2.2] [10] 任意の n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，次のように展開できる．

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, \cdots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.3}$$

式(2.3)を，変数 x_1 に関するシャノン展開という．

排他的論理和 (EXOR: exclusive-OR) $\oplus$ は，

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

で定義される．論理定数 0，1，及び，排他的論理和 $\oplus$，論理積 $\cdot$ で構成される代数は，次の公理を満足する．

[公理 2.1]

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z) && \text{(結合律)} \\
x \cdot (y \oplus z) &= x \cdot y \oplus x \cdot z && \text{(分配律)} \\
x \oplus y &= y \oplus x && \text{(交換律)} \\
x \oplus 0 &= x && \text{(排他的論理和に関する単位元)} \\
x \cdot 1 &= x && \text{(論理積に関する単位元)} \\
x \oplus 1 &= \bar{x} && \text{(否定)}
\end{aligned}$$

論理積 $\cdot$ は，省略することがある．

[補題 2.1] $xy = 0 \Longleftrightarrow x \vee y = x \oplus y$.

(証明)($\Rightarrow$) $xy = 0$ と仮定すると，$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y} = (\bar{x}y \vee xy) \vee (x\bar{y} \vee xy) = (\bar{x} \vee x)y \vee x(\bar{y} \vee y) = y \vee x$ を得る．

($\Leftarrow$) $xy \neq 0$ と仮定すると，$x = y = 1$ となる．これより，$x \oplus y = 0$, $x \vee y = 1$ を得る．従って，$x \vee y \neq x \oplus y$ を得る．　(証明終)

[例 2.2] 任意の 2 変数関数は，次のように最小項展開できる．

$$f(x_1, x_2) = f(0,0) \cdot \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee f(0,1) \cdot \bar{x}_1 x_2 \vee f(1,0) \cdot x_1\bar{x}_2 \vee f(1,1) \cdot x_1 x_2 \tag{2.4}$$

ここで，$f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1) \in \{0,1\}$ である．式(2.4)中の積項は互いに排他的であるから，補題2.1より，$\vee$ は $\oplus$ で置換できる．従って，式(2.4)は次のように表現できる．

$$f(x_1, x_2) = f(0,0) \cdot \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus f(0,1) \cdot \bar{x}_1 x_2 \oplus f(1,0) \cdot x_1\bar{x}_2 \oplus f(1,1) \cdot x_1 x_2$$

(例終)

任意の論理関数は，AND-OR二段論理式，または，AND-EXOR二段論理式で表現できる．

2.3 AND-EXOR論理式の種々のクラス

EXORを用いた論理式の表現法として，種々のクラスが提案されている．本節では，AND-EXOR論理式のいくつかのクラスを定義し，それらの間の関係について述べる[4, 7, 40, 44, 46]．

[補題 2.2] [2, 7] 任意の n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，変数 x_i について，

$$f = 1 \cdot f_0 \oplus x_i f_2 \tag{2.5}$$

$$f = 1 \cdot f_1 \oplus \bar{x}_i f_2 \tag{2.6}$$

$$f = \bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1 \tag{2.7}$$

の形で展開可能である．ここで，$f_0 = f(x_i = 0)$，$f_1 = f(x_i = 1)$，$f_2 = f_0 \oplus f_1$ である．

(証明) 式(2.7)はシャノン展開(定理2.2)である．式(2.7)に $\bar{x}_i = 1 \oplus x_i$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f &= (1 \oplus x_i) f_0 \oplus x_i f_1 \\ &= f_0 \oplus x_i (f_0 \oplus f_1) \\ &= f_0 \oplus x_i f_2 \end{aligned}$$

が得られる．また，式(2.7)に $x_i = 1 \oplus \bar{x}_i$ を代入すると，

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}_i f_0 \oplus (1 \oplus \bar{x}_i) f_1 \\ &= \bar{x}_i (f_0 \oplus f_1) \oplus f_1 \\ &= \bar{x}_i f_2 \oplus f_1 \end{aligned}$$

が得られる．これより，補題を得る． (証明終)

式(2.5) を正極性ダビオ展開，式(2.6) を負極性ダビオ展開，式(2.7) をシャノン展開という．

AND-OR論理式の場合には，一般にシャノン展開のみが可能であるが，AND-EXOR論理式の場合には，三つのタイプのいずれの展開も可能であるため，以下のような種々のクラスの論理式を生成できる[7, 34, 29, 44]．

2.3.1 正極性Reed-Muller論理式(PPRM)

全ての変数に対して，正極性ダビオ展開を適用すると，肯定リテラルのみの論理式

$$
\begin{aligned}
& a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \cdots \oplus a_nx_n \\
& \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \cdots \oplus a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& \oplus a_{12\cdots n}x_1x_2x_3\cdots x_n
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

が得られる．これを正極性Reed-Muller論理式(PPRM: Positive Polarity Reed-Muller expression)という．PPRMは関数に対して一意的に定まるので標準展開であり，最小化問題も存在しない．

[例 2.3] $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ のPPRMを求める．$\bar{x}_1 = x_1 \oplus 1$，$\bar{x}_2 = x_2 \oplus 1$，$\bar{x}_3 = x_3 \oplus 1$ の関係を用いて変形すると，

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1 \oplus 1)\cdot(x_2 \oplus 1)\cdot(x_3 \oplus 1) \\
&= 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3
\end{aligned}
$$

が得られる．全て肯定リテラルで表現されている． (例終)

2.3.2 固定極性Reed-Muller論理式(FPRM)

全ての変数に対して正極性ダビオ展開または負極性ダビオ展開を適用すると，式(2.8)と同様の形をした論理式が得られる．ただし，各変数に対して，肯定リテラルか否定リテラルのいずれか一方が使用されている．この論理式を固定極性Reed-Muller論理式(FPRM: Fixed Polarity Reed-Muller expression)という．n 変数関数に対してFPRMEは 2^n 個存在する．最小化問題は 2^n 個のFPRM中で積項数が最小の式を求める問題となる．

2.3.3 Kronecker論理式(KRO)

全ての変数に対して正極性ダビオ展開，負極性ダビオ展開またはシャノン展開を適用すると，FPRMを一般化した論理式が生成できる．この論理式をKronecker論理式(KRO: Kronecker expression)という．n 変数関数に対してKROは 3^n 個存在する．

2.3.4 擬似Reed-Muller論理式(PSDRM)

関数 f に正極性ダビオ展開または負極性ダビオ展開を適用すると，二つの部分関数が得られる．これらの部分関数のそれぞれに対して再び正極性ダビオ展開または負極性ダビオ展開を適用する．ただし，各部分関数で展開の方法が異なってもよいとすると，FPRMEを一般化した論理式が得られる．これを擬似Reed-Muller論理式(PSDRM: Pseudo Reed-Muller expression)という [44]．PSDRMでは，同じ変数の固定リテラルと否定リテラルの両方生ずることもある．n 変数関数のPSDRMは $2^{2^{n-1}}$ 個存在する．

2.3.5 擬似Kronecker論理式(PSDKRO)

関数 f に正極性ダビオ展開，負極性ダビオ展開またはシャノン展開を適用すると，二つの部分関数が得られる．これらの部分関数に対して再び正極性ダビオ展開，負極性ダビオ展開またはシャノン展開を適用するとKROが得られるが，各部分関数で展開の方法が独立に選べるとすると，KROを一般化した論理式が得られる．これを擬似Kronecker論理式(PSDKRO: Pseudo Kronecker expression)という．PSDKROでは，同じ変数の肯定リテラルと否定リテラルの両方生ずることがある．n 変数関数に対してPSDKROは $3^{2^{n-1}}$ 個存在する．

2.3.6 一般化Reed-Muller論理式(GRM)

式(2.8)の展開で，各リテラルの極性を自由に選べるとすると，PPRMを一般化した論理式が得られる．これを一般化RME(GRM: Generalized Reed-Muller expression)という．n 変数関数に対してGRMは $2^{n2^{n-1}}$ 個存在する．

2.3.7 AND-EXOR論理式(ESOP)

任意の積項をEXORで結合した論理式をAND-EXOR論理式(ESOP：Exclusive-OR Sum Of Products expression)という [40]．ESOPは最も一般化した論理式であり，最も少ない積項数で実現できる．積項数 t の n 変数関数のESOPは 3^{tn} 通り存在する．

2.3.8 各クラスの関係

[例 2.4]

1) $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2$ はPPRMである.

2) $x_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_2\bar{x}_3$ はFPRMであるがPPRMではない(x_3 のリテラルが負である).

3) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_3$ はPSDRMであるがFPRMではない(x_3 は正と負の両方のリテラルを含む). また, KROでもある.

4) $x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2$ はGRMであるがPSDRMではない(PSDRMでは表現できない).

5) $x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ はKROであるがGRMではない(同じ変数からなる積項を 2 個含む).

6) $1 \oplus x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ はESOPであるがGRMでもPSDKROでもない(同じ変数の積項を 2 個含む. また, PSDKROでは表現できない).

7) $x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1 \cdot 1 \cdot \bar{x}_3 \oplus 1 \cdot x_2x_3 \oplus 1 \cdot 1 \cdot 1$ はPSDRMであるがKROではない(x_2 は3個の異なるリテラルを含む).

8) $x_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 \cdot 1 \cdot 1 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ はPSDKRO であるがGRMでもKROでもない(同じ変数の積項を 3 個含み, 変数 x_2 は 3 個の異なるリテラルを含む).

(例終)

[定理 2.3] [44] $\mathcal{PPRM}$, $\mathcal{FPRM}$, $\mathcal{PSDRM}$, $\mathcal{KRO}$, $\mathcal{PSDKRO}$, $\mathcal{GRM}$, $\mathcal{ESOP}$ をそれぞれ, PPRM, FPRM, PSDRM, KRO, PSDKRO, GRM, ESOP で表現される論理式の集合とすると, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{PPRM} \subset \mathcal{FPRM} \subset \mathcal{PSDRM} \subset \mathcal{GRM} \subset \mathcal{ESOP}$$

$$\mathcal{FPRM} \subset \mathcal{KRO} \subset \mathcal{PSDKRO} \subset \mathcal{ESOP}$$

$$\mathcal{PSDRM} \subset \mathcal{PSDKRO}$$

図2.1は, 種々のクラスのAND-EXOR論理式の関係を示す.

以上のように, 与えられた関数をAND-EXOR二段論理式で表現す場合, いくつかの方法があるが, ESOPが最も一般的であり, 最も少ない積項数で表現できる. 本論文では, 与えられた関数をAND-EXOR二段論理式で表現する方法として, ESOPを取り上げ, これについて検討する.

[定義 2.7] 関数 f を表現する積項数最小のESOPを f の最小ESOP(MESOP: Minimum ESOP)という．f のMESOPの積項数を $\tau(f)$ で表す．また，f を表現するESOP F の積項数を $\tau(F)$ で表す．

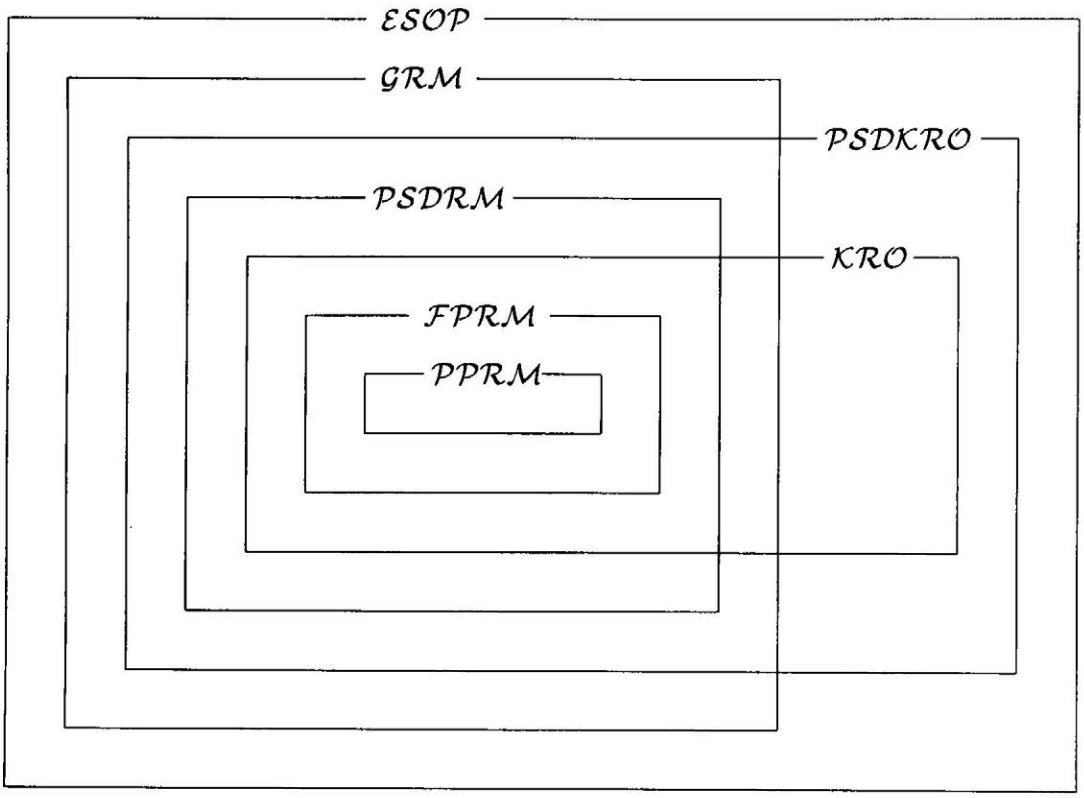

図 2.1　AND-EXOR論理式のクラスとその関係

2.4 むすび

本章では，論理関数の基本的性質及びAND-EXOR二段論理式のクラスを定義し，それらの間の関係について述べた．本論文では，AND-EXOR二段論理式としてESOPを取り上げる．また，後章の議論で必要となる事項の諸定義を行った．

第 3 章

4変数MESOPとその性質

3.1 まえがき

前章において，与えられた関数をAND-EXOR二段論理回路で実現する方法として，ESOPによる方法を提案した．しかし，ESOPの最小化問題は困難であり，最小解を能率よく求める方法は確立されていない．一般に，最小化手法が確立されていない論理設計問題でも，変数の個数が少ない場合には，最小解は網羅的方法により求めることができる．最小回路をカタログの形で求めておくと設計資料として利用できる．現在まで，3変数NOR，NAND回路 [11]，3変数NOR-OR回路 [1]，4変数AND-OR回路[5]，4変数NAND [13] について最小回路が公表されている．しかし，EXORを用いた回路の最小形は与えられていない．

本章では，4変数NP同値類代表関数のMESOPの表を示す．MESOPは，まず第1に積項数が最小，次にESOP中のリテラル数の総和が最小のものを求めている．MESOPを求める方法は網羅的方法を用いている．また，4変数MESOPから得られるMESOPの一般的な性質について検討し，簡単化に寄与するいくつかの興味ある性質を示す．4変数以下の論理関数は，本章で求めた表により直ちに最小形を得ることが出来る．5変数以上の関数の場合は，4変数MESOP及びMESOPの性質を用いると効率のよい簡単化が可能となる．また，4変数MESOPは，5変数以上の関数をESOPで表現するときの複雑度を解析するための有用な情報となる．

3.2 4変数MESOPの表の構成とその使用法

4変数MESOPは網羅的方法で求めた．4変数関数は $2^{2^4} = 65536$ 個存在する．まず，4変数関数の生成状況を管理する65536個の要素からなるテーブルを用意する．最初に，積項数0で表現できる関数を生成し，テーブル中の該当する要素にマークする．

これは定数0である．次に，積項数1で表現できる関数(全部で $3^4 = 81$ 個存在する)を生成し，テーブル中にマークする．順次積項数を増加してテーブル中の全ての要素がマークされたら手続きを終了する．最小論理式は，まず第一に積項数が最小，次に論理式中のリテラル数の総和が最小のものを求めている．なお，4変数関数はNP同値類に分類すると402個の同値類に分類できる[10, 30]．4変数関数のMESOPをNP同値類に分類し，関数の否定のMESOPの情報を考慮してコンパクトに表したものを付録Aに示す．

[定義 3.1] 関数 f とNP同値な関数のうち，16進表現の最小の関数をNP同値類の代表関数という．

MESOPの表は次の6個の欄によって構成されている．

欄1：関数のクラス

欄2：代表関数の16進表現

欄3：積項数

欄4：リテラル数

欄5：関数の否定のMESOPのタイプ

欄6：MESOP

また，関数の重みによってグループ分けされている．

MESOPの表を用いて，与えられた4変数関数のMESOPを求める方法を示す．

1) 与えられた論理関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の16進表現を求める．

2) 関数の重みにより以下の処理を行う．

a) 関数の重み ≤ 8 のとき

i) 変数の置換および否定の全ての組合せ($4! \times 2^4 = 384$ 通り)を行い，代表関数およびその組合わせを得る．

ii) この代表関数によって表を引き，該当するMESOPを得る．

iii) 得られたMESOPに対してi)で求めた置換および否定の逆変換を行い，与えられた関数に対するMESOPを得る．

b) 関数の重み > 8 のとき

i) 関数の否定を求める．

ii) 上記のa)-i), a)-ii)を行う.

iii) 表中の関数の否定形のタイプに応じて以下の処理を行う.

A) タイプ1: 定数1をEXORする.

B) タイプ2: リテラル数1の積項のうち, 任意の奇数個の積項の変数の否定をとる.

C) タイプ3: —関数番号のMESOPをとる.

iv) 得られたMESOPに対してb)-ii)で求めた置換および否定の逆変換を行い. 与えられた関数のMESOPを得る.

[例 3.1] 表 3.1 のMESOPを求める.

(1) この関数の重みは6, 16進表現は8147である.

(2) この関数に対して, 変数の置換および否定のすべての組み合わせを行い, 代表関数を求める. この場合,

i) 変数の置換 $x_1 \to x_3$, $x_2 \to x_1$, $x_3 \to x_2$ を行う.

ii) 変数 x_2, x_4 を否定する.

ことにより, 代表関数 06b2 を得る.

(3) 最小表中の重み6, 16進表現06b2 の行より,

$$f = \bar{x}_1 x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3 \oplus \bar{x}_2 x_4 \oplus \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \tag{3.1}$$

を得る.

(4) 式(3.1)に対して(2)の逆変換, すなわち

i) 変数 x_2, x_4 を否定する.

ii) 変数の置換 $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$, $x_3 \to x_1$ を行う.

ことにより, 与えられた関数のMESOP

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_4$$

を得る. (例終)

[例 3.2] 表 3.2 のMESOPを求める.

(1) この関数の16進表現は5fc6, 重みは10であるので, 否定をとると, 16進表現 a039 (重み6)を得る.

表 3.1 4変数関数(その1)

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

(2) この関数に対して,

i)変数の置換 $x_2 \to x_3$, $x_3 \to x_4$, $x_4 \to x_2$ を行う.

ii)変数 x_2, x_3 を否定する.

ことにより,代表関数0359を得る.

(3)最小表中の重み6, 16進表現0359の行より,

$$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3 \tag{3.2}$$

を得る.

(4) (3)の関数の否定形のタイプは3であるから,式(3.2)の否定は−関数番号行(class-80)より,

$$x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus x_1x_2 \tag{3.3}$$

を得る.

(5)式(3.3)に対して(2)の逆変換を行うことにより,MESOP

$$f = \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus x_1\bar{x}_4$$

表 3.2 4変数関数(その 2)

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

を得る. (例終)

3.3 MESOPの性質

本節では，前節で求めた4変数MESOPを検討し，これから得られるMESOPの一般的な性質について検討する.

[定義 3.2] 積項

$$T = x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n}$$

において，$S_i \neq \{0,1\}$ であるリテラルの個数を積項 T の次数という.

[定義 3.3] ESOPにおいて，積項の次数の最大値をその論理式の次数という.

[補題 3.1] ある関数 f を表現するESOPの次数を k とする．このとき，f のPPRMの次数は高々 k である.

(証明)任意のESOPは $\bar{x} = 1 \oplus x$ の関係を用いてPPRMに変形できる．ESOPの最高次

の次数をもつ積項を T とすれば,

$$T = x_{i1}^{a_{i1}} x_{i2}^{a_{i2}} \cdots x_{ik}^{a_{ik}} (a_{ij} = 0\text{または}1)$$

と表現できる.

$$T = (x_{i1} \oplus \bar{a}_{i1})(x_{i2} \oplus \bar{a}_{i2}) \cdots (x_{ik} \oplus \bar{a}_{ik})$$

の関係を用いて T を展開すると,

$$T = x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik} \oplus ((k-1)\text{次以下の積項})$$

となる. つまり, T を展開して得られるPPRMの次数は高々 k となる. 同様に, f のPPRMの次数も高々 k となる. (証明終)

[定理 3.1] 次数が高々 k のESOPで表現可能な n 変数関数の個数は

$$\Omega(n,k) = 2^{\eta(n,k)}$$

である. ここで,

$$\eta(n,k) = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_k$$

である.

(証明) 補題3.1より, 次数が高々 k のESOPで表現できる n 変数関数は, 次数が高々 k のPPRMに変換できる. 次数が高々 k のPPRMでは, 第2章式(2.8)において, 高々 $\eta(n,k)$ 個だけの係数が非ゼロとなる. これより,

$$\Omega(n,k) \leq 2^{\eta(n,k)} \tag{3.4}$$

を得る. 次に, ESOPの特別な例として, 次数が高々 k のPPRMを考える. 式(2.8)において, 非ゼロとなる係数の個数は $\eta(n,k)$ であり, 各々の係数の組み合わせに対して全て異なった関数が存在するので,

$$\Omega(n,k) \geq 2^{\eta(n,k)} \tag{3.5}$$

を得る. 式(3.4)と式(3.5)より, 定理を得る. (証明終)

[例 3.3]

$$\Omega(4,0) = 2^1 = 2$$
$$\Omega(4,1) = 2^{(1+4)} = 32$$
$$\Omega(4,2) = 2^{(1+4+6)} = 2048$$
$$\Omega(4,3) = 2^{(1+4+6+4)} = 32768$$
$$\Omega(4,4) = 2^{(1+4+6+4+1)} = 65536$$

これより，全ての 4 変数関数をESOPで実現するためには次数 4 が必要である．（例終）

[補題 3.2] 関数 f が

$$f = g \oplus h$$

の形で表現できるとき，

$$\tau(f) \leq \tau(g) + \tau(h)$$

である．

(証明) g と h を表現するMESOPをそれぞれ G, H とする．$G \oplus H$ は f を表現するので，f を表現するためには高々 $\tau(G) + \tau(H)$ 個の積項があれば十分である．（証明終）

[定理 3.2] 関数 f が

$$f = x \cdot p \oplus g(\text{ここで，}p\text{は積項，}g\text{は関数で，}p\text{も}g\text{も変数}x\text{を含まない})$$

と表現できるとき，

$$\tau(f) = \min\{\tau(g), \tau(p \oplus g)\} + 1$$

である．

(証明)　$f = x \cdot p \oplus g = \bar{x} \cdot p \oplus (p \oplus g)$ と表現できるので，補題3.2より，$\tau(f) \leq 1 + \tau(g)$, $\tau(f) \leq 1 + \tau(p \oplus g)$ を得る．これより，

$$\tau(f) \leq \min\{\tau(g), \tau(p \oplus g)\} + 1 \tag{3.6}$$

が成立する．

次に，f のMESOPを F とする．f は x に依存する関数なので，x または $\bar{x}$ をリテラルとして含む積項が少なくとも一つ存在する．

(A) x をリテラルとして含む積項が存在するとき
F において $x=0$ とおくと，少なくとも一つの積項を除去できる．また，この式は関数 g を表現する．これより，

$$\tau(g) \leq \tau(F) - 1 \tag{3.7}$$

を得る．
(B) $\bar{x}$ をリテラルとして含む積項が存在するとき
F において $x=1$ とおくと，少なくとも一つの積項を除去できる．また，この式は関数 $p \oplus g$ を表現する．これより，

$$\tau(p \oplus g) \leq \tau(F) - 1 \tag{3.8}$$

を得る．式(3.7)，(3.8) より，

$$\tau(F) \geq \min\{\tau(g), \tau(p \oplus g)\} + 1 \tag{3.9}$$

を得る．式(3.6)，(3.9) より，定理が成立する． (証明終)

定理3.2において $p=1$ とおくと，次が成立する．

[系 3.1] 関数 f が $f = x \oplus g$(ここで，gはxを含まない関数) と表現できるとき，

$$\tau(f) = \min\{\tau(\bar{g}), \tau(g)\} + 1$$

である．

[補題 3.3] $f = x \oplus g \Longleftrightarrow f(|\bar{x}) \vee f(|x) = 1, f(|\bar{x}) \cdot f(|x) = 0.$
ここで，g は x を含まない関数，$f(|x)$ は f の x における制限である [38].
(証明)($\Rightarrow$) 仮定より，$f = x \oplus g$ と表現できる．制限の定義より，$f(|\bar{x}) = g$，$f(|x) = \bar{g}$ である．$\bar{g} \vee g = 1$，$\bar{g} \cdot g = 0$ であるから，

$$f(|\bar{x}) \vee f(|x) = 1,\ f(|\bar{x}) \cdot f(|x) = 0$$

が得られる．
($\Leftarrow$) 仮定より，$f(|\bar{x})$ と $f(|x)$ は互いに排他的であるから，

$$f(|\bar{x}) \vee f(|x) = f(|\bar{x}) \oplus f(|x) = 1$$

である. $f(|\bar{x}) = g$ とおくと, , $f(|x) = 1 \oplus g = \bar{g}$ である. 任意の関数は,

$$\bar{x} \cdot f(|\bar{x}) \vee x \cdot f(|x)$$

と展開できる. これより,

$$f = \bar{x} \cdot g \vee x \cdot \bar{g} = x \oplus g$$

を得る. (証明終)

補題3.3は系3.1 が成立する関数の検出の際に有用である.

[例 3.4] 図3.1で表される4変数関数 f を考える. $f(|\bar{x}_1)$ および $f(|x_1)$ はそれぞれ図3.2, 図3.3となる. これより,

$$f(|\bar{x}_1) \vee f(|x_1) = 1, \ f(|\bar{x}_1) \cdot f(|x_1) = 0$$

であるから, 補題3.3より, $f = x_1 \oplus g$ と表現できる. また, $f(|\bar{x}_1) = g$ であり, 図3.2より, $f(|\bar{x}_1) = x_2x_3x_4$ であるから, $g = x_2x_3x_4$ を得る. 従って, $f = x_1 \oplus x_2x_3x_4$ となる. (例終)

[補題 3.4] $\tau(f) \leq \min\{|f|, 2^n - |f| + 1\}$.
(証明) f の最小項展開を $f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k$ とする. $m_i \cdot m_j = 0 \ (i \neq j)$ であるから, $f = m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k$ と表現できる. これより,

$$\tau(f) \leq |f| \tag{3.10}$$

を得る. また, $f = \bar{f} \oplus 1$ なので, 補題3.2より, $\tau(f) = \tau(\bar{f}) + 1$ を得る. また, $\tau(\bar{f}) \leq |\bar{f}| = 2^n - |f|$ である. これより,

$$\tau(f) \leq 2^n - |f| + 1 \tag{3.11}$$

を得る. 式(3.10), (3.11) より補題が成立する. (証明終)

[定理 3.3] 関数 f が $f = x^* \cdot g$(ここで, gはxを含まない関数, x^*は$\bar{x}$またはx) と表現できるとき, $\tau(f) = \tau(g)$ である.
(証明)
(1) g のMESOPを G とする. $x^* \cdot G$ は f を表現する. これより, $\tau(f) \leq \tau(g)$ を得

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01			1	
11	1	1		1
10	1	1	1	1

図 3.1 関数fのカルノー図

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01			1	
11			1	
10				

図 3.2 関数$f(|\bar{x}_1)$のカルノー図

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1	1	1

図 3.3 関数$f(|x_1)$のカルノー図

る．

(2) f のMESOPを F とする．F において，$x^* = x$ のとき，$x = 1$ とおき，また，$x^* = \bar{x}$ のとき，$x = 0$ とおく．このとき，式は関数 g を表現する．これより，$\tau(g) \leq \tau(f)$ を得る．

(1)，(2)より，定理が成立する． (証明終)

[補題 3.5] $f = x^* \cdot g \Longleftrightarrow \bar{x^*} \cdot f = 0$.

(証明)($\Rightarrow$) は明らかである．

($\Leftarrow$) $x^* = x$ とする．f をシャノン展開すると，$f = \bar{x} \cdot g_0 \vee x \cdot g_1$ と書ける．$\bar{x} \cdot f = 0$ より，$g_0 = 0$．これより，$f = x \cdot g_1 = x \cdot g$ と書ける．$x^* = \bar{x}$ のときも同様に証明できる． (証明終)

n 変数関数 f が $f = x^* \cdot g$ と表される場合，関数 f のESOPを簡単化するには，関数 g のESOPを簡単化すればよい．g は $(n-1)$ 変数関数であるから簡単化が容易である．補題3.5により，このような関数は高速に検出できる．

[定理 3.4] $|\tau(f) - \tau(\bar{f})| \leq 1$.

