

377.5

K-11-2

1-24

# 電磁構造連成振動現象の 解析および評価方法に関する研究



二保 知也

# 要旨

将来のエネルギー源として研究開発が進められているトカマク型核融合炉や、超高速・大量輸送技術として期待されている磁気浮上列車などの強磁場中で使用される機器では、磁場の過渡的变化などによって導電性構造物に渦電流が生じる。この渦電流と磁場による電磁力が構造物に作用して変形するとともに、その変形速度と磁場により速度起電力が誘起され、この速度起電力によって生じる渦電流から、一般に、変形を抑える方向の電磁力が発生する。こうした電磁構造連成現象は磁気減衰現象とも呼ばれ、強磁場中に設置される機器の健全かつ合理的な設計には、この磁気減衰現象の解析方法の確立が必要とされている。さらに、核融合炉では、薄肉シェル構造物に強い電磁力が作用することによって、大変形を生じる可能性があるため、大変形による幾何学的非線形性を考慮した磁気減衰振動解析も必要となる。また、こうした強磁場中に設置される機器の健全性のため、磁気減衰現象の評価方法を確立することも重要な課題となっている。

本研究では、こうした磁気減衰振動現象に関する技術課題から、磁気減衰振動解析方法の確立および磁気減衰特性評価方法の確立を主な目的とした。

第2章では、磁気減衰振動問題の解析方法として、渦電流と構造物の完全同時解析方法を提案した。従来からの連成解析では、渦電流と構造物を交互に解析していたが、ここで提案した解析方法は、電磁力や速度起電力を連成サブマトリックスを用いてあらわすことにより、渦電流と構造物を完全かつ同時に解析する。本解析方法の妥当性を検証するため、電磁場解析の国際的なベンチマーク問題を解析し、実験結果と良好な一致が得られた。また、従来のモード合成に基づく解析方法と、ここで提案した連成モード合成法について、十分な精度の解を得るために必要となるモード数を比較した。その結果、従来のモード合成法では高次の固有モードベクトルまで必要となるのに対して、連成モード合成法では支配的な低次のモードベクトルを用いて、効率良く十分な精度の解が得られた。さらに、この理由を検討した結果、1つの連成モードベクトルの内部に、関連する全ての

連成効果が含まれていることを明らかにした。

第 3 章では、連成サブマトリックスを用いた、直接時間積分に基づく同時解析方法を、大変形による幾何学的非線形性を含む磁気減衰振動問題に拡張した。さらに、平板の大変形連成問題を解析し、大変形解析が必要となる問題の条件を検討した。その結果、磁気減衰効果が小さい場合、微小変形解析は安全側の評価となるが、磁気減衰効果が大きく、振動が過減衰状態になると、微小変形解析は必ずしも安全側の評価とならないため、設計の際に注意が必要であることを明らかにした。

第 4 章では、磁気減衰特性の評価パラメータとして、連成モード合成法で得られる連成固有値に基づいた連成強度パラメータを提案し、このパラメータの磁場や材料定数・板厚といった設計パラメータに対する依存性を、1 自由度連成モデルを用いて明らかにした。また、第 5 章では、磁気減衰振動実験によって連成強度パラメータを導出する手法を確立するとともに、実験結果に基づいて、連成強度パラメータの磁場や板厚に対する依存性を求めた。

さらに、第 6 章では、本研究で定義した連成強度パラメータが、磁気減衰特性の評価パラメータとして妥当であることを検証した。数値解析では連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を一定とした種々の問題を解析し、また、磁気減衰振動実験では連成強度パラメータを一定とした実験を行なった。その結果、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比の 2 つの値によって、磁気減衰特性が一意に決まることを明らかにした。

第 7 章では、連成強度パラメータで磁気減衰特性が一意に決まることを利用し、実機モデルと同一の磁気減衰特性となる縮小モデルの条件設定方法を提案し、その妥当性を数値解析と実験により検証した。また、縮小モデル実験を行なう場合、連成強度パラメータが実機モデルと同じ値になるように、実験の条件を設定する必要があることを明らかにした。さらに、連成強度パラメータ (および連成固有値) が磁気減衰特性を定量的にあらわすことを利用した簡易解析方法を提案するとともに、その実用性を検討した。その結果、本簡易解析方法によって十分な精度の磁気減衰振動応答が得られた。

このように、本研究では磁気減衰振動問題に対して、効率的な解析方法を提案し、また、この連成方法の理論的意味を明らかにした。さらに、磁気減衰特性の評価パラメータの提案、このパラメータの依存性の解明、および、設計への応用方法を提案した。これらの研究は、核融合炉や磁気浮上列車などの強磁場中に設置される機器の設計に、有効な情報を与えるのみならず、磁気減衰現象を積極的に取り入れた設計に、大きく貢献することが期待される。

# Abstract

Large Lorentz force which is produced by eddy current and magnetic field is applied to conductive thin shell structures in fusion reactor and magnetically levitated vehicle. When the structures deform, the electromotive force induced by deformation velocity and magnetic field reduces the eddy current. Therefore, analysis and evaluation of the electromagnetic and structural coupled problem or the magnetic damping problem are needed for the design of these components.

Chapter 2 describes new coupled finite element analysis methods for the magnetic damping problem. Both matrix equations for the eddy current and the structure are solved simultaneously by use of the coupling sub-matrices. The results by the coupled mode superposition method using a few coupled modes agree very well with experimental results. Consideration of the coupled mode vectors shows that the coupled effects are included completely in each coupled modes. Therefore, the coupled problems are solved efficiently by the coupled mode superposition method.

The analysis method by use of the coupling sub-matrices together with the direct time integration technique is extended to the problem with the effect of large deflection in chapter 3. Based on the analysis results, the conditions under which the large deflection analysis is needed are examined for the bending problem. Although the deflection obtained by the large deflection analysis is smaller than that by the infinitesimal analysis when the steady magnetic field is low, the large deflection effect does not always decrease the deflection in the case of high steady magnetic field or over damping.

In chapter 4, the coupling intensity parameter is defined based on the coupled eigenvalue, which is obtained from the coupled equation, for both a single-degree-of-freedom model and a finite element model. Based on the finite element analysis results and experimental results (in chapter 5), its dependence on the magnetic field, material properties and the thickness is discussed for the coupled problem of a cantilever plate.

Simple evaluation method by use of the single-degree-of-freedom model is also proposed for the dependence of the coupling intensity parameter.

The coupling intensity parameter is proposed as the evaluation parameter of the magnetic damping effect in chapter 6. In order to verify that the coupling intensity parameter can indicate the characteristics of the magnetic damping, numerical calculations are performed under various conditions to keep the coupling intensity parameter and the ratio of the time constants of the eddy current and structure constant. These conditions are obtained from the dependence of the coupling intensity parameter. Finite element analyses for these cases are performed under the conditions. The magnetic damping characteristics of these cases agree very well. Experiments are performed for the cantilever plate under the conditions where the coupling intensity parameter is constant. Good agreement of the damping characteristics is obtained for these cases. Therefore, the coupling intensity parameter indicates the characteristics of the magnetic damping effect.

Chapter 7 describes that the coupling intensity parameter can be used for design application. In the reduced scale experiment of the fusion reactor components, the experimental condition can be determined by use of the parameter to simulate the similar magnetic damping effect. According to the numerical analysis and the experimental result of the plates, the magnetic damping characteristics in the reduced models show good agreement with those in the original model. A simplified analysis method is needed to design a complex structure such as fusion reactor components. In this chapter, simplified analysis methods by use of the coupled eigenvalue or the coupling intensity parameter are also proposed. The comparison between the results of the simplified analysis and the finite element coupled analysis shows good agreement for practical use.

In conclusion, the finite element methods, which solve simultaneously the eddy current and the structural matrix equations, are proposed. The magnetic damping problems are solved efficiently by the coupled mode superposition method. The coupling intensity parameter is proposed as an evaluation parameter of the magnetic damping effect. It is verified that the parameter indicates the characteristics of the magnetic damping effect. The parameter can be applied to the reduced scale experiment and simplified analysis methods.

# 目次

<b>第1章 序論</b> .....	<b>1</b>
1.1 電磁構造連成現象の重要性 .....	1
1.2 電磁構造連成関連の研究開発 .....	2
1.3 磁気減衰振動現象の技術課題 .....	6
1.4 本研究の目的 .....	8
参考文献 .....	12
<b>第2章 磁気減衰振動現象の解析</b> .....	<b>17</b>
2.1 はじめに .....	17
2.2 解析方法 .....	18
2.2.1 渦電流解析 .....	18
2.2.2 構造解析 .....	22
2.2.3 直接時間積分法 .....	23
2.2.4 連成モード合成法 .....	24
2.2.5 連成サブマトリックスの対称性 .....	25
2.3 定式化の検証 .....	26
2.3.1 平板曲げ変形の連成問題 .....	26
2.3.2 平板ねじり変形の連成問題 .....	30
2.4 連成モード合成法に関する検討 .....	34
2.4.1 通常モード合成法との比較 .....	34
2.4.2 連成モードベクトルの変化 .....	35
2.4.3 連成モードベクトルについて .....	35
2.5 まとめ .....	40

参考文献 .....	42
<b>第 3 章 大変形を考慮した磁気減衰振動解析 .....</b>	<b>43</b>
3.1 はじめに .....	43
3.2 大変形を考慮した連成解析方法 .....	44
3.2.1 構造物の有限要素式 .....	44
3.2.2 渦電流の有限要素式 .....	49
3.2.3 連成解析方法 .....	49
3.3 定式化の検証 .....	50
3.4 大変形を生じる平板の連成解析 .....	51
3.4.1 解析問題 .....	51
3.4.2 解析結果 .....	52
3.5 大変形の連成効果への影響 .....	53
3.5.1 非定常磁場の影響 .....	53
3.5.2 定常磁場の影響 .....	53
3.6 まとめ .....	55
参考文献 .....	59
<b>第 4 章 連成固有値に基づく磁気減衰パラメータ .....</b>	<b>60</b>
4.1 はじめに .....	60
4.2 連成強度パラメータの定義 .....	61
4.2.1 一般の減衰問題における減衰比 .....	61
4.2.2 磁気減衰振動問題における連成強度パラメータ .....	62
4.3 有限要素法による平板曲げ連成問題の解析 .....	63
4.3.1 解析問題 .....	63
4.3.2 解析結果 .....	64
4.4 連成強度パラメータの磁場・材料定数・板厚への依存性 .....	66
4.4.1 有限要素解析に基づく依存性 .....	66
4.4.2 1 自由度連成モデルによる依存性の検討 .....	68
4.5 平板ねじり問題の連成解析とパラメータの依存性 .....	73
4.5.1 解析問題 .....	73
4.5.2 解析結果 .....	73
4.5.3 有限要素解析に基づく依存性 .....	74

4.5.4	1 自由度連成モデルによる依存性の検討	78
4.6	まとめ	84
	参考文献	85
<b>第5章</b>	<b>磁気減衰パラメータの実験</b>	<b>86</b>
5.1	はじめに	86
5.2	磁気減衰挙動のパラメータ	87
5.3	磁気減衰振動の実験方法	87
5.3.1	実験の概要	87
5.3.2	実験装置	89
5.3.3	連成強度パラメータの導出方法	95
5.3.4	測定結果の妥当性の検証	100
5.4	連成強度パラメータの磁場・板厚への依存性	103
5.4.1	実験結果	104
5.4.2	磁場と板厚に対する依存性	105
5.5	依存性に関する検討	112
5.6	まとめ	114
	参考文献	115
<b>第6章</b>	<b>磁気減衰現象の評価パラメータ</b>	<b>116</b>
6.1	はじめに	116
6.2	磁気減衰の評価パラメータ	117
6.3	評価パラメータとしての妥当性の検証方法	118
6.3.1	検証手順	118
6.3.2	解析・実験条件の決定方法	118
6.4	数値解析による妥当性の検証	120
6.4.1	解析問題	120
6.4.2	解析結果	122
6.4.3	妥当性の検討	129
6.5	実験による妥当性の検証	133
6.5.1	実験の概要	133
6.5.2	実験結果	133
6.5.3	妥当性の検討	135



6.6	評価パラメータとしての妥当性の検討	136
6.7	まとめ	140
	参考文献	141
<b>第7章</b>	<b>連成強度パラメータの設計および研究開発への応用</b>	<b>142</b>
7.1	はじめに	142
7.2	連成強度パラメータの縮小モデル実験への応用	143
7.2.1	縮小モデル実験の条件決定方法	143
7.2.2	数値解析による検証	144
7.2.3	実験による検証	147
7.2.4	妥当性の検討	151
7.3	連成強度パラメータを用いた簡易解析	153
7.3.1	簡易解析方法の提案	153
7.3.2	解析結果	156
7.3.3	簡易解析法の妥当性の検討	157
7.4	まとめ	159
	参考文献	160
<b>第8章</b>	<b>結論</b>	<b>161</b>
	謝辞	164

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 電磁構造連成現象の重要性

自然界を構造物、電磁場、熱、流体などに関連する現象に分類した時、ある現象がそれ以外の現象に影響を与える場合が数多く存在する。たとえば、磁場中に置かれた導電性構造物が運動すると、その構造物にはファラデーの法則にしたがって電界が生じ、また、この電界によって電流が生じると、電気抵抗によるジュール熱で構造物の温度が上昇する。さらに、温度の変化は構造物の周りに気体の流れを生じさせる。これらの影響の大きさは、状況によって異なるが、それが設計上無視できなくなると連成現象と呼ばれるようになる。こうした連成現象の代表例が、構造物と熱の熱応力問題や熱と流体の伝熱流動問題、構造物と流体の流体構造連成問題で、こうした連成現象においては、個々の現象が容易に連成するため工学上問題となることが多く、早くから研究が行われてきた。しかし、その一方で、これまで設計上無視されてきた現象の間の相互作用が、近年の高度な技術進歩や厳密な設計の要求から無視できなくなり、その結果、連成現象として取り扱わなければいけない問題も生じてきている。その一例が超電導コイルによって発生する強磁場を利用したトカマク型核融合炉や磁気浮上列車に生じる電磁構造連成問題である。

核融合炉では、炉内で太陽と同じ核融合反応を起こしてエネルギーを取り出すが、この時、プラズマの温度が数億度にも達するため、これが構造物に触れないように、強磁場を利用して特定の領域に閉じ込める。また、磁気浮上列車は、現在の車輪 + レール方式での高速化の限界や騒音問題などに対して、強磁場を利用して車体を浮上・推進させる。このように、超電導技術の開発により、これらの機器はその実用化に一步近づいたが、その反面、強磁場中に設置された導電性構造物に生じる電磁構造連成現象もその健全性と合

理性のため重要な問題となってきた。

核融合炉は主な燃料として海水中にほぼ無限に含まれる重水素を使い、現在の原子力発電と比較して放射性物質もほとんど問題とならず、また、環境汚染で問題となる CO<sub>2</sub> も発生せず、さらに炉が暴走する恐れもない安全かつクリーンな人類の究極のエネルギー源であり、これまでの化石燃料や核分裂を利用した原子力発電に代わる次世代のエネルギー源として、その実現は必須課題である。しかし核融合炉構造物は、プラズマを閉じ込めるための強磁場や数億度にも達するプラズマからの熱負荷、超電導コイルのための極低温維持、核融合反応のための超高真空維持など、超強磁場・超高温・極低温・超高真空といった極限状態に置かれ、また、複雑かつ大規模な構造物であるため、その設計は困難を極めている。さらに、核融合反応から生じた中性子による構造物の放射化や機器の破損による放射性物質の放出を考えると、こうした核融合炉構造物は特に健全性・信頼性を要求されており、十分な健全性評価が核融合炉の安全性や経済性のために必要とされる。

このように核融合炉の実用化のためには、構造工学的な諸問題を解決していかなければならないが、そのひとつとして、電磁力による構造物の変形問題がある。導電性の構造物に急激に変化する磁場が印加されると、誘導起電力が生じてその構造物には電流が流れるが、これと磁場は電磁力(ローレンツ力)を生じて構造物は変形する。こうした電磁構造連成現象が核融合炉や磁気浮上列車でも生じ、また、強い磁場を利用しているため発生する電磁力も非常に大きくなり、これは構造物の健全性に直接影響する。このため、強磁場中に設置される機器の設計では、電磁構造連成現象の解明やこうした強磁場中に設置される構造物の設計基準の確立が必要である。

## 1.2 電磁構造連成関連の研究開発

将来のエネルギー源として、プラズマを利用した核融合炉の研究が始められてから 30 年以上が経過した。実用化に最も近いといわれるトカマク型核融合炉では、1982～1984 年から日本の JT-60(Japan Atomic Energy Research Institute Tokamak-60)<sup>(1.1, 1.2)</sup>、ヨーロッパ共同体の JET(Joint European Torus)、アメリカの TFTR(Tokamak Fusion Test Reactor) が運転を開始し、1990 年までに臨界条件(出力エネルギーが核融合反応のために入力されたエネルギーを上回る)をほぼ達成した。そして、トカマク型核融合炉の研究は次の実験炉実現に向けて進められている。

実験炉では、プラズマの自己点火条件と長時間燃焼を目的として、日本の FER(Fusion Experimental Reactor)<sup>(1.3, 1.4)</sup>、ヨーロッパ共同体の NET(Next European Torus)<sup>(1.5)</sup>などの設計が進められており、また、国際協力のもとで INTOR(INTernational TOKamak

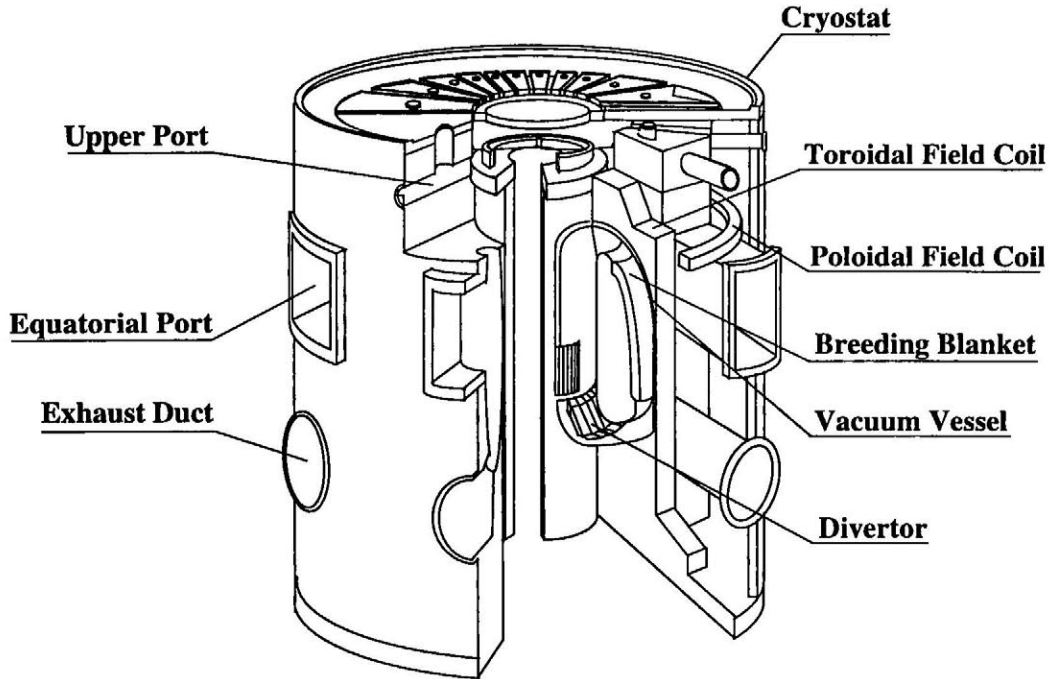


Fig. 1.1 Overall view of Tokamak type fusion reactor

Reactor) の概念設計が行なわれ (1979~1988 年), これに引き続いて ITER(International Thermonuclear Experimental Reactor) <sup>(1.6-1.8)</sup> の設計が, 日本, アメリカ, ヨーロッパ共同体, ロシアの協力のもとに進められている. この実験炉の次には, 工学システム全体を実証する原型炉, 経済的な面も考慮した実証炉が作られて, 最終的に動力炉で核融合炉は実用化されることになっている.