(証明) $g = \bar{f}$ とする．f，g のMESOPをそれぞれ，F，G とする．$g = f \oplus 1$，$f = g \oplus 1$ が成立するので，$F \oplus 1$，$G \oplus 1$ なるESOPは，それぞれ，関数 g，f を表現する．これより，

$$\tau(g) \leq \tau(F \oplus 1) \leq \tau(f) + 1$$

$$\tau(f) \leq \tau(G \oplus 1) \leq \tau(g) + 1$$

を得る．従って，

$$\tau(g) - \tau(f) \leq 1,\ \tau(f) - \tau(g) \leq 1$$

が成立するので，定理が成立する． (証明終)

[定理 3.5] $g = \bar{f}$ とし，$\tau(f) < \tau(g)$ とする．F が f のMESOPならば，$F \oplus 1$ は g のMESOPである．

(証明) g のMESOPを G とする．題意と定理3.4より，$\tau(G) = \tau(F) + 1$ が成立する．つまり，$F \oplus 1$ は g のMESOPである． (証明終)

ESOPをヒューリスティックな方法で簡単化するとき，一般に入力データの最小項の個数が少ない方が簡単化が容易である．従って，n 変数関数 f の最小項の個数が 2^{n-1} より多い場合は，$\bar{f}$ を最小化した結果に定数1をEXORして，再度最小化する方法が考えられる．このとき，定理3.4より，$\tau(f)$ と $\tau(\bar{f})$ の差は高々1であるから，$1 \oplus \bar{f}$ を最小化して減少する積項数は高々1である．

[例 3.5] 4変数関数

$$\begin{aligned} f &= x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \\ &\quad \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \end{aligned}$$

は最小項の個数が11であるので，否定をとって最小化すると，

$$\bar{f} = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

を得る．従って，

$$f = 1 \oplus \bar{f} = 1 \oplus \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 = x_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

を得る． (例終)

[補題 3.6] 論理関数 f が最小項を含まないESOPで表現可能なとき，f の最小項の個数は偶数である．

(証明) n 変数論理関数 f が最小項を含まないESOPで表現されているとする．このとき，f を表現するカルノー図を考える．カルノー図の各セルのうち，ESOPの各項に対応するループで i 回被覆されているセルの個数を $n_i(i = 1, 2, \cdots, k,$ 但し，kは奇数，$n_k = 0$でもよい) とする．ループで被覆されているセルの総数は，重複を許して考えると

$$A = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k$$

である．ESOPの各項が被覆するセルの個数は，$2, 4, 8, \cdots, 2^n$ のいずれかであり，これはいずれも偶数である．また，ESOPの各項が被覆するセルの総和は，上で求めたセルの総和 A に等しい．これより，A は偶数であることがわかる．

$$\begin{aligned} A &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k \\ &= (n_1 + n_3 + \cdots + n_k) + (2n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \cdots + (k-1)n_{k-1}) \end{aligned}$$

であり，k が奇数なので上式の後の括弧内の和は偶数である．A が偶数であることより，$n_1 + n_3 + \cdots n_k$ も偶数である．ESOPで表現する際，奇数個のループで被覆されたセルが，f の最小項となるので，f の最小項の個数は，$n_1 + n_3 + n_5 + \cdots + n_k$ に等しい．これより，f の最小項の個数は偶数であることがわかる．　(証明終)

[定理 3.6] 論理関数 f の最小項の個数が奇数のとき，f のESOPは最小項を含む．

(証明) 論理関数 f の最小項の個数を奇数とする．f のESOPが最小項を含まないと仮定すれば，補題3.6より，f の最小項の個数が偶数となる．しかし，これは題意に反する．これより定理が成立する．　(証明終)

[例 3.6] 2変数関数 $f = x_1 \vee x_2$ の最小項の個数は3である．この関数のESOPは，$x_1 \oplus \bar{x}_1 x_2$，$x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2$，$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$，$1 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2$ などいろいろ考えられるが，いずれも最小項を含む．但し，ESOPに含まれる最小項は f の最小項であるとは限らない．

(例終)

[系 3.2] 論理関数 f の最小項の個数が奇数のとき，

$$\tau(f) = \min_{a_i \in B}\{\tau(f \oplus x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n})\} + 1$$

が成立する．ここで，$B = \{0, 1\}$ である．

(証明)　定理3.5より，f のMESOPは最小項を含む．その最小項を $m = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ とすると，残りの関数は，$f \oplus m$ で表現できる．これより系の成立は明らかである．

(証明終)

関数 f の最小項の個数が奇数のとき，定理3.6より，f のESOPは最小項(m とする)を含むので，f の簡単化は，f から m を除いた残りの関数を簡単化した結果に m をEXORすればよい．しかし，該当する最小項を抽出する方法は，まだ明らかではない．

3.4　検討

従来から，論理関数を表現するために必要なESOPの積項数はSOPに比べて少なくてよいと推測されてきた [40]．この推測を実証する指標として，任意の関数を表現するために必要な積項数の上界及び平均が考えられる．表3.3は4変数関数をMESOPで表現す

表 3.3 MSOP とMESOPで実現可能な 4 変数関数の個数の比較

積項数	MSOP		MESOP	
	代表関数の個数	関数の個数	代表関数の個数	関数の個数
0	1	1	1	1
1	5	81	5	81
2	21	1804	27	2268
3	75	13472	121	21744
4	156	28904	200	37530
5	98	17032	46	3888
6	33	3704	2	24
7	10	512		
8	3	26		
合計	402	65536	402	65536

るために必要な積項数およびその積項数で表現できる関数の数の分布を示す．比較のために，MSOPによって表現した結果も示す．

これより，MESOPの積項数の上界は6，MSOPの上界は8となる．また，任意の4変数関数を表現するために必要な積項数の平均は，MESOPの場合3.66，MSOPの場合4.13であり，MESOPの方が約11%少ない積項数で表現できる．これらより，全般的にESOPの方が4変数関数を表現するために必要な積項数が少ないといえる．このことから，4変数以下の関数については上記の推測が実証されたことになる．5変数以上の関数の場合は考慮すべき組合せの数が非常に多くなるので，網羅的方法によって最小形を得ることは困難である．4変数MESOPを用いると，5変数関数の積項数の上界を効率良く評価することが可能となる [18]．4変数以下の論理関数は，本章で求めた表により直ちに最小形を得ることが出来る．また，5変数以上の関数の場合でも，定理3.2や定理3.3が適用できる場合には最小形が求まる．5変数関数の場合，与えられた関数を任意の変数で展開して得られる部分関数は4変数関数になるので，この部分関数に4変数MESOPを代入すると積項数の少ない初期解が得られる．これを簡単化することにより

短時間に最適解を得ることが可能であり[16]，この方法は6変数以上の関数にも適用可能である．

4変数関数を分類する方法として，本章ではNP同値関係を適用したが，この他に，変数の置換とリテラルの変換に基づくLP同値関係[1]が提案されている．LP同値関係を適用すると4変数関数は30個の同値類に分類できるので，4変数MESOPの表が小さくなる．しかし，4変数MESOPの表を利用するためには，与えられた関数の代表関数を求める必要がある．代表関数を求めるときには与えられた関数と同値な関数を全て生成する必要があり，生成すべき関数の個数は，NP同値関係のときは，(変数の置換)×(変数の否定)$=4! \times 2^4 = 384$ 個であるが，LP同値関係のときは，(変数の置換)×(リテラルの変換)$= 4! \times 6^4 = 31104$ 個となる．このため，LP同値関係を用いると代表関数を得るのに時間がかかる．4変数関数の場合には，NP同値関係で分類すると表の大きさも適当となり，最小形も比較的容易に求まる．

3.5　むすび

本章では，4変数MESOPを与えた．また，得られたMESOPの一般的性質について考察した結果，興味ある性質が明らかとなった．4変数関数の場合は，4変数MESOPの表を用いると直ちに最小解を得ることができる．5変数以上の関数の場合は，簡単化の過程で4変数MESOPを適用すると積項数の少ない初期解が得られるので，効率のよい簡単化が可能となる．論理関数をESOPによって実現するときの複雑度の指標として必要な積項数の上界があるが，4変数MESOPは，5変数以上の関数のMESOPの積項数の上界を評価するときに有用な情報となる．

[1]第4章で述べる．

第 4 章

LP同値関係とその応用

4.1 まえがき

与えられた n 変数関数を表現するMESOPを求める場合，一つの方法として，あらかじめ全ての n 変数関数のMESOPを求めておき，これを参照する方法が考えられる．しかし， n 変数関数の総数は 2^{2^n} 個存在し， $n = 4$ のとき，65536個， $n = 5$ のとき，4.3×10^9 である． $n \geq 4$ の場合，全ての関数のMESOPを求めておくことは現実的ではない．そこで，関数群を性質の同じ同値類に分類して検討すると，対象とすべき関数の個数を削減できる．現在まで，変数の置換に基づくP同値類，変数の置換と否定に基づくNP同値類，変数の置換と否定及び関数の否定に基づくNPN同値類などが提案されている [10, 30]．関数をNP同値類に分類する場合，その同値類の個数は， $n = 4$ のとき402個， $n = 5$ のとき 1.2×10^6 個であり， $n \geq 5$ の場合は同値類の個数が非常に多い．

本章では，変数の置換とリテラルの変換に基づくLP同値関係を導入する．LP同値関係の基では，MESOPの積項数は不変である．次に，関数群を効率よくLP同値類に分類する方法を示し、これを用いて5変数関数を6936個のLP同値類に分類する．また，LP同値類代表関数のMESOPを効率よく求める方法を与え，これを用いて，任意の5変数関数は，積項数が9以下のESOPで実現できることを示す．次に，論理関数のLP特徴ベクトルを導入し，与えられた関数のLP同値類を高速に決定する方法を与える．

4.2 LP同値関係

本節では，LP同値関係を導入し，その性質について述べる．

[例 4.1] 関数 $f=\bar{x}_i\cdot f_0\oplus x_i\cdot f_1$ のベクトル表現を $\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を2進行列とする．このとき，ベクトル $\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$ を行列Mによってベクトル $\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$ に変換すると，

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_0 \\ f_0\oplus f_1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

を得る．ここで，行列演算中の和は排他的論理和である．このとき，式(4.1)は，関数

$$g=\bar{x}_i\cdot g_0\oplus x_i\cdot g_1=\bar{x}_i\cdot f_0\oplus x_i(f_0\oplus f_1)=1\cdot f_0\oplus x_i\cdot f_1$$

のベクトル表現である．すなわち，関数

$$f=\bar{x}_i\cdot f_0\oplus x_i\cdot f_1$$

は，行列Mによって，関数

$$g=1\cdot f_0\oplus x_i\cdot f_1$$

に変換されたことを意味する．また，上記の変換は，f を表現するESOPにおいて，リテラル $\bar{x}_i$ と1を置換すると，関数 g を表現するESOPが得られることを示す． (例終)

[例 4.2] $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を2進行列とし，変数 x_i のリテラル $\bar{x}_i$, x_i, 1 のベクトル表現をそれぞれ, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，これらのベクトルを M によって変換すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る．これは，変数 x_i のリテラルは，行列 M によって，

$$\bar{x}_i\leftrightarrow 1$$

と変換されることを示す． (例終)

[定義 4.1] 行列式の値が非ゼロとなる行列を正則行列という．例えば，

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

は正則行列である．

表 4.1 正則行列とリテラル変換の対応

番号	行列	リテラル変換
0)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	不変
1)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x \leftrightarrow 1$
2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\bar{x} \leftrightarrow 1$
3)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\bar{x} \leftrightarrow x$
4)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$x \to \bar{x} \to 1 \to x$
5)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$x \to 1 \to \bar{x} \to x$

[補題 4.1] [42] 論理関数 f を $f = \bar{x}_i \cdot f_0 \oplus x_i \cdot f_1$ と展開し,

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

とする. ここで, M は2次正則行列である. f を表現する任意のESOPを F とし, F の変数 x_i のリテラルを M によって変換して得られるESOPを G とする. このとき, G は関数

$$g = \bar{x}_i \cdot g_0 \oplus x_i \cdot g_1$$

を表現する.

補題4.1は, 関数 f の部分関数を正則行列によって変換することと, f を表現するESOPのリテラルを正則行列によって変換することとは等価であることを意味する. 2次正則行列は6個存在する. 表4.1は, 2次正則行列と, それに対応するリテラル変換を示す.

[定理 4.1] （リテラル変換定理）[42, 3]

$f = \bar{x} \cdot f_0 \oplus x \cdot f_1$ とする．このとき，変数 x のリテラルに対して次の変換を施す．

$$
\begin{aligned}
L_1(f) &= \bar{x} \cdot f_0 \oplus 1 \cdot f_1 \quad (x \leftrightarrow 1)\\
L_2(f) &= 1 \cdot f_0 \oplus x \cdot f_1 \quad (\bar{x} \leftrightarrow 1)\\
L_3(f) &= x \cdot f_0 \oplus \bar{x} \cdot f_1 \quad (x \leftrightarrow \bar{x})\\
L_4(f) &= 1 \cdot f_0 \oplus \bar{x} \cdot f_1 \quad (\bar{x} \to 1 \to x \to \bar{x})\\
L_5(f) &= x \cdot f_0 \oplus 1 \cdot f_1 \quad (x \to 1 \to \bar{x} \to x)
\end{aligned}
$$

このとき，

$$\tau(f) = \tau(L_i(f)) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

である．

[定理 4.2] [42]　関数 f を表現するMESOPを

$$F = \bar{x} \cdot F_0 \oplus x \cdot F_1 \oplus 1 \cdot F_2$$

とするとき，

$$
\begin{aligned}
L_1(F) &= \bar{x} \cdot F_0 \oplus 1 \cdot F_1 \oplus x \cdot F_2 \quad (x \leftrightarrow 1)\\
L_2(F) &= 1 \cdot F_0 \oplus x \cdot F_1 \oplus \bar{x} \cdot F_2 \quad (\bar{x} \leftrightarrow 1)\\
L_3(F) &= x \cdot F_0 \oplus \bar{x} \cdot F_1 \oplus 1 \cdot F_2 \quad (x \leftrightarrow \bar{x})\\
L_4(F) &= x \cdot F_0 \oplus 1 \cdot F_1 \oplus \bar{x} \cdot F_2 \quad (x \to 1 \to \bar{x} \to x)\\
L_5(F) &= 1 \cdot F_0 \oplus \bar{x} \cdot F_1 \oplus x \cdot F_2 \quad (\bar{x} \to 1 \to x \to \bar{x})
\end{aligned}
$$

もMESOPである．

定理4.1，定理4.2は，リテラル変換により，MESOPの積項数が不変であることを意味する．

[例 4.3] $f = x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot 1 \cdot x_3 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot 1 \cdot x_3 \cdot x_4$ とする．f にリテラル変換 $x_i \leftrightarrow 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を適用すると，同じ関数となる．すなわち，$L_1(f) = f$ である．f にリテラル変換 $\bar{x}_i \leftrightarrow 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を適用すると，$L_2(f) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ となる．f 及び $L_2(f)$ を表現するカルノー図を，それぞれ図4.1，図4.2に示す．図4.1，図4.2を比較すると，f よりも $L_2(f)$ の方が最小項の個数が少ない．　(例終)

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11	1	1		1
10		1	1	1

図 4.1　f

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00			1	
01		1		1
11	1			
10		1		1

図 4.2　$L_2(f)$

[定義 4.2] 論理関数において次の条件を満足する関係 $\sim$ をLP同値関係という.

1)$f \sim f$.

2)$f_1 = f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots)$,　$f_2 = f(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots)$

ならば $f_1 \sim f_2$（入力変数の置換）.

3) 関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を表現するESOPを F とする. F に対してリテラル変換を施して得られるESOPを G とする. G の表現する関数を g とするとき, $g \sim f$ である.

リテラル変換は6通り存在するので, 1つの n 変数関数とLP同値な関数は, 高々 $n!6^n$ 個存在する.

[定義 4.3] 関数 f とLP同値な関数のうち, その2進表現の値が最小の関数をLP同値類の代表関数と言い, $lp(f)$ で表す.

[例 4.4] 2変数関数 $f(x,y)$ は全部で16個存在する．表4.2は，2変数関数をLP同値類に分類した結果を示す．これより，2変数関数は3個のLP同値類に分類できることがわかる．同値類番号2に属するESOPの同値関係の一部を次に示す．

$\bar{x}y \sim xy$ （リテラル $\bar{x}$ をリテラル x に変換）
$xy \sim x$ （リテラル y をリテラル1に変換）
$x \sim y$ （x と y の置換）
$y \sim 1$ （リテラル y をリテラル1に変換）

（例終）

表 4.2 2変数関数のLP同値類

同値類	関数			
1	0			
2	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	xy
	$\bar{x}$	x	$\bar{y}$	y
	1			
3	$x \oplus \bar{y}$	$x \oplus y$		
	$1 \oplus \bar{x}\bar{y}$	$1 \oplus \bar{x}y$	$1 \oplus x\bar{y}$	$1 \oplus xy$

[例 4.5] 3変数関数 $f(x,y,z)$ は全部で256個存在する．これらの関数は6個のLP同値類に分類できる．表4.3は，3変数LP同値類代表関数及びそのMESOPを示す．他の関数のMESOPは，代表関数のMESOPに対して変数の置換及びリテラルの変換を施すことによって得られる． （例終）

[定義 4.4] 関数 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ において，変数 x_i と x_j を置換して得られる関数 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ が元の関数に等しいとき，f は x_i と x_j に関して対称であるという．また，関数 f の変数の部分集合を任意に置換しても f が変化しないとき，f を部分対称関数という．また，関数 f の変数を任意に置換しても f が変化しないとき，f を完全対称関数という．

表 4.3　3変数関数のLP同値類

同値類	代表関数	代表関数のMESOP
1	00	0
2	01	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
3	06	$\bar{x}y \oplus \bar{x}z$
4	18	$x\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}yz$
5	16	$\bar{x} \oplus \bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}yz$
6	6b	$\bar{x} \oplus y\bar{z} \oplus x\bar{y}z$

[定義 4.5] [10]

$$
\begin{aligned}
S_0^n &= \bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n \\
S_1^n &= x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n \vee \bar{x}_1 x_2\cdots\bar{x}_n \vee \cdots \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
S_n^n &= x_1 x_2\cdots x_n
\end{aligned}
$$

を n 変数の基本対称関数という．S_i^n は n 個の入力のうち，丁度 i 個の入力が1のときのみ値が1となるような関数である．

[定理 4.3] [10]　任意の n 変数対称関数 f は，基本対称関数 $S_0^n, S_1^n, \cdots, S_n^n$ を用いて，

$$
f = \bigvee_{i=0}^{n} b_i S_i^n = S_A^n
$$

と一意に表現できる．ここで，$b_i \in \{0,1\}$，$A \subseteq \{0,1,\cdots,n\}$ で，$b_i = 1 \leftrightarrow i \in A$ である．S_A^n は，入力の1の個数を i とするとき，$i \in A$ のときのみ値が1となる関数である．

[定義 4.6] 与えられた関数において，すべての変数に同一のリテラル変換を適用する変換を対称L変換という．また，対称L変換によって得られる関数の集合を対称L同値類という．

[注意 4.1] 完全対称関数に対称L変換を適用すると，対称関数が得られる．

表 4.4　対称関数の対称 L 同値関係による分類

変数の個数	関数の総数	対称 L 同値類の個数
3	16	6
4	32	10
5	64	16
6	128	32
7	256	52

表4.4は，7変数以下の対称関数を対称 L 同値類に分類した結果を示す．これより，対称関数の総数の約 1/4 個の同値類に分類できる．

次の対称関数は，ESOP 簡単化プログラムのベンチマーク関数として用いられている [40].

[定義 4.7] $$SB(n,k) = \sum_{\substack{(a_1 < a_2 < \cdots a_k)\\ a_i \in \{1,2,\cdots,n\}}} \oplus \quad x_{a_1}x_{a_2}\cdots x_{a_k}$$

[補題 4.2] $\tau(SB(n,k)) = \tau(SB(n,n-k))$

(証明)　$$SB(n,k) = \sum_{\substack{(a_1 < a_2 < \cdots < a_k)\\ a_i \in \{1,2,\cdots,n\}}} \oplus \quad x_{a_1}x_{a_2}\cdots x_{a_k}$$

ここで，リテラル変換 L_1： $x_i \leftrightarrow 1 (1 \leq i \leq n)$ を適用すると，

$$L_1(SB(n,k)) = \sum_{\substack{(b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-k})\\ b_i \in \{1,2,\cdots,n\}}} \oplus \quad x_{b_1}x_{b_2}\cdots x_{b_{n-k}}$$

を得る．ここで，

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \cdots, b_{n-k}\} = \emptyset,$$

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \cup \{b_1, b_2, \cdots, b_{n-k}\} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

である．$SB(n,k)$ は対称関数なので，$L_1(SB(n,k)) = SB(n,n-k)$ が成立する．従って，定理4.1より，補題が成立する．　(証明終)

4.3 LP同値類代表関数の性質

本節では，LP同値類代表関数の性質について述べる．

[定義 4.8] n 変数関数 f の 2 進表現の上位 2^{n-1} ビットが表現する関数を $uh(f)$，下位 2^{n-1} ビットが表現する関数を $lh(f)$ で表す．

[定義 4.9] 二つの n 変数関数を f_0，f_1 とする．上位 2^n ビットが $\alpha(f_0)$，下位 2^{n-1} ビットが $\alpha(f_1)$ であるような $(n+1)$ 変数関数の 2 進表現を $\alpha(f_0) \circ \alpha(f_1)$ で表す．また，この $(n+1)$ 変数関数を $(f_0 \circ f_1)$ で表す．

[定義 4.10] 関数 f とLP同値な関数の集合を $EQV(f)$ で表す．

[定義 4.11] n 変数LP同値類代表関数の集合を $LP(n)$ で表す，また，MESOPの積項数が t の n 変数代表関数の集合を $LP(n,t)$ で表す．

[補題 4.3] 二つの n 変数関数を f_0，f_1 とする．次の(1)，(2)，(3)に示す三つの $(n+1)$ 変数関数の集合 H_1，H_2，H_3 から得られる代表関数の集合はすべて等しい．

$$
\begin{array}{ll}
(1) & H_1 = \{(g_0 \circ g_1) | g_0 \in EQV(f_0), g_1 \in EQV(f_1)\} \\
(2) & H_2 = \{(lp(f_0) \circ g_1) | g_1 \in EQV(f_1)\} \\
(3) & H_3 = \{(g_0 \circ lp(f_1)) | g_0 \in EQV(f_0)\}
\end{array}
$$

(証明) (1)において，g_0 を $lp(f_0)$ に変換するリテラル変換を r_n，変数の置換を p_n とし，g_1 をリテラル変換 r_n，変数の置換 p_n によって変換した関数を g'_1 とする．(1)で表現される $(n+1)$ 変数関数の上位 2^n ビット，下位 2^n ビットをリテラル変換 r_n，置換 p_n で変換すると，

$$(lp(f_0) \circ g'_1) \tag{4.2}$$

が得られる．

$$g'_1 \in EQV(f_1)$$

であるから，式(4.2)の関数は H_2 の要素となる．すなわち，(1)の関数と同値な関数は H_2 の要素となる．同様にして，(1)の関数と同値な関数は H_3 の要素となり，(2) の関数と同値な関数は(3)の関数と同値な関数の集合の要素となる．また，

$$H_2 \subseteq H_1,\quad H_3 \subseteq H_1$$

なので，(2)，(3)の関数と同値な関数は H_1 の要素になる．以上より，補題が成立する．

(証明終)

[補題 4.4] $f \in LP(n) \Longrightarrow uh(f) \in LP(n-1)$.

(証明) $uh(f) \notin LP(n-1)$ と仮定する．このとき，$g = lp(uh(f))$ とすると，$\alpha(g) < \alpha(uh(f))$ である．$uh(f)$ を $lp(uh(f))$ に変換するリテラル変換を w_n，変数の置換を p_n とし，$lp(f)$ を w_n，p_n で変換した関数を k とする．このとき，$h = (g \circ k)$ を考えると，$f \sim h$ となる．しかし，$\alpha(h) < \alpha(f)$ である．これは，$f \in LP(n)$ の条件に反する．従って，補題が成立する．

(証明終)

[例 4.6] 表4.5は4変数以下のLP同値類代表関数の16進表現の一覧を示す．これより，補題4.4が成立していることがわかる．

(例終)

表 4.5 4変数以下のLP同値類代表関数

n	2	3	4		
$LP(n)$	0	00	0000	016a	0678
	1	01	0001	0180	06b0
	6	06	0006	0182	06b1
		16	0016	0186	1668
		18	0018	0196	1669
		6b	006b	0660	1681
			0116	0661	1683
			0118	0662	168b
			012c	066b	18ef
			0168	0672	6bbd

[補題 4.5]

$$f_0, f_1 \in LP(n),\ \alpha(f_0) < \alpha(f_1),\ g \in EQV(f_1)$$

とする．$h = lp(f_0 \circ g)$ とするとき，

$$uh(h) \in LP(n),\ \alpha(uh(h)) \leq \alpha(f_0)$$

である．

(証明) $k = (f_0 \circ g)$ とする．代表関数はLP同値な関数のうち，2進表現が最小の関数であるから，$\alpha(lp(k)) \leq \alpha(k)$ すなわち $\alpha(uh(lp(k))) \leq \alpha(uh(k)) = \alpha(f_0)$ が成立する．また，補題4.4より，$uh(lp(k)) \in LP(n)$ である．以上のことから補題が成立する．

(証明終)

[補題 4.6] 集合

$$\{(f \circ g) | f \in LP(n), g\text{は}n\text{変数関数}\} \tag{4.3}$$

から得られる $n+1$ 変数代表関数の集合を H とするとき，$H = LP(n+1)$ である．

(証明) 題意より，式(4.3)の要素となる関数の2進表現の上位 2^n ビットは，n 変数関数のすべての代表関数に対応する．従って，これらの上位 2^n ビットの表現する関数と同値なすべての関数の発生により，すべての n 変数関数が生成される．従って，式(4.3)から生成されるLP同値な関数の集合はすべての $(n+1)$ 変数関数を含む．このことから補題が成立する．

(証明終)

[補題 4.7]

$$f_0, f_1 \in LP(n),\ \alpha(f_0) < \alpha(f_1),$$

$$K_0 = \{(f_0 \circ g) | g\text{は}n\text{変数関数}\},\ K_1 = \{(f_1 \circ g) | g\text{は}n\text{変数関数}\}$$

とする．

$$H_0 = \{h_0 | k_0 \in K_0, h_0 = lp(k_0), uh(h_0) = f_0\},$$

$$H_1 = \{h_1 | k_1 \in K_1, h_1 = lp(k_1), uh(h_1) = f_0\}$$

とするとき，$H_1 \subseteq H_0$ である．

(証明) $h_1 \in H_1$ とすると，$uh(h_1) = f_0$ である．集合 K_0 は，$uh(f) = f_0$ となる $(n+1)$ 変数関数をすべて含むので，$h_1 \in K_0$ である．また，H_0 は，K_0 から得られる $uh(f') = f_0$ となる 代表関数 f' の集合であるから，$h_1 \in H_0$ である．これより，補題を得る．

(証明終)

4.3.1 LP(n) を求めるアルゴリズム

前節で議論したLP同値類代表関数の性質を用いて，$LP(n)$ を効率よく求める方法を示す．

[アルゴリズム 4.1] <LP(n)の計算>

$LP(n-1)$ は既知とする．

1) 次のことをすべての $f \in LP(n-1)$ に対して行う．

   a) n 変数関数の集合

$$Q = \{(f \circ g) | g は (n-1) 変数関数\} \tag{4.4}$$

   を生成する．

   b) $h \in Q$ とし，h と同値な関数をすべて生成する．このとき，Q に h と同値な関数が含まれていればこれを削除する．$\alpha(uh(lp(h)) < \alpha(f)$ のとき，$lp(h)$ を削除する．

2) 1)で得られた $lp(h)$ の集合が $LP(n)$ である．

< アルゴリズムの説明 >

1) 補題4.6より，すべての $(n-1)$ 変数代表関数に対する Q の集合は，すべての n 変数LP同値類代表関数を含む．また，補題4.4，補題4.5より，Q の集合単位に分割して代表関数を求めてよい．このとき，補題4.7より，分割した関数の集合からは $uh(lp(h)) = f$ となる $lp(h)$ のみを求めればよい．

2) 式(4.4)の関数の集合には，互いに同値な関数が多数含まれている．これを削除することにより，既に得られた代表関数と同一の関数が重複して生成されることを防いでいる．

アルゴリズム4.1を用いて5変数関数のLP同値類を求めた結果，6,936個存在することが明らかになった．5変数関数のLP同値類を求めるときに考慮すべき関数の個数は約 2×10^6 個であるが，これを30個(4変数LP同値類の個数)に分割して代表関数を求めることができた．表4.6は，4変数LP同値類代表関数と，それを基に生成された5変数LP

表 4.7 同値類の個数の比較

n	1	2	3	4	5	6
関数の総数	4	16	256	65536	4.3×10^9	1.8×10^{19}
P同値類	4	12	80	3984	37333248	2.5×10^{16}
NP同値類	3	6	22	402	1228158	4.0×10^{14}
NPN同値類	2	4	14	222	616126	2.0×10^{14}
LP同値類	2	3	6	30	6936	$\geq 5.5 \times 10^{11}$

同値類の個数の分布を示す．表4.7は，6変数以下の関数のP同値類，NP同値類，NPN同値類，及び，LP同値類の個数の比較を示す．LP同値類は，その同値類の個数が他の同値類の個数より非常に少ないので，AND-EXOR回路の設計に有用である．

4.4 LP同値類代表関数のMESOP

本節では，LP同値類代表関数のMESOPを効率よく求める方法について検討する．

[定義 4.12] ESOP F の表現する関数を $r(F)$ で表す．

[定義 4.13] 論理関数 f を表現するMESOPを $F_m(f)$ で表す．

[定義 4.14] $LP(n,t)$ の各関数を表現するMESOPの集合を $M(n,t)$ で表す．$M(n,t) = \{F_m(f)|f \in LP(n,t)\}$ と表せる．

[定義 4.15] n 変数のすべての積項の集合を $PT(n)$ で表す．

[補題 4.8] 関数 f のMESOPを F とする．F の積項の一つを p とし，F から p を除いて得られるESOPを G とすると，G はMESOPである．

(証明) $\tau(F) = t$ とする．G がMESOPでないと仮定する．このとき，G は簡単化可能である．G を簡単化したESOPを G' とすると，$\tau(G') \leq t-2$ である．$H = G' \oplus p$ とすると，$\tau(H) \leq t-1$ が成立する．しかし，H は関数 f を表現するので，f は積項数が高々 $t-1$ のESOPで表現できたことになる．これは F がMESOPであるという仮定に反する．これより，補題が成立する．(証明終)

表 4.6 4変数LP同値類代表関数とそれを基に生成された 5変数LP同値類の個数

$LP(4)$	$\|LP(5)\|$
0000	30
0001	189
0006	432
0016	563
0018	444
006b	27
0116	287
0118	2218
012c	582
0168	740
016a	430
0180	13
0182	120
0186	246
0196	163
0660	12
0661	112
0662	77
066b	69
0672	53
0678	78
06b0	5
06b1	6
1668	22
1669	10
1681	5
1683	1
168b	1
18ef	0
6bbd	1
total	6936

[補題 4.9] F を積項数 t のMESOPとし, p を積項とする. $G = F \oplus p$, $g = r(G)$ とするとき, $t-1 \leq \tau(g) \leq t+1$ が成立する.

(証明) (i)題意より, $\tau(g) \leq t+1$ は明らかである.
(ii) $\tau(g) \leq t-2$ であると仮定する. G の MESOP を G' とすると, 仮定より, $\tau(G') \leq t-2$ である. 次に, ESOP $H = G' \oplus p$ を考えると,

$$\tau(H) \leq t-1 \tag{4.5}$$

が成立する. H は F と同じ関数を表現し, F はMESOPなので,

$$\tau(H) = t \tag{4.6}$$

が成立する. (4.5)と(4.6)は矛盾する. これより,

$$\tau(g) \geq t-1$$

である. (i), (ii)より, 補題が成立する. (証明終)

[補題 4.10] $H = \{F \oplus q | F \in M(n,t), q \in PT(n)\}$, $R = \{lp(f) | f = r(F), F \in H\}$ とするとき, $LP(n,t+1) \subseteq R$ が成立する.

(証明) $g \in LP(n,t+1)$ とし, g を表現するMESOPを G とする. G の積項の一つを p とし, G から積項 p を除いたESOPを K とすると, $G = K \oplus p$ と表せる. このとき, 補題4.8より, K はMESOPである. K の表現する関数を k とし, k から $lp(k)$ を得る手順を α とする. K のリテラルに変換 α を施して得られるESOPを K', p のリテラルに変換 α を施して得られる積項を p' とすると, $K' \in M(n,t)$, $p' \in PT(n)$ である. $G' = K' \oplus p'$ とすると, 明らかに $G' \in H$ である. G' の表現する関数を g' とすると, g' に α の逆変換を施すことにより, 代表関数 g が得られる. これより, $g \in R$ となり, 補題を得る. (証明終)

4.4.1 M(n,t)を求めるアルゴリズム

前節で議論したMESOPの性質を用いて, LP同値類代表関数のMESOPを求める方法を示す.

[アルゴリズム 4.2] ＜M(n,t)の計算＞

$LP(n)$ 及び $M(n,1)$ は既知とする.

1) $t \leftarrow 1$ とする.

2) $M(n,t)$ の各MESOPに一つの積項をEXORして得られるESOPの集合を生成する.

3) 2)の各ESOPの表現する関数のLP同値類代表関数の集合を求める.

4) 3)で得られた代表関数の集合に, 集合 $\{LP(n,s)|s \leq t\}$ の要素が含まれていれば, これを削除する.

5) 得られた代表関数の集合が $LP(n,t+1)$ である. 代表関数の得られたESOPから, $M(n,t+1)$ を得る.

6) すべての代表関数のMESOPが求まればアルゴリズムを終了する.

7) $t \leftarrow t+1$ として2)へ行く.

＜アルゴリズムの説明＞

1) $M(n,1)$ は n 変数の積項を表し, 全部で 3^n 個存在する.

2) 補題4.10より, $M(n,t+1)$ は, $M(n,t)$ にすべての1積項をEXORしたESOPを考慮すれば十分である.

4) 補題4.9より, 2)で得られたESOPは, MESOPではないことがあるので, これを除去する.

アルゴリズム4.2を用いて $M(n,t)$ を求めるときに考慮すべき組合わせの個数の上界は,

$$N_{max} = U_n \cdot 3^n \cdot \Psi(n)$$

となる. ここで, $U_n = |LP(n)|$, $\Psi(n)$ は n 変数関数のMESOPの積項数の上界である. 一方, 網羅的方法による場合に考慮すべき積項の組み合わせの数は,

$$P = \sum_{k=1}^{\psi(n)} {}_{3^n}C_k$$

である.

表 4.8 積項数と5変数関数の個数の分布

MESOP の積項数	代表関数の個数	関数の個数
0	1	1
1	1	243
2	4	24948
3	19	1351836
4	137	39365190
5	971	545193342
6	3572	2398267764
7	2143	1299295404
8	86	11460744
9	2	7824
total	6936	4294967296

4.4.2 5変数関数のMESOP

アルゴリズム4.2を用いて，5変数LP同値類代表関数のMESOPを求めた結果，9積項以下のMESOPで実現できることが分かった．$M(5,t)(1 \leq t \leq 9)$ を求めるときに考慮した組合わせの個数は，$N_{max} \approx 1.5 \times 10^7$ であった．一方，網羅的方法によって求める場合に必要な組合わせの個数は，$P \approx 7 \times 10^{15}$ となる．アルゴリズム4.2による方が組み合わせの数が少ない．表4.8は，5変数関数をMESOPで実現するために必要な積項数およびその積項数で実現できる関数の数の分布を示す．また，表4.9は，MESOPの積項数が8および9の5変数LP同値類代表関数を示す．

4.5 LP特徴ベクトルとその応用

LP同値類代表関数のMESOPの表を用いて，与えられた関数のMESOPを求めるためには，与えられた関数がどの同値類に属するかを判定する必要がある．関数が属する同値類をすべて記憶することは，記憶容量の点で現実的ではない．また，LP同値類の定義に基づいて素直に行うと，$n!6^n$ に比例する手数が必要であり，時間がかかる．本節で

表 4.9　MESOPの積項数=8および9の5変数LP同値類代表関数(16進表現)

積項数=9	積項数=8			
16686881	006b6bbd	0196962b	06626bb9	16686887
6bbdbdd6	01161668	0196966e	066b6bb0	16686889
	01161669	0196966f	066b6bb1	1668688b
	0116166a	0196967e	066b6bb3	1668689f
	01169668	0196967f	066b6bb6	166868a9
	011696fe	019696bc	066b7881	166868bd
	01686816	019696bd	066b7883	166868bf
	01686817	019696e8	066b788e	166868eb
	0168687e	019696e9	066b7aa1	16686bde
	0168688e	019696ea	066b7aa9	166881e9
	0168688f	06606bbb	066b7aad	16688395
	0168689e	06606bd6	066bb006	1668899f
	0168689f	066168f6	066bb016	16688bd9
	01689681	06616ad6	066bb036	16688be3
	016896e9	06616bba	066bb0bd	1668abbd
	016a6a16	06616bbb	066bb116	16698116
	016a6a7c	06616bd6	066bb1a6	166981e8
	016a6abc	0661788e	066bb1ad	16698394
	016a6abd	0661788f	06789106	1669e881
	01969617	066178f9	06789186	16818168
	01969618	0661911f	06b0d24d	
	0196962a	0661918e	16686883	

は，このことを高速に行うためにLP特徴ベクトルの概念を導入する．LP特徴ベクトルはLP同値類に固有であり，与えられた関数のLP特徴ベクトルを求めることにより，その関数の属するLP同値類を一意に決定できる．

4.5.1　LP特徴ベクトルの性質

[定義 4.16] n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を展開ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$a_i \in \{0, 1, 2\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ で展開するとは，変数 x_i に対して，

$a_i = 0$ のとき，　　正極性ダビオ展開
$a_i = 1$ のとき，　　負極性ダビオ展開
$a_i = 2$ のとき，　　シャノン展開

の方法で展開することを示す．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を展開ベクトルという．

定義4.16より，次の補題を得る．

[補題 4.11] n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を展開ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で展開したとき，出現可能な積項の集合は，

$$\{x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} | b_i \in \{0,1,2\},\ b_i \neq a_i (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

である．

補題2.2より，n 変数関数 f を展開するとき，一つの変数で展開すると3個の部分関数が得られる．これを n 回繰り返すと 3^n 個の係数が得られる．

[定義 4.17] n 変数論理関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．このとき，次のような 3^n 個の要素からなる表 $ETT(f)$ を拡張真理値表 (Extended Truth Table) と言う．また，$ETT(f)$ の要素の添字アドレスを表す3進 n 項ベクトルを添字ベクトルと言い，

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n),\ c_i \in \{0, 1, 2\}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

で表す．f を展開ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で展開したときに出現する積項 $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$ の係数は，$ETT(f)_{\boldsymbol{c}}$ に格納される．ここで，$c_i = (a_i + b_i + 1) mod\ 3$ である．

[例 4.7] 2変数関数 $f(x_1, x_2)$ の真理値表は一般に表4.10のように表される．f の展開ベクトル $\boldsymbol{a}$ による展開は次のようになる．

表 4.10 2変数関数の真理値表

x_1	x_2	f
0	0	f_{00}
0	1	f_{01}
1	0	f_{10}
1	1	f_{11}

$$\boldsymbol{a}=(2,2):\ f=f_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus f_{01}\bar{x}_1x_2\oplus f_{10}x_1\bar{x}_2\oplus f_{11}x_1x_2$$

$$\boldsymbol{a}=(2,1):\ f=(f_{00}\oplus f_{01})\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_{10}\oplus f_{11})x_1\bar{x}_2\oplus f_{01}\bar{x}_1\oplus f_{11}x_1$$

$$\boldsymbol{a}=(2,0):\ f=(f_{00}\oplus f_{01})\bar{x}_1x_2\oplus(f_{10}\oplus f_{11})x_1x_2\oplus f_{00}\bar{x}_1\oplus f_{10}x_1$$

$$\boldsymbol{a}=(1,2):\ f=(f_{00}\oplus f_{10})\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_{01}\oplus f_{11})\bar{x}_1x_2\oplus f_{10}\bar{x}_2\oplus f_{11}x_2$$

$$\boldsymbol{a}=(1,1):\ f=(f_{00}\oplus f_{01}\oplus f_{10}\oplus f_{11})\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_{01}\oplus f_{11})\bar{x}_1\oplus(f_{10}\oplus f_{11})\bar{x}_2\oplus f_{11}$$

$$\boldsymbol{a}=(1,0):\ f=(f_{00}\oplus f_{01}\oplus f_{10}\oplus f_{11})\bar{x}_1x_2\oplus(f_{00}\oplus f_{10})\bar{x}_1\oplus(f_{10}\oplus f_{11})x_2\oplus f_{10}$$

$$\boldsymbol{a}=(0,2):\ f=(f_{00}\oplus f_{10})x_1\bar{x}_2\oplus(f_{01}\oplus f_{11})x_1x_2\oplus f_{00}\bar{x}_2\oplus f_{01}x_2$$

$$\boldsymbol{a}=(0,1):\ f=(f_{00}\oplus f_{01}\oplus f_{10}\oplus f_{11})x_1\bar{x}_2\oplus(f_{01}\oplus f_{11})x_1\oplus(f_{00}\oplus f_{01})\bar{x}_2\oplus f_{01}$$

$$\boldsymbol{a}=(0,0):\ f=(f_{00}\oplus f_{01}\oplus f_{10}\oplus f_{11})x_1x_2\oplus(f_{00}\oplus f_{10})x_1\oplus(f_{00}\oplus f_{01})x_2\oplus f_{00}$$

これより，$ETT(f)$ は表4.11のようになる．例えば，$\boldsymbol{a}=(0,1)$ のとき，積項 $x_1^1x_2^2$ の係数は，$(0,1)+(1,2)+(1,1)=(2,4)\equiv(2,1)(mod\ 3)$ の関係により，$\boldsymbol{c}=(2,1)$ に格納される． (例終)

拡張真理値表を求める具体的方法はアルゴリズム4.3で示す．

[定義 4.18] n 変数関数 f を展開ベクトル $\boldsymbol{a}$ で展開したときの積項数を $w(f,\boldsymbol{a})$ で表す．

[定義 4.19] n 変数論理関数を $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする．このとき，次のような 3^n 個の要素からなる表 $EWT(f)$ を拡張重み表(Extended Weight Table)という．ここで，$EWT(f)$ の要素の添字を表すベクトルを，

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ a_i\in\{0,1,2\}(i=1,2,\cdots,n)$$

表 4.11 2変数関数の拡張真理値表

c	$ETT(f)$
00	f_{00}
01	f_{01}
02	$f_{00} \oplus f_{01}$
10	f_{10}
11	f_{11}
12	$f_{10} \oplus f_{11}$
20	$f_{00} \oplus f_{10}$
21	$f_{01} \oplus f_{11}$
22	$f_{00} \oplus f_{01} \oplus f_{10} \oplus f_{11}$

とすると,

$$EWT(f)_{\boldsymbol{a}} = w(f, \boldsymbol{a})$$

である. ここで, $EWT(f)_{\boldsymbol{a}}$ は, $EWT(f)$ の $\boldsymbol{a}$ 番目の要素を示す.

[例 4.8] 表4.10の2変数関数の拡張重み表を表4.12に示す. 例えば,

$$f_{00} = 1,\ f_{01} = 0,\ f_{10} = 1,\ f_{11} = 0$$

のときを考える. $\boldsymbol{a} = (2, 0)$ のとき, 例4.7より, 積項数$= 4$ であるから, $EWT(f)$ の $(2, 0)$ 番目の要素の値は4となる. (例終)

拡張重み表を求める具体的方法はアルゴリズム4.4で示す.

[定義 4.20] n 変数論理関数を f とする. $EWT(f)$ を昇順にソートしたものを, f の LP特徴ベクトル(LP characteristic vector)といい, $LPV(f)$ で表す.

[補題 4.12] n 変数論理関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする. f を表現するESOP をFとし, Fのリテラル $\bar{x}_i$ と x_i を交換して得られるESOP をGとする. G が 関数 g を表現するとき, $LPV(f) = LPV(g)$ が成立する.

表 4.12 2変数関数の拡張重み表

c	$EWT(f)$
00	$(f_{00} \oplus f_{01} \oplus f_{10} \oplus f_{11}) + (f_{00} \oplus f_{10}) + (f_{00} \oplus f_{01}) + f_{00}$
01	$(f_{00} \oplus f_{01} \oplus f_{10} \oplus f_{11}) + (f_{01} \oplus f_{11}) + (f_{00} \oplus f_{01}) + f_{01}$
02	$(f_{00} \oplus f_{10}) + (f_{01} \oplus f_{11}) + f_{00} + f_{01}$
10	$(f_{00} \oplus f_{01} \oplus f_{10} \oplus f_{11}) + (f_{00} \oplus f_{10}) + (f_{10} \oplus f_{11}) + f_{10}$
11	$(f_{00} \oplus f_{01} \oplus f_{10} \oplus f_{11}) + (f_{01} \oplus f_{11}) + (f_{10} \oplus f_{11}) + f_{11}$
12	$(f_{00} \oplus f_{10}) + (f_{01} \oplus f_{11}) + f_{10} + f_{11}$
20	$(f_{00} \oplus f_{01}) + (f_{10} \oplus f_{11}) + f_{00} + f_{10}$
21	$(f_{00} \oplus f_{01}) + (f_{10} \oplus f_{11}) + f_{01} + f_{11}$
22	$f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}$

(証明) 関数 f, g は，それぞれ，

$$f = \bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1},\quad g = x_i f_{i0} \oplus \bar{x}_i f_{i1} = \bar{x}_i g_{i0} \oplus x_i g_{i1}$$

と表現できる．これより，

$$g_{i0} = f_{i1},\quad g_{i1} = f_{i0},\quad g_{i2} = g_{i0} \oplus g_{i1} = f_{i1} \oplus f_{i0} = f_{i2}$$

を得る．つまり，g は，f の展開において正極性ダビオ展開と負極性ダビオ展開を置換した関数である．従って，

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$$
$$\boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \cdots, b_i, \cdots, a_n)$$
$$b_i = \begin{cases} 1 - a_i & (\text{if } a_i = 0 \text{ or } 1) \\ a_i & (\text{if } a_i = 2) \end{cases}$$

とおくと，

$$w(f, \boldsymbol{a}) = w(g, \boldsymbol{b})$$

を得る．これより，$EWT(f)$ の要素を置換したものが $EWT(g)$ であることがわかる．これより，補題を得る． (証明終)

[補題 4.13] n 変数論理関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．f を表現する ESOP を F とし，F において，リテラル $\bar{x}_i$ と 1 を交換して得られるESOP を G とする．G が関数 g を表現するとき，$LPV(f) = LPV(g)$ が成立する．

(証明) 関数 f, g は，それぞれ，

$$f = \bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1},\quad g = 1 \cdot f_{i0} \oplus x_i f_{i1} = \bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i(f_{i0} \oplus f_{i1}) = \bar{x}_i g_{i0} \oplus x_i g_{i1}$$

と表現できる．これより，

$$g_{i0} = f_{i0},\quad g_{i1} = f_{i0} \oplus f_{i1} = f_{i2},\quad g_{i2} = g_{i0} \oplus g_{i1} = f_{i0} \oplus (f_{i0} \oplus f_{i1}) = f_{i1}$$

を得る．つまり，g は f の展開において，正極性ダビオ展開とシャノン展開を置換した関数である．従って，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \\
\boldsymbol{b} &= (a_1, a_2, \cdots, b_i, \cdots, a_n) \\
b_i &= \begin{cases} 2 - a_i & (\text{if } a_i = 0 \text{ or } 2) \\ a_i & (\text{if } a_i = 1) \end{cases}
\end{aligned}$$

とおくと，

$$w(f, \boldsymbol{a}) = w(g, \boldsymbol{b})$$

を得る．これより，$EWT(f)$ の要素を置換したものが $EWT(g)$ であることがわかる．これより，補題が成立する． (証明終)

[補題 4.14] n 変数論理関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．f を表現する ESOP を F とし，F において，リテラル x_i と 1 を交換して得られるESOP を G とする．G が関数 g を表現するとき，$LPV(f) = LPV(g)$ が成立する．

(証明) 補題4.13 と同様にして証明できる． (証明終)

[補題 4.15] n 変数論理関数を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．f において，変数 x_i と x_j を置換して得られる関数を g とするとき，$LPV(f) = LPV(g)$ が成立する．

(証明) f を展開ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ で展開して得られるESOP を F とし，F において，リテラル x_i と x_j を置換して得られる ESOP を G とすると，G は 関数 g を表現する．このとき，$\tau(F) = \tau(G)$ が成立する．従って，

$$\boldsymbol{a} = (\cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots),\quad \boldsymbol{b} = (\cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots)$$

とすると，

$$w(g, \boldsymbol{a}) = w(f, \boldsymbol{b}) \tag{4.7}$$

を得る．式(4.7)は，すべての $\boldsymbol{a}$ について成立するので，

$$EWT(g)_{\boldsymbol{a}} = EWT(f)_{\boldsymbol{b}}$$

が成立する．これより，補題が成立する． (証明終)

[補題 4.16] $f \sim g \rightarrow LPV(f) = LPV(g)$.

(証明) 補題4.12〜4.15により，リテラルの変換及び変数の置換によって，LP特徴ベクトルは変化しない．これより，補題が成立する． (証明終)

[補題 4.17] $LPV(f) = LPV(g) \rightarrow f \sim g \ (n \leq 5)$.

(証明) $f \not\sim g \rightarrow LPV(f) \neq LPV(g)$ を証明する．5変数以下のLP同値類代表関数のLP特徴ベクトルを計算機によって求め，これらがすべて異なることを確認した．これより，補題を得る． (証明終)

[定理 4.4] 5変数以下の論理関数 f，g に対して，

$$f \sim g \leftrightarrow LPV(f) = LPV(g).$$

(証明) 補題4.16，補題4.17より，定理を得る． (証明終)

定理4.4より，$n \leq 5$ のとき，与えられた関数のLP同値類は，LP特徴ベクトルにより一意に決定できる．表4.13は，すべての2変数関数の拡張重み表及びLP特徴ベクトルを示す．これより，同一のLP同値類に属する関数のLP特徴ベクトルはすべて等しいことがわかる．

4.5.2 LP特徴ベクトルを求めるアルゴリズム

与えられた関数のLP特徴ベクトルを求める方法は，次のとおりである．

1) 与えられた関数の真理値表より，拡張真理値表を得る．

2) 拡張真理値表より，拡張重み表を得る．

3) 拡張重み表を昇順にソートして，LP特徴ベクトルを得る．

表 4.13　2変数関数のLP特徴ベクトル

LP同値類	関数	拡張重み表	LP特徴ベクトル
1	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
2	$\bar{x}\bar{y}$	4 2 2 2 1 1 2 1 1	1 1 1 1 2 2 2 2 4
	$\bar{x}y$	2 4 2 1 2 1 1 2 1	
	$x\bar{y}$	2 1 1 4 2 2 2 1 1	
	xy	1 2 1 2 4 2 1 2 1	
	$\bar{x}$	2 2 4 1 1 2 1 1 2	
	x	1 1 2 2 2 4 1 1 2	
	$\bar{y}$	2 1 1 2 1 1 4 2 2	
	y	1 2 1 1 2 1 2 4 2	
	1	1 1 2 1 1 2 2 2 4	
3	$x \oplus \bar{y}$	3 2 3 2 3 3 3 3 2	2 2 2 3 3 3 3 3 3
	$x \oplus y$	2 3 3 3 2 3 3 3 2	
	$1 \oplus \bar{x}\bar{y}$	3 3 2 3 2 3 2 3 3	
	$1 \oplus \bar{x}y$	3 3 2 2 3 3 3 2 3	
	$1 \oplus x\bar{y}$	3 2 3 3 3 2 2 3 3	
	$1 \oplus xy$	2 3 3 3 3 2 3 2 3	

n 変数関数の真理値表を f，拡張真理値表を E_f，拡張重み表を W_f とする．f の要素を表す添字は n ビットベクトル，E_f および W_f の要素を表す添字は n 桁の 3 進ベクトルで表現できる．

拡張真理値表および 拡張重み表を求めるアルゴリズムを以下に示す．

[アルゴリズム 4.3] ＜拡張真理値表の計算＞

1) 添字ベクトルの要素が0または1のとき：

$$E_f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leftarrow f(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

ここで，$a_k \in \{0, 1\} (k = 1, 2, \cdots, n)$ である．

2) 添字ベクトルの要素の1個のみが2であるとき：

例えば，i 番目が2であるとすると，

$$E_f(a_1,\cdots,2,\cdots a_n) \leftarrow E_f(a_1,\cdots,0,\cdots,a_n) \oplus E_f(a_1,\cdots,1,\cdots,a_n)$$

ここで，$a_k = \{0,1\}$ $(k=1,2,\cdots,n,\ \ k \neq i)$，$\oplus$ は，ビットごとの排他的論理和である．

3) 添字ベクトルの要素のうち，2個が2であるとき：

例えば，i 番目と j 番目が2であるとすると，

$$\begin{aligned} E_f(a_1,\cdots,\underbrace{2}_{i},\cdots,\underbrace{2}_{j},\cdots,a_n) \ \leftarrow\ & E_f(a_1,\cdots,\underbrace{0}_{i},\cdots,\underbrace{2}_{j},\cdots,a_n) \\ & \oplus E_f(a_1,\cdots,\underbrace{1}_{i},\cdots,\underbrace{2}_{j},\cdots,a_n) \end{aligned}$$

ここで，$a_k = \{0,1\}$ $(k=1,2,\cdots,n,\ \ k \neq i, k \neq j)$ である．

4) 添字ベクトルの要素の値が2となる個数が3以上の場合についても，3)と同様にする．

[アルゴリズム 4.4] ＜拡張重み表の計算＞

```
for i = 0 to 3^n do
    {if(E_f(i) = 0) then W_f(i) ← 0 else W_f(i) ← 1}
for k = 0 to n do {
    for j = 0 to 3^(k-1) - 1 do {
        for i = 0 to 3^(n-k) - 1 do {
            i_0 ← 3^(n-k)(3j + 0) + i;
            i_1 ← 3^(n-k)(3j + 1) + i;
            i_2 ← 3^(n-k)(3j + 2) + i;
            W_1(i_0) ← W_f(i_0) + W_f(i_2);
            W_1(i_1) ← W_f(i_1) + W_f(i_2);
            W_1(i_2) ← W_f(i_0) + W_f(i_1);
        }
        for i = 0 to 3^n do
            {W_f(i) ← W_1(i)}
    }
}
```

[例 4.9] 表4.14で示される3変数関数について考える．この関数の拡張真理値表は，図4.3のように計算される．

第1欄は，添字を表す3進ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ である．

第2欄は，真理値ベクトルを示す．真理値の値は，添字ベクトルが (c_1, c_2, c_3)，$c_i \in \{0, 1\}$ で与えられる行のみに存在する．

第3欄においては，添字ベクトルが，$(c_1, c_2, 2)$，$c_i \in \{0, 1\}$ で与えられる要素の値が計算される．これらの要素の値は，$f(c_1, c_2, 0)$ と $f(c_1, c_2, 1)$ のモジュロ2による加算である．

第4欄においては，$(c_1, 2, c_3)$，$c_1 \in \{0, 1\}$，$c_3 \in \{0, 1, 2\}$ で与えられる添字の要素の値を計算する．すなわち，$f(c_1, 0, c_3)$ と $f(c_1, 1, c_3)$ のモジュロ2による加算を行う．

最後の欄においては，添字ベクトルが，$(2, c_2, c_3)$，$c_i \in \{0, 1, 2\}$ で与えられる要素の値を計算する．これらは，$f(0, c_2, c_3)$ と $f(1, c_2, c_3)$ のモジュロ2による加算によって得られる．(例終)

表 4.14　3変数関数

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

[例 4.10] 例4.9の3変数関数の拡張重み表は図4.4のように計算される．

第1欄は，拡張重み表の添字，第2欄は，拡張真理値表を示す．

第3欄は，変数 x_1 についてKronecker展開したときの積項数を示す．変数 x_1 について，最初の9個の要素は正極性ダビオ展開，中間の9個の要素は負極性ダビオ展開，最後の9個の要素はシャノン展開が適用されている．

第4欄は，変数 x_1 及び x_2 についてKronecker展開したときの積項数を示す．最初の3個の要素は，x_1 及び x_2 に対して正極性ダビオ展開が適用されている．次の3個の要素