トカマク型核融合炉<sup>(1.9)</sup>は, Fig.1.1に示すように, プラズマ閉じ込めに必要な磁場を作るトロイダル磁場コイルやポロイダル磁場コイル, プラズマ生成に欠かすことができない高真空を確保するための真空容器, 数億度にも達するプラズマに面する第一壁やダイバータ板などの多くの機器から構成されるが, トロイダル磁場は数 T (テスラ) (ITER では約 5T), プラズマ電流は数十 MA (メガアンペア) (ITER では約 20 MA) となるなど, その実用化にはこうした核融合炉特有の条件で生じる問題を克服していく必要がある.

こうした核融合炉特有の問題として, プラズマディスラプションに起因した電磁構造問題がある. プラズマの急激な消滅に伴い, プラズマ電流が作る磁場が変化すると, 真空容器などの導電性構造物に渦電流が発生し, これとトロイダル磁場が作る強磁場による非常に大きな電磁力が構造物に作用する問題である. また, 真空容器などは熱応力対策や重量に対する制限などから, 薄肉構造物で, しかも剛に支持することができないため,

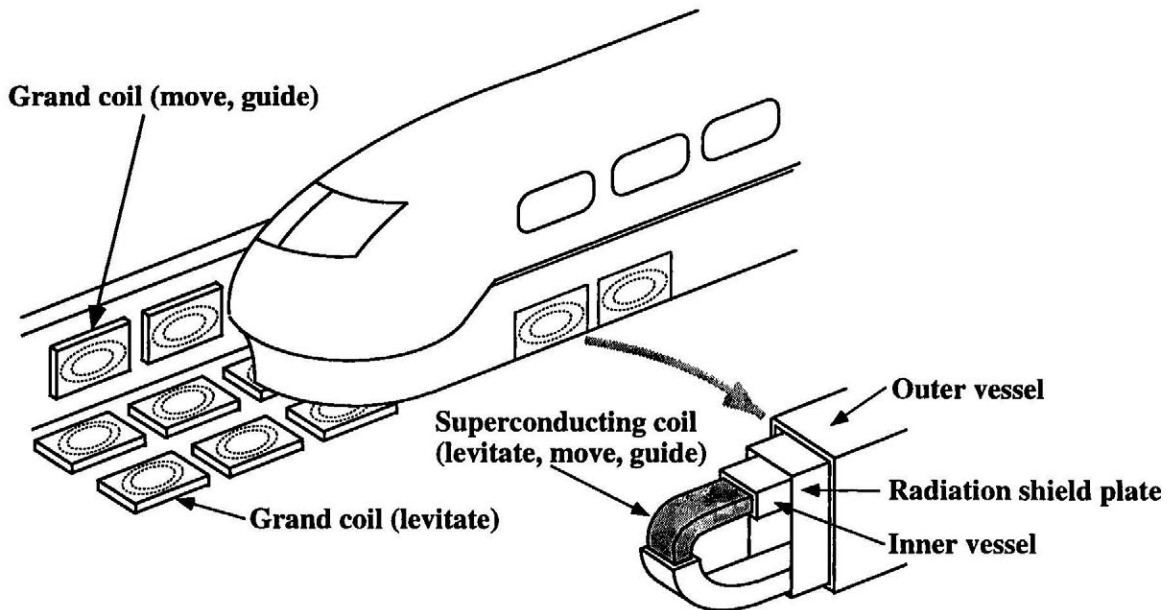


Fig. 1.2 Overall view of magnetically levitated vehicle

こうした構造物に非常に強い電磁力が作用することは、機器の健全性に直接・大きく影響する。また核融合炉構造機器は、数億度にも達する熱や放射性物質の問題から、特に健全性を要求されるため、その設計では、電磁構造連成挙動の解明は欠かすことのできない重要な課題である。

電磁構造連成挙動は、次世代の超高速・大量輸送技術として期待される磁気浮上列車 (MAGLEV: MAGnetically LEvitated Vehicles)<sup>(1.10, 1.11)</sup> でも問題となっている。磁気浮上列車は、Fig.1.2 に示すように地上コイルと列車上のコイルが作る強磁場を利用して浮上・推進するシステムであり、この車上コイルは、超電導コイルとコイルを収納する内槽などから構成されている。内槽内は超電導コイルのために LHe (液体ヘリウム) で 4 K に保たれているが、磁気浮上列車の走行に伴う振動により磁場が変化すると内槽に渦電流が生じ、この渦電流のジュール熱は LHe の温度に影響を与える。これが、車上に搭載可能な LHe 冷凍機の容量を上回ると、車上コイルの超電導状態が維持できなくなるため、磁気浮上列車そのものが成立しなくなる。このため、渦電流によって生じるジュール熱を LHe 冷凍機の容量以内に抑えた設計が要求されることから、磁気浮上列車においても電磁構造連成挙動の解明は、その実現のために必要不可欠な課題である。

産業応用に関しても、現在、鉄鋼業では鋼板を支持ローラ等により搬送しているが、機械的接触による製品表面の傷や支持ローラなどの装置の摩耗・騒音等の問題から、鋼板

を磁気浮上支持して非接触に搬送する技術の導入が望まれている。また、渦電流と磁場により金属内に超音波を発生させて、これにより非接触で鋼板の計測・非破壊検査(高温・表面の粗い材料等の厚み測定や内部欠陥の検出)を行なう電磁超音波技術も注目されている<sup>(1.12)</sup>。

このように、渦電流や電磁力による変形を把握することは、機器の設計上非常に重要であり、これまで、数多くの研究が行われてきた。Kameari は電流ポテンシャルによる 3次元薄肉導体上の渦電流解析方法を提案し、また、これを T 字接続問題へ拡張するとともに、この方法が INTOR-J の第一壁といった複雑な構造物に生じる渦電流解析に適用可能であることを検証した<sup>(1.13)</sup>。Takatsu らは電磁力が作用する JT-60 真空容器の解析を行ない、その変形挙動を明らかにした<sup>(1.14)</sup>。Minato らは電磁力が作用する導電性平板の解析と実験を行ない、その結果の妥当性を検証した<sup>(1.15)</sup>。Yagawa らは電磁力が負荷されたき裂を有する板の数値解析と実験を行ない、破壊力学の観点からその挙動を検討している<sup>(1.16-1.18)</sup>。また、Miya らはトカマク型核融合炉に生じる渦電流に対して、境界要素法に基づいた解析方法を提案しその妥当性を検証した<sup>(1.19)</sup>。Nishio らは有限要素分割-渦電流解析-構造解析-解析結果表示を行なうシステムを開発し、それが設計研究に有効であることを示している<sup>(1.20)</sup>。

このように、渦電流問題および電流によって生じる電磁力が作用する構造物の変形問題に対しては、数多くの研究が行なわれ、非磁性構造物の微小変形問題に限れば、渦電流と電磁力による変形挙動はほぼ明らかになっている。しかし、トカマク型核融合炉では、核融合反応による中性子損傷や強度上の問題から磁性素材の導入も検討されており、こうした磁性構造物の挙動解明も期待されている。

これまでに述べた電磁構造挙動の研究は、そのほとんどが電磁力の構造物への作用を中心として研究されているが、磁場が強くなると構造物の変形挙動が電磁場に与える影響も無視できなくなる。トカマク型核融合炉では、強い磁場と電流による非常に大きな電磁力が構造物に作用し、また、薄肉構造物はその幾何学的形状によって容易に弾性限界に達することから、電磁力を受ける構造物の座屈問題、すなわち、電磁弾性座屈問題に対しても数多くの研究が行なわれてきた。

Moon はトロイダル磁場コイルといった磁気弾性体の不安定性を明らかにし<sup>(1.21, 1.22)</sup>、Miya らは磁性平板やトロイダル磁場コイルで生じる電磁弾性座屈問題の数値解析および実験を行なった<sup>(1.23-1.26)</sup>。また、Takagi らは電磁力の作用する部分円筒シェル形状構造物の挙動を、数値解析と実験により明らかにしている<sup>(1.27)</sup>。Nemoto らは円筒とトラス形状の構造物での電磁座屈実験を行ない、その結果を報告した<sup>(1.28)</sup>。Demachi らは電磁力以外の電磁構造連成効果(磁気減衰)と大変形による幾何学的非線形性を考慮した

電磁弾性座屈の数値解析方法を提案し、その妥当性を実験結果との比較により検証するとともに、ITER の CDA(概念設計活動: Conceptual Design Activity) 設計に基づいたモデルの解析を行い、この真空容器が電磁座屈する可能性が低いことを示している<sup>(1.29)</sup>。このように、電磁弾性座屈問題に対して数多くの研究報告があり、実際に核融合炉の解析も行なわれている。

### 1.3 磁気減衰振動現象の技術課題

電磁場と構造物の連成現象を模式的に Fig.1.3 に示す。導電性構造物に変動磁場が印加されると、ファラデーの法則により速度起電力を生じ、これにより、この構造物に渦電流  $j$  が発生する。この渦電流  $j$  と磁場  $B$  により  $j \times B$  電磁力が生じて構造物に作用するが、その一方、構造物の変形速度  $\dot{u}$  と磁場  $B$  が  $\dot{u} \times B$  速度起電力を生じ、これが構造物の渦電流に影響する。この  $\dot{u} \times B$  速度起電力による渦電流と磁場  $B$  が相互作用した結果生じる新たな電磁力は、一般に構造物の変形を抑えるように作用するため、こうした電磁構造連成現象は磁気減衰現象とも呼ばれる。そのため、この磁気減衰振動挙動の解析・評価方法の確立は、核融合炉や磁気浮上列車などの強磁場中に設置される機器を健全かつ合理的に設計する上で重要な課題である。

磁気減衰振動問題の解析方法の研究としては、TEAM(Testing Electromagnetic Analysis Method) でベンチマーク問題 12 番 “Cantilevered Beam in Crossed Field”<sup>(1.30)</sup> および 16 番 “Magnetic Damping in Torsional Mode” が設定され、解析方法の提案・検証が行われた<sup>(1.31-1.35)</sup>。Turner らにより設定されたベンチマーク問題 12 番は、片端が完全に固定された銅板の、たわみ変形磁気減衰振動問題である。また、Takagi らにより設定されたベンチマーク問題 16 番は、銅板がねじり変形の磁気減衰を振動を生じる。これらのベンチマーク問題は平板でしか設定されておらず、一方、核融合炉真空容器などは複雑な 3 次元シェル形状構造物であることから、連成効果も 3 次的に複雑に作用すると考えられる。このため、こうした構造物に対する連成解析方法を確立する必要がある。

磁気減衰振動問題に対して、Morisue は有限差分法を用いた解析方法を提案し、ベンチマーク問題 12 番でその妥当性を検証した<sup>(1.36)</sup>。Takagi らは構造解析の時間積分に Duhamel 積分を用いた解析方法を提案し、ベンチマーク問題 12 番および問題 16 番を解析した<sup>(1.32, 1.37)</sup>。Niikura らは速度起電力を求める際に、オイラー座標系では数値不安定の問題があるとして、速度起電力をラグランジュ座標系で評価し、また、真空容器を模擬した円筒に生ずる磁気減衰振動を解析している<sup>(1.35, 1.38)</sup>。Yoshida らは国際熱核融合炉 ITER の CDA 設計に基づいたモデルで、第一壁に生じる磁気減衰振動の解析を行い、ト

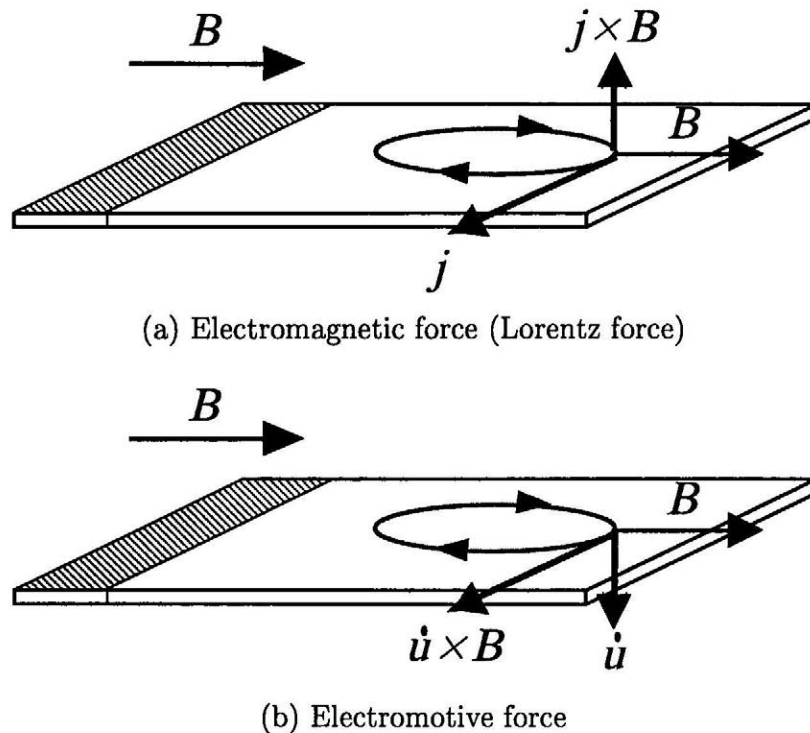


Fig. 1.3 Electromagnetic and structural coupling effect

ロイダル磁場の強さが磁気減衰振動に与える影響を検討し<sup>(1.33)</sup>, また, Demachi らはこのモデルにおいて板厚を変化させた解析を行っている<sup>(1.39)</sup>. これらの解析方法は, そのほとんどが1つの時間ステップ内で構造物と渦電流を交互に解析している. しかし, 本来, 連成解析はそれぞれの支配方程式を矛盾なく同時に解く必要がある.

核融合炉などの大規模構造物では, 解析コストも問題となるため, 高速な連成解析方法あるいは簡易解析法の研究も行なわれている. Takagi らは MMD (Modal Magnetic Damping) 法を提案した<sup>(1.40, 1.41)</sup>. これは, 渦電流によるジュール損が磁気減衰によるエネルギー消失と等価であるとして equivalent magnetic critical damping ratio を定義し, これを, 一般の減衰振動問題の減衰項として解析する方法である. この方法では, 磁場・ヤング率・密度や境界条件を変化させても, equivalent magnetic critical damping ratio の依存性<sup>(1.42)</sup>を用いて, 磁気減衰問題を高速に解析することができる. Nishio らは渦電流解析に, コンピュータの記憶容量や解析時間の点で有利な network mesh method を提案し, その妥当性を検証している<sup>(1.43)</sup>. こうした, 解析コストまで考慮した解析方法の確立は, 特に核融合炉などの大規模システムをの設計で重要であり, 効率的な解析方法の確立が期待されている.



また、汎用有限要素解析コードを利用した解析方法としては、Crutzen らが ABAQUS を利用した磁気減衰振動解析手法を示し<sup>(1.34)</sup>、Brauer らは MSC/EMAS<sup>TM</sup> と MSC/NASTRAN<sup>TM</sup> を用いた解析を行なった<sup>(1.44)</sup>。これらの汎用コードを用いた解析は、有限要素解析の前処理や、評価のための後処理などの観点から非常に有効な手法であり、設計においては、こうした 1 つのシステムとして連成解析を考えていく必要がある。

磁気減衰振動の実験としては、Hua らが変動磁場や定常磁場の時定数比を変化させて平板の磁気減衰振動実験を行い、数値解析結果と比較した<sup>(1.45)</sup>。これは、TEAM ワークショップのベンチマーク問題 12 番に設定された。Takagi らは部分円筒シェル形状やき裂を有する平板の磁気減衰振動実験<sup>(1.46)</sup>や、ねじり変形を生じる平板の実験<sup>(1.32, 1.37)</sup>を行った。このねじり変形問題は、TEAM ワークショップベンチマーク問題 16 番に設定された。また、Crutzen らがフレーム形状の実験を行ない、数値解析結果とモデリング技術を検討している<sup>(1.34)</sup>。Nishio らは平板の固定方法を変化させた実験を行ない、はりモデルとシェルモデルを用いた数値解析結果と比較している<sup>(1.43)</sup>。しかし、これらの磁気減衰振動実験は、そのほとんどが数値解析結果の検証のためであり、磁気減衰振動現象の実験的な研究は少ない。

核融合炉などの大規模構造物を設計する場合、縮小モデル実験で、その力学的特性を把握する必要がある。Yoshida らは無次元化した磁気減衰振動の支配方程式から magnetic damping parameter を定義し、磁気減衰振動のスケーリング則を示している<sup>(1.47)</sup>。このような縮小モデル実験に対する検討などは、実際に設計を行なう上で最も重要になると考えられる。しかし、磁気減衰振動現象に対して、評価方法・評価基準は確立されていない。

## 1.4 本研究の目的

前節で述べた磁気減衰振動挙動に関する技術課題をまとめると、磁気減衰振動解析に関して、

- 電磁場と構造物を、連成問題として矛盾なく同時に解析する方法の確立
- 効率的な連成解析方法の確立

であり、磁気減衰振動評価に関して、

- 評価方法および評価基準の確立

であり、また、こうした磁気減衰振動を生じる構造物を実際に設計する場合に、

- 縮小モデル実験方法の確立
- 簡易解析方法の確立

が必要であると考えられる。そこで本研究では磁気減衰振動解析および磁気減衰評価方法の確立を主な目的とする。

**(a) 磁気減衰振動解析に関して**

磁気減衰振動解析では、他の連成解析コードの妥当性を検証することができる、精度の良い解析方法の提案を行なう。すなわち、構造物と渦電流を交互に解く従来からの解析方法と異なり、これらを完全かつ同時に解析する手法の確立を目的としている。また、こうして提案した解析方法が連成現象の本質を捉えた解析方法であることを明らかにする。

また、強磁場中の薄肉シェル構造物では、大変形の磁気減衰振動も生じると考えられるため、大変形による幾何学的な非線形を含む連成解析方法を確立する。また、連成効果が大変形に与える影響を調べ、大変形解析が必要となる条件、および、こうした機器を設計する際の注意点を明らかにする。

**(b) 磁気減衰評価に関して**

磁気減衰特性評価パラメータに求められる条件として、

- 磁気減衰特性を 1 つあるいは 2 つ程度のパラメータで表すことができる
- そのパラメータの設計パラメータ (磁場や板厚など) に対する依存性を求めることができる
- 数値解析と実験の両方から、このパラメータを求めることができる
- そのパラメータの値は、設計パラメータを変更することにより、自由に設定することができる

を課した。こうした条件を満たす評価パラメータにより、磁気減衰特性を設計時に知ることができ、また、磁気減衰を積極的に利用した設計も可能となる。そこで、本研究では、こうした評価パラメータを用いた評価方法の確立を目的とする。このためには、磁気減衰振動を支配するパラメータを明らかにし、このパラメータの設計パラメータに対する依存性を求め、数値解析と実験の両方からこのパラメータを導出する方法を確立し、さらに、このパラメータの値を設計パラメータで自由に設定する方法を確立することが必要となる。

**(c) 評価パラメータの設計への応用に関して**

磁気減衰の評価パラメータで、問題の大きさと無関係に磁気減衰特性を評価することができれば、実機で生じる磁気減衰振動を縮小モデルで完全に再現することができ、これは連成現象の解明に有効となる。そこで、本研究では、縮小モデル実験への評価パラメータの適用性を明らかにする。

## 本論文の構成

本論文は、核融合炉や磁気浮上列車などの強磁場中に設置される機器に生じる磁気減衰振動問題に対して、その挙動を把握するのに必要な解析手法、および、こうした機器の設計に有効な磁気減衰特性評価に関する研究をまとめたものである。

第2章では磁気減衰振動問題の解析方法として、磁気減衰効果と核融合炉真空容器などの曲面シェル形状を考慮した有限要素法に基づく定式化、および、構造物と渦電流の同時解析手法を提案している。また、本解析手法の妥当性をベンチマーク解析により検証するとともに、従来からの構造物と渦電流の交互解析方法との比較を行ない、本解析手法の有効性を検証している。さらに、モードベクトルの観点から、本解析手法が連成現象の本質を捉えた解析手法であることを確認している。

第3章では微小変形理論に基づいた第2章の同時解析方法を、total Lagrangian 定式化および updated Lagrangian 定式化に基づいて、大変形による幾何学的非線形を含む磁気減衰振動問題へと拡張する。また、平板に印加する磁場の値を変化させて解析を行ない、連成効果に及ぼす大変形の影響や、大変形解析が必要となる条件について微小変形解析結果との比較により検討するとともに、強磁場中に設置される機器を設計する際に留意すべき点を検討している。

第4章では磁気減衰特性評価パラメータになり得るパラメータとして、第2章で提案した同時解析方法が得られる、連成効果を含む固有値に基づいた連成強度パラメータを定義し、その設計パラメータ(磁場や板厚など)に対する依存性を調べている。また、この連成強度パラメータの設計パラメータに対する依存性簡易解析方法を提案し、その妥当性を有限要素解析結果との比較により検証している。

第5章では平板の磁気減衰振動実験を行ない、得られた振動波形から連成強度パラメータを導出する手法を確立する。また、その妥当性を数値解析との比較により検証するとともに、磁場や板厚を変化させた実験を行ない、その実験結果に基づき、連成強度パラメータの依存性を検討している。

第6章では設計パラメータを変化させて、連成強度パラメータの値を自由に設定する方法を提案する。また、この方法で連成強度パラメータを一定とした種々の問題を設定し、それらの問題が同一の磁気減衰特性を示すことを、数値解析と実験により検証している。そして、これらの結果から連成強度パラメータの磁気減衰特性評価パラメータとしての妥当性を確認している。

第7章では連成強度パラメータを用いた縮小モデル実験の条件決定方法を提案し、その妥当性を数値解析と実験により検証している。これにより連成強度パラメータは、問題の大きさと無関係に磁気減衰を評価できることを示している。また、連成強度パラメータを用いた簡易解析方法を提案し、その実用性を検討している。

## 参考文献

- (1.1) M. Yoshikawa, JT-60 project, *Fusion Technology 1978*, (1979), 1079–1083.
- (1.2) H. Ninomiya, T. Ando, T. Horie et.al., JT-60 Upgrade Device for Confinement and Steady State Studies, *Plasma Devices and Operations*, 1 (1990), 43–65.
- (1.3) T. Tone, N. Fujisawa, Y. Seki et.al., Conceptual Design of Fusion Experimental reactor(FER), *Nucl. Technol./Fusion*, 4-2 (1983), 573–578.
- (1.4) T. Tone, Fusion Experimental Reactor(FER) Design Concept, *Fusion Reactor Design and Technology 1986*, 1-2 (1987), 93–116.
- (1.5) R. Toschi, The NET Experimental Reactor, *Engineering Aspects of Thermonuclear Fusion Reactors. Lectures from a Course*, Harwood Academic Publishers, (1981), 479–509, 639.
- (1.6) International Atomic Engineering Agency, ITER Concept Definition, *Int. Atomic Eng. Agency*, Vienna, (1980).
- (1.7) R. R. Parker, Status of the ITER design, *Fusion Technol.*, 25-2T (1994), 385.
- (1.8) 高津英幸, 多田英介, 柴沼清 他, 日本原子力学会誌, 33-8 (1991), 9–18
- (1.9) 矢川元基, 堀江知義, 核融合炉構造設計, 培風館, (1995).
- (1.10) 例えば電気学会 磁気浮上応用技術調査委員会, 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社, (1993).
- (1.11) Y. Kameoka, K. Yoshioka, H. Fukumoto et.al., Analysis of a Mock-up Levitation Experiment on Superconducting Magnets for Magnetically Levitated Vehicles, *Simulation and Design of Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 543–546.
- (1.12) 川島捷宏, 電磁超音波技術とその応用, 鉄鋼業における計測と制御の最近の進歩, 日本鉄鋼協会, (1981), 227–258.
- (1.13) A. Kameari, Transient Eddy Current Analysis on Thin Conductors with Arbitrary and Shapes, *Journal of Computational Physics*, 42 (1981), 124–140.

- 
- (1.14) H. Takatsu, M. Shimizu, M. Ohta et.al., Dynamic Response of the JT-60 Vacuum Vessel under the Electromagnetic Force, *Nucl. Eng. Des.*, **71-2** (1982), 161-172.
- (1.15) A. Minato, K. Someya, K. Miya et.al., Theoretical and Experimental Study of Eddy Current and Dynamic Deformation of Conducting Plate, *IEEE Trans. on Magn.*, **21-6** (1985), 2265-2268.
- (1.16) G. Yagawa and T. Horie, Cracked Beam under Influence of Dynamic Electromagnetic Force, *Nuclear Engineering and Design*, **69** (1982), 49-55.
- (1.17) 矢川元基, 堀江知義, 吉村忍, 電磁力による破壊とその応用, *材料*, **31-344** (1982), 468-472.
- (1.18) G. Yagawa and T. Horie, Ductile Fracture of Edge-cracked Beam under Dynamic Electromagnetic Bending Force, *Engineering Fracture Mechanics*, **20-1** (1984), 23-34.
- (1.19) K. Miya, T. Sugiura, H. Hashizumi et.al., Three Dimensional Analysis of Eddy Currents in Tokamak Fusion Structural Components Using the Boundary Element Method, *11th Symposium on Fusion Engineering Proceedings*, **2-2** (1986), 932-936.
- (1.20) S. Nishio and T. Horie, A Computer Program for Transient Electromagnetic Analysis on a Tokamak Device, *IEEE Trans. on Mag.*, **26-2** (1990), 865-868.
- (1.21) F. C. Moon, Buckling of a Superconducting Coil Nested in a Three-coil Toroidal Segment, *Int. J. Appl. Phys.*, **47-3** (1976).
- (1.22) F. C. Moon, Problems in Magneto-solid Mechanics, *Mechanics Today*, Pergamon press, **4** (1978), 307-390.
- (1.23) K. Miya and T. Takagi, Finite-element Analysis of Magnetoelastic Buckling of Ferromagnetic Beam Plate, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **47-2** (1980), 377-382.
- (1.24) K. Miya, T. Takagi and M. Uesaka, Finite Element Analysis of Magnetoelastic Buckling and Experiments on a Three-coil Super Conducting Partial Torus, *Mechanics of Superconducting Structures*, (1980), 91-107.

- (1.25) M. Uesaka, K. Miya, T. Takagi et.al., Electromagnetoelastic Buckling on Three-coil Superconducting Partial Torus, *J. At. Energy Soc. Jpn.*, **23-4** (1981), 269-278.
- (1.26) K. Miya, T. Takagi and M. Uesaka, Finite Element Analysis of Magnetoelastic Buckling of Eight-coil Super Conducting Full Torus, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **49-1** (1982), 180-186.
- (1.27) T. Takagi, Y. Mori and J. Tani, Dynamic Behavior of Shallow Arch under Electromagnetic Force Considering Coupling Effect, *Elsevier Stud. Appl. Electromagn. Mater.*, **2** (1991), 183-194.
- (1.28) M. Nemoto, Y. Kawamoto, K. Inoue et.al., Experimental Study on Impulsive Electromagnetic Buckling of Cylindrical Shells, *Elsevier Stud. Appl. Electromagn. Mater.*, **1** (1992), 453-456.
- (1.29) K. Demachi, Y. Yoshida and K. Miya, Numerical Analysis of Magnetoelastic Buckling of Fusion Reactor Components, *Fusion Engineering and Design*, **27** (1995), 490-498.
- (1.30) L. R. Turner and T. Q. Hua, Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields, *COMPEL*, **9-3** (1990), 205-216.
- (1.31) T. Takagi, Summary of The Results for Magnetic Damping in Torsional Mode (TEAM Problem 16), *COMPEL*, **14-2-3** (1995), 77-89.
- (1.32) 高木敏行, 谷順二, 川村修平, 導電性薄板の強磁場中での動的挙動に関する解析と実験, 日本機械学会論文集, C **58-556** (1992), 3537-3542.
- (1.33) Y. Yoshida, K. Miya, K. Demachi and M. Kurokawa, Magnetic damping effects on vibration of conductive shells, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, **4** (1993), 1-11.
- (1.34) Y. Crutzen, S. Papadopoulos and F. Van Paemel, Modeling, Analysis and Validation of Electromagnetic-Mechanical Coupling on Clean Test Peaces, *IEEE Trans. on Magn.*, **30-5** (1994), 3276-3279.
- (1.35) 新倉節夫, 亀有昭久, 非磁性シェル構造物の電磁構造連成解析, 日本機械学会論文集, C **61-585** (1995), 1911-1916.

- 
- (1.36) T. Morisue, Analysis of Coupled Problem: The FELIX Cantilevered Beam, *IEEE Trans. on Mag.*, **26-2** (1990), 540-543.
- (1.37) T. Takagi, J. Tani, S. Matsuda and S. Kawamura, Analysis and Experiment of Dynamic Deflection of a Thin Plate with a Coupling Effect, *IEEE Trans. on Mag.*, **28-2** (1992), 1259-1262.
- (1.38) S. Niikura and A. Kameari, Analysis for Coupled Problems between Eddy Currents and Dynamic Deflections of a Thin Shell Structure, *IEEE Trans. on Magn.*, **30-5** (1994), 3284-3287.
- (1.39) K. Demachi, Y. Yoshida, M. Kurokawa, K. Miya and S. Nishio Magnetic viscous damping effects in ITER blanket, *Simulation and Design of Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 114-116.
- (1.40) T. Takagi and J. Tani, A New Numerical Analysis Methods of Dynamic Behavior of a Thin Plate under Magnetic Field Considering Magnetic Viscous Damping Effect, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, **4** (1993), 35-42.
- (1.41) T. Takagi and J. Tani, Dynamic Behavior of a Plate in Magnetic Field by Full Coupling and MMD Methods, *IEEE Trans. on Magn.*, **30-5** (1994), 3296-3299.
- (1.42) T. Takagi and J. Tani, Evaluation of Critical Magnetic Viscous Damping Ratios for Plate Vibrations with Different Boundary Conditions, *Simulation and Design of Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 101-104.
- (1.43) S. Nishio, H. Miura and A. Isono, An Applicability of Eddy Current Analysis by a Network Mesh Method to Electromagnetomechanical Problems and Its Experimental Verification, *Int. J. Appl. Electromagn. in Mater.*, **6** (1995), 37-54.
- (1.44) J. R. Brauer and J. J. Ruehl, 3D Coupled Electromagnetic and Structural Finite Element Analysis of Motional Eddy Current Problems, *IEEE Trans. on Magn.*, **30-5** (1994), 3288-3291.
- (1.45) T. Q. Hua, M. J. Knott, L. R. Turner and R. B. Wehrle, Experimental Modelling of Eddy Current and Deflection for Tokamak Limiters, *Fusion Technology*, **10** (1986), 1047-1052.



- 
- (1.46) T. Takagi, J. Tani, S. Kawamura and K. Miya, Coupling Effect between Magnetic Field and Deflection in Thin Structure, *Fusion Engineering and Design*, **18** (1991), 425–433.
- (1.47) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, Study of Magnetic Damping Effect on Dynamic Deflection of Fusion Reactor First Wall, *Fusion Eng. Des.*, **27** (1995), 473–480.