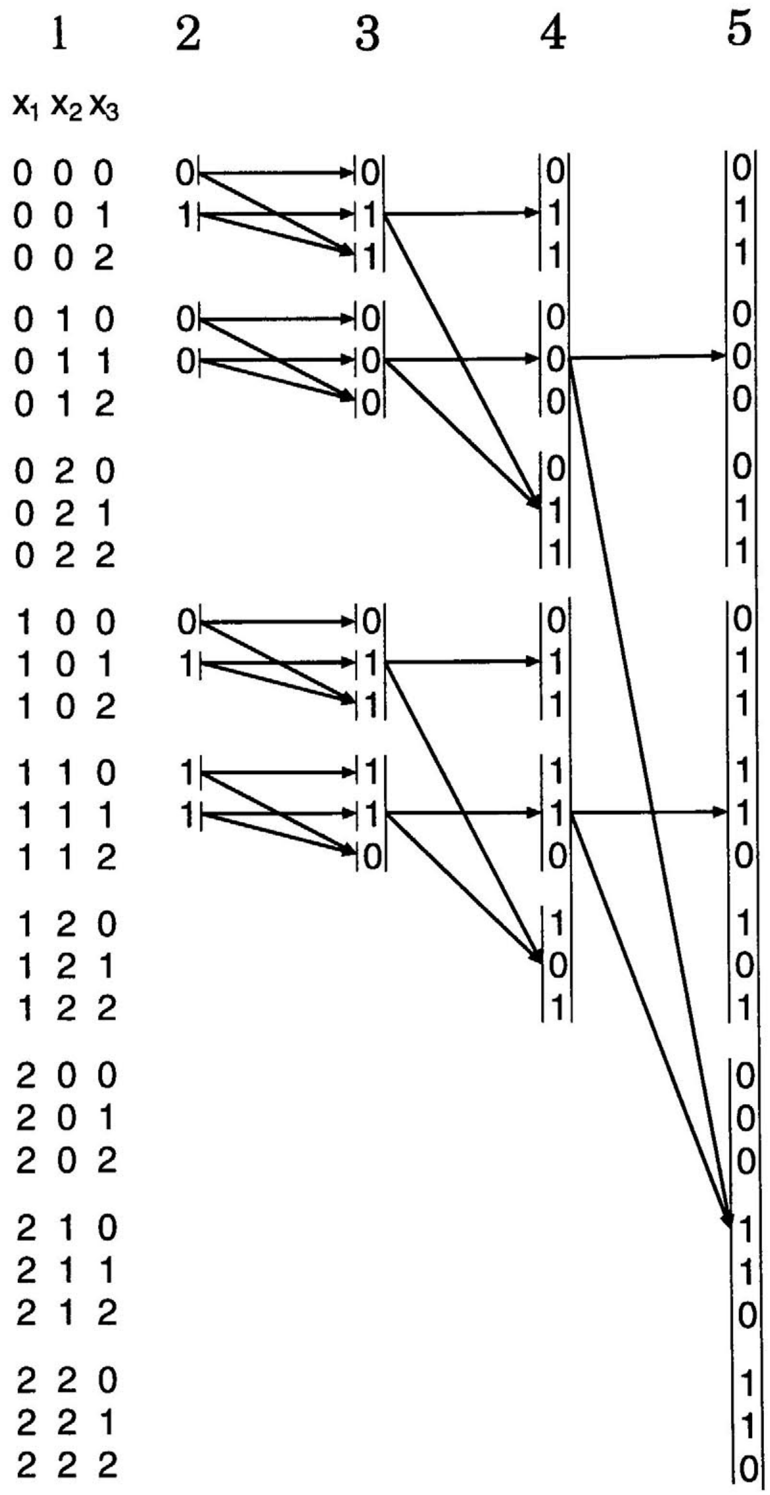

図 4.3 拡張真理値表の計算

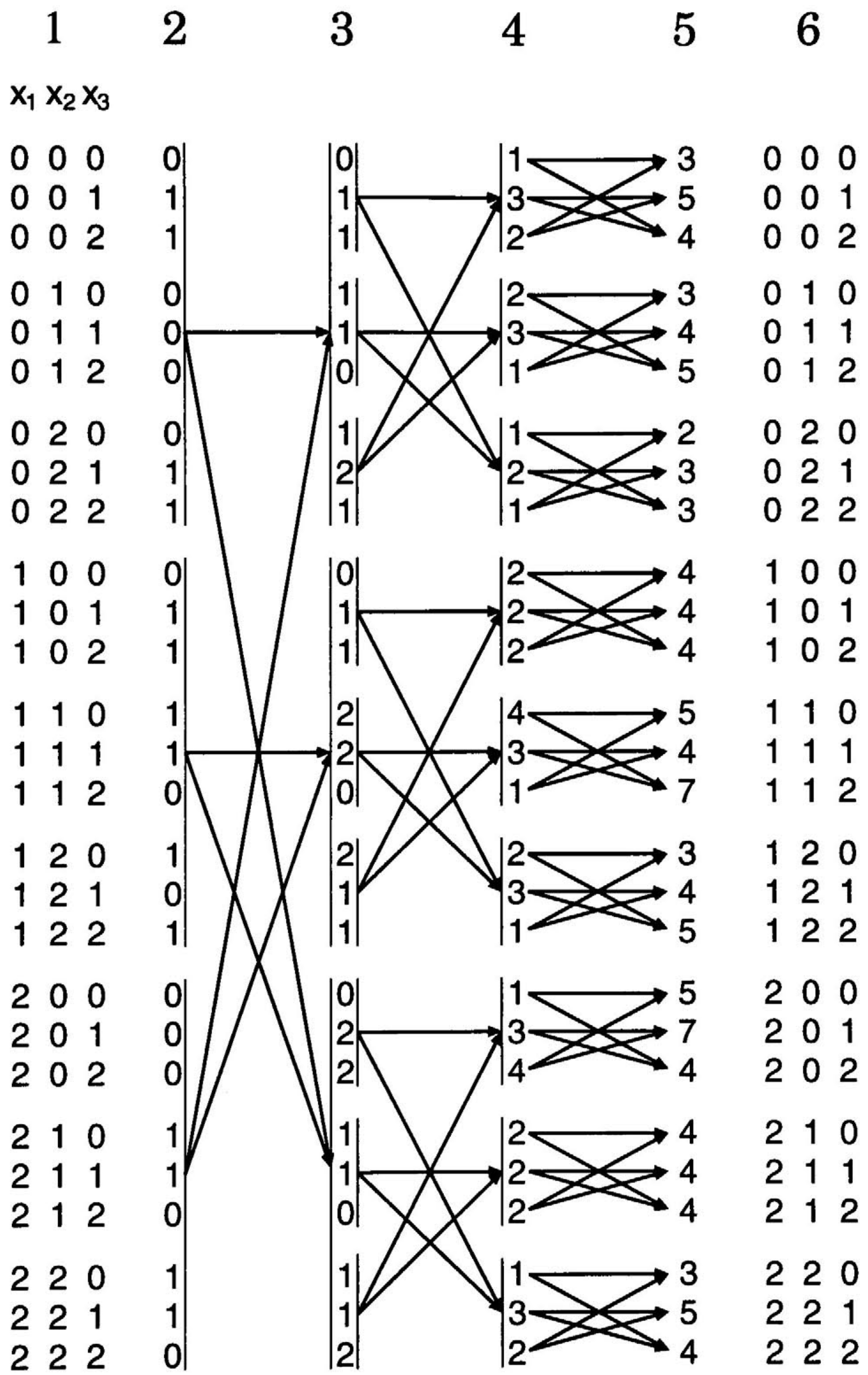

図 4.4 拡張重み表の計算

は，x_1 に対しては正極性ダビオ展開，x_2 に対しては負極性ダビオ展開が適用されている．次の 3 個の要素は，x_1 及び x_2 に対してシャノン展開が適用されている．
第 5 欄は，全ての変数に対して Kronecker 展開したときの積項数を示す．最初の要素は，x_1，x_2，x_3 に対して正極性ダビオ展開を適用した場合を示す．2 番目の要素は，x_1，x_2 に対しては正極性ダビオ展開が適用され，x_3 に対しては，負極性ダビオ展開が適用された場合を示す．3 番目の要素は，x_1，x_2 に対して正極性ダビオ展開が適用され，x_3 に対しては，シャノン展開が適用された場合を示す．以下，同様である．第 6 欄は，展開ベクトルを示す．例えば，最初の要素は $\boldsymbol{c} = (0,0,0)$ であるから，全ての変数について正極性ダビオ展開を適用することを示す． (例終)

以上より，各テーブルを求める手数は以下のようになる．

[補題 4.18] 拡張真理値表を求める手数は，$O(3^n)$ である．

(証明) アルゴリズム4.3より明らかである． (証明終)

[補題 4.19] 拡張重み表を求める手数は，$O(n3^n)$ である．

(証明) アルゴリズム4.4より明らかである． (証明終)

[定理 4.5] LP 特徴ベクトルを求める手数は，$O(n3^n)$ $(n \leq 5)$ である．

(証明) LP 特徴ベクトルは，拡張重み表を昇順にソートして得られる．これより，定理を得る． (証明終)

与えられた関数がどの同値類に属するかを判定するには，LP 同値関係の定義に基づいて素直に行うと，$n!6^n$ に比例する手数が必要であるが，LP 特徴ベクトルを用いると，$n3^n$ $(n \leq 5)$ に比例する手数で決定できる．

4.5.3 関数のMESOPを求めるアルゴリズム

n 変数関数の LP 同値類代表関数の MESOP が与えられている場合，前節で議論した性質を用いると，与えられた n 変数関数 $(n \leq 5)$ の MESOP を効率よく求める方法が得られる．

[アルゴリズム 4.5] **＜MESOPの求め方＞**

1) 与えられた関数 f のLP特徴ベクトル $LPV(f)$ を求める.

2) $LPV(f)$ を用いて，f の属するLP同値類を決定する.

3) 2) で求めた同値類の代表関数の MESOP の積項数 $\tau(f)$ を，n 変数代表関数の MESOP 表より得る.

4) f を表現するESOPを EXMIN2 で簡単化する．簡単化したESOPを F とする.

5) $\tau(f) = \tau(F)$ ならば，F は最小解である．$\tau(f) < \tau(F)$ ならば，代表関数の MESOPを逆変換して最小解を得る.

<アルゴリズムの説明>

1) 定理4.4より，5変数以下の関数に対して，LP特徴ベクトルはLP同値類に1対1に対応している.

3) 与えられた関数のMESOPの積項数を得る.

5) EXMIN2は，ヒューリスティックなアルゴリズムに基づくESOPの簡単化プログラムであり，高速に簡単化できるが，簡単化結果の最小性の保証はできない．EXMIN2の簡単化結果の積項数が3)で求めた積項数と一致すれば，最小解が得られたことになる．一致しないときは最小解ではないので，代表関数のMESOPを逆変換して，与えられた関数のMESOPを得る．このとき，与えられた関数から，そのLP同値類代表関数を得るための変換を知る必要がある．このためには，LP同値関係の定義を用いて素直に実行すると，$n!6^n$ に比例する手数が必要である．5変数関数の場合，これに約7秒かかる（HP9000/720による）.

4.6 実験結果および検討

現在まで，5変数以下のLP同値類代表関数とそのMESOPの表が得られている．乱数を用いて生成した5変数関数を表現するESOPをアルゴリズム4.5を用いて最小化した際，EXMIN2の簡単化結果がMESOPとなるときの処理時間は，約90ミリ秒／関数であるが，EXMIN2による簡単化ではMESOPが得られないで，代表関数のMESOPを逆変換してMESOPを求めるときの処理時間は約7秒／関数となった(HP9000/720に

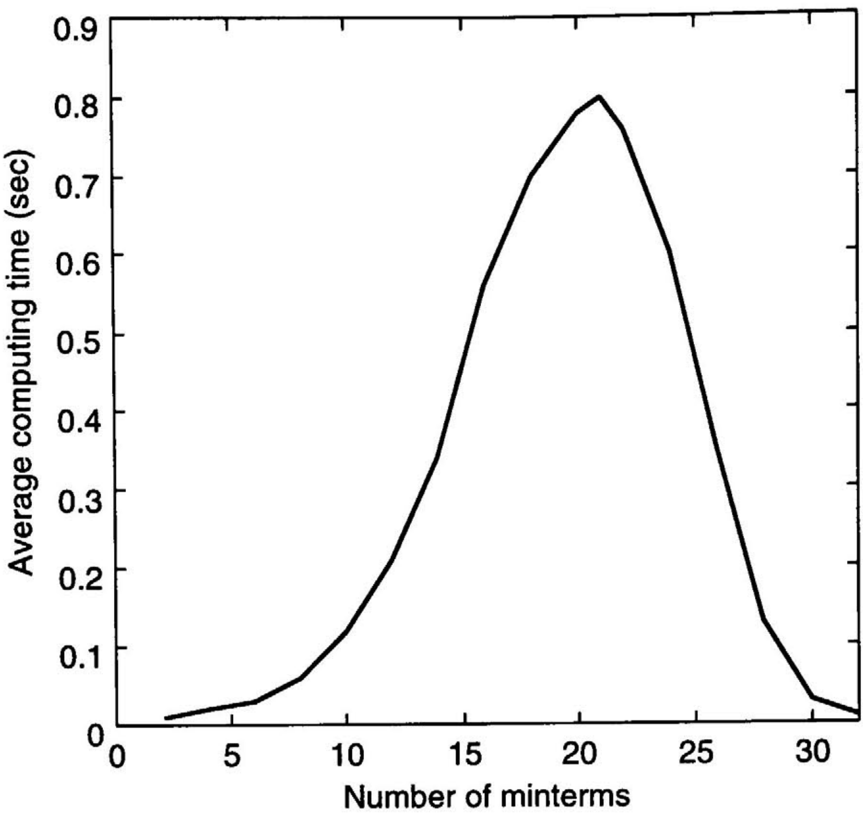

図 4.5 5変数関数のMESOPを求めるための平均計算時間

よる). LP特徴ベクトルを用いることにより，与えられた関数の属する同値類が高速に求まる．次に，その同値類から，索表により，代表関数のMESOPとその積項数が求まり，EXMIN2の簡単化結果が最適か否かを高速に判定できる．従って，簡単化結果の積項数と索表で得られた最適解の積項数が一致する場合，EXMIN2の簡単化結果をそのまま解とできるので，最小解が高速に得られる．一方，簡単化結果の積項数と最適解の積項数が一致しない場合には，代表関数のMESOPを逆変換することにより，与えられた関数のMESOPを求める．図4.5は，任意の5変数関数のMESOPを求めるために必要な平均計算時間を示す．

従来，任意の論理関数を表現するときに必要な積項数は，平均すると，ESOPの方がSOPよりも少なくてよいと推測されている．このことを5変数関数について実証するために，任意の5変数をMESOPおよびMSOPで実現するための積項数の平均値を検討した．5変数関数をLP同値類に分類すると考慮すべき関数の個数が少なくてよい．しか

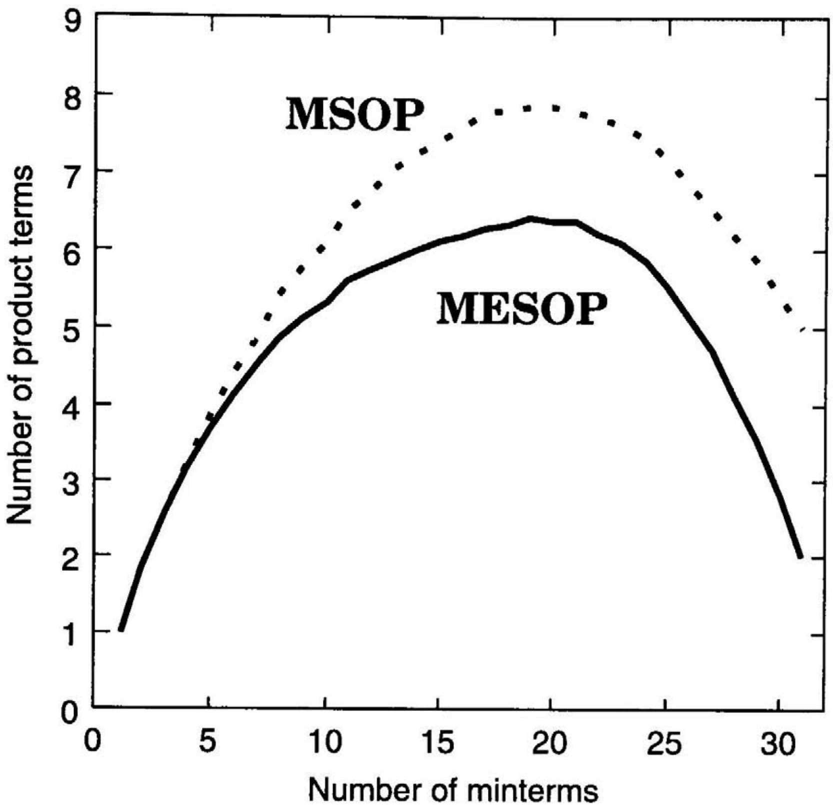

図 4.6 5変数関数のMESOPおよびMSOPの平均積項数

し，LP同値関係によって分類したとき，同一の同値類に属する関数のMESOPの積項数は同一であるが，MSOPの積項数は一般に異なる．従って，論理関数をMESOPおよびMSOPで表現するために必要な積項数の比較はLP同値関係を用いて検討することはできない．さて，n 変数関数は最小項の個数により 2^n+1 個のクラスに分類できる．そこで，乱数を用いて各クラスについて1,000個の5変数関数を生成し，これらをMESOPおよびMSOPで表現したときの積項数の平均を求めたものを図4.6に示す．MSOPはQuine-McCluskey法を用いて求めた．これより，任意の5変数関数を表現するために必要なMESOPの積項数は平均するとMSOPよりも少ないと言える．また，任意の5変数関数を実現するために必要な積項数は，MESOPの場合は本章の実験により9であり，また，MSOPの場合は16であることが知られている．このことより，上記の推測が5変数関数の場合に成立すると言える．

なお，アルゴリズム4.5を6変数関数に適用する場合，$LP(6)$ を求める必要がある．

しかし，$|LP(6)| \geq 5.5 \times 10^{11}$ となり非常に大きいので，本アルゴリズムを 6 変数関数に適用することは困難である．

4.7 むすび

本章では，LP 同値関係によって論理関数を分類する方法を提案した．この同値関係のもとでは，MESOP の積項数は不変であるため，ESOP の分類に有用である．5 変数関数を6936 個の LP 同値類に分類した．また，5 変数関数の LP 同値類代表関数の MESOP を求め，任意の 5 変数関数は，高々 9 積項の ESOP で表現できることを示した．次に，論理関数の LP 特徴ベクトルを定義し，それが n 変数関数 $(n \leq 5)$ の LP 同値類を一意的に決定できることを示した．また，この性質を用いて，任意の関数の MESOP を高速に得る方法を提案した．これらの方法を 5 変数関数に適用し，その有用性を確認した．5 変数以下の ESOP は本方法によって高速に最小化できる．任意の n 変数関数 $(n \geq 6)$ は，シャノン展開を再帰的に適用することにより，いくつかの 5 変数部分関数が得られる．これらの関数に 5 変数 MESOP を代入することにより，高速で品質の良い簡単化が可能となる．この点については第 5 章で述べる．また，論理関数の LP 特徴ベクトルは，$n \leq 14$ の場合，通常の計算機で容易に求められるため，他の応用も期待できる．

第 5 章

下界定理を用いたESOPの簡単化法

5.1 まえがき

EXORゲートを含む論理回路の設計においては，ESOPの最小化あるいは簡単化が必要となる．前章において，入力変数の個数が5以下の場合に，関数をLP同値類に分類し，その同値類の代表関数のMESOPを用いて，任意の5変数以下の関数のMESOPを高速に求める方法を提案した．しかし，変数の個数が6以上の場合は，一般にESOPの最小化は困難であり，ヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化を行うことにより，準最小解を得ている [12, 40, 47]．しかし，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムは，その簡単化結果の最小性を保証しない．

本章では，与えられた関数のESOPの積項数の下界を評価する方法を示す．次に，このESOPの積項数の下界評価を用いた簡単化アルゴリズムを提案する．本アルゴリズムは，一部の関数について，その簡単化結果の最小性を保証できることを示す．

5.2 ESOPの積項数の下界

本節では，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法について考察する．まず，単一出力関数の場合について，次に，多出力関数の場合について検討する．

5.2.1 単一出力ESOPの積項数の下界

本節では，単一出力関数を表現するESOPの積項数の下界について検討する．

[定義 5.1] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$f(0) = f(0, x_2, \cdots, x_n), \qquad \tau(0) = \tau(f(0))$$

$$f(1) = f(1, x_2, \cdots, x_n), \qquad \tau(1) = \tau(f(1))$$

$$f(2) = f(0) \oplus f(1), \qquad \tau(2) = \tau(f(2))$$

と表す．また，$a, b \in \{0, 1\}$ とするとき，

$$f(a, b) = f(a, b, x_3, \cdots, x_n), \qquad \tau(a, b) = \tau(f(a, b))$$

$$f(2, b) = f(0, b) \oplus f(1, b), \qquad \tau(2, b) = \tau(f(2, b))$$

$$f(a, 2) = f(a, 0) \oplus f(a, 1), \qquad \tau(a, 2) = \tau(f(a, 2))$$

と表す．

[例 5.1]

$$\begin{aligned} f(2,2) &= f(0,2) \oplus f(1,2) \\ &= f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1) \\ \tau(2,2) &= \tau(f(2,2)) \\ f(2,2,1) &= f(0,0,1) \oplus f(0,1,1) \oplus f(1,0,1) \oplus f(1,1,1) \\ \tau(2,2,1) &= \tau(f(2,2,1)) \end{aligned}$$

(例終)

[補題 5.1] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq L_{11}$$

が成立する．ここで，$L_{11} = \tau(2)$ である．

(証明)　関数 f を表現するMESOPを，

$$F_0 x_1^0 \oplus F_1 x_1^1 \oplus F_2 x_1^2 \tag{5.1}$$

とする．ここで，F_a $(a \in \{0, 1, 2\})$ は，x_1 を含まないESOPである．式(5.1)において，$x_1 = 0, 1$ とおくと，それぞれ，

$$F_0 \oplus F_2 = f(0) \tag{5.2}$$

$$F_1 \oplus F_2 = f(1) \tag{5.3}$$

となる．式(5.2) ⊕ 式(5.3) より，

$$F_0 \oplus F_1 = f(0) \oplus f(1) = f(2) \tag{5.4}$$

を得る．式(5.4)より，

$$\tau(F_0) + \tau(F_1) \geq \tau(2)$$

を得る．

$$\tau(f) = \tau(F_0) + \tau(F_1) + \tau(F_2), \quad \tau(F_2) \geq 0$$

であるから，

$$\tau(f) \geq \tau(2)$$

を得る． (証明終)

[定理 5.1] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq A$$

が成立する．ここで， $A = \max\{\tau(0), \tau(1), \tau(2)\}$ である．

(証明) f を表現するMESOPを

$$F_m = \bar{x}_1 \cdot F_a \oplus x_1 \cdot F_b \oplus F_c \tag{5.5}$$

とする．式(5.5)より，

$$\tau(f) = \tau(F_a) + \tau(F_b) + \tau(F_c) \tag{5.6}$$

を得る．式(5.5)において $x_1 = 0$ を代入すると，

$$F_m(x_1 = 0) = F_a \oplus F_c \tag{5.7}$$

を得る．式(5.7)は関数 $f(0)$ を表現するので，

$$\tau(0) \leq \tau(F_a) + \tau(F_c) \leq \tau(f) \tag{5.8}$$

が成立する．また，式(5.5)において $x_1 = 1$ を代入すると，

$$F_m(x_1 = 1) = F_b \oplus F_c \tag{5.9}$$

を得る．式(5.9)は関数 $f(1)$ を表現するので，

$$\tau(1) \leq \tau(F_b) + \tau(F_c) \leq \tau(f) \tag{5.10}$$

が成立する．(5.7)⊕(5.9)より，$f(0) \oplus f(1) = f(2) = F_a \oplus F_b$ を得る．これより，

$$\tau(2) \leq \tau(F_a) + \tau(F_b) \leq \tau(f) \tag{5.11}$$

が成立する．式(5.8)，(5.10)，(5.11)より，

$$\max\{\tau(0), \tau(1), \tau(2)\} \leq \tau(f) \tag{5.12}$$

が成立する．これより，定理を得る．　(証明終)

[定理 5.2] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \leq B$$

が成立する．ここで，

$$B = \min[\tau(0) + \tau(1) + \tau(2) - \max\{\tau(0), \tau(1), \tau(2)\}]$$

である．

(証明)　関数 f は，

$$\begin{aligned} f &= f(0) \oplus x_1 \cdot f(2) \\ &= f(1) \oplus \bar{x}_1 \cdot f(2) \\ &= \bar{x}_1 \cdot f(0) \oplus x_1 \cdot f(1) \end{aligned}$$

と展開できる．これより，

$$\begin{aligned} \tau(f) &\leq \tau(0) + \tau(2) \\ \tau(f) &\leq \tau(1) + \tau(2) \\ \tau(f) &\leq \tau(0) + \tau(1) \end{aligned}$$

を得る．これより，定理を得る．　(証明終)

[補題 5.2] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，$\tau(f) = \tau(1)$ ならば，f を表現するMESOPは，

$$x_1 \cdot F_d \oplus F_e$$

の形をしている．ここで，F_d，F_e は x_1 を含まないESOPである．

(証明)　f を表現するMESOP が

$$x_1 \cdot F_d \oplus F_e \oplus \bar{x}_1 \cdot F_g \tag{5.13}$$

の形で書けると仮定する．ここで，$F_g \neq 0$ である．このとき，

$$\tau(f) = \tau(F_d) + \tau(F_e) + \tau(F_g) \tag{5.14}$$

$\tau(F_g) > 0$ なので，式(5.14)より，

$$\tau(f) > \tau(F_d) + \tau(F_e) \tag{5.15}$$

式(5.13)において，$x_1 = 1$ とおくと，$f(1)$ を表現するので，

$$\tau(1) \leq \tau(F_d) + \tau(F_e) \tag{5.16}$$

が成立する．式(5.15)，(5.16)より，$\tau(1) < \tau(f)$ となるが，これは補題の条件に反する．つまり，式(5.13)の形で書けると仮定すると矛盾を生じる．　(証明終)

[補題 5.3] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，$\tau(f) = \tau(0)$ ならば，f を表現するMESOPは，

$$\bar{x}_1 \cdot F_h \oplus F_k$$

の形をしている．ここで，F_h，F_k，は x_1 を含まない ESOP である．

(証明)　補題5.2と同様にして証明できる．　(証明終)

[補題 5.4] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，$\tau(f) = \tau(2)$ ならば，f を表現する MESOP は，

$$\bar{x}_1 \cdot F_p \oplus x_1 \cdot F_q$$

の形をしている．ここで，F_p，F_q は x_1 を含まないESOPである．

(証明) f を表現する MESOP が

$$\bar{x}_1 \cdot F_p \oplus x_1 \cdot F_q \oplus F_r \tag{5.17}$$

の形で書けると仮定する．ここで，$F_r \neq 0$．このとき，

$$\tau(f) = \tau(F_p) + \tau(F_q) + \tau(F_r) \tag{5.18}$$

$\tau(F_r) > 0$ なので，式(5.18)より，

$$\tau(f) > \tau(F_p) + \tau(F_q) \tag{5.19}$$

式(5.17)において，$x_1 = 0$ とおくと，

$$F_p \oplus F_r \tag{5.20}$$

を得る．式(5.20)は $f(0)$ を表現する．また，式(5.17)において $x_1 = 1$ とおくと，

$$F_q \oplus F_r \tag{5.21}$$

を得る．式(5.21)は $f(1)$ を表現する．(5.20)$\oplus$(5.21)より，

$$F_p \oplus F_q \tag{5.22}$$

を得る．式(5.22)は $f(2)$ を表現するので，

$$\tau(2) \leq \tau(F_p) + \tau(F_q) \tag{5.23}$$

が成立する．式(5.19)と(5.23) より，$\tau(2) < \tau(f)$ となるが，これは補題の条件に反する．これより，補題を得る． (証明終)