## 第 2 章

# 磁気減衰振動現象の解析

### 2.1 はじめに

トカマク型核融合炉や磁気浮上列車などの強磁場中で使用される機器では、磁場の過渡的变化などによって、導電性の構造物に渦電流が発生する。この渦電流と磁場による電磁力が構造物に作用して変形し、その変形速度と磁場により速度起電力が誘起される。この速度起電力によって生じる渦電流により、一般に、変形を抑える方向の電磁力が発生するため、このような電磁場と構造物が互いに影響を及ぼしあう電磁構造連成現象は、磁気減衰効果とも呼ばれている。したがって、この磁気減衰効果を考慮した解析によって、強磁場中に設置される構造物の合理的な設計が可能となる。

磁気減衰振動問題に対する解析方法の研究として、TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) ワークショップ・ベンチマーク問題 12 “Cantilevered Beam in Crossed Field”<sup>(2.1)</sup>、および問題 16 “Magnetic Damping in Torsional Mode”<sup>(2.2)–(2.6)</sup>などがあり、解析方法が提案・検証されている。これらの解析方法の多くは、構造物と渦電流を各時間ステップごとに独立に解析し、一つ前の解析で得られた電流あるいは変位の結果を用いて、連成項を右辺ベクトルの既知量として与えている。また、モード合成に基づく解析方法では、連成効果を考慮せずに求めた固有モードベクトルを用い、渦電流と構造を交互に解いて連成させている。

ここでは、渦電流と構造物を同時に解く、磁気減衰振動解析方法を提案する。また、モード合成法に基づく解析方法として、連成モードベクトルを用いた連成モード合成法を提案する。これは、従来からのモード合成法に基づく連成解析では、構造物と渦電流のそれぞれの固有モードベクトルを求めていたのに対し、連成効果が直接含まれた連成モード

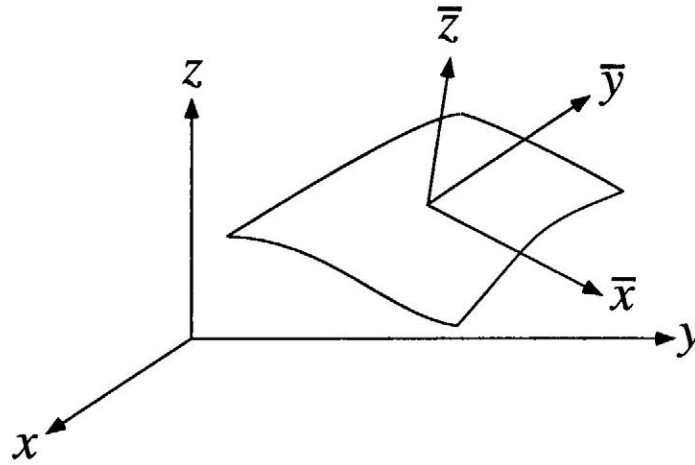


Fig. 2.1 Coordinate system of the shell

ベクトルに基づく解析方法である。また、本解析方法と従来からの解析方法との比較・検証を行ない、その有効性を確認する。さらに、本解析方法で得られる、連成モードベクトルについての検討を行う。

## 2.2 解析方法

これまでの磁気減衰振動問題における有限要素解析では、平面板要素を用いて定式化されているが、ここでは核融合炉などの任意曲面シェル形状を考慮して、Fig.2.1 に示す曲面シェル座標系を使用する。すなわち、シェル中央面上の任意の点で、面に接する互いに直交な2軸を $\bar{x}, \bar{y}$ 、面に垂直な軸を $\bar{z}$ と定義する。

### 2.2.1 渦電流解析

薄肉導体の渦電流有限要素解析には、未知変数として電流ベクトルポテンシャルの導体面に垂直な成分  $T$  <sup>(2.7)</sup> を用いる。この時、電流密度  $\mathbf{j}$  は、薄肉導体の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて、

$$\mathbf{j} = \nabla T \times \mathbf{n} \quad (2.1)$$

で表され、ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

および速度起電力を考慮したオームの法則

$$\mathbf{j} = \kappa(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}) \quad (2.3)$$

に (2.1) 式を適用すると、電磁構造連成問題における渦電流の支配方程式

$$\dot{B}_z^{in} - \{\nabla \times (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B})\}_z - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) = -\dot{B}_z^{ex} \quad (2.4)$$

が得られる。ここで  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \kappa, \mathbf{u}, B_z^{in}, B_z^{ex}$  は、それぞれ、電界、磁束密度、導電率、変位、渦電流による磁束密度、外部から与えられる磁束密度であり、(·) は時間微分を表す。

(2.4) 式にガラーキンを適用すると、

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{N}_e^T \frac{\partial B_z^{in}}{\partial t} dV - \int_V \mathbf{N}_e^T \{\nabla \times (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B})\}_z dV - \frac{1}{\kappa} \int_V \mathbf{N}_e^T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) dV \\ = - \int_V \mathbf{N}_e^T \frac{\partial B_z^{ex}}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここで、 $\mathbf{N}_e$  は電流ポテンシャルの要素形状関数である。

### (a) 渦電流が作る磁場の効果

ここでシェル座標系を導入すると、磁場  $\mathbf{B}$  は、磁気ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.6)$$

とあらわすことができるので、(2.5) 式左辺第 1 項の  $B_z^{in}$  は、

$$B_z^{in} = (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} A_y^{in} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} A_x^{in} \quad (2.7)$$

となる。Fig.2.2に示すように要素  $e'$  の電流が流れているソース点が、着目している要素  $e$  の評価点に作る磁気ベクトルポテンシャル  $dA_y^{in}, dA_x^{in}$  は、

$$dA_y^{in} = \frac{\mu_0 j_y'}{4\pi r} \quad (2.8)$$

$$dA_x^{in} = -\frac{\mu_0 j_x'}{4\pi r} \quad (2.9)$$

となる。ここで、(·) はソース点をあらわし、 $\mu_0$  は透磁率、 $j_y', j_x'$  は評価している要素のシェル座標系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  であらわしたソース点を流れる電流密度、 $r$  はソース点と評価点の距離である。

要素  $e'$  に流れる電流は、その要素のシェル座標系  $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$  を用いて求められるが、これらを  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  に変換することにより、(2.8),(2.9) 式の  $j_y', j_x'$  をあらわすことができる。その結果、要素  $e'$  が要素  $e$  の評価点に作る磁気ベクトルポテンシャル  $A_x^{in}, A_y^{in}$  は、

$$\begin{aligned} A_x^{in} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}'} \mathbf{e}_{\bar{x}'} - \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}'} \mathbf{e}_{\bar{y}'} \right) \cdot \mathbf{e}_{\bar{x}} \frac{1}{r} dV_{e'} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}'} (\mathbf{e}_{\bar{x}'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{x}}) - \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}'} (\mathbf{e}_{\bar{y}'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{x}}) \right\} \frac{1}{r} dV_{e'} \end{aligned} \quad (2.10)$$

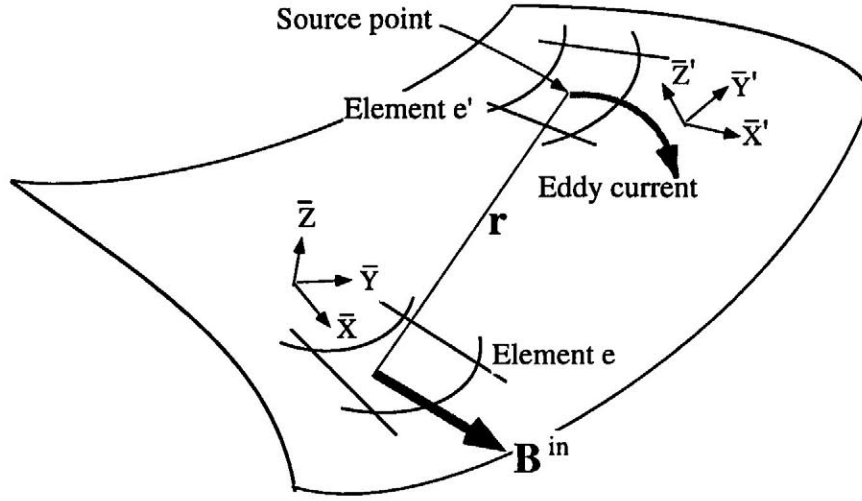


Fig. 2.2 Magnetic field induced by eddy current

$$\begin{aligned}
 A_y^{in} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{\partial T'}{\partial y'} \mathbf{e}_{x'} - \frac{\partial T'}{\partial x'} \mathbf{e}_{y'} \right) \cdot \mathbf{e}_{\bar{y}} \frac{1}{r} dV_{e'} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial T'}{\partial y'} (\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{y}}) - \frac{\partial T'}{\partial x'} (\mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{y}}) \right\} \frac{1}{r} dV_{e'} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_{\bar{x}}, \mathbf{e}_{\bar{y}}, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}$  は全体座標系であらわした、シエル座標系の  $\bar{x}, \bar{y}, x', y'$  方向単位ベクトル、 $T'$  は要素  $e'$  の電流ポテンシャルである。この (2.10), (2.11) 式を解析領域全体で要素を用いて数値積分を行ない、これを (2.7) 式に用いることにより、渦電流が要素  $e$  の評価点に作る磁場  $B_z^{in}$  は、

$$\begin{aligned}
 B_z^{in} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \sum_{e'} \int \left\{ \frac{\partial T'}{\partial y'} (\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{y}}) - \frac{\partial T'}{\partial x'} (\mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{y}}) \right\} \frac{1}{r} dV_{e'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \sum_{e'} \int \left\{ \frac{\partial T'}{\partial y'} (\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{x}}) - \frac{\partial T'}{\partial x'} (\mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{\bar{x}}) \right\} \frac{1}{r} dV_{e'} \right\} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \mathbf{H}_{\bar{x}} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \mathbf{H}_{\bar{y}} \right\} \{T\} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

となり、これを (2.5) 式の左辺第 1 項に代入し、さらに、グリーンの定理を適用すると、

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{N}_e^T \frac{\partial B_z^{in}}{\partial t} dV &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}_e^T}{\partial \bar{x}} \mathbf{H}_{\bar{y}} - \frac{\partial \mathbf{N}_e^T}{\partial \bar{y}} \mathbf{H}_{\bar{x}} \right\} \{\dot{T}\} dV \\
 &= [\mathbf{U}]\{\dot{T}\} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

が得られる。

## (b) 速度起電力の効果

速度起電力に関する (2.5) 式左辺第 2 項の  $\{\bar{\nabla} \times (\dot{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})\}_z$  を展開すると,

$$\begin{aligned} \{\bar{\nabla} \times (\dot{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})\}_z &= B_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \bar{x}} + B_y \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \bar{y}} + \dot{u}_z \frac{\partial B_x}{\partial \bar{x}} + \dot{u}_z \frac{\partial B_y}{\partial \bar{y}} \\ &\quad - B_z \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \bar{x}} - B_z \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial \bar{y}} - \dot{u}_x \frac{\partial B_z}{\partial \bar{x}} - \dot{u}_y \frac{\partial B_z}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる. ここで, 面外変形に関する (2.14) 式右辺第 1~4 項は, これまでに提案された解析方法でも導かれるが, 面内変形に関する右辺第 5~8 項は, 曲面シェル座標系を導入することによって導出された曲面シェル特有の速度起電力項である.

(2.5) 式の左辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} & - \int_V \mathbf{N}_e^T \{\bar{\nabla} \times (\dot{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})\}_z dV \\ &= - \int_V \mathbf{N}_e^T \left( \left\{ \begin{array}{cccc} -B_z & -B_z & B_x & B_y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial \bar{y}} \end{array} \right\}^T \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial B_z}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial B_z}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial B_z}{\partial \bar{z}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{u}_x & \dot{u}_y & \dot{u}_z \end{array} \right\}^T \right) dV \\ &= [\mathbf{C}_e] \{\dot{\mathbf{u}}\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる.

## (c) 抵抗によるジュール熱損失

ジュール熱損失に関する (2.5) 式左辺第 3 項にグリーンの定理を適用し, 面積分項をゼロとすると,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\kappa} \int_V \mathbf{N}_e^T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) dV &= \frac{1}{\kappa} \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{N}_e^T}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \mathbf{N}_e^T}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \bar{y}} \right) dV \{T\}_e \\ &= [\mathbf{R}] \{T\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

が得られる.

## (d) 外部磁場の効果

外部磁場に関する (2.5) 式右辺の  $B_z^{ex}$  は, 全体座標系で与えられる  $B$  を曲面シェル座標系の  $\bar{z}$  方向単位ベクトル  $e_z$  により変換して求める. その結果, (2.5) 式の右辺は,

$$-\int_V N_e^T \frac{\partial B_z}{\partial t} dV = -\int_V N_e^T e_z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial B_x^{ex}}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y^{ex}}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z^{ex}}{\partial t} \end{array} \right\} dV = \{\dot{B}^{ex}\} \quad (2.17)$$

となる.

## (e) 渦電流の有限要素式

渦電流に関する有限要素式はとして, (2.13), (2.15)~(2.17) 式より,

$$[U]\{\dot{T}\} + [C_e]\{\dot{u}\} + [R]\{T\} = \{\dot{B}^{ex}\} \quad (2.18)$$

が得られる. ここで,  $[U]$  はインダクタンスマトリックス,  $[R]$  はレジスタンスマトリックス,  $\{\dot{B}^{ex}\}$  は外部変動磁場に関連するベクトルである. 左辺第 2 項は構造物の変形速度  $\dot{u}$  によって生じる速度起電力項であり, 従来からの解析では右辺 (既知) ベクトルであらわすが, 本解析法では電磁場と構造物を同時に解析するため (マトリックス)  $\times$  (未知ベクトル) の形であらわす. また, これが磁気減衰における連成項である.

## 2.2.2 構造解析

曲面シェル形状構造物の有限要素法による応力解析には, 8 節点アイソパラメトリックシェル要素<sup>(2.9)</sup>を用いた. この要素の要素形状関数は, 8 節点アイソパラメトリック要素の形状関数  $N_i$  を用いて,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}_{3i} \quad (2.19)$$

とあらわされる. ここで  $\xi, \eta$  は面内方向の規格化座標,  $\zeta$  は板厚方向の規格化座標,  $i$  は要素節点番号,  $\mathbf{V}_{3i}$  は Fig.2.3 に示すような板厚方向ベクトルである. この要素の変位は,

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} [\mathbf{v}_{1i} \mid -\mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

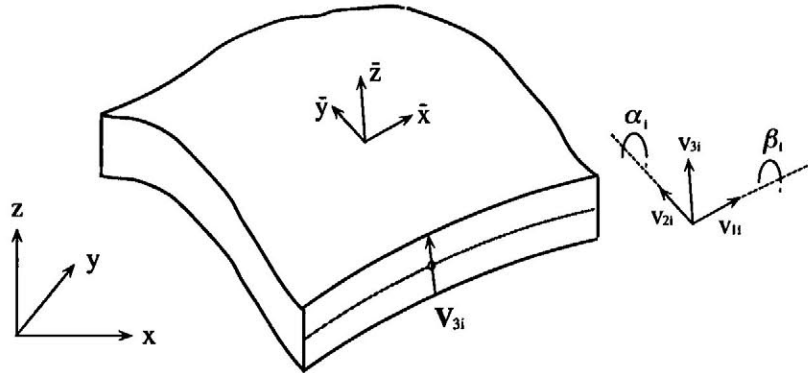


Fig. 2.3 Isoparametric shell element

とあらわされる。ここで、 $v_{1i}$ と $v_{2i}$ は $V_{3i}$ に垂直な2直交軸の単位ベクトルであり、これらの軸まわりの回転角を $\beta$ と $\alpha$ とする。また、この要素ではひずみや応力は曲面シェル座標系で定義されるため、全体座標での変位から曲面シェル座標系でのひずみや応力に変換する必要がある。

構造物に作用する単位体積当りの電磁力(ローレンツ力)は $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ で与えられるが、ここで電流密度 $\mathbf{j}$ は(2.1)式のように未知変数 $T$ で表されている。したがって、構造物の有限要素式は、

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{u}\} + [\mathbf{K}]\{u\} + [\mathbf{C}_s]\{T\} = \{F^{ex}\} \quad (2.21)$$

と表される。ここで、 $[\mathbf{M}]$ は質量マトリックス、 $[\mathbf{K}]$ は剛性マトリックス、 $\{F^{ex}\}$ は外力ベクトルである。左辺第3項が電磁力による連成項であり、上記の理由により、通常行なわれているように右辺(既知)荷重ベクトルとしてではなく、左辺に(マトリックス)×(未知ベクトル)の形で含めている。

### 2.2.3 直接時間積分法

連成項である速度起電力項と電磁力項には、未知変数である $\{T\}$ と $\{u\}$ が含まれる。そのため、通常の直接時間積分による磁気減衰振動解析では、渦電流解析と構造解析を交互に行ない、連成項を既知量として解を得ていた。

ここでは、渦電流の有限要素式と構造物の有限要素式を同時に解析する手法を提案する。(2.18)式にCrank-Nicolson法を適用すると、



$$\begin{aligned}
& -[C_e]\{u\}_{n+1} - ([U] + \alpha\Delta t[R])\{T\}_{n+1} \\
& = -\alpha\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_{n+1} - (1 - \alpha)\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_n - [C_e]\{u\}_n - ([U] - (1 - \alpha)\Delta t[R])\{T\}_n
\end{aligned} \tag{2.22}$$

となる。また、(2.21) 式に Newmark の  $\beta$  法を適用すると、

$$\begin{aligned}
& \left( [K] + \frac{[M]}{\beta(\Delta t)^2} \right) \{u\}_{n+1} + [C_s]\{T\}_{n+1} \\
& = \{F^{ex}\}_{n+1} - [M] \left( \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) \{\ddot{u}\}_n - \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{u}\}_n - \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \{u\}_n \right)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。ここで、 $\Delta t$  は時間ステップ幅であり、また、 $\alpha$  と  $\beta$  は、それぞれ、Crank-Nicolson 法と Newmark の  $\beta$  法の定数である。

時間積分法を適用した (2.22) 式と (2.23) 式を組み合わせると、

$$\begin{bmatrix} K + \frac{M}{\beta(\Delta t)^2} & C_s \\ -C_e & -(U + \alpha\Delta t R) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ T \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

となる。ここで、 $\{F_1\}$  と  $\{F_2\}$  は、それぞれ、(2.22) 式と (2.23) 式の右辺ベクトルである。直接時間積分による磁気減衰解析では、(2.24) 式を時間ステップ毎に解くことにより、磁気減衰振動応答を求める。

#### 2.2.4 連成モード合成法

通常モード合成法による電磁構造連成問題の解析では、渦電流の式 (2.18) と構造物の式 (2.21) のそれぞれにおいて、連成項  $[C_e]\{\dot{u}\}$  と  $[C_s]\{T\}$  を右辺の荷重ベクトルに含め、非連成状態の固有値と固有モードベクトルを用いて、渦電流と構造物について交互にモード合成を行なっている。したがって、固有値や固有モードベクトル自体には連成効果が含まれておらず、モード合成法の利点である、支配的な少数の固有モードによる解析が、困難であると考えられる。

連成モード合成法では、渦電流と構造物に関する有限要素式を一つにまとめ、連成系の有限要素式を得た後、モード合成法を適用する。まず、(2.18) 式と (2.21) 式を組み合わせることによって、

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_e & U \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & C_s \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{ex} \\ \dot{B}^{ex} \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

が得られる。しかし、この式は非対称マトリックスとなるため、通常の一般固有値問題解法を適用して容易にモード分離を行うことができない。

そこで、未知変数として変位速度  $v$  を新たに導入し、自明な関係式

$$[\mathbf{K}]\{v\} = [\mathbf{K}]\{\dot{u}\} \quad (2.26)$$

を用いて (2.25) 式と組み合わせることにより、 $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{U}]$ ,  $[\mathbf{R}]$  は対称であるため、電磁構造連成問題の対称な有限要素式

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_e & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F^{ex} \\ -\dot{B}^{ex} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

を得ることができた。ここで、電磁力に関する連成サブマトリックス  $[\mathbf{C}_s]$  と速度起電力に関する連成サブマトリックス  $-\mathbf{C}_e$  は転置である (次節参照)。

未知変数ベクトルを、

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi \\ \psi_v \\ \phi \end{Bmatrix} e^{\alpha t} \quad (2.28)$$

とおく。  $\psi$ ,  $\psi_v$ ,  $\phi$  は、それぞれ、固有ベクトルの変位成分、速度成分、電流ポテンシャル成分となっている。(2.27) 式の右辺 = 0 として、代入すると、

$$\alpha \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi \\ \psi_v \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_e & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi \\ \psi_v \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

となる。連成モード合成法による電磁構造連成解析では、上式から固有値 (連成固有値) と固有ベクトル (連成モードベクトル) を求め、モード合成により応答を求める。なお、時間積分には Crank-Nicolson 法を適用する。

### 2.2.5 連成サブマトリックスの対称性

要素の電磁力項は

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_s]^e \{T\}^e &= - \int_{V^e} \mathbf{N}_s^T (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \\ &= \int_{V^e} \mathbf{N}_s^T \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} B_z \right) \mathbf{e}_{\bar{x}} + \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} B_z \right) \mathbf{e}_{\bar{y}} - \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} B_x + \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} B_y \right) \mathbf{e}_{\bar{z}} \right\} dV \end{aligned} \quad (2.30)$$

であるため、要素の電磁力に関する連成サブマトリックスは

$$[\mathbf{C}_s]^e = \int_{V^e} \mathbf{N}_s^T [\mathbf{e}_{\bar{x}}, \mathbf{e}_{\bar{y}}, \mathbf{e}_{\bar{z}}] \begin{bmatrix} B_z & 0 \\ 0 & B_z \\ -B_x & -B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_e}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} dV \quad (2.31)$$

となる。ここで、 $e_x, e_y, e_z$  は曲面シェル座標系の単位ベクトル、 $N_e$  は電流ポテンシャルの要素形状関数、 $N_s$  はシェル構造の要素形状関数、上付きの  $e$  は要素に関する量であることを表している。

また、要素の速度起電力項は、(2.4) 式の左辺第 2 項より

$$[C_e]^e \{\dot{u}\}^e = \int_{V^e} N_e^T \left\{ \frac{\partial(B_z \dot{u}_x)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(B_z \dot{u}_y)}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial(B_x \dot{u}_z)}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial(B_y \dot{u}_z)}{\partial \bar{y}} \right\} dV \quad (2.32)$$

となり、これにグリーンの定理を適用すると

$$\begin{aligned} [C_e]^e \{\dot{u}\}^e = & \int_{V^e} \left( -\frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{x}} B_z \dot{u}_x - \frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{y}} B_z \dot{u}_y + \frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{x}} B_x \dot{u}_z + \frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{y}} B_y \dot{u}_z \right) dV \\ & + \int_{S^e} \left( N_e^T B_z \dot{u}_x n_x + N_e^T B_z \dot{u}_y n_y - N_e^T B_x \dot{u}_z n_x - N_e^T B_y \dot{u}_z n_y \right) dS \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。上式において、面積分項は要素間およびシェル要素上下面で互いに打ち消し合い、また、薄肉解析領域の側面を通過する磁場は無視できるものとする、面積分項はすべて消え、

$$[C_e]^e = \int_{V^e} \left[ \frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial N_e^T}{\partial \bar{y}} \right] \begin{bmatrix} -B_z & 0 & B_x \\ 0 & -B_z & B_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x^T \\ e_y^T \\ e_z^T \end{bmatrix} N_s dV \quad (2.34)$$

となる。これを (2.31) 式と比較すると  $[C_s]^e = -[C_e]^e{}^T$  であり、全体マトリックスに関しても  $[C_s] = -[C_e]^T$  となる。したがって、(2.27) 式および (2.29) 式は対称である。

## 2.3 定式化の検証

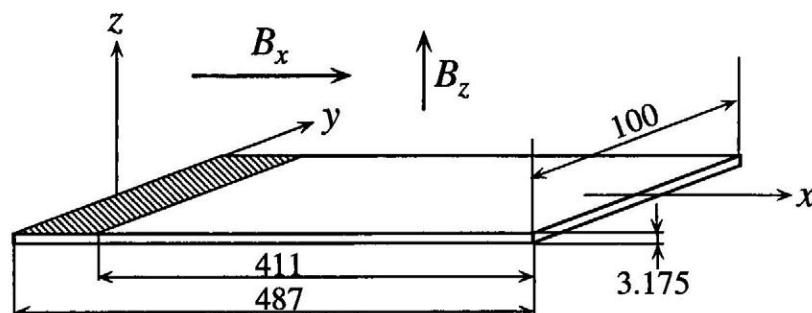
### 2.3.1 平板曲げ変形の連成問題

#### (a) 問題設定

Fig.2.4 に示される、片端固定平板の曲げ変形磁気減衰問題 (TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 12<sup>(2.1)</sup> と同じ体系の問題) を解析する。面に垂直な変動磁場

$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp \frac{-t}{6.6 \times 10^{-3}} [\text{T}] \quad (2.35)$$

により平板内に渦電流が発生し、この渦電流と板の長手方向の定常磁場  $B_x$  による電磁力により曲げ振動を生じ、板の長軸方向の定常磁場のうち、板の変形によって板を貫く成分による速度起電力により磁気減衰する問題である。



Young's modulus:	110[GPa]
mass density:	$8.912 \times 10^3$ [kg/m <sup>3</sup> ]
electric conductivity:	$5.814 \times 10^7$ [S/m]

Fig. 2.4 Schematic diagram of a bending plate in steady electromagnetic field  $B_x$

### (b) 解析結果

直接時間積分法で得られた、定常磁場が 0.2, 0.5, 0.7, 0.9 [T] の場合の自由端たわみを、Fig.2.5に示す。同図には、Turner らによる実験結果<sup>(2.1)</sup>も示している。なお、本解析では、時間ステップ幅を 0.1[ms] とした。解析結果は、実験結果と良く一致しており定式化の妥当性が検証される。

連成モード合成法では、共役な複素固有値と実固有値が得られ、連成モードベクトルもそれらに対応して共役複素数のものと実数のものが得られる。複素固有値は構造物の振動に、実固有値は渦電流の減衰に対応するため(2.4.3 節参照)、それぞれの連成モードベクトルを構造モード S1, S2, …, 渦電流モード E1, E2, …と呼ぶことにする。また、各連成モードベクトル中には、自由度として  $u, v, T$  の組合せをとったことに対応して、変位、速度、電流ポテンシャルの成分がある。定常磁場を  $B_x = 0.7$ [T] とした場合、構造モード S1 の変位、速度、電流ポテンシャル各成分は Fig.2.6(a) に、渦電流モード E1 の各成分は Fig.2.6(b) に示すものとなっている。

連成モード合成法で得られた、定常磁場  $B_x$  が 0.7[T] の場合の板の自由端変位を Fig.2.7 に示す。構造のモード数を 1, 渦電流のモード数を 3 とし、時間ステップ幅は 0.1[ms] とした。本解析法による結果は、実験結果と良く一致している。また、直接時間積分法の結果とも完全に一致しており、このような連成問題にわずかな連成モードを用いて、十分な精度で解が得られた。

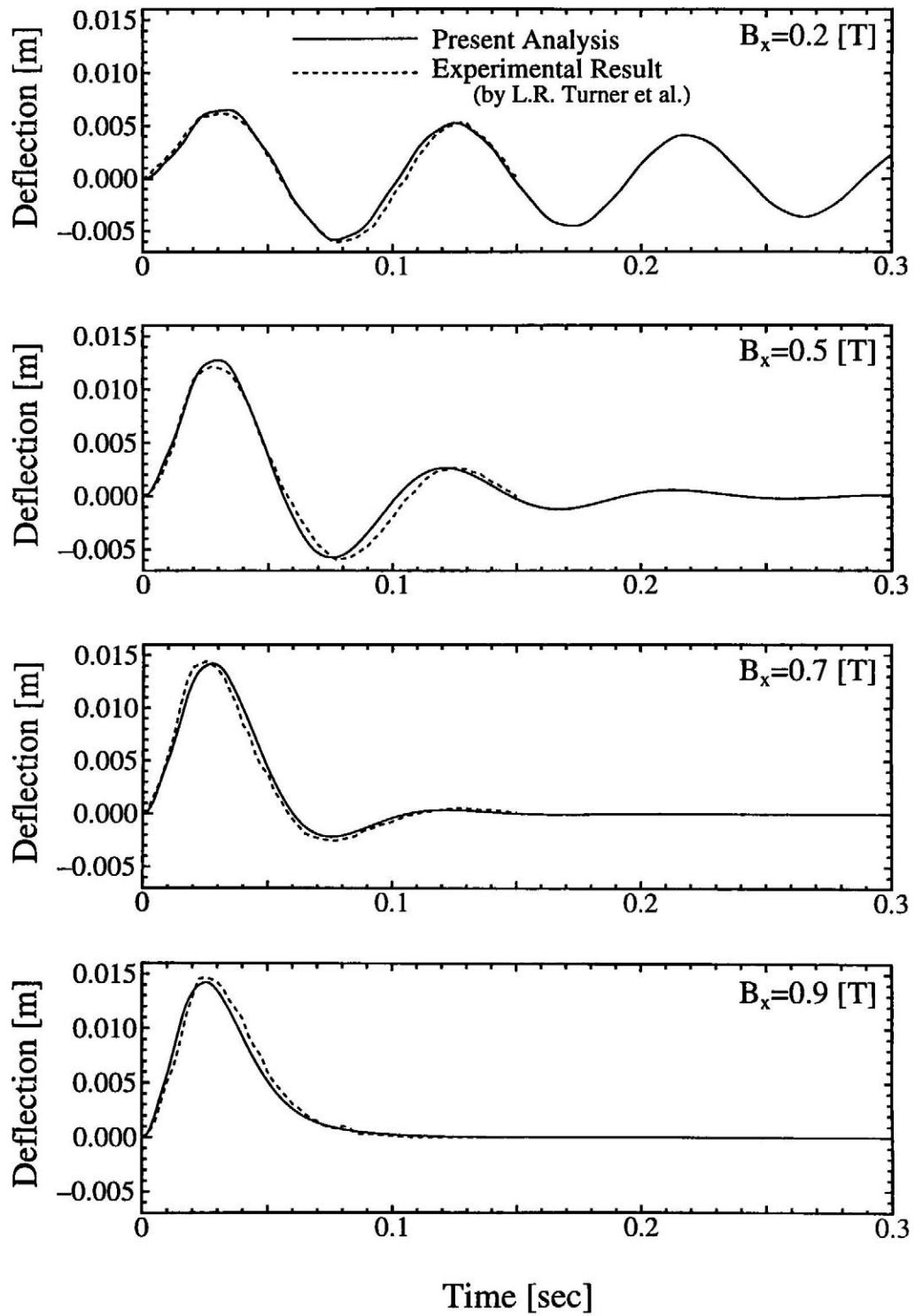
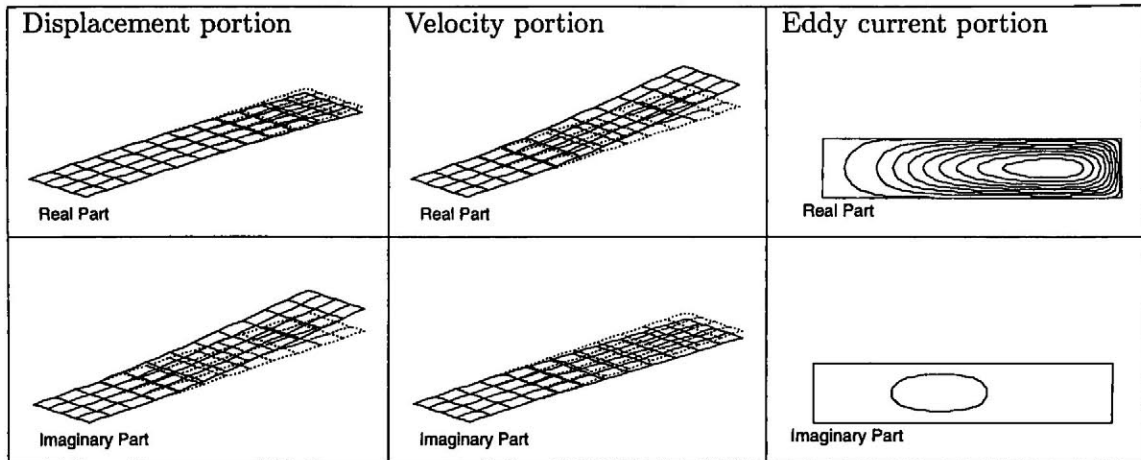
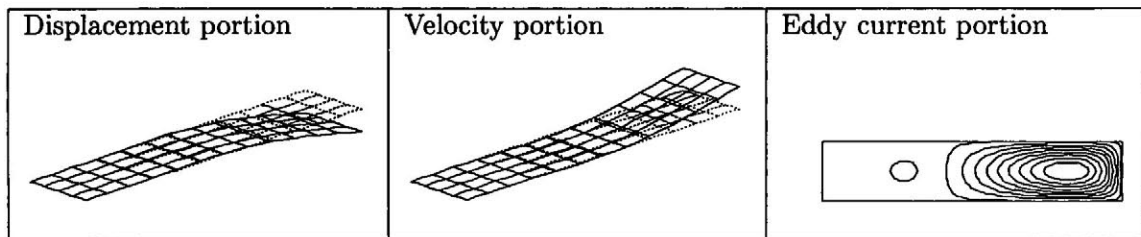


Fig. 2.5 Deflections of the plate (bending)



(a) Structural mode S1



(b) Eddy current mode E1

Fig. 2.6 Coupled modes of the plate

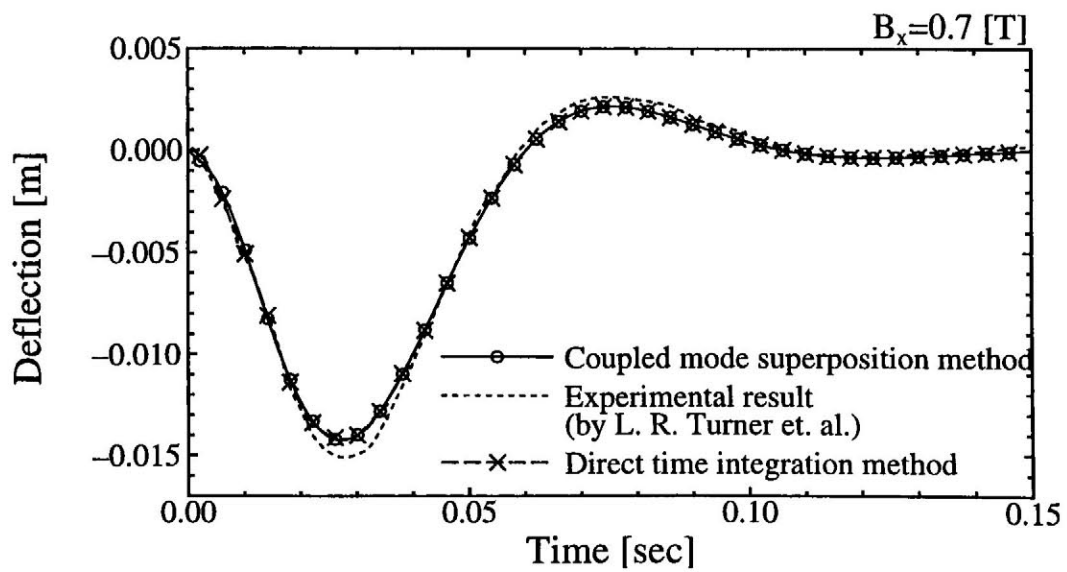


Fig. 2.7 Deflection of the plate by coupled mode superposition method (bending)

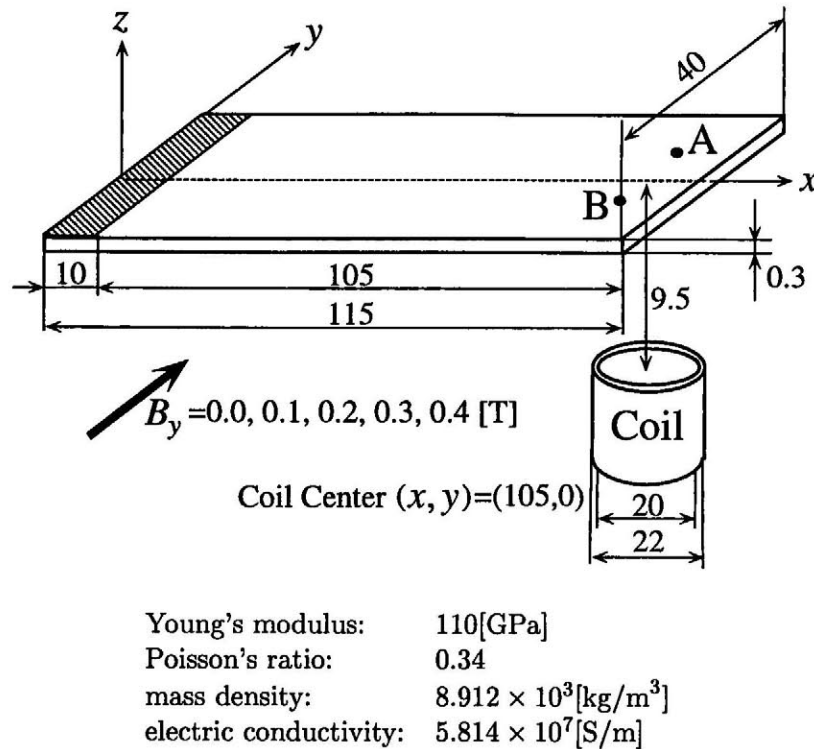


Fig. 2.8 Schematic diagram of a plate in steady electromagnetic field  $B_y$  (torsion and bending)

### 2.3.2 平板ねじり変形の連成問題

#### (a) 問題設定

Fig.2.8 に示される, TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 16<sup>(2.2)</sup>, すなわち, 片端固定平板のねじり変形磁気減衰問題を解析する. コイルに Fig.2.9 に示す非定常電流を流すことにより変動磁場を与え, 平板に渦電流を発生させる. これと横方向の定常磁場  $B_y$  による電磁力によって板にねじり変形が生じ, 板を貫く  $B_y$  によって磁気減衰する. なお, 変動磁場の面内成分と渦電流により, 曲げ変形も同時に生じる.