[補題 5.5] 関数 f が与えられたとき，A，B を定理5.1，定理5.2 で定義された値とする．このとき，

$$\tau(f) = A \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

が成立する．

(証明) ($\Longrightarrow$) 定理5.1より，A は，$\tau(1)$，$\tau(0)$，$\tau(2)$ のいずれかで表される．

1) $\tau(1) = A$ のとき

補題5.2より，f の MESOPは，

$$x_1 \cdot F_d \oplus F_e \tag{5.24}$$

の形をしている．また，$f = x_1 \cdot f(2) \oplus f(0)$ と展開できるので，F_d は $f(2)$ を表現し，F_e は $f(0)$ を表現している．更に，F_d と F_e は，それぞれ，関数 $f(2)$ と $f(0)$ を表現するMESOPである．なぜなら，もしそうでないと仮定すると，式(5.24)はMESOPでないと証明できるからである．それ故，

$$\tau(F_d) = \tau(2) \text{ かつ } \tau(F_e) = \tau(0)$$

が成立する．これより，

$$\tau(f) = \tau(F_d) + \tau(F_e) = \tau(2) + \tau(0)$$

が成立する．また，B の定義より，$\tau(2) + \tau(0) \geq B$．これより，$\tau(f) \geq B$ を得る．一方，定理5.2より，$\tau(f) \leq B$ なので，$\tau(f) = B$ を得る．以上のことより，

$$A = B$$

が成立する．

2) $\tau(0) = A$ のとき

補題5.3を用いると，1)と同様にして証明できる．

3) $\tau(2) = A$ のとき

補題5.4を用いると，1)と同様にして証明できる．

1)，2)，3)より，$A = B$ が成立する．

($\Longleftarrow$) $A = B$ のとき，定理5.1より，$\tau(f) \geq A$．定理5.2より，$\tau(f) \leq B$．これより，$\tau(f) = A$ が成立する． (証明終)

[定理 5.3] 関数 f が与えられたとき，A，B を定理5.1，定理5.2 で定義された値とする．このとき，$A \neq B$ ならば $\tau(f) \geq A + 1$ が成立する．

(証明) 補題5.5より，$A \neq B$ ならば $\tau(f) \neq A$．定理5.1より，$\tau(f) \geq A$ であるから，$\tau(f) > A$．これより，定理を得る． (証明終)

補題5.5，定理5.3をまとめると，次の系を得る．

[系 5.1] 関数 f が与えられたとき，A，B を定理5.1，定理5.2で定義された値とする．このとき，

$$\tau(f) \geq L_{12}$$

が得られる．ここで，

$$L_{12} = \begin{cases} A & (\mathrm{A=B}) \\ A+1 & (\mathrm{A \neq B}) \end{cases}$$

である．

次の定理は，電気通信大学岩田茂樹教授による[1]．

[定理 5.4] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq L_1$$

が成立する．ここで，

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha)$$

である．

(証明)　f の MESOP を

$$F = \bar{x}_1 \cdot F_0 \oplus x_1 \cdot F_1 \oplus F_2$$

とする．$f(0) = F_0 \oplus F_2$ であるから，

$$\tau(0) \leq \tau(F_0) + \tau(F_2) \tag{5.25}$$

が成立する．また，$f(1) = F_1 \oplus F_2$ であるから，

$$\tau(1) \leq \tau(F_1) + \tau(F_2) \tag{5.26}$$

が成立する．また，$f(2) = f(0) \oplus f(1) = F_0 \oplus F_1$ であるから，

$$\tau(2) \leq \tau(F_0) + \tau(F_1). \tag{5.27}$$

が成立する．(5.25) + (5.26) + (5.27) より，

$$\tau(0) + \tau(1) + \tau(2) \leq 2\{\tau(F_0) + \tau(F_1) + \tau(F_2)\} = 2\tau(f) \tag{5.28}$$

を得る．これより，定理を得る．　(証明終)

[1]岩田茂樹：“私信”(1992-03)

L_{11}, L_{12}, L_1 は与えられた関数を表現するMESOPの積項数の下界の評価に利用できるが，ここで，これらの下界の比較を行う．

[注意 5.1] 補題5.1，定理5.1より，$L_{12} \geq L_{11}$ である．

[補題 5.6] L_{12}, L_1 をそれぞれ，系5.1，定理5.4で定義された値とする．このとき，$L_1 \geq L_{12}$ が成立する．

(証明) A, B をそれぞれ，定理5.1，定理5.2で定義された値とする．定理5.1より，A は，$\tau(0)$, $\tau(1)$, $\tau(2)$ のいずれかで表される．

(i) $A = \tau(0)$ のとき

このとき，L_1 の定義より，$L_1 \geq \{\tau(0)+\tau(1)+\tau(2)\}/2$ である．また，B の定義より，$B \leq \tau(1)+\tau(2)$ である．

1) $A = B$ のとき

系5.1より，$L_{12} = A$ である．このとき，

$$\begin{aligned} L_1 &\geq \{\tau(0)+\tau(1)+\tau(2)\}/2 \\ &\geq (A+B)/2 \\ &= A \\ &= L_{12} \end{aligned} \tag{5.29}$$

が成立する．

2) $A < B$ のとき

系5.1より，$L_{12} = A+1$ である．このとき

$$\begin{aligned} L_1 &\geq \{\tau(0)+\tau(1)+\tau(2)\}/2 \\ &\geq (A+B)/2 \\ &> A \end{aligned} \tag{5.30}$$

が成立する．L_1 は整数であるから，

$$L_1 \geq A+1 = L_{12} \tag{5.31}$$

式(5.29)，(5.31)より，補題を得る．

(ii) $A = \tau(1)$, $A = \tau(2)$ のときも (i) と同様にして証明できる．

(i)，(ii)より，補題を得る． (証明終)

注意5.1，補題5.6より，与えられた関数を表現するMESOPの積項数の下界の評価には，L_{11}，L_{12} は不要である．

[補題 5.7] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq L_k$$

が成立する．ここで，

$$L_k = \frac{1}{2^k} \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \\ \alpha_i \in \{0,1,2\},\ i=1,2,\cdots,k}} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k),$$

$1 \leq k \leq (n-1)$ である．

(証明) k に関する数学的帰納法によって証明する．

1) $k = 1$ のとき，定理5.4の L_1 と一致し，補題は成立する．

2) $k = r$ のとき，

$$\tau(f) = L_r = \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \\ \alpha_i \in \{0,1,2\},\ i=1,2,\cdots,r}} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \tag{5.32}$$

が成立すると仮定する．$\tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ の下界の評価に定理5.4を適用すると，

$$\begin{aligned} &\tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \\ &\geq \frac{1}{2}\Big\{\tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, 0) + \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, 1) + \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, 2)\Big\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha_{r+1} \\ \alpha_{r+1} \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}) \end{aligned} \tag{5.33}$$

と表現できる．式(5.33)を式(5.32)に代入すると，

$$\begin{aligned} &\tau(f) \geq L_r \geq \\ &\frac{1}{2^r} \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \\ \alpha_i \in \{0,1,2\},\ i=1,2,\cdots,r}} \left\{\frac{1}{2} \sum_{\substack{(\alpha_{r+1}) \\ \alpha_{r+1} \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1})\right\} \\ &= \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}) \\ \alpha_i \in \{0,1,2\},\ i=1,2,\cdots,r+1}} \tau(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}) \\ &= L_{r+1} \end{aligned}$$

を得る．すなわち，$k=r+1$ のときも成立する．

1)，2)，より，補題が成立する． (証明終)

[例 5.2] 補題5.7において，

1) $k=2$ のとき

$$\begin{aligned} L_k(k=2) &= \frac{1}{4}\Big\{\tau(0,0)+\tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(1,1) \\ &\quad +\tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(1,2)+\tau(2,1) \\ &\quad +\tau(2,2)\Big\} \end{aligned}$$

2) $k=3$ のとき

$$\begin{aligned} L_k(k=3) &= \frac{1}{8}\Big\{\tau(0,0,0)+\tau(0,0,1)+\tau(0,1,0)+\tau(0,1,1) \\ &\quad +\tau(1,0,0)+\tau(1,0,1)+\tau(1,1,0)+\tau(1,1,1) \\ &\quad +\tau(0,0,2)+\tau(0,2,0)+\tau(2,0,0)+\tau(1,1,2)+\tau(1,2,1)+\tau(2,1,1) \\ &\quad +\tau(0,1,2)+\tau(1,0,2)+\tau(0,2,1)+\tau(1,2,0)+\tau(2,0,1)+\tau(2,1,0) \\ &\quad +\tau(0,2,2)+\tau(2,0,2)+\tau(2,2,0)+\tau(1,2,2)+\tau(2,1,2)+\tau(2,2,1) \\ &\quad +\tau(2,2,2)\Big\} \end{aligned}$$

(例終)

[補題 5.8] n 変数論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq \{\tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(1,2)+\tau(2,1)\}/2$$

が成立する．

(証明)　関数 f を表現するMESOPを

$$\begin{aligned} & F_{00}x_1^0x_2^0 \oplus F_{01}x_1^0x_2^1 \oplus F_{02}x_1^0x_2^2 \\ & \oplus F_{10}x_1^1x_2^0 \oplus F_{11}x_1^1x_2^1 \oplus F_{12}x_1^1x_2^2 \\ & \oplus F_{20}x_1^2x_2^0 \oplus F_{21}x_1^2x_2^1 \oplus F_{22}x_1^2x_2^2 \end{aligned} \tag{5.34}$$

とする．ここで，$F_{ab}(a,b \in \{0,1,2\}$ は，変数 x_1 も x_2 も含まないESOPである．式(5.34)において，$(x_1,x_2)=(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)$ とおくと，

$$F_{00} \oplus F_{02} \oplus F_{20} \oplus F_{22} = f(0,0) \tag{5.35}$$

$$F_{11} \oplus F_{12} \oplus F_{21} \oplus F_{22} = f(1,1) \tag{5.36}$$

$$F_{01} \oplus F_{02} \oplus F_{21} \oplus F_{22} = f(0,1) \tag{5.37}$$

$$F_{10} \oplus F_{12} \oplus F_{20} \oplus F_{22} = f(1,0) \tag{5.38}$$

を得る．(5.35)⊕(5.37)，(5.35)⊕(5.38)，(5.36)⊕(5.37)，(5.36)⊕(5.38) より，それぞれ，

$$F_{00} \oplus F_{01} \oplus F_{20} \oplus F_{21} = f(0,2) \tag{5.39}$$

$$F_{00} \oplus F_{02} \oplus F_{10} \oplus F_{12} = f(2,0) \tag{5.40}$$

$$F_{01} \oplus F_{02} \oplus F_{11} \oplus F_{12} = f(2,1) \tag{5.41}$$

$$F_{10} \oplus F_{11} \oplus F_{20} \oplus F_{21} = f(1,2) \tag{5.42}$$

を得る．式(5.39) ～ 式(5.42)より，

$$\begin{aligned}
\tau(F_{00}) + \tau(F_{01}) + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21}) &\geq \tau(0,2) \\
\tau(F_{00}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{10}) + \tau(F_{12}) &\geq \tau(2,0) \\
\tau(F_{01}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{11}) + \tau(F_{12}) &\geq \tau(2,1) \\
\tau(F_{10}) + \tau(F_{11}) + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21}) &\geq \tau(1,2)
\end{aligned}$$

を得る．上の 4 つの不等式を加えると，

$$\begin{aligned}
&2\{\tau(F_{00}) + \tau(F_{01}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{10}) + \tau(F_{11}) + \tau(F_{12}) + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21})\} \\
&\qquad \geq \tau(0,2) + \tau(2,0) + \tau(2,1) + \tau(1,2)
\end{aligned}$$

を得る．

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \tau(F_{00}) + \tau(F_{01}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{10}) + \tau(F_{11}) + \tau(F_{12}) \\
&\quad + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21}) + \tau(F_{22}), \\
\tau(F_{22}) &\geq 0
\end{aligned}$$

であるから，

$$2\tau(f) \geq \tau(0,2) + \tau(2,0) + \tau(2,1) + \tau(1,2)$$

を得る．これより，補題が成立する．　(証明終)

[補題 5.9] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq \{\tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(0,2) + \tau(2,0)\}/2$$

が成立する．

(証明)　補題5.8の証明と同様にして，補題5.8の証明中の式(5.37) ～ 式(5.40)より，

$$\begin{aligned}2\{\tau(F_{00}) + \tau(F_{01}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{10}) + \tau(F_{12}) + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21}) + \tau(F_{22})\}\\ \geq \tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(0,2) + \tau(2,0)\end{aligned}$$

を得る．これより，補題が成立する． (証明終)

[補題 5.10] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq \{\tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(1,2) + \tau(2,1)\}/2$$

が成立する．

(証明)　補題5.8の証明と同様にして，補題5.8の証明中の式(5.37)，(5.38)，(5.41)，(5.42)より，

$$\begin{aligned}2\{\tau(F_{01}) + \tau(F_{02}) + \tau(F_{10}) + \tau(F_{11}) + \tau(F_{12}) + \tau(F_{20}) + \tau(F_{21}) + \tau(F_{22})\}\\ \geq \tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(1,2) + \tau(2,1)\end{aligned}$$

を得る．これより，補題が成立する． (証明終)

補題5.8～補題5.10より，次の定理を得る．

[定理 5.5] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq L_{21}$$

が成立する．ここで，

$$\begin{aligned}L_{21} \;=\; \Big[&\{\, \tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(0,2) + \tau(2,0) + \tau(2,1) + \tau(1,2)\}\\ &- \min\{\tau(0,1) + \tau(1,0), \tau(0,2) + \tau(2,0), \tau(2,1) + \tau(1,2)\,\} \Big] /2\end{aligned}$$

である．

[系 5.2] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において， $f(01) = f(10)$ のとき，

$$\tau(f) \geq L_{22}$$

が成立する．ここで，

$$L_{22} = \tau(0,1) + \tau(0,2) + \tau(1,2) - \min\{\tau(0,1) + \tau(0,2) + \tau(1,2)\}$$

である．

系5.2は，対称関数を表現するESOPの積項数の下界の評価に利用できる．

[補題 5.11] n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\tau(f) \geq L_{31}$$

が成立する．ここで，

$$\begin{aligned} L_{31} \;=\; & \{\tau(0,0,2) + \tau(0,2,0) + \tau(2,0,0) \\ & +\tau(0,1,2) + \tau(0,2,1) + \tau(1,0,2) \\ & +\tau(1,2,0) + \tau(2,0,1) + \tau(2,1,0) \\ & +\tau(1,1,2) + \tau(1,2,1) + \tau(2,1,1)\}/4 \end{aligned}$$

である．

(証明)　付録B参照．　(証明終)

L_1， L_k， L_{21}， L_{31} は，1出力関数のESOPの積項数の下界の評価に利用できる．ここで，これらの値の最大値の比較を行う．

[定義 5.2] すべての n 変数関数に対する L_1， L_k， L_{21}， L_{31} の最大値をそれぞれ， $L_{1max}(n)$， $L_{kmax}(n)$， $L_{21max}(n)$， $L_{31max}(n)$ と表す．

[定義 5.3] n 変数関数のMESOPの積項数の最大値を $\Psi(n)$ で表す．

[補題 5.12] n 変数関数 f が与えられたとき，

表 5.1 下界の最大値の比較

n	L_1	L_k			L_{21}	L_{31}	Ln *)
		$k=2$	$k=3$	$k=4$			
6	14	14	11	11	12	9	14
7	≤ 24	21	21	16	18	18	21
8	≤ 48	≤ 36	31	31	≤ 32	27	31
9	≤ 96	≤ 72	≤ 54	46	≤ 64	≤ 48	46
≥ 10	$\leq (3/2)2^{n-3}$	$\leq (9/8)2^{n-3}$	$\leq (27/32)2^{n-3}$	$\leq (81/128)2^{n-3}$	$\leq 2^{n-3}$	$\leq (3/4)2^{n-3}$	$9(3/2)^{n-5}$

*) 後述

$$
\begin{aligned}
L_{1max}(n) &\leq \tfrac{3}{2} \cdot \Psi(n-1), \\
L_{kmax}(n) &\leq (\tfrac{3}{2})^k \cdot \Psi(n-k), \\
L_{21max}(n) &\leq 2 \cdot \Psi(n-2), \\
L_{31max}(n) &\leq 3 \cdot \Psi(n-3)
\end{aligned}
$$

が成立する．

(証明) L_1，L_k，L_{21}，L_{31} の定義より，明らかである． (証明終)

$\psi(2)=2$，$\psi(3)=3$，$\psi(4)=6$，$\psi(5)=9$，$\psi(n) \leq 2^{n-2} (n \geq 6)$[18, 20] であるから，これらの下界の最大値の比較は表5.1のようになる．

現在，変数の個数が6以上の関数のMESOPは容易には得られないので，表5.1の L_1，L_k，L_{21}，L_{31} の不等号で示した部分の値は実際には得られず，10変数以上の関数のESOPの積項数の下界の評価ができない．さて，$n(\geq 6)$ 変数関数をある変数で展開すると $(n-1)$ 変数の部分関数が得られる．この展開を各部分関数に再帰的に適用することにより，いくつかの5変数部分関数が得られる．このことを利用すると，10変数以上の関数のESOPの積項数の下界が評価できる．

[アルゴリズム 5.1] <下界 L_n >

getlwrn(n:*number of inputs*, f:*ESOP*)

{

```
        if(n ≤ 5) then return τ(f);
        tmax = 0;
        for(all input variables x_i){
            Expand f into x̄_i f_i0 ⊕ x_i f_i1,
            where f_i0 = f(x_i = 0), f_i1 = f(x_i = 1);
            t0=getlwrn(n − 1, f_i0);
            t1=getlwrn(n − 1, f_i1);
            t2=getlwrn(n − 1, f_i0 ⊕ f_i1);
            t = (t0 + t1 + t2)/2;
            if(t > tmax) then tmax = t;
        }
        return tmax;
    }
```

(アルゴリズムの説明)

1)アルゴリズム5.1における下界の評価には，下界 L_1 を用いている．

2) 対称関数の場合は，1つの変数で展開すれば良い．

下界 L_n の最大値を表5.1の最後の列に示す．

[定義 5.4] f を論理関数，t_1，t_2 を積項とする．$t_1 = 1$ のとき $f = 1$ となるとき，t_1 は f に包含されるという．また，$t_1 = 1$ のとき $t_2 = 1$ となるとき，t_2 は t_1 を包含するという．

[定義 5.5] n 変数関数 f において，各変数のリテラルが1個だけ含まれている積項を最小項という．関数 f に包含される最小項を f の最小項という．f の最小項の集合を $MT(f)$ で表す．また，$v \in MT(f)$ とし，v および v を包含する積項の集合を $Q(v)$ で表す．$Q(v)$ は 2^n 個の要素からなる．

[補題 5.13] n 変数関数 f において，$v \in MT(f)$ とするとき，

$$\tau(f) = 1 + \min_{q \in Q(v)} \{\tau(f \oplus q)\}$$

である．

(証明) f のESOPを G とする．G の積項の少なくとも1つは，$Q(v)$ のいずれかの積項（p_i とする）と一致する．G の積項のうち，p_i 以外の積項からなるESOPを H とすると，$G = p_i \oplus H$ と表現できる．これより，

$$\tau(f) \leq \tau(G) = 1 + \tau(H)$$

を得る．H の表現する関数は，$p_i \oplus f$ と表されるので，

$$\tau(f) \leq 1 + \tau(p_i \oplus f) \tag{5.43}$$

を得る．式(5.43)は，すべての $p_i \in Q(v)$ について成立するので，

$$\tau(f) \leq 1 + \min_{p_i \in Q(v)} \{\tau(f \oplus p_i)\} \tag{5.44}$$

を得る．次に，f のMESOPを K とする．K の積項の1つは $Q(v)$ のいずれかの積項（p_j とする）と一致する．この場合，K の積項のうち，p_j 以外の積項からなるESOPは関数 $f \oplus p_j$ を表現する．また，K はMESOPであるため，$f \oplus p_j$ のMESOPの積項数が最小となるように p_j が選ばれている．従って，

$$\tau(f) \geq 1 + \min_{p_j \in Q(v)} \{\tau(f \oplus p_j)\} \tag{5.45}$$

が成立する．式(5.44)，式(5.45)より，補題を得る． (証明終)

[定義 5.6] L_1，L_k，L_{21}，L_{22}，L_{31} をそれぞれ，定理5.4，補題5.7，定理5.5，系5.2，補題5.11で定義された値とする．このとき，

$$L_{max}(f) = \max\{L_1, L_k, L_{21}, L_{22}, L_{31}\}$$

とする．

[定理 5.6] n 変数論理関数 f において，

$$\tau(f) \geq L_{a1}$$

が成立する．ここで，

$$L_{a1} = 1 + \max_{v \in M(f)} \left[\min_{q \in Q(v)} \{L_{max}(q \oplus f)\} \right]$$

である．

(証明)　補題5.13より，ある $v \in MT(f)$ に対して，

$$\tau(f) = 1 + \min_{q \in Q(v)} \{\tau(f \oplus q)\}$$

が成立する．また，定義5.6より，

$$\tau(f \oplus q) \geq L_{max}(f \oplus q)$$

を得る．これより，

$$\tau(f) \geq 1 + \min_{q \in Q(v)} \{L_{max}(f \oplus q)\} \tag{5.46}$$

を得る．式(5.46)は，すべての $v \in MT(f)$ について成立するので，定理を得る．

(証明終)

定理5.6により，下界の値を1増やせる可能性がある．

[注意 5.2] f が一般の n 変数関数の場合，v としての候補は $|f|$（f の最小項の個数）だけある．また，v を包含する積項数は 2^n 個ある．従って，q の候補としては，最大 $3^n - 2^n + |f|$ 個調べる必要がある．f が対称関数の場合，v としては，v のキューブの各重みについて調べればよいので，高々 $n+1$ 個である．

[補題 5.14] n 変数対称関数を表現するESOPの積項数の下界を定理5.6によって求める場合，q の候補としては，高々 $(n+1)(n+2)/2$ 個の積項を調べればよい．

(証明)　積項 q_i のキューブ表現を，

$$(\underbrace{00\cdots0}_{a}\underbrace{11\cdots1}_{b}\underbrace{--\cdots-}_{c})$$

とする．ここで，a，b，c は非負の整数で，$a+b+c=n$ を満たす．対称関数であるから，変数を置換したキューブは調べる必要はない．従って，調べるべき異なるキューブの個数は，

『0，1，− の三つの文字から，重複を許して n 個とる組み合わせの個数』

に等しく，

$$\binom{n+2}{n} = (n+1)(n+2)/2$$

となる．

(証明終)

[例 5.3] 4変数対称関数の場合，v の候補のキューブ表現は，

$$(0,0,0,0),\ (0,0,0,1),\ (0,0,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,1,1,1)$$

である．q の候補のキューブ表現は，

$$\begin{array}{lllll} (0,0,0,0), & (0,0,0,1), & (0,0,0,-), & (0,0,1,-), & (0,0,1,1), \\ (0,0,-,-), & (0,1,1,1), & (0,1,1,-), & (0,1,-,-), & (0,-,-,-), \\ (1,1,1,1), & (1,1,1,-), & (1,1,-,-), & (1,-,-,-), & (-,-,-,-) \end{array}$$

の15通りでよい． (例終)

定理5.6を用いて下界を評価する場合，一般の n 変数関数 f では，$O(3^n)$ 個の場合を調べる必要があるが，対称関数の場合は，$O(n^2)$ 個となり，計算時間の大幅な削減が可能である．また，$q_i \cdot f = 0$ となる積項 q_i に対しては調べる必要はない．

次の系は，補題5.13，定理5.6の拡張である．

[系 5.3] n 変数関数 f において，$v_1, v_2 \in M(f)$ とするとき，

$$\tau(f) = 1 + \min_{q \in Q(v_2)} [1 + \min_{p \in Q(v_1)} \{\tau((f \oplus p) \oplus q)\}]$$

である．

[系 5.4] n 変数関数 f において，$v \in M(f)$ とするとき，$\tau(f) \geq L_{a2}$ が成立する．ここで，

$$L_{a2} = 1 + \max_{v_2 \in M(f)} [\ \min_{q \in Q(v_2)} [1 + \max_{v_1 \in M(f)} [\ \min_{p \in Q(v_1)} \{L_{max}((f \oplus p) \oplus q)\}\ ]\ ]\ ]$$

である．

系5.4により，下界の値を更に1増やせる可能性がある．但し，一般関数の場合，積項 p，q の組み合わせが非常に多くなるので，適用は困難である．与えられた関数 f が対称関数の場合，$g = f \oplus p$ の下界の評価には対称性を利用して計算手順を削減できるが，関数 g は対称関数とは限らないので，$g \oplus q$ の下界の評価には対称性を利用できない．

5.2.2 多出力ESOPの積項数の下界

本節では，多出力関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法について検討する．

[定義 5.7] 写像 $f : P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n \to B$, $P_i = \{0, 1, \cdots, p_i - 1\}$, $B = \{0, 1\}$ を多値入力 2 値出力関数という．

[定義 5.8] [37] 多値入力 2 値 m 出力関数を

$$f_i(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (i = 0, 1, \cdots, m-1)$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}) \\ &= \bigvee_{i=0}^{m-1} X_{n+1}^{\{i\}} \cdot f_i(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

を多出力関数 $(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1})$ の特性関数という．ここで，X_{n+1} は，出力部を表す m 値変数である．特性関数 $\mathcal{F}$ では，入力と出力の組み合わせが，元の多出力関数で許されるとき，$\mathcal{F} = 1$ となり，許されないとき，$\mathcal{F} = 0$ となる．

[定理 5.7] [47] 多出力関数を表現するAND-EXOR型PLAの最小化は，この関数の特性関数のESOPの最小化に対応する．

[注意 5.3] 多出力回路の場合，各出力関数を実現する回路を別々に最小化しても，全体として最小の回路が得られるとは限らない．多出力回路を最小化するには，すべての出力を同時に考慮する必要がある[51]．定理5.7は，多出力関数を表現するAND-EXOR型PLAの積項数を最小化するには，多出力関数の特性関数のESOPを最小化すればよいことを意味する．従って，多値入力 2 値 1 出力関数のESOPの最小化を考えれば十分である．

[定義 5.9] 多出力関数の特性関数を表現するESOPを，多出力関数を表現するESOPという．

表 5.2 多出力関数

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

表 5.3 特性関数

x_1	x_2	X_3	$\mathcal{F}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	0	2	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	2	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	2	1
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	2	0

[例 5.4] 表5.2は，2値2入力3出力関数(f_0, f_1, f_2)を示している．各出力関数のESOPを別々に簡単化すると，

$$f_0 = x_1x_2,\ f_1 = x_1 \oplus \bar{x}_2,\ f_2 = x_1 \oplus x_2$$

となり，積項は，x_1x_2，x_1，x_2，$\bar{x}_2$ の4個必要である．一方，この関数の特性関数は表5.3のようになる．特性関数 $\mathcal{F}$ のMESOPは，図5.1のカルノー図より，

$$\mathcal{F} = x_1x_2 \oplus X_3^{\{2\}} \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2X_3^{\{1,2\}}$$

となる．従って，各出力関数のESOPは，

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathcal{F}(X_3 = 0) = x_1x_2 \\ f_1 &= \mathcal{F}(X_3 = 1) = x_1x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 \end{aligned}$$

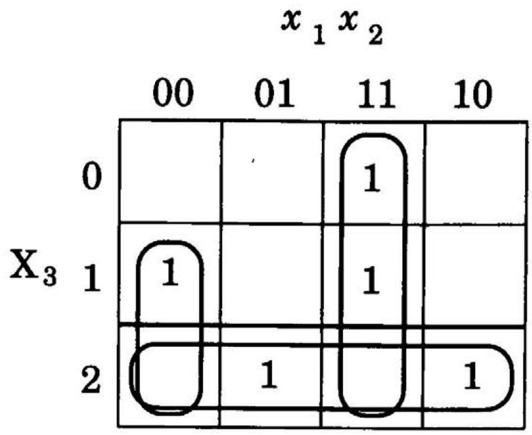

図 5.1 特性関数のカルノー図

$$f_2 \;=\; \mathcal{F}(X_3 = 2) = x_1x_2 \oplus 1 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2$$

となる．この場合，三つの関数を実現するAND-EXOR型PLAの積項は，x_1x_2，$\bar{x}_1\bar{x}_2$，1 の3個でよい． (例終)

[補題 5.15] M を有限集合とし，α を M のベキ集合 $\mathcal{P}(M)$ を定義域とする任意の実数値関数とする．更に，$I : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to R$ を，

$$I(A, B) = \begin{cases} 0 & (|A \cap B| \text{は偶数}) \\ 1 & (|A \cap B| \text{は奇数}) \end{cases}$$

により定義する．このとき．

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}} \quad \sum_{B \in \mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}} I(A, B)\alpha(B) = 2^{|M|-1} \sum_{A \in \mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}} \alpha(A)$$

が成立する．ただし，有限集合 S に対して，$|S|$ は S の要素の個数を表し，集合 X と Y に対して，$X - Y$ は，X から Y を引いた差集合を表す．

(証明) 任意の $A \in \mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$ に対して，

$$\sum_{B \in \mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}} I(A, B)$$

は,

$$((M-A)\text{の部分集合の個数}) \times (\text{奇数個の}A\text{の要素からなる集合の個数})$$

と表現できる. これより,

$$\sum_{B\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} I(A,B) = 2^{|M|-|A|}\sum_{i=0}^{\lfloor(|A|-1)/2\rfloor}\binom{|A|}{2i+1}$$