#### (b) 解析結果

Fig.2.10 に示す要素分割を用い, 直接時間積分法で得られた, A 点でのたわみを Fig.2.11 に, B 点でのたわみを Fig.2.12 に示す. これらの図には高木らによる実験結果<sup>(2.8)</sup>も示している. なお, 本解析では, 時間ステップ幅を 0.0391[ms] とした. 解析結果は, 実験結果と良く一致しており, 定式化の妥当性が検証される.

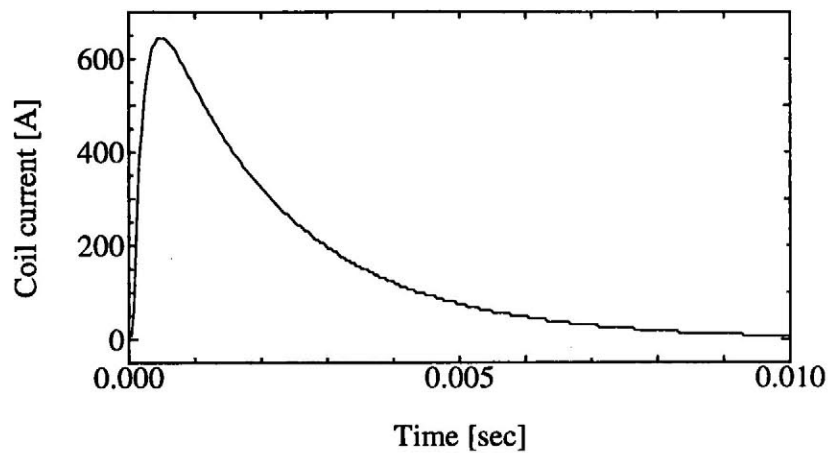


Fig. 2.9 Current profile of the coil



Fig. 2.10 Mesh subdivision of the plate

連成モード合成法によって得られた A 点の変位, 実験結果, および直接時間積分法による解析結果を Fig.2.13 に示す. なお, 定常磁場  $B_y$  は 0.2[T], 時間ステップ幅は 0.0391[ms] とした. この場合も本解析法による結果は, 実験結果および直接時間積分法による結果と良く一致しており, 精度良く解析することができた.

また, 本解析結果は TEAM ワークショップに 16 番の解析結果として報告し, 本解析方法の妥当性が確認された<sup>(2.2)</sup>.



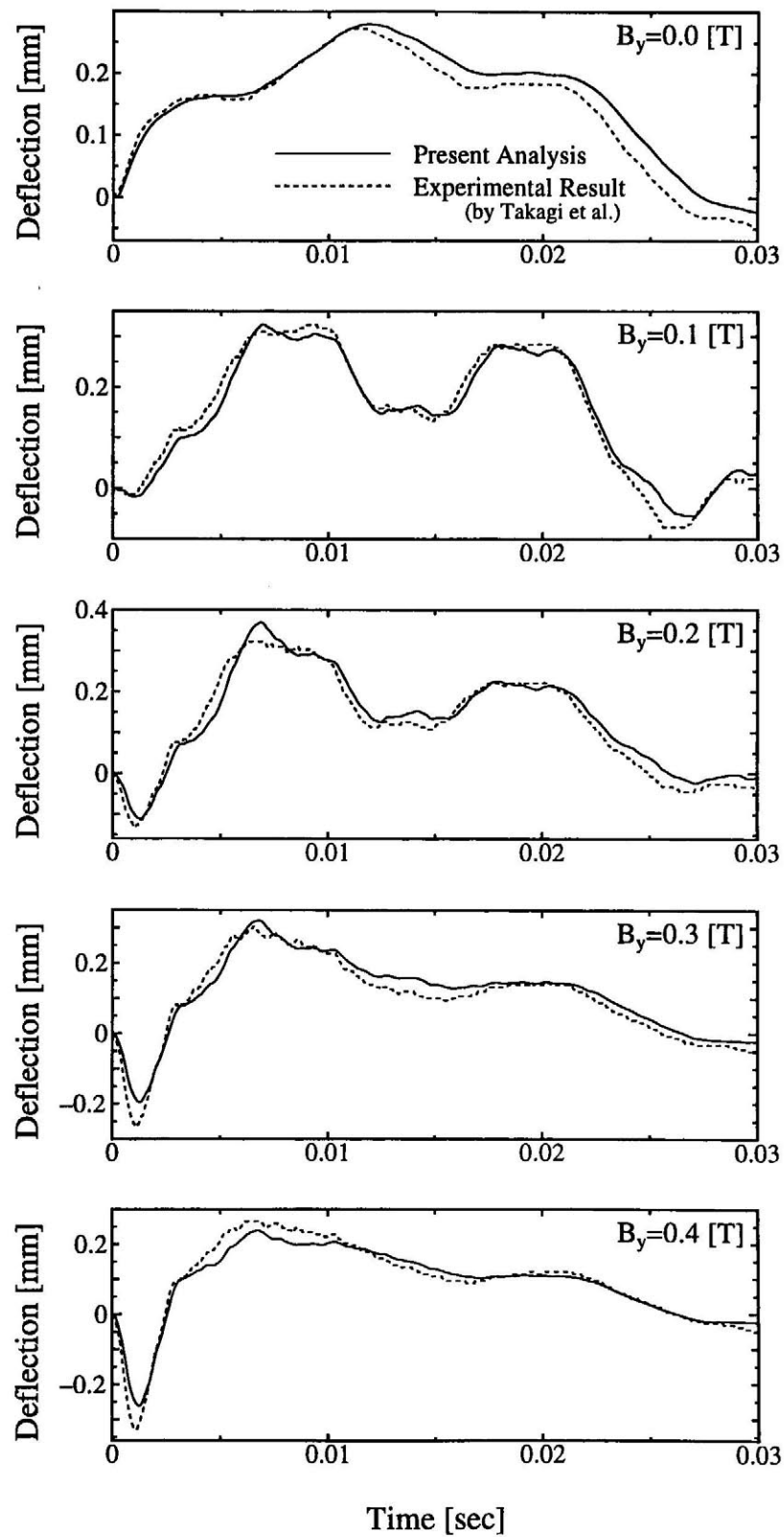


Fig. 2.11 Deflections of the plate at point A (torsion and bending)

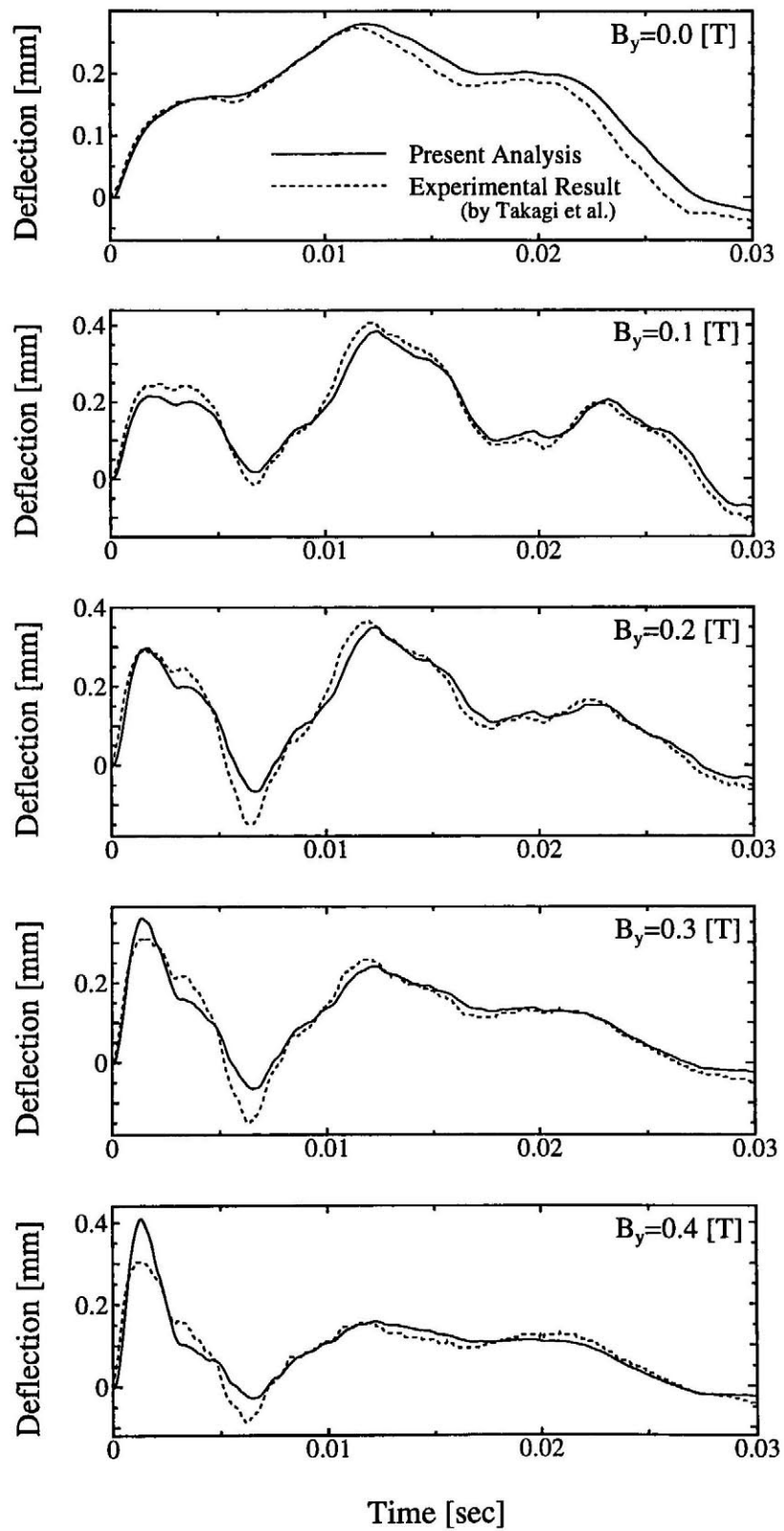


Fig. 2.12 Deflections of the plate at point B (torsion and bending)

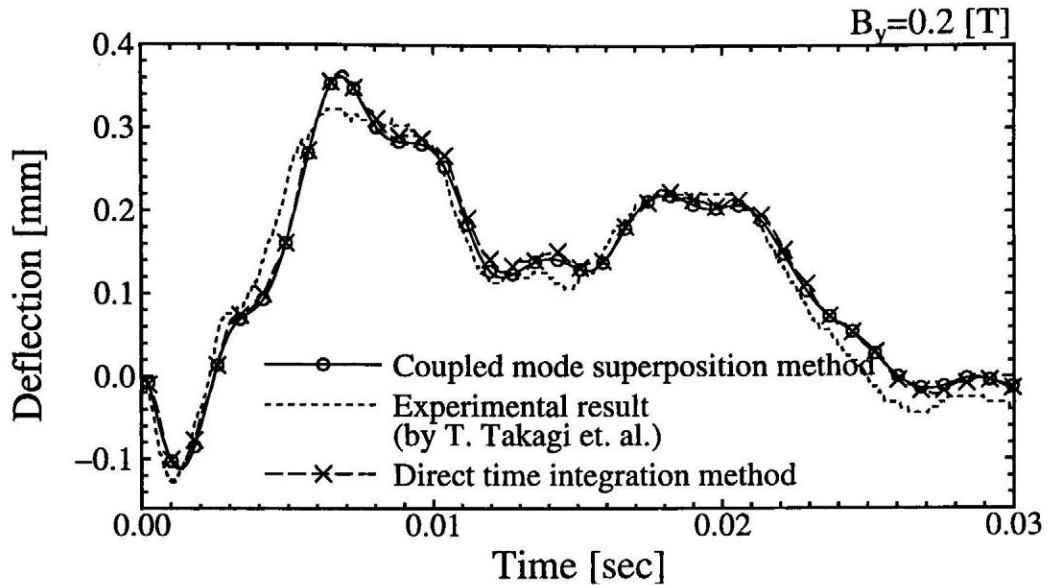


Fig. 2.13 Deflection of the plate by coupled mode superposition method (torsion and bending)

## 2.4 連成モード合成法に関する検討

### 2.4.1 通常のモード合成法との比較

一般に、モード合成法は、支配的な少数の固有モードベクトルのみで、十分な精度の解が得られる解析法であるが、連成問題では連成効果を表すモードがさらに必要になるものと考えられる。そのため、通常の方法では連成効果を見逃した固有モードベクトルを用いているが、本解析方法では連成効果を考慮した連成モードベクトルを使用している。その効果を確認するため、通常の方法と本解析方法で、必要となるモード数と解の収束性を比較する。

Fig.2.4 の曲げ連成問題 (TEAM 12) において  $B_x = 0.7[T]$  とし、構造モード数を 1 に固定し、渦電流モード数を変化させて解析する。連成モード合成法および通常の方法によって得られた、曲げ変位の時刻歴を Fig.2.14 に示す。直接時間積分法で得られた結果 (破線) と比較すると、通常の方法では、同図 (b) に示される様に 30 程度の渦電流モード (Fig.2.15 参照) が必要であることがわかる。これに対して、本解析方法では、同図 (a) の様に渦電流のモード数が 1 でもほぼ正解に近い結果が得られている。この問題では構造モードおよび渦電流モードが 1 つずつ必要となっているが、Fig.2.16 に示される様に、構造モードは定常磁場中で自由振動するときの磁気減衰振動に対応し、渦電流モー

ドの変位成分は、外部変動磁場によって生じる電磁力波形に対する変位応答となっていることがわかる。したがって、外部電磁力のなくなる 0.04[s] 以降においては、Fig.2.14(a) の様に、構造モードが 1、渦電流モードが 0 であっても、ほぼ正解が得られている。

本解析方法と通常の方法でこの様な差が生じる理由については、次節以降でさらに検討する。

### 2.4.2 連成モードベクトルの変化

定常磁場を強くした時の、渦電流モード E1 の電流ポテンシャル成分の変化を、Fig.2.17 に示す。連成が強くなるとモードの形が変化し、端によったいびつな形状になっている。また、これにともない、固有値も変化している。Fig.2.14(b) の解析では、この様な連成モード成分を表すために、30 もの非連成の渦電流固有モードを必要としていた。

### 2.4.3 連成モードベクトルについて

連成モードベクトル  $[\psi^T, \psi_v^T, \phi^T]^T$  (および連成固有値) には 2 種類のものがある。渦電流モードは実数であり、渦電流の減衰に対応し、構造モードは共役複素数で、構造物の振動に対応している。これは、非連成時に (2.29) 式が、非連成の渦電流固有モードベクトル  $\phi^0$  および非連成の構造の固有モードベクトル  $\psi^0$  を用いて、

$$\alpha^2 [\mathbf{M}] \{\psi^0\} + [\mathbf{K}] \{\psi^0\} = 0 \quad (2.36)$$

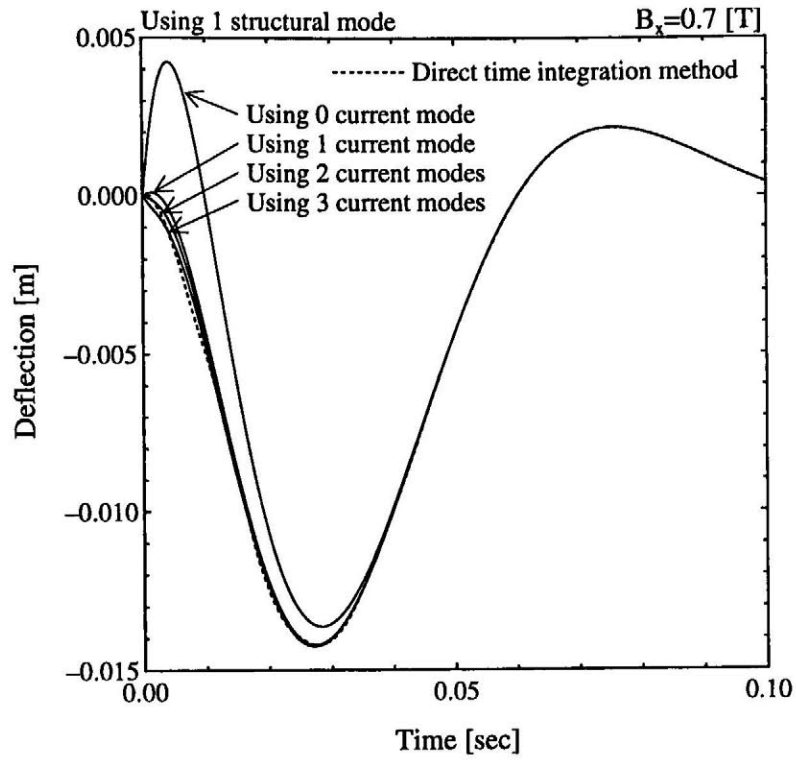
$$\alpha [\mathbf{U}] \{\phi^0\} + [\mathbf{R}] \{\phi^0\} = 0 \quad (2.37)$$

と表され、非連成時に、実ベクトルは  $[0, 0, \phi^{0T}]^T$  に、複素ベクトルは  $[\psi^{0T}, \psi_v^{0T}, 0]^T$  になるためである。

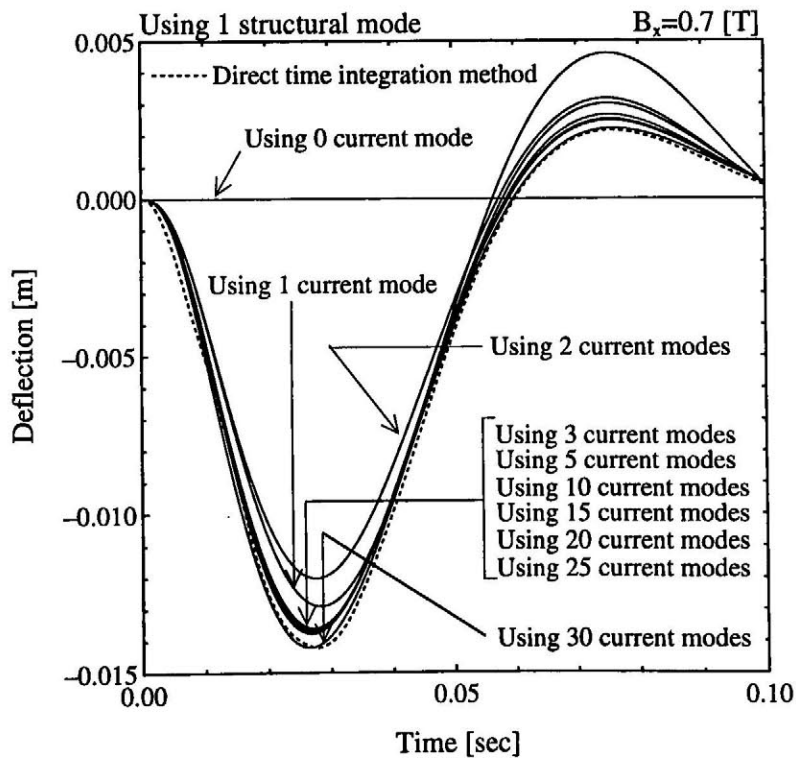
連成モードベクトルの各成分の意味は、Fig.2.16 の議論でも一部述べたが、構造モードの変位 (速度) 成分は板の自由・磁気減衰振動、構造モードの電流ポテンシャル成分は速度起電力によって生じる渦電流、渦電流モードの電流ポテンシャル成分は磁場の変動によって生じる渦電流、渦電流モードの変位 (速度) 成分は電磁力による変形モードに対応している。そして、一つの連成モードベクトル内で、各成分同士が連成している。例えば、構造モードの一つを (2.29) 式に代入すると、

$$\alpha [\mathbf{M}] \{\psi_v\}_i + [\mathbf{K}] \{\psi\}_i + [\mathbf{C}_s] \{\phi\}_i = 0 \quad (2.38)$$

$$\alpha [\mathbf{U}] \{\phi\}_i + [\mathbf{C}_e] \{\psi_v\}_i + [\mathbf{R}] \{\phi\}_i = 0 \quad (2.39)$$



(a) Coupled mode superposition method



(b) Conventional mode superposition method

Fig. 2.14 Deflection of the plate for various current modes

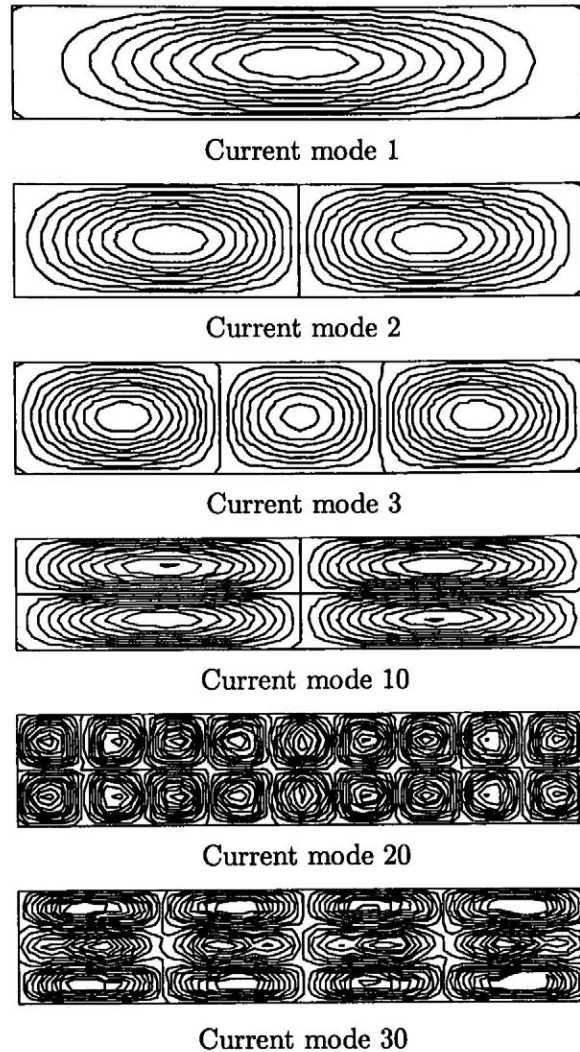


Fig. 2.15 Eddy current eigenmodes

となっており、電磁力を含む運動方程式および速度起電力を含む渦電流の支配方程式の両式とも満たしている。

連成モード合成法における連成モードベクトルと、通常の固有モードベクトルの関係を Fig.2.18に示す。通常の固有モードは、渦電流と振動とで時定数の差が大きいため、変位の基本モードの応答を見たいときも、それと連成する高次の渦電流固有モードが必要となる。これに対し、連成モードベクトルには、構造の固有モードと渦電流の固有モードから、連成するもの同士を選び、一つの時定数をもつ一つの連成モードとしてまとめていることになる。したがって、連成モード合成法は、連成解析の効率が良く、少ないモード数で連成を表せている。

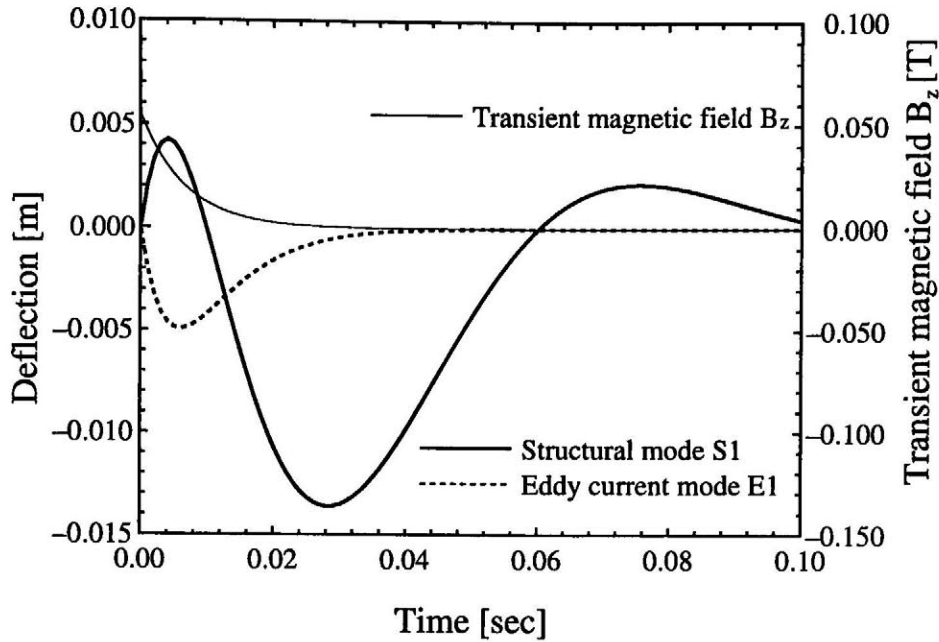


Fig. 2.16 Deflection response for structural mode S1 and eddy current mode E1

この点に関して、数値計算例で確認する。再び、Fig.2.4の問題にもどり、 $B_z$  が十分減衰した 0.055[s] における、板の長手方向 ( $y = 0$ ) の電流ポテンシャル分布を比較する (Fig.2.19 参照)。構造のモード数を 1 に固定し、渦電流のモード数を変化させているが、同図 (a) から、連成モードベクトルの構造モード S1 の電流ポテンシャル成分一つだけで、直接時間積分法による結果と一致している (この時間では自由・磁気減衰振動なので、S1 だけが効いている)。これに対し、通常モード合成法では、この電流ポテンシャル分布を得るために、30 近い多数の渦電流モードが必要である。したがって、連成モードベクトルには、連成解析で必要となる多くのモードが、一つにまとめられていることが確認される。

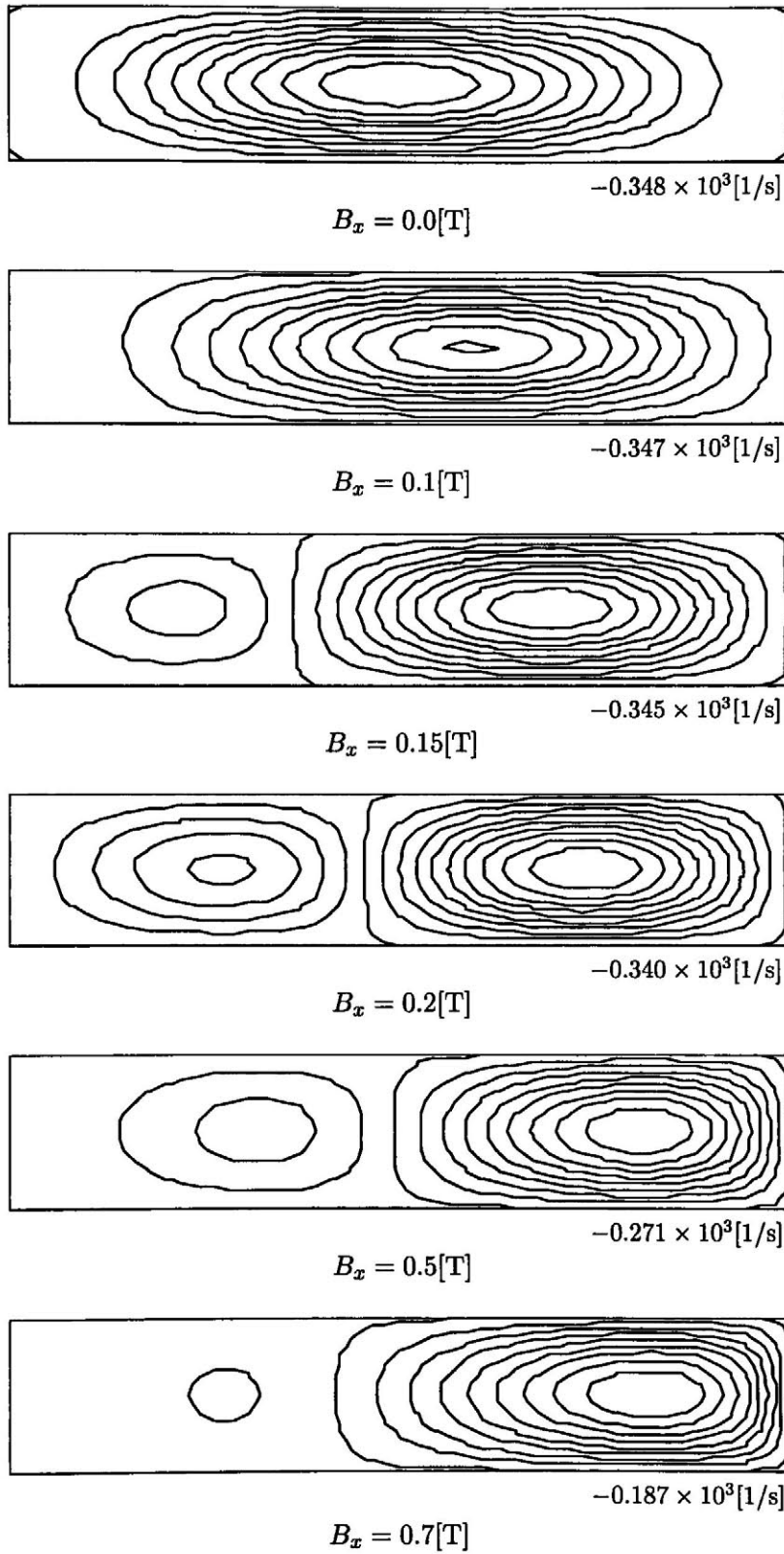


Fig. 2.17 Change of the coupled eddy current mode



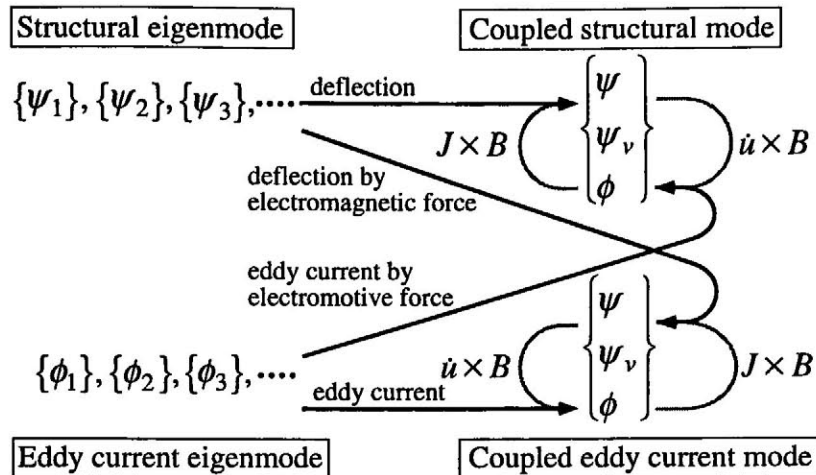
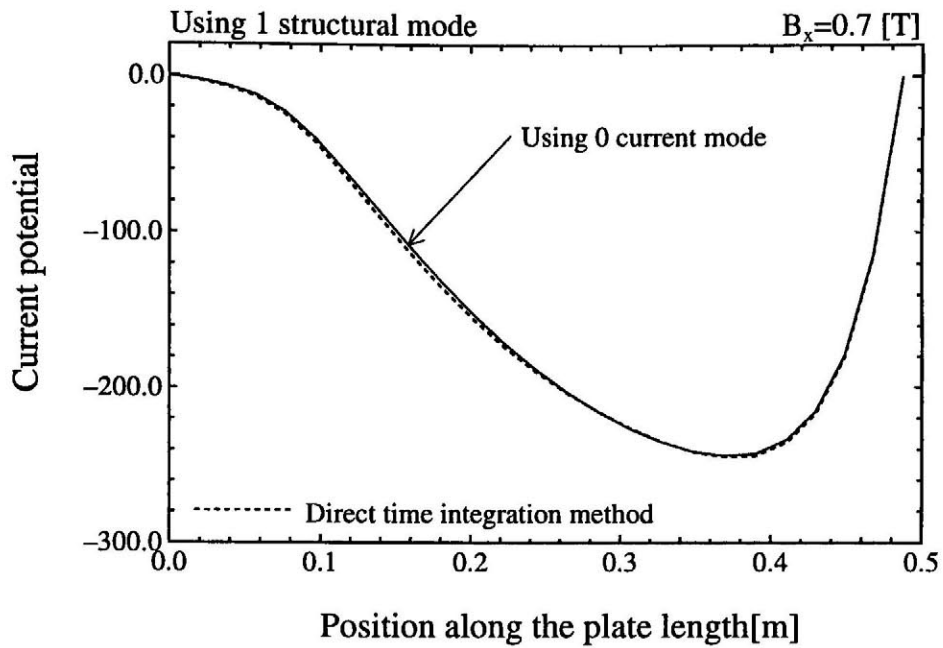