を得る. ここで, $\lfloor n\rfloor$ は, n を越えない最大の整数である.

$$\sum_{i=0}^{\lfloor(|A|-1)/2\rfloor}\binom{|A|}{2i+1} = 2^{|A|-1}$$

なので[27],

$$\sum_{B\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} I(A,B) = 2^{|M|-1} \tag{5.47}$$

となる. 式(5.47)は任意の A に対して成立するので,

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\ \sum_{B\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} I(A,B)\alpha(B) &= \sum_{B\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\ \sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} I(B,A)\alpha(A) \\
&= \sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\left(\sum_{B\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} I(A,B)\right)\alpha(A) \\
&= 2^{|M|-1}\sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\alpha(A)
\end{aligned}$$

が成立する. $I(A,B)=I(B,A)$ に注意されたい. これより, 補題を得る. (証明終)

[例 5.5]

1) $M=\{0,1\}$ のとき,

$$\begin{aligned}
&I(\{0\},\{0\})\alpha(\{0\}) + I(\{0\},\{1\})\alpha(\{1\}) + I(\{0\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\}) \\
&+I(\{1\},\{0\})\alpha(\{0\}) + I(\{1\},\{1\})\alpha(\{1\}) + I(\{1\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\}) \\
&+I(\{0,1\},\{0\})\alpha(\{0\}) + I(\{0,1\},\{1\})\alpha(\{1\}) + I(\{0,1\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\}) \\
&= 2[\alpha(\{0\}) + \alpha(\{1\}) + \alpha(\{0,1\})].
\end{aligned}$$

2) $M=\{0,1,2\}$ のとき,

$$\begin{aligned}
&I(\{0\},\{0\})\alpha(\{0\}) + I(\{0\},\{1\})\alpha(\{1\}) + I(\{0\},\{2\})\alpha(\{2\}) \\
&+I(\{0\},\{0,1\})\alpha(\{0,10\}) + I(\{0\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\}) + I(\{0\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\}) \\
&+I(\{0\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\}) + I(\{1\},\{0\})\alpha(\{0\}) + I(\{1\},\{1\})\alpha(\{1\})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+I(\{1\},\{2\})\alpha(\{2\})+I(\{1\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})+I(\{1\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})\\
&+I(\{1\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})+I(\{1\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})+I(\{2\},\{0\})\alpha(\{0\})\\
&+I(\{2\},\{1\})\alpha(\{1\})+I(\{2\},\{2\})\alpha(\{2\})+I(\{2\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})\\
&+I(\{2\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})+I(\{2\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})+I(\{2\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})\\
&+I(\{0,1\},\{0\})\alpha(\{0\})+I(\{0,1\},\{\})\alpha(\{1\})+I(\{0,1\},\{2\})\alpha(\{2\})\\
&+I(\{0,1\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})+I(\{0,1\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})+I(\{0,1\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})\\
&+I(\{0,1\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})+I(\{0,2\},\{0\})\alpha(\{0\})+I(\{0,2\},\{1\})\alpha(\{1\})\\
&+I(\{0,2\},\{2\})\alpha(\{2\})+I(\{0,2\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})+I(\{0,2\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})\\
&+I(\{0,2\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})+I(\{0,2\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})+I(\{1,2\},\{0\})\alpha(\{0\})\\
&+I(\{1,2\},\{1\})\alpha(\{1\})+I(\{1,2\},\{2\})\alpha(\{2\})+I(\{1,2\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})\\
&+I(\{1,2\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})+I(\{1,2\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})\\
&+I(\{1,2\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})+I(\{0,1,2\},\{0\})\alpha(\{0\})+I(\{0,1,2\},\{1\})\alpha(\{1\})\\
&+I(\{0,1,2\},\{2\})\alpha(\{2\})+I(\{0,1,2\},\{0,1\})\alpha(\{0,1\})+I(\{0,1,2\},\{0,2\})\alpha(\{0,2\})\\
&+I(\{0,1,2\},\{1,2\})\alpha(\{1,2\})+I(\{0,1,2\},\{0,1,2\})\alpha(\{0,1,2\})\\
&=2^2[\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})+\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,1\})+\alpha(\{0,2\})+\alpha(\{1,2\})+\alpha(\{0,1,2\})]
\end{aligned}
$$

[定理 5.8] 多値入力関数を,

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k,Y):B^k\times M\to B,\ \ M=\{0,1,\cdots,m-1\},\ \ B=\{0,1\}$$

とするとき, $\tau(f)\geq L_m$ が成立する. ここで,

$$L_m=2^{-m+1}\sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\tau(f(:A)),$$

$$f(:A)=\sum_{i\in A}\!{}^{\oplus}\, f(|Y=i),$$

$\mathcal{P}(M)$ は, M のベキ集合, $f(|Y=i)$ は, f において, Y の値を i に固定して得られる関数である.

(証明)　f のMESOPを

$$F=\sum_{A\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\!{}^{\oplus}\ Y^AG(A) \tag{5.48}$$

とする. ここで, $G(A)$ は, $x_1,x_2,\cdots,x_k$ だけからなるESOPである. 式(5.48)において, 変数 Y に定数 i を代入すると,

$$F(|Y=i)=\sum_{i\in H\in\mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}\!{}^{\oplus}\ G(H)$$

を得る．上式と $f(:A)$ の定義より，

$$f(:A) = \sum_{i \in A}{}^{\oplus} \sum_{i \in H \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}{}^{\oplus} G(H) = \sum_{E(A) \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}}{}^{\oplus} G(E(A)) \tag{5.49}$$

ここで，$E(A)$ は，A の要素を奇数個含む集合，と変形できる．式(5.49)の積項数に関して，

$$\tau(f(:A)) \leq \sum_{E(A) \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(G(E(A)))$$

を得る．これより，

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(f(:A)) \leq \sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \sum_{E(A) \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(G(E(A))) \tag{5.50}$$

が成立する．ところで，補題5.15より，

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \sum_{E(A) \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(G(E(A))) = 2^{m-1} \sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(G(A))$$

が成り立ち，また式(5.48)の積項数に関して，

$$\tau(f) = \sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(G(A))$$

が成立するので，式(5.50)より，

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(M)-\{\emptyset\}} \tau(f(:A)) \leq 2^{m-1}\tau(f)$$

を得る．これより，定理が成立する． (証明終)

定理5.8は，多値入力関数のESOPの積項数の下界を与える．注意5.3より，定理5.8の変数 Y を多出力関数の出力部を表す多値変数と考えることにより，定理5.8を，多出力関数のESOPの積項数の下界の評価に利用できる．また，与えられた関数が2値入力多出力関数の場合，関数 $f(:A)$ は2値入力1出力関数となるので，$f(:A)$ のESOPの積項数の評価には下界 L_1，L_k，L_{21}，L_{31}，L_n が利用できる．

[系 5.5] n 入力 m 出力関数

$$f_i : B^n \to B \ (i = 0, 1, \cdots, m-1)$$

の特性関数を $\mathcal{F}$ とするとき，次の関係が成立する．

$m = 2$ のとき，

$\tau(\mathcal{F}) \geq 2^{-1}[\tau(f_0)+\tau(f_1)+\tau(f_0 \oplus f_1)]$

$m=3$ のとき，

$\tau(\mathcal{F}) \geq 2^{-2}[\tau(f_0)+\tau(f_1)+\tau(f_2)+\tau(f_0 \oplus f_1)+\tau(f_0 \oplus f_2)+\tau(f_1 \oplus f_2)+\tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2)]$

$m=4$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\tau(\mathcal{F}) \geq 2^{-3}[&\tau(f_0)+\tau(f_1)+\tau(f_2)+\tau(f_3) \\
&+\tau(f_0 \oplus f_1)+\tau(f_0 \oplus f_2)+\tau(f_0 \oplus f_3) \\
&+\tau(f_1 \oplus f_2)+\tau(f_1 \oplus f_3)+\tau(f_2 \oplus f_3) \\
&+\tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2)+\tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_3) \\
&+\tau(f_0 \oplus f_2 \oplus f_3)+\tau(f_1 \oplus f_2 \oplus f_3) \\
&+\tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3)].
\end{aligned}
$$

[補題 5.16] 多値入力関数を，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, Y): B^k \times M \rightarrow B,\ M=\{0,1,\cdots,m-1\},\ B=\{0,1\}$$

とし， $v \in MT(f)$ とするとき， $\tau(f) \geq L_{am}$ が成立する．ここで，

$$L_{am}=1+\min_{q \in Q(v)}\left[\max_{v \in MT(f)}\{L_{mv}(f \oplus q)\}\right],$$

$L_{mv}(f)$は，関数fに対する下界L_mの値

である．

[注意 5.4] 補題5.16は，定理5.6の多値入力関数への拡張である．これにより，下界の値を1増やせる可能性がある．

以上の議論より，多出力関数を表現するESOPの積項数の下界は，次の方法によって得られる．

[アルゴリズム 5.2] <2値入力多出力関数のESOPの積項数の下界)>

1)与えられた多出力関数の特性関数を求める．

2)特性関数のESOPの下界 L_{am} を求め，与えられた多出力関数のESOPの下界とする．

(アルゴリズムの説明)

下界 L_{am} を評価するとき，関数 $f \oplus q$ のESOPの積項数の下界を評価する必要がある(補題5.16参照)．関数 $f \oplus q$ のESOPの積項数の下界の評価には，定理5.8(系5.5)を用いる．系5.5における各部分関数は，2値入力1出力関数であるので，この1出力関数のESOPの積項数の下界は， L_{21}， L_{31}， L_k， L_n を用いて評価し，その最大値とする．

5.3 ESOPの簡単化アルゴリズム

現在迄，5変数以下の任意の2値入力1出力関数を表現するESOPは，テーブル探索により高速に得る方法が確立されている．しかし，変数の個数が6以上の場合や多出力関数の場合は，これらを表現するMESOPを効率良く求める方法は確立されていなく，一般には，ヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化が行われるが，簡単化結果の最小性は保証されない．そこで，前節で検討した，与えられた関数のESOPの積項数の下界の評価法と，5変数以下の関数のMESOPの表，及び，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムEXMIN2 [47]を組み合わせることにより，ESOPの簡単化アルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 5.3] ＜2値入力1出力関数のESOPの簡単化＞

simpn(n: *number of inputs*, f: $ESOP$)

{

  if($n \leq 5$) then return $MESOP\ for\ f$;

  for($all\ input\ variables\ x_i$){

    Expand f into $\bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$,

    where $f_{i0} = f(x_i = 0)$, $f_{i1} = f(x_i = 1)$;

    F_{i0}=simpn$(n-1, f_{i0})$;

    F_{i1}=simpn$(n-1, f_{i1})$;

    F_{i2}=simpn$(n-1, f_{i0} \oplus f_{i1})$;

    G_{i0}=exmin2$(\bar{x}_i F_{i0} \oplus x_i F_{i1})$;

    G_{i1}=exmin2$(F_{i0} \oplus x_i F_{i2})$;

    G_{i2}=exmin2$(F_{i1} \oplus \bar{x}_i F_{i2})$;

  }

  return G_{kj} where

$$\tau(G_{kj}) = \min_i[\min\{\tau(G_{i0}), \tau(G_{i1}), \tau(G_{i2})\}];$$

}

exmin2(F:$ESOP$) { return *simplified ESOP for F by EXMIN2*;}

(アルゴリズムの説明)

1) EXMIN2 は，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムであるため，与えられたESOPの形により，簡単化結果が異なることがある．この為，与えられたESOPを

$$\bar{x}_i F_{i0} \oplus x_i F_{i1},\ \ F_{i0} \oplus x_i F_{i2},\ \ F_{i1} \oplus \bar{x}_i F_{i2}$$

の3通りに展開したものをそれぞれ簡単化し，その中で最も積項数の少ないESOPを簡単化結果として採用している．

2) 与えられた関数が対称関数の場合は，1つの変数で展開すればよい．

1出力関数のESOPの簡単化アルゴリズム5.3を用いると，多出力関数のESOPの効率の良い簡単化アルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 5.4] ＜2値入力多出力関数のESOPの簡単化＞

1) 各出力関数のESOPをアルゴリスム5.3 で別々に簡単化する．

2) 1)で得られたESOPを用いて，与えられた多出力関数の特性関数のESOPを得る．

3) 2)で得られた特性関数のESOPをEXMIN2で簡単化する．

アルゴリズム5.3，5.4及び前節で検討した，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界の評価法を用いると，ESOPの最小性を保証するアルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 5.5] ＜ESOPの最小性保証＞

1)与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を求め，これを LB とする．

2)与えられた関数を表現するESOPをアルゴリズム5.3(単一出力関数の場合)，または，アルゴリズム5.4(多出力関数の場合)で簡単化する．簡単化したESOPの積項数を τ_a とする．

3)もし $LB = \tau_a$ ならば，簡単化したESOPは最小解である．もし $LB \neq \tau_a$ ならば，簡単化結果の最小性は保証されない．

5.3.1 実験結果

表5.4は，4変数以下の関数のMESOPを用いて，5変数LP同値類代表関数のESOPを，前節で述べた簡単化アルゴリズムによって簡単化を行い，簡単化したESOPの積項数とそれによって実現できるLP同値類代表関数の個数および関数の総数を示す[2]．ま

[2] 5変数関数のMESOPは前章において既に求められている．

た，各下界による簡単化結果の最小性の保証の割合も示す．また，表5.5は，簡単化の際に評価した各種下界の平均値の比較，および，L_{21}，L_{31}，L_{a1} で該当する下界のみが最大となる同値類の個数を示す．これらの結果から次のことが言える．

1) MESOP の積項数が6以下の場合は，簡単化結果の最小性は，ほぼ100%保証できる．

2) 全5変数関数の約98%に対して，最小性の保証ができた．

3) 各種下界の比較は，L_{a1} が最大となる．また，L_{21}，L_{31}，L_1 の比較では，平均すると，$L_1 > L_{21} > L_{31}$ となるが，特定の関数に対しては，下界の大きさがこの順とならないこともある．また，与えられた関数の下界の評価には，L_{21}，L_{31}，L_1 のすべてが必要であることが明らかになった．

表5.6は，2値7入力1出力関数をEXMIN2によって簡単化したときの積項数と，各種下界の比較を示す．これより，下界の比較は，平均すると，$L_n > L_k(k=2) > L_{21} > L_k(k=3) > L_k(k=4) > L_{31}$ となる．しかし，関数によっては，下界の大きさがこの順とはならない場合がある．

表5.7は，10変数以下の2値入力1出力乱数関数をアルゴリズム5.5によって簡単化した結果を示す．これより，10変数関数では，積項数が15程度までのESOP の最小性の保証ができることがわかる．

表5.8は，各種下界を6変数対称関数によって評価した結果を示す．L_{a1} の評価により，27個の関数の下界が改善でき，L_{a2} の評価により，更に32個の関数の下界が改善できた．表5.9は，6変数対称L同値類代表関数を簡単化した結果を示す．32個の代表関数のうち，23個（全対称関数の65.6%）について，最小性の保証ができた．表5.10は，7変数対称L同値類代表関数を簡単化した結果を示す．52個の代表関数のうち，14個（全対称関数の21.9%）について，最小性の保証ができた．$SB(n,k)$ 関数のESOPを簡単化した結果を表5.11に示す．$n=6$ の全ての関数，及び，$n=7$，$n=8$ の一部について最小解が得られた．表5.12は，最も積項数の多い6変数対称関数 $S^6_{\{1,2,4,5\}}$ の下界評価および簡単化を一般の関数用のプログラムと対称関数用のプログラムで求めたときの計算時間の比較を示す．これより，関数の対称性を考慮すると，処理時間を短縮できることがわかる．

表5.13は，多出力乱数関数のESOPを簡単化した結果を示す．これより，6積項以下のESOPの場合は，比較的高い割合で最小解が得られることがわかる．また，算術演算回路のESOPを簡単化した結果を表5.14に示す．ＡＤＲ２(２ビット加算回路)，ＩＮＣ４(１を加算する回路)，ＭＬＰ２(２ビット乗算回路)，ＮＲＭ２(２ビットベクトル演算回路)及びＲＤＭ４(４ビット乱数発生回路)については最小性の保証ができた．

なお，前節で検討した簡単化アルゴリズムでは，ヒューリスティックな簡単化プログラムEXMIN2が用いられている．このため，今後のEXMIN2の改善により，本実験結果が変化することがあり得る．

5.4 むすび

本章では，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法を示し，これを用いたESOPの簡単化アルゴリズムを与えた．このアルゴリズムの特徴は，1) 与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する．2) 簡単化結果の最小性が保証されたらアルゴリズムを停止する，という点にある．

本アルゴリズムによって5変数関数を簡単化した結果，全5変数関数の約98%に対して簡単化結果の最小性を保証することができた．また，1出力関数の場合，10変数で積項数が15程度のESOPならば，ほとんどの場合，最小性の保証が可能である．また，対称関数のESOPを簡単化した結果，6変数対称関数の65.6%，7変数対称関数の21.9%について，最小解が得られた．また，多出力関数の場合，算術演算回路の一部について最小性の保証ができた．

現在，ＥＳＯＰの簡単化はヒューリスティックなアルゴリズムによって行われている．しかし，これらのアルゴリズムは簡単化結果の最小性を保証しない．このことから，本アルゴリズムによって得られた簡単化結果は，従来のヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化された結果よりも信頼性が高い．

表 5.4　5変数ESOPの簡単化結果

積項数	同値類の個数	関数の総数	各下界で最小性の保証された同値類の個数				最小性の保証された		最小性保証の割合(%)
			L_{21}	L_{31}	L_1	L_{a1}	同値類の個数	関数の総数	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	100.0
1	1	243	1	1	1	1	1	243	100.0
2	4	24948	4	4	4	4	4	24949	100.0
3	19	1351836	19	19	19	19	19	1351836	100.0
4	137	39365190	136	96	137	137	137	39365190	100.0
5	971	545193342	886	339	966	971	971	545193342	100.0
6	3572	2398267764	1581	221	3204	3571	3571	2398252212	99.99
7	2143	1299295404	0	0	1124	2036	2036	1227138012	94.45
8	86	11460744	0	0	35	50	50	5718168	49.89
9	2	7824	0	0	1	1	1	48	0.61
total	6936	4294967296	2627	680	5492	6791	6791	4217044000	98.19

表 5.5 5変数LP同値類代表関数の各種下界の比較(平均)

積項数	L_{21}	L_{31}	L_1	L_{a1}
1	1.00 0	1.00 0	1.00 0	1.00
2	2.00 0	2.00 0	2.00 0	2.00
3	3.00 0	3.00 0	3.00 0	3.00
4	3.99 0	3.70 0	4.00 0	4.00
5	4.91 0	4.35 0	4.99 1	5.00
6	5.44 52	5.02 4	5.90 1018	6.00
7	5.81 0	5.45 0	6.52 1063	6.95
8	5.92 0	5.92 0	7.40 35	7.58
9	6.00 0	6.00 0	8.50 2	8.50
平均 総数	5.45 52	5.04 4	5.94 2119	6.12

各欄の下段は，L_{21}，L_{31}，L_1 の比較で
該当する下界のみが最大となった同値類の
個数を示す．

表 5.6 各種下界の比較(7変数乱数関数)

積項数 *)	下界の平均					
	L_{21}	L_{31}	L_k			L_n
			$k=2$	$k=3$	$k=4$	
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.50	1.50	2.00	2.00	2.00	2.00
3	2.51	2.50	3.00	3.00	3.00	3.00
4	3.52	3.19	4.00	4.00	4.00	4.00
5	4.54	3.80	5.00	5.00	4.99	5.00
6	5.51	4.55	5.99	5.95	5.76	5.99
7	6.50	5.45	6.97	6.76	6.30	6.99
8	7.46	6.11	7.83	7.34	6.94	7.97
9	8.30	6.75	8.59	8.02	7.48	8.88
10	9.07	7.46	9.22	8.58	7.96	9.60
11	9.80	8.09	9.98	9.18	8.46	10.34
12	10.42	8.67	10.60	9.71	8.92	11.10
13	10.95	9.14	11.20	10.24	9.37	11.74
14	11.37	9.56	11.75	10.70	9.79	12.33

*) 簡単化したESOPの積項数

表 5.7 1出力乱数関数の簡単化（最小性保証の割合（%））

積項数 *)	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
2	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
3	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
6	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
7	100.0	99.2	100.0	100.0	100.0
8	97.3	98.2	100.0	100.0	100.0
9	89.3	90.6	100.0	100.0	100.0
10	78.7	66.6	95.2	100.0	100.0
11	43.7	36.5	93.3	96.2	100.0
12	0.0	11.4	72.2	95.8	100.0
13		3.7	60.0	91.3	100.0
14		0.5	8.0	80.0	100.0
15		0.0	0.0	45.8	100.0
16		0.0	0.0	23.5	83.3
17		0.0	0.0	0.0	83.0
18		0.0	0.0	0.0	66.0
19		0.0	0.0	0.0	9.1
20		0.0	0.0	0.0	0.0

*) 簡単化したESOPの積項数

注)空欄は，該当する積項数の乱数関数が
得られなかったことを示す．

表 5.8 下界の比較（6変数対称関数）

下界	該当する下界が最大となる関数の個数	平均下界
L_{21}	7	8.83
L_{31}	4	7.06
$L1$	69	10.10
$L_k(k=2)$	8	9.37
$L_k(k=3)$	8	8.02
L_{a1}	96	10.27
L_{a2}	128	10.53

表 5.9 6変数対称関数の簡単化

代表関数	関数の個数	下界			積項数
		L_{max}	L_{a1}	L_{a2}	
$S^6_{\{\}}$	1	0	0	0	0
$S^6_{\{0\}}$	3	1	1	1	1
$S^6_{\{1\}}$	3	6	6	6	6
$S^6_{\{2\}}$	6	11	11	11	11
$S^6_{\{3\}}$	1	12	12	12	12
$S^6_{\{0,1\}}$	3	6	6	6	6
$S^6_{\{0,2\}}$	6	11	11	11	11
$S^6_{\{0,3\}}$	3	13	13	13	13
$S^6_{\{0,5\}}$	6	7	7	7	7
$S^6_{\{1,3\}}$	3	10	11	11	12
$S^6_{\{1,4\}}$	6	13	14	14	14
$S^6_{\{2,3\}}$	3	11	11	12	12
$S^6_{\{2,4\}}$	6	8	8	8	8
$S^6_{\{0,1,3\}}$	6	11	11	12	13
$S^6_{\{0,1,4\}}$	6	13	13	13	14
$S^6_{\{0,1,5\}}$	6	10	11	11	12
$S^6_{\{0,2,3\}}$	6	12	12	13	13
$S^6_{\{0,2,4\}}$	6	7	7	7	7
$S^6_{\{0,2,6\}}$	6	11	11	12	12
$S^6_{\{1,2,4\}}$	3	11	12	12	13
$S^6_{\{1,2,5\}}$	6	11	11	12	12
$S^6_{\{0,1,2,4\}}$	6	11	12	12	13
$S^6_{\{0,1,2,5\}}$	6	12	12	12	13
$S^6_{\{0,1,2,6\}}$	6	12	12	12	12
$S^6_{\{0,1,4,6\}}$	2	12	12	13	14
$S^6_{\{0,2,4,5\}}$	3	10	11	11	12
$S^6_{\{1,2,4,5\}}$	1	14	14	15	15
$S^6_{\{0,1,2,4,5\}}$	3	14	14	14	14
$S^6_{\{0,1,3,4,6\}}$	2	14	14	15	15
$S^6_{\{0,2,3,4,5\}}$	3	8	8	8	8
$S^6_{\{1,2,3,4,5\}}$	1	3	3	3	3
$S^6_{\{0,1,2,3,4,5\}}$	3	2	2	2	2

表 5.10 7変数対称関数の簡単化

代表関数	関数の個数	下界			積項数
		L_{max}	L_{a1}	L_{a2}	
$S^7\{\}$	1	0	0	0	0
$S^7\{0\}$	3	1	1	1	1
$S^7\{1\}$	6	7	7	7	7
$S^7\{2\}$	6	14	14	14	15
$S^7\{3\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{0,3\}$	6	18	18	18	22
$S^7\{0,5\}$	6	15	15	15	16
$S^7\{1,2\}$	3	14	14	14	14
$S^7\{1,3\}$	6	16	17	18	21
$S^7\{1,4\}$	3	20	21	21	25
$S^7\{1,6\}$	3	12	13	13	14
$S^7\{2,4\}$	3	13	14	14	15
$S^7\{2,5\}$	3	20	21	21	25
$S^7\{3,4\}$	3	15	16	16	16
$S^7\{0,1,2\}$	3	14	14	14	14
$S^7\{0,1,3\}$	6	17	17	18	22
$S^7\{0,1,4\}$	3	20	20	20	24
$S^7\{0,1,5\}$	6	16	17	18	20
$S^7\{0,1,6\}$	6	12	13	13	14
$S^7\{0,1,7\}$	6	8	8	8	8
$S^7\{0,2,4\}$	3	12	13	13	14
$S^7\{0,2,5\}$	6	20	21	21	25
$S^7\{0,2,6\}$	6	16	17	18	21
$S^7\{0,2,7\}$	6	15	15	15	16
$S^7\{0,3,4\}$	6	15	15	15	15
$S^7\{0,3,5\}$	6	13	14	14	15
$S^7\{0,3,6\}$	6	21	21	22	25
$S^7\{0,3,7\}$	6	18	18	19	23
$S^7\{0,5,6\}$	6	15	15	15	15
$S^7\{1,2,4\}$	6	17	18	18	21
$S^7\{1,2,5\}$	6	17	18	18	21
$S^7\{1,2,6\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{1,3,4\}$	6	18	19	19	22
$S^7\{1,3,5\}$	6	8	8	8	8
$S^7\{0,1,2,5\}$	6	18	18	19	22
$S^7\{0,1,2,6\}$	6	18	18	19	21
$S^7\{0,1,3,4\}$	6	18	19	19	23
$S^7\{0,1,3,5\}$	6	9	9	9	9
$S^7\{0,2,3,6\}$	6	16	16	16	17
$S^7\{1,2,3,5\}$	6	18	18	19	23
$S^7\{0,1,2,3,5\}$	6	17	18	18	22
$S^7\{0,1,2,3,6\}$	6	17	18	19	23
$S^7\{0,1,2,4,7\}$	2	17	18	18	21
$S^7\{0,1,3,4,7\}$	6	18	18	19	21
$S^7\{0,1,3,5,6\}$	3	13	13	14	15
$S^7\{0,1,4,5,6\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{0,2,3,4,7\}$	6	18	18	18	22
$S^7\{0,2,3,5,6\}$	3	21	21	22	27
$S^7\{0,3,4,5,6\}$	3	15	16	16	16
$S^7\{0,1,2,3,5,6\}$	6	19	19	19	23
$S^7\{1,2,3,4,5,6\}$	1	3	3	3	3
$S^7\{0,1,2,3,4,5,6\}$	3	2	2	2	2

表 5.11 $SB(n,k)$ の簡単化

n	k	下界 L_{max}	下界 L_{a1}	下界 L_{a2}	積項数
6	1	6	6	6	6
6	2	11	11	11	11
6	3	12	12	12	12
7	1	7	7	7	7
7	2	14	14	14	15
7	3	17	17	18	19
8	1	8	8		8
8	2	18	18		21
8	3	24	24		32
8	4	25	26		38

表 5.12 計算時間の比較（CPU time (sec)）

計算の種類	一般関数用プログラム	対称関数用プログラム
簡単化	14.5	2.3
下界 L_{a1}	16.1	1.7
下界 L_{a2}	10320	361

（HP9000/720による）

表 5.13 多出力乱数関数の簡単化（最小性保証の割合（%））

積項数 *)	4入力					5入力					6入力				
	出力数					出力数					出力数				
	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
3	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	91.5	96.0	93.3	100.0	95.8	100.0	100.0	92.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
6	89.8	78.6	79.2	76.9	59.1	95.4	84.2	100.0	90.0	61.5	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
7	39.0	53.8	58.6	30.4	20.0	85.7	56.5	64.7	35.3	46.7	100.0	100.0	91.7	100.0	100.0
8	2.9	5.0	0.0	0.0	0.0	60.0	31.8	42.1	0.0	17.6	100.0	100.0	81.3	92.9	100.0
9		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.4	0.0	0.0	0.0	94.4	70.0	86.7	76.9	70.6
10			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	52.2	37.5	64.3	47.1	41.7
11				0.0	0.0		0.0	0.0	0.0	0.0	26.7	33.3	9.1	4.7	30.0
12								0.0	0.0	0.0	0.0	16.7	4.8	0.0	0.0
13								0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

*) 簡単化したESOPの積項数

注)空欄は，該当する積項数の乱数関数が得られなかったことを示す.

表 5.14 算術演算回路のＥＳＯＰの最小化

回路		入力	出力	積項	下界
加算回路	ADR2	4	3	7	7
	ADR3	6	4	15	13
1を加算する回路	INC4	4	5	7	7
	INC6	6	7	11	10
対数計算回路	LOG4	4	4	10	8
	LOG6	6	6	31	19
乗算回路	MLP2	4	4	5	5
	MLP3	6	6	18	15
ベクトル演算回路	NRM2	4	3	7	7
	NRM3	6	4	21	17
乱数発生回路	RDM4	4	4	6	6
	RDM6	6	6	15	12
平方根計算回路	ROT4	4	3	8	7
	ROT6	6	4	17	14
二乗回路	SQR4	4	8	12	8
	SQR6	6	12	24	15
ビット計数回路	WGT4	4	3	9	8
	WGT6	6	3	22	19

第 6 章

MESOPの積項数の上界

6.1 まえがき

任意の論理関数は，SOPで表現できる．任意の n 変数関数をSOPで表現するために必要な積項数を $\Phi(n)$ で表すと，$\Phi(n) = 2^{n-1}$ である．n 変数パリティ関数 $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots x_n$ は，$\Phi(n)$ 個の積項を必要とするので最も複雑な関数と言える [53, 55]．一方，ESOPも任意の n 変数関数を表現でき，そのために必要な積項数を $\Psi(n)$ で表す．すなわち，$\Psi(n)$ は，最も複雑な n 変数関数を表現するために必要な積項数を表す．ESOPの場合，$n \leq 5$ のときは，$\Psi(n)$ 個の積項数を必要とする関数は得られているが，$n \geq 6$ のときは，最も複雑な関数の一般形は知られていない．

本章では，$\Psi(6) = 15$ であることを証明する．また，この結果を用いて，$\Psi(n) \leq 15 \cdot 2^{n-6}$ $(n \geq 6)$ であることを示す．$\Psi(6) = 15$ であることを証明するためには，すべての6変数関数のESOPを簡単化すればよい．しかし，6変数関数は $2^{64} \approx 1.8 \times 10^{19}$ 個存在するので，素直に簡単化を実行すれば天文学的な計算時間が必要となる．そこで，第4章で導入したLP同値関係によって関数を分類すると，対象とすべき関数の個数を削減できる．同一のLP同値類に属する関数のMESOPの積項数は不変である．しかし，6変数関数のLP同値類の個数は，少なくとも 5.5×10^{11} であり，すべての代表関数のESOPを簡単化することもほとんど不可能である．

ここでは，次の方法によって考慮すべき関数の個数を削減する．5変数関数のLP同値類代表関数のMESOPの表は既に得られている．この表を用いて，MESOPの積項数が15以上となる可能性のある関数を生成する．次に，これらの関数のESOPを簡単化することにより，$\Psi(6) = 15$ であることを証明する．$\Psi(6) = 15$ を証明するために考慮した関数の個数は約 3×10^8 である．また，$n \leq 6$ のとき，最も複雑な関数の中に対称関数が含まれることを示す．

6.2 MESOP の積項数の上界

この節では，LP 同値類代表関数のいくつかの性質を示し，これを用いて，MESOP の積項数の上界を効率よく求めるためのアルゴリズムを与える．

6.2.1 LP 同値類代表関数の性質

[補題 6.1] 関数 f を $f = \bar{x}f_0 \vee xf_1$ と展開したとき，

$$\tau(f) \leq \tau(f_0) + \tau(f_1)$$

が成立する．

(証明)　関数 f は，$f = \bar{x}f_0 \oplus xf_1$ と展開できるので，

$$\tau(f) \leq \tau(f_0) + \tau(f_1)$$

が成立する．(証明終)

[補題 6.2] $\Psi(n+1) \leq 2\Psi(n)$.

(証明)　任意の $(n+1)$ 変数関数 f は，$f = \bar{x}f_0 \vee xf_1$ と展開できる．f_0，f_1 は n 変数関数であるから，

$$\tau(f_0) \leq \Psi(n),\ \tau(f_1) \leq \Psi(n)$$

である．補題6.1より，

$$\tau(f) \leq \tau(f_0) + \tau(f_1) \leq 2\Psi(n)$$

を得る．(証明終)

[補題 6.3] $\tau(g) = 2\Psi(n)$ となる $(n+1)$ 変数代表関数 g が存在する場合，g は，次式で表されるような n 変数関数の組から生成される $(n+1)$ 変数関数の集合から得られる代表関数のいずれかと一致する．

$$H = \{(f_0 \circ h) | h \in EQV(f_1),\quad f_0, f_1 \in LP(n),$$
$$\tau(f_0) = \tau(f_1) = \Psi(n)\}$$

(証明)　$\tau(g) = 2\Psi(n)$ となる $(n+1)$ 変数関数を g とする．g をシャノン展開すると，

$$g = \bar{x}g_0 \vee xg_1. \tag{6.1}$$

を得る．g_0，g_1 は n 変数関数であるから，

$$\tau(g_0) \leq \Psi(n),\ \tau(g_1) \leq \Psi(n)$$

である．しかるに，

$$\tau(g) \leq \tau(g_0) + \tau(g_1),\ \tau(g) = 2\Psi(n)$$

であるから，

$$\tau(g_0) = \tau(g_1) = \Psi(n)$$

を得る．式(6.1)の x を適当に選ぶと，

$$g_0 = lh(f),\ g_1 = uh(f)$$

となる．ここで，$f \in H$ である．以上より，補題が成立する．　(証明終)

[補題 6.4] $\tau(uh(f)) + \tau(lh(f)) \geq \tau(f)$.

(証明)　関数 f は適当な変数 x シャノン展開すると，

$$f = \bar{x} \cdot lh(f) \vee x \cdot uh(f)$$

と表される．補題6.1より，

$$\tau(f) \leq \tau(lh(f)) + \tau(uh(f))$$

を得る．　(証明終)

[補題 6.5] t を n 変数代表関数のMESOPの積項数とする．

$$\tau(f_0) = t_0,\ \tau(f_1) = t_1,\ t_0 + t_1 \geq t$$

を満足する $(n-1)$ 変数代表関数の組を (f_0, f_1) とする．このとき，n 変数関数の集合

$$\begin{aligned}\{(f_0 \circ g) | g \in EQV(f_1), (t_0, t_1), t_0 + t_1 \geq t,\\ \tau(f_0) = t_0, \tau(f_1) = t_1\}\end{aligned} \tag{6.2}$$

から得られる代表関数の集合を H とする．このとき，

$$LP(n,t) \subseteq H$$

が成立する．

(証明) $f \in LP(n,t)$ とする． $f_0 = uh(f)$， $f_1 = lh(f)$ とおくと，補題6.4より，$\tau(f_0) + \tau(f_1) \geq t$ を得る．明らかに $(f_0 \circ f_1)$ は式(6.2)の要素であり，補題を得る．

(証明終)

6.2.2 MESOPの積項数の上界を求めるアルゴリズム

ここでは，前節で述べた代表関数の性質を用いてMESOP の積項数の上界を効率よく求めるアルゴリズムを示す．

[アルゴリズム 6.1] < $\Psi(n)$ の計算>
$\Psi(n-1)$ の値と $LP(n-1)$ は既知とする．

1) $t_{max} \longleftarrow 2\Psi(n-1)$.

2) $n-1$ 変数関数の対の集合

$$\begin{aligned} P &= \{(f_0, f_1) | \tau(f_0) + \tau(f_1) \geq t_{max}, \\ &\quad f_0, f_1 \in LP(n-1), |EQV(f_1)| \leq |EQV(f_0)|\} \end{aligned} \tag{6.3}$$

を求める．

3) 2)の関数の対 (f_0, f_1) を用いて， n 変数関数の集合

$$H = \{(f_0 \circ g) | (f_0, f_1) \in P, g \in EQV(f_1)\} \tag{6.4}$$

を生成する．

4) 集合 H の関数のESOPをアルゴリズム5.3を用いて簡単化する．簡単化したESOPの積項数がすべて t_{max} より小さくなったら， $t_{max}-1$ として 2)へ行く．

5) $\Psi(n) \leftarrow t_{max}$.

(アルゴリズムの説明)

1) 補題6.2より，$\Psi(n) \leq 2\Psi(n-1)$ とおける．

2),3) 補題6.4より，式(6.3)，(6.4)で与えられる関数の集合を考慮すれば十分である．また，$|EQV(f_1)| \leq |EQV(f_0)|$ とすることにより，考慮すべき関数の個数を減らしている．

4) 簡単化プログラム[21, 22, 23, 24]は，5変数以下のLP同値類代表関数のMESOPの表を用いている．与えられた関数のMESOPの積項数の下界を用いて，関数の一部については簡単化したESOPの最小性を保証できる．

5) 簡単化したESOPの最小性が保証できないときは，本アルゴリズムは $\Psi(n)$ の上界を与える．

6.3 実験結果及び検討

6.3.1 $\Psi(6)$ の導出

アルゴリズム6.1を $n = 6$ に対して適用した．

$$\Psi(5) = 9$$

であるから，補題6.2より，

$$\Psi(6) \leq 18$$

である．従って，任意の6変数関数は，高々18積項のESOPで実現できる．関数 f が

$$f = \bar{x}f_0 \oplus xf_1$$

と展開できるとする．任意の6変数関数が高々15積項のESOPで実現できることを証明するためには，

$$\tau(f_0) + \tau(f_1) \geq 16$$

となる関数の対 (f_0, f_1) を考慮すれば十分である．すべての関数の対 (f_0, f_1) のESOPが高々15積項で実現できることを示せば，$\Psi(6) = 15$ であることを証明できる．$\Psi(5) = 9$ であるから，表6.1に示される場合を考慮すれば十分である．

表 6.1 $\Psi(6)$ の導出

t_{max}	$\tau(f_0)$	$\tau(f_1)$	N_p	N_f	t_{simp}
18	9	9	3	7872	15
17	9	8	175	680736	14
16	9	7	4464	1.7×10^7	14
	8	8	7396	2.8×10^8	≤ 15

$N_p = |\{(f_0, f_1)|\tau(f_0) + \tau(f_1) \geq t_{max}\}|$

$N_f = |\{(f_0 \circ g)|g \in EQV(f_1), |EQV(f_0)| \geq |EQV(f_1)|\}|$

t_{simp}: Maximum number of products in the simplified ESOPs

1) t_{max}=18のとき，簡単化したESOPの積項数は高々15であった．簡単化したESOPのうち，15積項必要とするLP同値類代表関数の16進表現は，

$$6bbdbdd6bdd6d66b$$

である．この関数の簡単化したESOPの最小性は下界定理により，保証された．

2) $t_{max} = 17$ のとき，t_{simp}(簡単化したESOPのうち最大の積項数)$= 14$ であった．

3) $t_{max} = 16$ のとき，

a) $\tau(f_0) = 9$，$\tau(f_1) = 7$ のとき，$t_{simp} = 14$

b) $\tau(f_0) = \tau(f_1) = 8$ のとき，$t_{simp} \leq 15$

となった．（この場合，簡単化の計算時間を削減するために，簡単化プログラムを修正した．このため，15積項必要とする関数を特定できなかったが，$t_{max} = 16$ のときは，$t_{simp} = 14$ であると推測している．）

以上の結果より，

$$\Psi(6) = 15$$

であることが証明された．$\Psi(6)$ を求めるために考慮した関数の個数は，約 3×10^8 個であった．補題6.2と $\Psi(6) = 15$ より，次の定理を得る．

表 6.2 最も複雑なLP同値類代表関数の16進表現

n			
3	4	5	6
16		16686881	
6b	6bbd	6bbdbdd6	6bbdbdd6bdd6d66b

表 6.3 最も複雑な対称L同値類代表関数

n			
3	4	5	6
16		16686881	
97			
7e	7ee9	7ee9e997	7ee9e997e997977e

[定理 6.1] $\Psi(n) \leq 15 \cdot 2^{n-6} \quad (n \geq 6)$.

定理6.1は，従来発表されている値[40, 20]よりも，よりタイトな上界を与えている．

表6.2は，6変数以下の関数の中で，$\Psi(n)$ 個の積項を必要とするLP同値類代表関数の16進表現を示す．

表6.3は，$\Psi(n)$ 個の積項を必要とする対称関数の対称L同値類代表関数を示す．

[定義 6.1] $\beta = hex(f)$ を 関数 f の16進表現とする．このとき，$hex^{-1}(\beta)$ は，β で表される関数を示す．

表6.2，表6.3より，

$$
\begin{aligned}
hex^{-1}(6b) &\sim hex^{-1}(7e) \\
hex^{-1}(6bbd) &\sim hex^{-1}(7ee9) \\
hex^{-1}(6bbdbdd6) &\sim hex^{-1}(7ee9e997) \\
hex^{-1}(6bbdbdd6bdd6d66b) &\sim hex^{-1}(7ee9e997e997977e)
\end{aligned}
$$

であることが明らかとなった．これより，次の定理を得る．

[定理 6.2] $n \leq 6$ のとき，最も複雑なESOPで表現される関数のなかに，対称関数が含まれる．

6.3.2 最も複雑な対称関数の性質

この節では，最も複雑なESOPで表現される対称関数について検討する．

[定義 6.2] n 変数関数 $u_n = u_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $v_n = v_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $w_n = w_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は次のように再帰的に定義される．

$$
\begin{aligned}
u_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= x_i \cdot u_{i-1} \oplus \bar{x}_i \cdot w_{i-1} \\
v_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= x_i \cdot v_{i-1} \oplus \bar{x}_i \cdot u_{i-1} \\
w_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= x_i \cdot w_{i-1} \oplus \bar{x}_i \cdot v_{i-1}
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

ここで，$i = 1, 2, \cdots, n$, $u_0 = 0$, $v_0 = w_0 = 1$ である．

[注意 6.1] 式(6.5)より，

$$hex(u_3) = 7e, \quad hex(v_3) = 97, \quad hex(w_3) = e9$$

$$hex(u_4) = 7ee9, \quad hex(v_4) = 977e, \quad hex(w_4) = e997$$

$$hex(u_5) = 7ee9e997, \quad hex(v_5) = 977e7ee9, \quad hex(w_5) = e997977e$$

が得られる．

[補題 6.6] $u_n \oplus v_n \oplus w_n = 0$.

(証明)　式(6.5)より，

$$
\begin{aligned}
u_n \oplus v_n \oplus w_n &= (x_n \oplus \bar{x}_n)u_{n-1} \oplus (x_n \oplus \bar{x}_n)v_{n-1} \\
&\quad \oplus (x_n \oplus \bar{x}_n)w_{n-1} \\
&= u_{n-1} \oplus v_{n-1} \oplus w_{n-1} \\
&= u_{n-2} \oplus v_{n-2} \oplus w_{n-2} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= u_0 \oplus v_0 \oplus w_0 = 0.
\end{aligned}
$$

を得る．これより，補題を得る．　(証明終)

[補題 6.7] $u_n \sim w_n$.

(証明)　w_n に リテラル変換 $x_n \to 1 \to \bar{x}_n \to x_n$ を適用して得られる関数を w'_n とすると，$w'_n = 1 \cdot w_{n-1} \oplus x_n \cdot v_{n-1}$ を得る．これより，

$$\begin{aligned} u_n \oplus w'_n &= x_n \cdot u_{n-1} \oplus (1 \oplus \bar{x}_n) w_{n-1} \oplus x_n \cdot v_{n-1} \\ &= x_n(u_{n-1} \oplus v_{n-1} \oplus w_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．従って，$u_n = w'_n$ となり，補題を得る．　(証明終)

[補題 6.8] $v_n \sim w_n$.

(証明)　w_n にリテラル変換 $x_n \to \bar{x}_n \to 1 \to x_n$ を適用して得られる関数を w''_n とすると，$w''_n = \bar{x}_n \cdot w_{n-1} \oplus 1 \cdot v_{n-1}$ を得る．これより，

$$\begin{aligned} v_n \oplus w''_n &= \bar{x}_n \cdot u_{n-1} \oplus (x_n \oplus 1) v_{n-1} \oplus \bar{x}_n \cdot w_{n-1} \\ &= \bar{x}_n(u_{n-1} \oplus v_{n-1} \oplus w_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．従って，$v_n = w''_n$ となり，補題を得る．　(証明終)

補題6.7，6.8 より，次の補題を得る．

[補題 6.9] $u_n \sim v_n \sim w_n$.

従って，$\tau(u_n) = \tau(v_n) = \tau(w_n)$ となる．Suprun [54] は，最も複雑な固定極性Reed-Muller式を得るために，3つの関数 R_n，S_n，T_n を定義している．

[定義 6.3] n 変数関数 $R_n = R_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$S_n = S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$T_n = T_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は次のように再帰的に定義される．

$$\begin{aligned} R_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= \bar{x}_i \cdot R_{i-1} \oplus x_i \cdot S_{i-1} \\ S_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= \bar{x}_i \cdot T_{i-1} \oplus x_i \cdot R_{i-1} \\ T_i(x_1, x_2, \cdots, x_i) &= \bar{x}_i \cdot S_{i-1} \oplus x_i \cdot T_{i-1} \end{aligned} \tag{6.6}$$

ここで，$i = 1, 2, \cdots, n$，$R_0 = 0$，$S_0 = T_0 = 1$ である．

[補題 6.10] $R_n \sim S_n \sim T_n$.

(証明) 補題6.7 と同様にして証明できる. (証明終)

従って, $\tau(R_n) = \tau(S_n) = \tau(T_n)$ が成立する. $n \leq 7$ について, 関数 u_n, v_n, w_n, R_n, S_n, T_n を生成して調べた結果, これらの関数はLP同値であることが判明した. これより, 次の定理を得る.

[定理 6.3] $u_n \sim v_n \sim w_n \sim R_n \sim S_n \sim T_n \quad (n \leq 7)$.

定理6.3は, 任意の n について成立すると推測される. また, 次の推測を得る.

[推論 6.1] u_n, v_n, w_n は, 最も複雑なESOPによって表現される対称関数である.

[定理 6.4] [8, 40] 任意の $n = 2r$ 変数対称関数は, 積項数が高々 $2 \cdot 3^{r-1}$ 個のESOPで実現できる. また, 任意の $n = 2r + 1$ 変数対称関数は, 積項数が高々 3^r 個のESOPで実現できる.

$\Psi(n)$ の上界について, Cohn, Even は次の推論を与えている[4].

[推論 6.2]

$$\Psi(n) \leq \binom{n}{[\frac{n}{2}]}.$$

定理6.1より, この推論は, $n \leq 10$ の場合は正しいことが判明した.

$\Psi(n)$ の下界に関して, Even-Kohabi-Paz は次の推論を得ている [8].

[定理 6.5] n が十分大きいとき,

$$\Psi(n) \geq \frac{2^n}{(n \log_2 3)}$$

が成立する.

定理6.4, 6.5より, Even-Kohavi-Paz は次の推論を得ている[8].

[定理 6.6] n が十分大きいとき, 最も複雑な関数は対称関数ではない.

12 変数以下の関数 u_n, v_n, w_n を生成し, これらの関数の ESOP の簡単化を行った. MESOP の積項数の種々の下界および上界を比較したものを表6.4に示す. 表6.4中の $\tau(u_n)$ の欄の不等号で示した値は, 簡単化したESOP の最小性が保証できなかったことを示す.

表 6.4 MESOP の積項数の下界および上界の比較

n	$\frac{2^n}{(n\log_2 3)}$	$\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$	$3^r{}_{(n=2r+1)}$, $2\cdot 3^{r-1}{}_{(n=2r)}$	$\Psi(n)$	$\tau(u_n)$
3	2	3	3	3	3
4	3	6	6	6	6
5	5	10	9	9	9
6	7	20	18	15	15
7	12	35	27	≤ 30	≤ 24
8	21	70	54	≤ 60	≤ 45
9	36	126	81	≤ 120	≤ 78
10	65	252	162	≤ 240	≤ 137
11	118	462	243	≤ 480	≤ 241
12	216	924	486	≤ 960	≤ 415

6.4 むすび

本章では，$\Psi(n)$ の値を効率よく評価するアルゴリズムについて検討し，これを用いて，任意の6変数関数は，積項数が高々15のMESOPで実現できることを示した．この結果を用いて，$n \geq 6$ のとき，$\Psi(n) \leq 15\cdot 2^{n-6}$ であることを示した．また，$n \leq 6$ のとき，最も複雑なESOPで表現できる関数に対称関数が含まれることを示した．これらの結果は，7変数以上のESOPの複雑度を評価する際に有用である．

第 7 章

結論

7.1 研究成果のまとめ

本論文では，EXOR ゲートを用いた論理回路設計の基本となる AND-EXOR 論理式 (ESOP) の性質とその最小化法に関する研究成果をまとめた．まず，4 変数関数の最小 ESOP(MESOP) を網羅的方法によって求め，これから得られる MESOP の一般的な性質を明らかにした．つぎに，ESOP の分類に有用な LP 同値関係を導入し，これによって関数群を少数の LP 同値類に分類して検討する方法を提案した．また，LP 特徴ベクトルの概念を導入し，これによって与えられた関数の属する LP 同値類を決定する方法を提案した．つぎに，与えられた関数の ESOP の積項数の下界を評価する方法を提案し，これを用いた ESOP の最小化法を与えた．最後に，任意の関数を ESOP によって表現するために必要な積項数を効率良く評価する方法を提案し，これによって，必要な積項数の上界を与えた．

本研究によって得られたおもな成果を以下にまとめる．

1) 4変数関数をNP同値類に分類し，その代表関数の MESOP の表を与え，任意の4変数関数は積項数が高々 6 の ESOP で実現できることを示した．4変数 MESOP から得られる MESOP の一般的な性質について述べ，これらがESOP に簡単化に有用であることを示した．

2) MESOP の積項数が不変であるような LP 同値関係を提案し，これを用いて，5変数関数を6936個の LP 同値類に分類した．次に，5変数関数の LP 同値類代表関数の MESOP を求め，任意の5変数関数は，高々 9 積項の ESOP で実現できることを示した．次に，論理関数の LP 特徴ベクトルを定義し，それが n 変数関数 $(n \leq 5)$ の LP 同値類を一意的に分類できることを示した．また，この性質を用いて，任意の

関数のMESOPを高速に得る方法を提案し，この方法を5変数関数に適用し，その有用性を示した．

3) 与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界を評価する方法を示し，これを用いたESOPの簡単化アルゴリズムを与えた．本アルゴリズムを5変数関数に適用した結果，全5変数関数の約98%に対して，簡単化結果の最小性を保証できることを示した．1出力関数の場合，10変数で積項数が15程度のESOPならば，ほとんどの場合，最小性の保証が可能である．また，多出力関数の場合，算術演算回路の一部については，簡単化結果の最小性が保証できることを示した．

4) 任意の n 関数をESOPによって実現するために必要な積項数 $\Psi(n)$ を効率良く評価するアルゴリズムを与えた．本アルゴリズムにより，$\Psi(6)=15$ であることを証明した．また，この結果を用いて，$n\geq 6$ のとき，$\Psi(n)\leq 15\cdot 2^{n-6}$ であることを示した．また，$n\leq 6$ のとき，最も複雑なESOPで表現できる関数に対称関数が含まれることを示した．

7.2 今後の課題

本論文では，変数の置換とリテラルの変換に基づくLP同値関係および論理関数のLP特徴ベクトルを導入して，5変数以下の関数のMESOPを高速に得る方法を確立した．しかし，この方法を6変数関数に適用した場合，6変数関数のLP同著類の個数は，少なくとも 5.5×10^{11} となり，非常に多い．従って，本方法を6変数以上の関数に適用することは困難である．新しい概念に基づいたESOPの分類法を検討する必要がある．なお，論理関数のLP特徴ベクトルは，$n\leq 14$ の場合，容易に求められるので，他の応用が考えられる．

また，与えられた関数を表現するESOPの積項数の下界とヒューリスティックな簡単化アルゴリズムを組み合わせたESOPの最小化法を提案したが，ESOPの積項数が大きくなると，最小性の保証の割合が小さくなる．この原因は，与えられた関数のESOPの下界の評価が不十分なためであり，下界の評価法の改善をする必要がある．

また，ESOPの複雑度の解析において，$n\leq 6$ の場合，最も複雑なESOPの表現する関数の対称関数が含まれることを示した．しかし，Even-Kohavi-Pazらは，n が十分大きい場合，最も複雑なESOPの表現する関数は対称関数ではないとの結論を得ている．

彼らの結論の成立する n の値を検証することは興味ある問題である．また，ESOP の複雑度に対する関数の対称性の検討や，最も複雑な ESOP をもつ関数の一般形を検討することも，残された問題である．

付録 A

4変数MESOPの表

表 A.1 4変数MESOPの表

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
weight=0					
1	0000	0	0	1	0
weight=1					
2	0001	1	4	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
weight=2					
3	0003	1	3	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
4	0006	2	6	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
5	0018	2	8	1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
6	0180	2	8	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
weight=3					
7	0007	2	6	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
8	0016	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
9	0019	2	7	1	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus barx_1\bar{x}_2x_3x_4$
10	0118	3	10	1	$x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
11	0181	2	7	1	$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
12	0182	3	10	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
weight=4					
13	000f	1	2	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2$
14	0017	3	9	1	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
15	001b	2	6	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$
16	001e	2	5	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$
17	003c	2	4	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3$
18	0069	3	6	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4$
19	0116	4	12	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3\bar{x}_4x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
20	0119	3	10	1	$\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
21	011a	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
22	012c	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus barx_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
23	0168	4	9	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
24	0183	3	9	1	$\bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
25	0186	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_3x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
26	0189	2	6	1	$\bar{x}_1x_3x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
27	0198	3	7	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
28	01a8	3	8	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
29	03c0	2	6	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
30	0660	4	8	3	$x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4$
−30	f99f	4	8		$x_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3$
31	0690	4	10	1	$x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4$
32	001f	2	6	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
33	003d	3	8	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
34	006b	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
35	0117	4	12	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}$
36	011b	3	9	1	$\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

表 A.1　（つづき）

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
weight=5					
37	011e	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
38	012d	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
39	013c	3	8	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
40	0169	4	10	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
41	016a	3	9	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
42	0187	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
43	018b	3	9	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
44	0196	4	10	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
45	0199	3	8	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
46	019a	3	9	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
47	01a9	3	8	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
48	01aa	2	6	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
49	01ac	3	10	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
50	01e8	4	12	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x$
51	0358	3	10	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
52	0368	4	11	1	$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
53	03c1	3	9	1	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
54	0661	4	12	1	$\bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3$
55	0662	4	11	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
56	0691	4	12	1	$\bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}$
57	06b0	4	11	1	$x_1\bar{x}_3 \oplus x_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
58	1681	5	13	1	$x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
weight=6					
59	003f	2	4	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
60	006f	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4$
61	007e	3	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
62	011f	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
63	012f	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
64	013d	3	7	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
65	013e	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
66	016b	3	8	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
67	016e	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
68	018f	3	10	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
69	0197	4	9	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
70	019b	3	8	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
71	019e	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
72	01ab	2	5	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
73	01ad	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
74	01ae	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
75	01bc	4	11	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
76	01e9	4	12	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
77	01ea	3	10	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$

表 A.1 (つづき)

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
78	033c	3	6	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
79	0356	2	4	1	$\bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3$
80	0359	3	6	3	$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3$
−80	fca6	3	6		$\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus x_1x_2$
81	035a	3	6	2	$\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3$
82	0369	3	7	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
83	036a	3	8	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
84	036c	3	8	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4$
85	03c3	2	5	1	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
86	03c5	3	7	3	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
−86	fca3	3	7		$x_1x_3 \oplus x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
87	03c6	3	8	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
88	03d4	4	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
89	03d8	3	9	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
90	0663	4	8	2	$\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3$
91	0666	4	8	2	$x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4$
92	0669	4	10	1	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4$
93	0672	4	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
94	0678	4	11	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
95	0693	4	8	2	$x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus x_1x_2x_3$
96	0696	4	9	2	$x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4$
97	06b1	4	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
98	06b2	4	9	3	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
−98	f94d	4	9		$x_1x_2 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
99	06b4	4	11	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
100	06f0	3	8	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4$
101	07b0	4	10	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
102	07e0	4	10	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
103	1668	5	14	3	$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4$
−103	e997	6	12		$x_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
104	1683	4	10	1	$x_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4$
105	1686	4	11	1	$x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
106	1689	5	12	2	$x_1 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
107	1698	4	12	1	$x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
108	1781	5	12	3	$x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
−108	e87e	5	12		$x_1x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
weight=7					
109	007f	2	5	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
110	013f	3	8	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
111	016f	4	11	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
112	017e	3	8	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
113	019f	4	11	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
114	01af	3	8	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

表 A.1　（つづき）

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
115	01bd	4	11	2	$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
116	01be	3	8	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
117	01eb	3	9	1	$\bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
118	01ee	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
119	033d	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}$
120	0357	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
121	035b	3	9	1	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
122	035e	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
123	036b	4	11	2	$\bar{x}_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
124	036d	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
125	036e	4	10	2	$\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
126	037c	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
127	03c7	3	8	3	$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
−127	fc38	3	8		$x_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
128	03d5	3	9	1	$\bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
129	03d6	3	8	1	$\bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
130	03d9	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x$
131	03dc	3	7	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
132	0667	4	12	1	$\bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
133	066b	5	12	2	$\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
134	0673	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
135	0676	4	10	2	$\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
136	0679	4	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
137	067a	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
138	0697	4	11	1	$\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
139	06b3	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
140	06b5	4	10	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
141	06b6	4	10	2	$\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
142	06b9	4	9	2	$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
143	06f1	4	9	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4$
144	06f2	3	9	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
145	0778	4	8	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$
146	07b1	4	11	3	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
−146	f84e	4	11		$\bar{x}_2x_4 \oplus x_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$
147	07b4	4	9	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4$
148	07e1	4	9	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4$
149	07e2	4	11	3	$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
−149	f81d	4	11		$\bar{x}_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$
150	07f0	3	6	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4$
151	1669	5	8	2	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$
152	166a	5	11	2	$x_1 \oplus x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$
153	1687	4	10	2	$\bar{x}_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$
154	168b	4	11	1	$x_1\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4$

表 A.1 （つづき）

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
155	168e	4	11	1	$\bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
156	1696	4	7	2	$x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$
157	1699	4	8	2	$x_3 \oplus \bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_1x_2x_3x_4$
158	169a	4	9	2	$x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4$
159	16a9	4	8	2	$x_1 \oplus x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4$
160	16ac	4	10	3	$x_1x_4 \oplus x_2x_4 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
−160	e953	4	10		$x_1x_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
161	1783	4	12	1	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_4 \oplus x_1x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
162	1789	5	13	2	$x_1 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
163	1798	4	11	1	$x_1\bar{x}_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$
164	19e1	3	8	1	$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2x_3x_4$
weight=8					
165	00ff	1	1		$\bar{x}_1$
166	017f	3	9		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
167	01bf	3	9		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$
168	01ef	3	7		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
169	01fe	2	4		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
170	033f	3	6		$x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2x_3$
171	035f	3	7		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4$
172	036f	3	7		$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4$
173	037d	4	10		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
174	037e	4	9		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
175	03cf	2	4		$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3$
176	03d7	4	10		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
177	03db	3	8		$\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
178	03dd	3	7		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
179	03de	3	6		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
180	03fc	2	3		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3$
181	066f	4	10		$\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_4$
182	0677	4	10		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
183	067b	4	9		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
184	067e	4	9		$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3x_4$
185	069f	4	8		$x_1x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_4 \oplus x_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4$
186	06b7	4	9		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
187	06bb	4	10		$\bar{x}_1 \oplus x_1\bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
188	06bd	4	8		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$
189	06f3	3	6		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus x_1\bar{x}_2x_4$
190	06f6	3	6		$\bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4$
191	06f9	3	5		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2x_3 \oplus \bar{x}_2x_4$
192	0776	4	12		$\bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$
193	0779	5	12		$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
194	077a	4	11		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus \bar{x}_1x_2x_3x_4$
195	07b3	4	8		$1 \oplus x_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2x_3x_4$

表 A.1　（つづき）

クラス	代表関数	積項数	リテラル数	否定形	MESOP
196	07b5	4	11		$\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
197	07b6	4	10		$\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
198	07bc	4	8		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
199	07e3	4	10		$\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_4 \oplus \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
200	07e6	4	8		$1 \oplus x_1 x_2 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
201	07e9	4	8		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
202	07f1	4	10		$x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
203	07f2	3	8		$\bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
204	07f8	3	5		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
205	0ff0	2	2		$x_1 \oplus x_2$
206	166b	5	12		$\bar{x}_1 \oplus x_2 \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_4 \oplus x_1 \bar{x}_3 x_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
207	166e	5	10		$1 \oplus x_1 x_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4$
208	168f	4	8		$\bar{x}_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_4 \oplus x_2 x_3 x_4$
209	1697	5	11		$x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
210	169b	4	10		$\bar{x}_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1 x_3 x_4 \oplus x_2 \bar{x}_3 x_4$
211	169e	4	9		$\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4$
212	16ab	5	12		$x_1 \oplus x_4 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
213	16ad	4	9		$\bar{x}_1 \oplus x_2 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
214	16ae	4	10		$x_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
215	16bc	4	7		$1 \oplus x_1 x_4 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_2 x_3 \bar{x}_4$
216	16e9	4	7		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
217	16ea	4	8		$x_1 \oplus x_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_2 x_3 \bar{x}_4$
218	1787	4	9		$\bar{x}_2 \oplus x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_4$
219	178b	4	9		$x_1 x_3 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_3 x_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_4$
220	178e	4	10		$x_1 \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_4 \oplus x_2 \bar{x}_3 x_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
221	1796	5	11		$x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
222	1799	4	11		$\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_4 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$
223	179a	4	9		$x_4 \oplus x_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_3 x_4$
224	17a9	4	10		$\bar{x}_1 x_4 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_4 \oplus x_1 x_3 \bar{x}_4$
225	17ac	4	8		$x_1 \oplus x_2 x_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \bar{x}_4$
226	17e8	4	7		$x_1 \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 x_4 \oplus x_3 x_4$
227	18e7	3	7		$\bar{x}_1 \oplus x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
228	19e3	4	9		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \oplus x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
229	19e6	3	6		$\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
230	19e9	3	7		$\bar{x}_1 x_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
231	19ea	4	8		$x_1 \oplus x_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \bar{x}_4$
232	19f1	4	12		$\bar{x}_1 x_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \oplus \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}$
233	19f8	3	8		$\bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2 x_3 x_4$
234	1bd8	4	8		$x_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_4 \oplus x_3 x_4$
235	1be4	3	5		$x_1 \oplus x_2 x_4 \oplus x_3 \bar{x}_4$
236	1ee1	3	4		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3 \bar{x}_4$
237	3cc3	3	3		$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3$
238	6996	4	4		$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

付録 B

補題5.11の証明

関数 f を表現するMESOPを

$$
\begin{aligned}
&F_{000}x_1^0x_2^0x_3^0 \oplus F_{001}x_1^0x_2^0x_3^1 \oplus F_{002}x_1^0x_2^0x_3^2\\
&F_{010}x_1^0x_2^1x_3^0 \oplus F_{011}x_1^0x_2^1x_3^1 \oplus F_{012}x_1^0x_2^1x_3^2\\
&F_{020}x_1^0x_2^2x_3^0 \oplus F_{021}x_1^0x_2^2x_3^1 \oplus F_{022}x_1^0x_2^2x_3^2\\
&F_{100}x_1^1x_2^0x_3^0 \oplus F_{101}x_1^1x_2^0x_3^1 \oplus F_{102}x_1^1x_2^0x_3^2\\
&F_{110}x_1^1x_2^1x_3^0 \oplus F_{111}x_1^1x_2^1x_3^1 \oplus F_{112}x_1^1x_2^1x_3^2\\
&F_{120}x_1^1x_2^2x_3^0 \oplus F_{121}x_1^1x_2^2x_3^1 \oplus F_{122}x_1^1x_2^2x_3^2\\
&F_{200}x_1^2x_2^0x_3^0 \oplus F_{201}x_1^2x_2^0x_3^1 \oplus F_{202}x_1^2x_2^0x_3^2\\
&F_{210}x_1^2x_2^1x_3^0 \oplus F_{211}x_1^2x_2^1x_3^1 \oplus F_{212}x_1^2x_2^1x_3^2\\
&F_{220}x_1^2x_2^2x_3^0 \oplus F_{221}x_1^2x_2^2x_3^1 \oplus F_{222}x_1^2x_2^2x_3^2 \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

とする．ここで，$F_{abc}(a,b,c \in \{0,1,2\})$ は，変数 x_1，x_2，x_3 を含まないESOPである．式(B.1)において，$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)$ とおくと，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
F_{000} \oplus F_{002} \oplus F_{020} \oplus F_{022} \oplus F_{200} \oplus F_{202} \oplus F_{220} \oplus F_{222} &= f(0,0,0) & \text{(B.2)}\\
F_{011} \oplus F_{012} \oplus F_{021} \oplus F_{022} \oplus F_{211} \oplus F_{212} \oplus F_{221} \oplus F_{222} &= f(0,1,1) & \text{(B.3)}\\
F_{101} \oplus F_{102} \oplus F_{121} \oplus F_{122} \oplus F_{201} \oplus F_{202} \oplus F_{221} \oplus F_{222} &= f(1,0,1) & \text{(B.4)}\\
F_{110} \oplus F_{112} \oplus F_{120} \oplus F_{122} \oplus F_{210} \oplus F_{212} \oplus F_{220} \oplus F_{222} &= f(1,1,0) & \text{(B.5)}\\
F_{001} \oplus F_{002} \oplus F_{021} \oplus F_{022} \oplus F_{201} \oplus F_{202} \oplus F_{221} \oplus F_{222} &= f(0,0,1) & \text{(B.6)}\\
F_{010} \oplus F_{012} \oplus F_{020} \oplus F_{022} \oplus F_{210} \oplus F_{212} \oplus F_{220} \oplus F_{222} &= f(0,1,0) & \text{(B.7)}\\
F_{100} \oplus F_{102} \oplus F_{120} \oplus F_{122} \oplus F_{200} \oplus F_{202} \oplus F_{220} \oplus F_{222} &= f(1,0,0) & \text{(B.8)}\\
F_{111} \oplus F_{112} \oplus F_{121} \oplus F_{122} \oplus F_{211} \oplus F_{212} \oplus F_{221} \oplus F_{222} &= f(1,1,1) & \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

を得る．(B.2)⊕(B.6)，(B.2)⊕(B.7)，(B.2)⊕(B.8)，(B.3)⊕(B.6)，(B.3)⊕(B.7)，(B.3)⊕(B.9)，(B.4)⊕(B.6)，(B.4)⊕(B.8)，(B.4)⊕(B.9)，(B.5)⊕(B.7)，(B.5)⊕(B.8)，(B.5)⊕(B.9) より，

それぞれ，

$$F_{000} \oplus F_{001} \oplus F_{020} \oplus F_{021} \oplus F_{200} \oplus F_{201} \oplus F_{220} \oplus F_{221} = f(0,0,2) \tag{B.10}$$
$$F_{000} \oplus F_{002} \oplus F_{010} \oplus F_{012} \oplus F_{200} \oplus F_{202} \oplus F_{210} \oplus F_{212} = f(0,2,0) \tag{B.11}$$
$$F_{000} \oplus F_{002} \oplus F_{020} \oplus F_{022} \oplus F_{100} \oplus F_{102} \oplus F_{120} \oplus F_{122} = f(2,0,0) \tag{B.12}$$
$$F_{001} \oplus F_{002} \oplus F_{011} \oplus F_{012} \oplus F_{201} \oplus F_{202} \oplus F_{211} \oplus F_{212} = f(0,2,1) \tag{B.13}$$
$$F_{010} \oplus F_{011} \oplus F_{020} \oplus F_{021} \oplus F_{210} \oplus F_{211} \oplus F_{220} \oplus F_{221} = f(0,1,2) \tag{B.14}$$
$$F_{011} \oplus F_{012} \oplus F_{021} \oplus F_{022} \oplus F_{111} \oplus F_{112} \oplus F_{121} \oplus F_{122} = f(2,1,1) \tag{B.15}$$
$$F_{001} \oplus F_{002} \oplus F_{021} \oplus F_{022} \oplus F_{101} \oplus F_{102} \oplus F_{121} \oplus F_{122} = f(2,0,1) \tag{B.16}$$
$$F_{100} \oplus F_{101} \oplus F_{120} \oplus F_{121} \oplus F_{200} \oplus F_{201} \oplus F_{220} \oplus F_{221} = f(1,0,2) \tag{B.17}$$
$$F_{101} \oplus F_{102} \oplus F_{111} \oplus F_{112} \oplus F_{201} \oplus F_{202} \oplus F_{211} \oplus F_{212} = f(1,2,1) \tag{B.18}$$
$$F_{010} \oplus F_{012} \oplus F_{020} \oplus F_{022} \oplus F_{110} \oplus F_{112} \oplus F_{120} \oplus F_{122} = f(2,1,0) \tag{B.19}$$
$$F_{100} \oplus F_{102} \oplus F_{110} \oplus F_{112} \oplus F_{200} \oplus F_{202} \oplus F_{210} \oplus F_{212} = f(1,2,0) \tag{B.20}$$
$$F_{110} \oplus F_{111} \oplus F_{120} \oplus F_{121} \oplus F_{210} \oplus F_{211} \oplus F_{220} \oplus F_{221} = f(1,1,2) \tag{B.21}$$

を得る．式(B.10)〜式(B.21)より，

$$\tau(F_{000}) + \tau(F_{001}) + \tau(F_{020}) + \tau(F_{021}) + \tau(F_{200}) + \tau(F_{201}) + \tau(F_{220}) + \tau(F_{221}) \geq \tau(0,0,2)$$
$$\tau(F_{000}) + \tau(F_{002}) + \tau(F_{010}) + \tau(F_{012}) + \tau(F_{200}) + \tau(F_{202}) + \tau(F_{210}) + \tau(F_{212}) \geq \tau(0,2,0)$$
$$\tau(F_{000}) + \tau(F_{002}) + \tau(F_{020}) + \tau(F_{022}) + \tau(F_{100}) + \tau(F_{102}) + \tau(F_{120}) + \tau(F_{122}) \geq \tau(2,0,0)$$
$$\tau(F_{001}) + \tau(F_{002}) + \tau(F_{011}) + \tau(F_{012}) + \tau(F_{201}) + \tau(F_{202}) + \tau(F_{211}) + \tau(F_{212}) \geq \tau(0,2,1)$$
$$\tau(F_{010}) + \tau(F_{011}) + \tau(F_{020}) + \tau(F_{021}) + \tau(F_{210}) + \tau(F_{211}) + \tau(F_{220}) + \tau(F_{221}) \geq \tau(0,1,2)$$
$$\tau(F_{011}) + \tau(F_{012}) + \tau(F_{021}) + \tau(F_{022}) + \tau(F_{111}) + \tau(F_{112}) + \tau(F_{121}) + \tau(F_{122}) \geq \tau(2,1,1)$$
$$\tau(F_{001}) + \tau(F_{002}) + \tau(F_{021}) + \tau(F_{022}) + \tau(F_{101}) + \tau(F_{102}) + \tau(F_{121}) + \tau(F_{122}) \geq \tau(2,0,1)$$
$$\tau(F_{100}) + \tau(F_{101}) + \tau(F_{120}) + \tau(F_{121}) + \tau(F_{200}) + \tau(F_{201}) + \tau(F_{220}) + \tau(F_{221}) \geq \tau(1,0,2)$$
$$\tau(F_{101}) + \tau(F_{102}) + \tau(F_{111}) + \tau(F_{112}) + \tau(F_{201}) + \tau(F_{202}) + \tau(F_{211}) + \tau(F_{212}) \geq \tau(1,2,1)$$
$$\tau(F_{010}) + \tau(F_{012}) + \tau(F_{020}) + \tau(F_{022}) + \tau(F_{110}) + \tau(F_{112}) + \tau(F_{120}) + \tau(F_{122}) \geq \tau(2,1,0)$$
$$\tau(F_{100}) + \tau(F_{102}) + \tau(F_{110}) + \tau(F_{112}) + \tau(F_{200}) + \tau(F_{202}) + \tau(F_{210}) + \tau(F_{212}) \geq \tau(1,2,0)$$
$$\tau(F_{110}) + \tau(F_{111}) + \tau(F_{120}) + \tau(F_{121}) + \tau(F_{210}) + \tau(F_{211}) + \tau(F_{220}) + \tau(F_{221}) \geq \tau(1,1,2)$$

を得る．上の12個の不等式を加えると，

$3\tau(F_{000}) + 3\tau(F_{001}) + 4\tau(F_{002}) + 3\tau(F_{010}) + 3\tau(F_{011}) + 4\tau(F_{012}) + 4\tau(F_{020}) + 4\tau(F_{021})$
$+4\tau(F_{022}) + 3\tau(F_{100}) + 3\tau(F_{101}) + 4\tau(F_{102}) + 3\tau(F_{110}) + 3\tau(F_{111}) + 4\tau(F_{112}) + 4\tau(F_{120})$

$+4\tau(F_{121}) + 4\tau(F_{122}) + 4\tau(F_{200}) + 4\tau(F_{201}) + 4\tau(F_{202}) + 4\tau(F_{210}) + 4\tau(F_{211}) + 4\tau(F_{212})$

$+4\tau(F_{220}) + 4\tau(F_{221})$

$\geq \tau(0,0,2) + \tau(0,2,0) + \tau(2,0,0) + \tau(0,2,1) + \tau(0,1,2) + \tau(2,1,1) + \tau(2,0,1) + \tau(1,0,2)$

$+\tau(1,2,1) + \tau(2,1,0) + \tau(1,2,0) + \tau(1,1,2)$

を得る．

$\tau(f) =$

$\tau(F_{000}) + \tau(F_{001}) + \tau(F_{002}) + \tau(F_{010}) + \tau(F_{011}) + \tau(F_{012}) + \tau(F_{020}) + \tau(F_{021}) + \tau(F_{022})$

$\tau(F_{100}) + \tau(F_{101}) + \tau(F_{102}) + \tau(F_{110}) + \tau(F_{111}) + \tau(F_{112}) + \tau(F_{120}) + \tau(F_{121}) + \tau(F_{122})$

$\tau(F_{200}) + \tau(F_{201}) + \tau(F_{202}) + \tau(F_{210}) + \tau(F_{211}) + \tau(F_{212}) + \tau(F_{220}) + \tau(F_{221}) + \tau(F_{222})$,

$\tau(F_{abc}) \geq 0$

であるから，

$4 \cdot \tau(f) \geq$

$\tau(0,0,2) + \tau(0,2,0) + \tau(2,0,0) + \tau(0,2,1) + \tau(0,1,2) + \tau(2,1,1) + \tau(2,0,1) + \tau(1,0,2)$

$+\tau(1,2,1) + \tau(2,1,0) + \tau(1,2,0) + \tau(1,1,2)$

を得る．これより，補題を得る． (証明終)

謝辞

本研究は，1988年8月より，九州工業大学教授笹尾勤教授の御指導のもとに開始され，今日に到っています．この間，笹尾勤教授には，論理設計に関する問題の設定法からその解決法に到るまで，懇切丁寧な御指導を賜わりました．本研究をこのような論文としてまとめることができましたのも，ひとえに笹尾勤教授の御指導の賜物であります．ここに，衷心より，感謝の意を表します．

九州工業大学原尾政輝教授，今村恭己教授，藤居仁教授には，本論文をまとめるに当たり，有益な御助言と御指導を賜りました．ここに，深く感謝の意を表します．

九州工業大学情報工学部長（現 九州芸術工科大学長）吉田 将教授には，笹尾勤教授の御紹介の労を取って頂き，また，研究状況を温かく見守って下さいました．ここに深く感謝致します．

東北大学総長西澤潤一教授には，博士後期課程の入学に際しまして，多大なる御支援を賜りました．また，西澤潤一教授には，東北大学修士課程において，研究に対する基本的姿勢などについて御指導を賜りました．ここに深く感謝の意を表します．

電気通信大学岩田茂樹教授には，定理5.4に関して御教授頂きました．

徳山工業高等専門学校市山寿男教授には，本研究開始の切っ掛けを作って頂きました．ここに深く感謝致します．

徳山工業高等専門学校情報電子工学科の教職員を始め，本校の教職員には，内地研究や博士後期課程の入学に際しまして，多大なる御支援と御配慮を賜りました．ここに，深く感謝の意を表する次第です．

参考文献

[1] C. R. Baugh, C. S. Chandersekapan, R. S. Swee and S. Muroga: "Optimal networks of NOR-OR gates for functions of three variables", *IEEE Trans. Comput.*, Vol.C-21, pp.153-160 (1972).

[2] G. Bioul, M. Davio and J. P. Deschamps: "Minimization of ring-sum expansion of Boolean functions", Philips Res. Rep., Vol.29, pp.17-36 (1973).

[3] D. Brand and T. Sasao: "Minimization of AND-EXOR expressions using rewite rules", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.42, No.5, pp.568-576 (May 1993).

[4] M. Cohn: "Inconsistent canonical forms of switching functions", *IRE Trans. Elect. Comput.*, Vol.EC-11, pp.284 (Apr. 1962).

[5] J. N. Culliney, M. H. Young, T. Nakagawa and S. Muroga: "Results of the synthesis of optimal networks of AND and OR getes for four-variable switching functions", *IEEE Trans. Comput.*, Vol.C-27, pp.76-85 (1979).

[6] C. Damm: "How much EXOR improves on OR ?", *Proc. of IFIP WG.10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, pp.13-19 (Sept. 1993).

[7] M. Davio, J. P. Deschamps and A. Thayse: *Discrete and Switching Functions*, McGraw-Hill International (1978).

[8] S. Even, I. Kohavi and A. Paz: "On minimal modulo 2 sums of products for switching functions", *IEEE Trans. Elect. Comput.*, pp.671-674 (Oct. 1967).

[9] H. Fleisher, M. Tavel and J. Yeager: "A computer algorithm for minimizing Reed-Muller canonical forms", *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.C-36, No.2, pp.247-250 (Feb. 1987).

[10] M. A. Harrison: *Introduction to Switching and Automata Theory*, McGraw Hill (1965).

[11] L. Hellerman: "A catalog of three-variable Or-Inverted and AND-Inverted logical circuits", *IEEE Trans. Comput.*, Vol.EC-12, pp.198-223 (1963).

[12] M. Helliwell and M. Perkowski: "A fast algorithm to minimize multi-output mixed-polarity generalized Reed-Muller forms", *Proc. of the 25th Design Automation Conference*, pp.427-432 (June 1988).

[13] 池野信一, 橋本昭洋, 内藤清子: "4変数素子数最小NAND回路", 日本電信電話公社研究実用化報告第26号, pp.1-88 (1968).

[14] 神田徳夫, 笹尾勤: "AND-EXOR最小論理式の性質について", 第39回情報処理学会全国大会, Vol.7W-1, pp.1806-1807 (1989).

[15] 神田徳夫, 笹尾勤: "4変数AND-EXOR最小論理式とその性質" 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.FTS89-25 (1989).

[16] 神田徳夫, 笹尾勤: "5変数AND-EXOR論理式の簡単化について", 電子情報通信学会秋季全国大会, SA-3-3 (1990).

[17] 神田徳夫, 笹尾勤: "AND-EXOR論理式とその同値類について", 電子情報通信学会春季全国大会, A-119 (1991).

[18] 神田徳夫, 笹尾勤: "6変数AND-EXOR最小論理式の積項数について", 電子情報通信学会春季全国大会, A-120 (1991).

[19] 神田徳夫, 笹尾勤: "4変数AND-EXOR最小論理式とその性質", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J74-D-I, No.11, pp.765-773 (Nov. 1991).
(English translation: *Computers and Communications in Japan*, Vol.23, No.10, pp.27-41, May 1993)

[20] 神田徳夫, 笹尾勤："AND-EXOR最小論理式の積項数の上界について", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J75-D-I, No.3, pp.135-142 (Mar. 1992).

[21] 神田徳夫, 笹尾勤："下界定理を用いたAND-EXOR論理式の簡単化法" 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-D-I, No.1, pp.1-10 (Jan. 1993). (English translation: *Computers and Communications in Japan*, Vol.24, No.13, pp.16-27, Apr. 1994)

[22] 神田徳夫, 笹尾勤："論理関数のLP特徴ベクトルとその応用", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-D-I, No.6, pp.260-268 (June 1993).

[23] N. Koda and T. Sasao: "LP characteristic vector of logic functions", *Proc of IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, pp.99-106 (Sept. 1993).

[24] 神田徳夫, 笹尾勤："EXBOUND：多出力AND-EXOR論理式最小化プログラム" 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.FTS93-35 (1993).

[25] 神田徳夫, 笹尾勤："対称関数を表現するESOPの簡単化法について", 情報処理学会研究会, Vol.95-DA-74 (March, 1995).

[26] N. Koda and T. Sasao: "An upper bound on the number of products in minimum ESOPs', *Proc of IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, pp.94-101 (Aug. 1995).

[27] C. L. Liu: *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, pp.27 (1968).

[28] A. Mukhopadhyay and G. Schmitz : "Minimization of EXCLUSIVE OR and LOGICAL EQUIVALENCE switching circuits", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.C-19, No.2, pp.132-140 (1970).

[29] D. E. Muller: "Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection", *IRE Trans. Electron. Comput.*, Vol.EC-3, pp.6-12 (1954).

[30] S. Muroga: *Logic Design and Switching Theory*, Jhon Wiley & Sons (1979).

[31] G. Papakonstantinou: "Minimization of modulo-2 sum of products", *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.c-28, No.2, pp.163-167 (1979).

[32] M. Perkowski and M. Chrzanowska-Jeske: "An exact algorithm to minimize mixed-radix exclusive sums of products for incompletely specified Boolean functions", *Proc. International Sympo. on Circuits and Systems*, pp.1652-1655 (May 1990).

[33] S. M. Reddy: "Easily testable realization for logic functions", *IEEE Trans. Comput.*, Vol.C-21, No.11, pp.1183-1188 (1972).

[34] I. S. Reed: "A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme", *IRE Trans. Information Theory*, Vol.PGIT-4, pp.38-49 (1954).

[35] J. P. Robinson and Chia-Lung Yeh: "A method for modulo-2 minimization", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.C-31, pp.800-801 (1982).

[36] U. Rollwage: "The complexity of mod-2 sum PLA's for symmetric functions", *Proc of IFIP WG.10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, pp.6-12 (Sept. 1993).

[37] T. Sasao: "Input variable assignment and output phase optimization of PLA's", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.C-33, No.10, pp.879-894 (Oct. 1984).

[38] T. Sasao: "An algorithm to derive the complement of a binary function with multiple-valued inputs", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.C-34, No.2, pp.131-140 (Feb. 1985).

[39] 笹尾勤：ＰＬＡの作り方・使い方, 日刊工業新聞社 (1986).

[40] T. Sasao and P. W. Besslich: "On the complexity of MOD-2 SUM PLA's", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.39, No.2, pp.262-266 (Feb. 1990).

[41] T. Sasao: "Exclusive-or sum-of-products expressions: their properties and minimization algorithm", 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.VLD90-87 (1990).

[42] T. Sasao: "A transformation of multiple-valued input two-valued output functions and its application to simplification of exclusive-or sum-of-products expressions", *Proc. of the 19th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pp.270-279 (May 1991).

[43] T. Sasao: "Bounds on the average number of products in the minimum sum-of-products expressions for multiple-valued input two-valued output functions", *IEEE Trans. on Compt.*, Vol.42, No.5, pp.645-651 (1991).

[44] 笹尾勤："種々のAND-EXOR論理式の複雑度について", 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.FTS91-35 (1991).

[45] T. Sasao: "Optimization of multiple-valued AND-EXOR expressions using multiple-placed decision diagrams", *Proc. of the 21th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pp.451-458 (May 1992)

[46] T. Sasao: "AND-EXOR expressions and their optimization", in Sasao(ed.) *Logic Synthesis and Optimization*, Kluwer Academic Publishers (Jan. 1993).

[47] T. Sasao: "EXMIN2: A simplification algorithm for Exclusive-Or-Sum of products expressions for multiple-valued input two-valued output functions", *IEEE Trans. on CAD* Vol.12, No.5, pp621-632 (May 1993).

[48] T. Sasao: "An exact minimization of AND-EXOR expressions using BDDs", *Proc. of IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in circuit Design*, pp.91-98 (Sept. 1993).

[49] 笹尾勤, 松浦宗寛："ＢＤＤを用いたAND-EXOR論理式最小化の一手法", 電子情報通信学会議技術研究報告, Vol.FTS93-34, Vol.VLD93-58 (1993).

[50] 笹尾勤: "FPGAの論理設計法", 情報処理, Vol.35, No.6, pp.530-534 (1994).

[51] 笹尾勤: 論理設計：スイッチング回路理論, 近代科学社 (1995).

[52] T. Sasao and M. A. Perkowski: *EXOR Logic Synthesis*, Kluwer Academic Publishers, *unpublished.*

[53] J. E. Savage: *The Complexity of Computing*, John Wiley & Sons (1976).

[54] V. P. Suprun: "Estimation of Shennon's function for polarity Reed-Muller expressions", *Proc of IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, pp.107-114 (Sept. 1993).

[55] I. Wegener, *The Complexity of Boolean Functions*, John Wiley & Suns, New York (1987).