Fig. 2.18 Relation between the eigenmode and the coupled mode

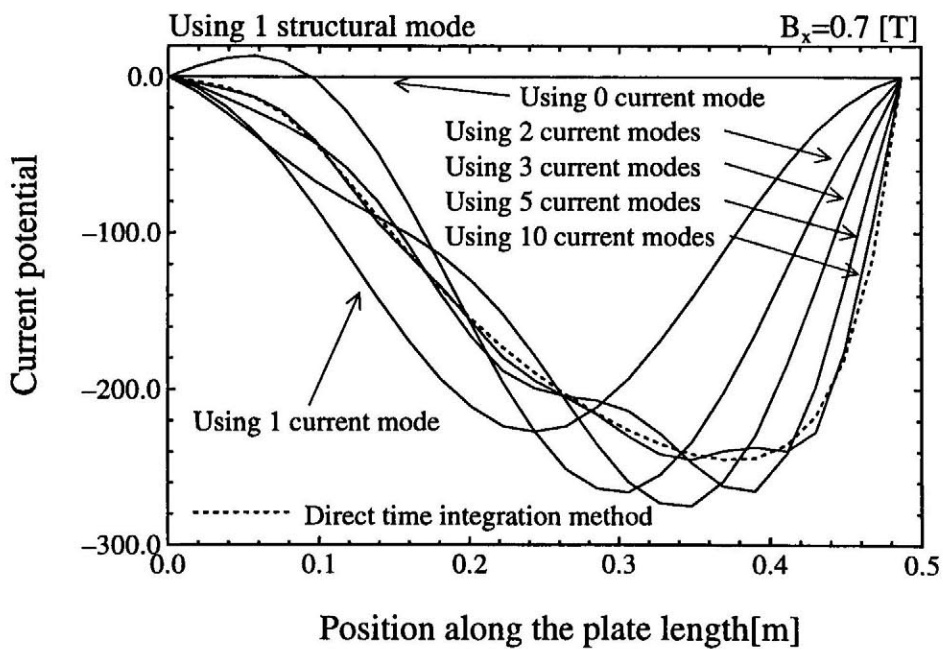
## 2.5 まとめ

磁場中に設置される導電性構造物に生じる磁気減衰現象に対して、

- 有限要素法による解析手法を提案した。本解析方法は、トカマク型核融合炉の真空容器や、磁気浮上列車の超電導コイル収納容器の解析を考慮して、曲面シェル要素を採用した。通常の磁気減衰解析手法が渦電流と構造物を交互に解析するのに対して、本解析手法は、これら2つの有限要素式を同時に解析することができる。また、時間積分法として、直接時間積分法、および、モード合成法に基づく定式化を行った。
- モード合成法に基づいた連成モード合成法の定式化の際に、モードベクトルの分離を容易にするため、新たに未知変数を導入して、対称なマトリックスを持つ有限要素式を得ることができた。さらに、連成項である速度起電力項と電磁力項が転置の関係であることを明らかにした。
- 平板たわみ、および、平板ねじり変形の磁気減衰問題で、実験結果との比較により、本解析方法の妥当性を検証した。また、連成モード合成法と通常のモード合成法との比較を行ない、通常のモード合成法では、十分な精度の解を得るために高次のモードベクトルまで必要となるのに対して、連成モード合成法では低次のモードベクトルのみで解が得られることを数値解析により確認した。これにより本解析方法が効率的な解析手法であることがわかる。
- 連成モード合成法で用いる連成固有モードベクトルと、通常のモード合成法で用いる固有モードベクトルの関係を検討し、連成モード合成法で用いる連成モードベクトルは、各連成モードベクトル内に、それに関する全ての連成効果が含まれることを明らかにした。



(a) Coupled mode superposition method



(b) Conventional mode superposition method

Fig. 2.19 Current potential of the plate (0.055[s])

## 参考文献

- (2.1) L. R. Turner and T. Q. Hua, Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields, *COMPEL*, 9-3 (1990), 205-216.
- (2.2) T. Takagi, Summary of The Results for Magnetic Damping in Torsional Mode (TEAM Problem 16), *COMPEL*, 14-2-3 (1995), 77-89.
- (2.3) T. Takagi, J. Tani, S. Matsuda and S. Kawamura, Analysis of Dynamic Deflection of a Thin Plate with a Coupling Effect, *IEEE Trans. on Mag.*, 28-2 (1992), 1259-1262.
- (2.4) Y. Yoshida, K. Miya, K. Demachi and M. Kurokawa, Magnetic damping effects on vibration of conductive shells, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, 4 (1993), 1-11.
- (2.5) 新倉節夫, 亀有昭久, 非磁性シェル構造物の電磁構造連成解析, 日本機械学会論文集, C 61-585 (1995), 1911
- (2.6) Y. Crutzen, S. Papadopoulos and F. Van Paemel, Modeling, Analysis and Validation of Electromagnetic-Mechanical Coupling on Clean Test Peaces, *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5 (1994), 3276-3279.
- (2.7) A. Kameari, Transient Eddy Current Analysis on Thin Conductors with Arbitrary and Shapes, *Journal of Computational Physics*, 42 (1981), 124-140.
- (2.8) 高木敏行, 谷順二, 川村修平, 導電性薄板の強磁場中での動的挙動に関する解析と実験, 日本機械学会論文集, C 58-556 (1992), 3537-3542.
- (2.9) 例えば O. C. ツイエンキーヴィッツ, マトリックス有限要素法, pp.391-402, 培風館, 1990.

## 第 3 章

# 大変形を考慮した磁気減衰振動解析

### 3.1 はじめに

核融合炉の炉内構造物には、プラズマディスラプション時に生じる渦電流とトロイダル磁場による強い電磁力が作用する一方で、数億度にも達するプラズマからの熱負荷も作用する。こうしたプラズマ対向機器は、熱応力対策のため強固に支持することができず、これに強い電磁力が作用すると、大変形による幾何学的非線形性を含む磁気減衰振動が生じると考えられる。そのため、こうした機器の設計には、大変形を考慮した磁気減衰振動挙動の研究が重要になると考えられる。

磁気減衰振動問題の解析方法の研究としては、TEAM ワークショップでベンチマーク問題 12 番 ‘Cantilevered Beam in Crossed Field’<sup>(3.1)</sup> および 16 番 ‘Magnetic Damping in Torsional Mode’<sup>(3.2)</sup> が設定され、数々の解析方法の提案・検証が行なわれているが、これらは微小変形の磁気減衰振動問題である。大変形による幾何学的非線形性を含む電磁構造連成問題の研究としては、Nishiguchi らが機械的荷重と電磁場的荷重が作用する非弾性体の大変形理論を提案し<sup>(3.3, 3.4)</sup>、また、Demachi らは、電磁場と構造物の連成座屈問題に対して、幾何学的非線形性・磁気減衰効果・磁気剛性効果を考慮した有限要素法に基づく解析方法を提案し、アーチ形状構造物の連成座屈問題で、実験結果との比較により解析方法の妥当性を検証している<sup>(3.5)</sup>。

ここでは、第 2 章で提案した、連成サブマトリックスを用いた磁気減衰振動解析方法を、total Lagrangian 定式化および updated Lagrangian 定式化に基づいて、大変形を考慮した磁気減衰振動問題へ拡張する。また、数値解析結果に基づき、連成効果に及ぼす大変形の影響を調べ、さらに、大変形を考慮した磁気減衰振動解析が必要となる条件について検討する。

## 3.2 大変形を考慮した連成解析方法

### 3.2.1 構造物の有限要素式

大変形による幾何学的非線形を考慮した構造物の有限要素式は、時刻 0 の要素形状を参照して変位内挿や積分を行なう total Lagrangian 定式化や、変形した要素形状を参照する updated Lagrangian 定式化によって導出される<sup>(3.6)</sup>。また、これらの定式化の際には、幾つかの種類のみずみと応力<sup>(3.7)</sup> が用いられる。

#### (a) Total Lagrangian 定式化

Total Lagrangian 定式化においては、Green-Lagrange のみずみを用いる。これは、時刻 0 (左下添字) の要素形状を参照して、時刻  $t$  (左上添字) で

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \right) \quad (3.1)$$

と定義される。ここで右下添字の  $i$  や  $j$  などは、座標軸  $x_i$  や  $x_j$  をあらわし、また、 ${}^t_0u_{i,j} = \partial {}^t u_i / \partial {}^0 x_j$  である。

解析対象を弾性問題とすると、Green-Lagrange のみずみ  ${}^t_0\epsilon_{ij}$  と微小変形問題の応力-みずみマトリックス  $C_{ijrs}$  から第 2 Piola-Kirchhoff の応力

$${}^t_0S_{ij} = C_{ijrs} {}^t_0\epsilon_{rs} \quad (3.2)$$

が得られる。これらの Green-Lagrange のみずみと第 2 Piola-Kirchhoff の応力を用いて、大変形による幾何学的非線形を考慮した有限要素式を導出する。

Green-Lagrange のみずみ  ${}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij}$  と第 2 Piola-Kirchhoff の応力  ${}^{t+\Delta t}_0S_{ij}$  を用いると、構造物に仮想変位  $\delta u_i$  を与えた時の仮想仕事の原理は

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} {}^0 dV = \int_{0S} {}^{t+\Delta t}_0f_i^S \delta u_i {}^0 dS + \int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0f_i^B \delta u_i {}^0 dV \quad (3.3)$$

となる。ここで  $f^S$  と  $f^B$  はそれぞれ表面力と物体力をあらわし、また、積分領域  $V$  と  $S$  はそれぞれ物体全体と物体表面である。

(3.3) 式であらわされた仮想仕事の原理を増分形にする。第 2 Piola-Kirchhoff の応力を

$${}^{t+\Delta t}_0S_{ij} = {}^t_0S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (3.4)$$

Green-Lagrange のみずみを

$${}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} = {}^t_0\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij} \quad (3.5)$$

と、第 2 Piola-Kirchhoff の応力増分  ${}_0S_{ij}$  と Green-Lagrange のひずみ増分  ${}_0\epsilon_{ij}$  を用いてあらわし、さらに、Green-Lagrange のひずみ増分  ${}_0\epsilon_{ij}$  を

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (3.6)$$

ただし、

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0^t u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} {}_0^t u_{k,j} \right) \quad (3.7)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (3.8)$$

と、変位増分に対して線形な成分  ${}_0e_{ij}$  および非線形な成分  ${}_0\eta_{ij}$  を用いてあらわす。

これら (3.4)~(3.6) 式を (3.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij} {}_0dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} {}_0dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}_0dV + \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij} {}_0dV \\ & + \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} {}_0dV = \int_{0S} {}_0^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}_0dS + \int_{0V} {}_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}_0dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。ここで左辺第 1 項と第 4 項は、時刻  $t + \Delta t$  の解析時において  ${}_0^t \epsilon_{ij}$  が既知量であるため、これらの積分項はゼロとなり、(3.9) 式は、

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} {}_0dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}_0dV \\ & = \int_{0S} {}_0^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}_0dS + \int_{0V} {}_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}_0dV - \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} {}_0dV \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。さらに、 ${}_0S_{ij}$  と  ${}_0\epsilon_{ij}$  が微小増分であると仮定して、これらを、

$${}_0S_{ij} = C_{ijrs} {}_0e_{rs} \quad (3.11)$$

$$\delta_0 \epsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij} \quad (3.12)$$

と線形近似し、(3.10) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta_0 e_{ij} {}_0dV + \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}_0dV \\ & = \int_{0S} {}_0^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}_0dS + \int_{0V} {}_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}_0dV - \int_{0V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} {}_0dV \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。この (3.13) 式から有限要素式を導出する。

大変形を考慮した曲面シェル座標系でのひずみ  $\{\bar{\epsilon}\}$  を,

$$\{\bar{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{y}\bar{z}} \\ \gamma_{\bar{z}\bar{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

とあらわす。また、これと変位増分  $\{\Delta \bar{u}, \Delta \bar{v}, \Delta \bar{w}\}$  を用いると、ひずみ増分  $\{\Delta \bar{\epsilon}\}$  は

$$\Delta \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \left\{ \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Delta \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right\} \\ + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right\} \quad (3.15)$$

などとあらわされる。この (3.15) 式の第 1 項と第 2 項は変位増分に関して線形項であるため線形ひずみ増分, すなわち, (3.13) 式左辺第 1 項および右辺第 3 項の  ${}_{0}e_{ij}$  に対応する。また, (3.15) 式第 3 項は変位増分の 2 次の項を含むため非線形ひずみ成分, すなわち, (3.13) 式左辺第 2 項の  ${}_{0}n_{ij}$  に対応する。

(3.13) 式と (3.15) 式から大変形を考慮した有限要素式を導くことができ, こうして導出した有限要素式を磁気減衰振動問題に拡張する。未知変数を変位増分  $\Delta u$  と電流ベクトルポテンシャルの法線方向成分  $T^{(3.8)}$  とすると, この時, 構造物の有限要素式は, 時刻  $t + \Delta t$ , 非線形方程式の解析法である Newton-Raphson 法の反復  $k$  回目で,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}^{(k)} + [\mathbf{K}_T^{(k)}]\{\Delta u\}^{(k)} + [\mathbf{C}_s]\{T\}_{t+\Delta t} = \{F^{ex}\}_{t+\Delta t} - \{R\}_{t+\Delta t}^{(k-1)} \quad (3.16)$$

となる。ここで,  $[\mathbf{M}]$  は質量マトリックス,  $[\mathbf{K}_T^{(k)}]$  は接線剛性マトリックス,  $[\mathbf{C}_s]$  は電磁力に関する連成サブマトリックス,  $\{F^{ex}\}$  は外力ベクトル,  $\{R\}$  は等価節点力ベクトルである。この (3.16) 式の右辺は, 非線形解析における不釣り合いであり, また, 時刻  $t + \Delta t$ , 反復  $k$  回目の全変位は,

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(k)} = \{u\}_{t+\Delta t}^{(k-1)} + \{\Delta u\}^{(k)} \quad (3.17)$$

とあらわされる。

接線剛性マトリックス  $[\mathbf{K}_T^{(k)}]$  は,

$$[\mathbf{K}_T^{(k)}] = [\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_u] + [\mathbf{K}_\sigma] \quad (3.18)$$

であり,  $[\mathbf{K}_L]$  は微小変形剛性マトリックス,  $[\mathbf{K}_u]$  は初期変位剛性マトリックス,  $[\mathbf{K}_\sigma]$  は初期応力剛性マトリックスである.  $[\mathbf{K}_L]$  は (3.15) 式の第 1 項,  $[\mathbf{K}_u]$  は (3.15) 式の第 2 項,  $[\mathbf{K}_\sigma]$  は (3.15) 式の第 3 項に対応する. 微小変形問題においては, (3.14) 式の右辺第 2 項を省略してひずみが定義されるため, (3.15) 式の第 2 項と第 3 項がゼロ, すなわち, 初期変位剛性マトリックス  $[\mathbf{K}_u]$  と初期応力剛性マトリックス  $[\mathbf{K}_\sigma]$  はゼロとなる.

### (b) Updated Lagrangian 定式化

Updated Lagrangian 定式化においては, Almansi のひずみを用いる. これは, 時刻  $t$  の要素形状を参照して, 時刻  $t$  で

$${}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} - {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right) \quad (3.19)$$

と定義される.

解析対象を弾性問題とすると, Almansi のひずみ  ${}^t\epsilon_{ij}$  と微小変形問題の応力-ひずみマトリックス  $C_{ijrs}$  から Cauchy の応力

$${}^t\tau_{ij} = C_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs} \quad (3.20)$$

が得られる. これらの Almansi のひずみと Cauchy の応力を用いて, 大変形による幾何学的非線形を考慮した有限要素式を導出する.

Updated Lagrangian 定式化における仮想仕事の原理は, total Lagrangian 定式化と同様に Green-Lagrange のひずみ  ${}^{t+\Delta t}{}^t\epsilon_{ij}$  と第 2 Piola-Kirchhoff の応力  ${}^{t+\Delta t}{}^tS_{ij}$  を用いて,

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t}{}^tS_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}{}^t\epsilon_{ij} {}^t dV = \int_{oS} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}^0 dS + \int_{oV} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^0 dV \quad (3.21)$$

とあらわされる.

この (3.21) 式中の  ${}^{t+\Delta t}{}^tS_{ij}$  を増分形にすると,

$${}^{t+\Delta t}{}^tS_{ij} = {}^tS_{ij} + {}_tS_{ij} \quad (3.22)$$

となるが, 時刻  $t$  の形状を参照した時刻  $t$  の第 2 Piola-Kirchhoff の応力  ${}^tS_{ij}$  は Cauchy の応力  ${}^t\tau_{ij}$  と同じになるため, (3.22) 式は

$${}^{t+\Delta t}{}^tS_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}_tS_{ij} \quad (3.23)$$

となる. ここで  ${}_tS_{ij}$  は Truesdell の応力速度と呼ばれる. また, 時刻  $t$  の形状を参照した時刻  $t + \Delta t$  の Green-Lagrange のひずみ  ${}^{t+\Delta t}{}^t\epsilon_{ij}$  はひずみ増分となるので,

$${}^{t+\Delta t}{}^t\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij} \quad (3.24)$$



となり、さらに、この  ${}^t\epsilon_{ij}$  を

$${}^t\epsilon_{ij} = {}^te_{ij} + {}^t\eta_{ij} \quad (3.25)$$

ただし、

$${}^te_{ij} = \frac{1}{2} ({}^tu_{i,j} + {}^tu_{j,i}) \quad (3.26)$$

$${}^t\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^tu_{k,i} {}^tu_{k,j} \quad (3.27)$$

と、変位増分に対して線形な成分  ${}^te_{ij}$  および非線形な成分  ${}^t\eta_{ij}$  を用いてあらわす。

これら (3.23)~(3.25) 式を (3.21) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int_{{}^tV} {}^tS_{ij} \delta {}^t\epsilon_{ij} {}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^te_{ij} {}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} {}^tdV \\ &= \int_{{}^0S} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}^0dS + \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^0dV \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。さらに、 ${}^tS_{ij}$  と  ${}^t\epsilon_{ij}$  が微小増分であると仮定し、これらを、

$${}^tS_{ij} = C_{ijrs} {}^te_{rs} \quad (3.29)$$

$$\delta {}^t\epsilon_{ij} = \delta {}^te_{ij} \quad (3.30)$$

と線形近似し、これらを (3.28) 式に代入すると

$$\begin{aligned} & \int_{{}^tV} C_{ijrs} {}^te_{rs} \delta {}^te_{ij} {}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} {}^tdV \\ &= \int_{{}^0S} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i {}^0dS + \int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^0dV - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^te_{ij} {}^tdV \end{aligned} \quad (3.31)$$

となる。この (3.31) 式から有限要素式を導出する。

Updated Lagrangian 定式化においても、大変形を考慮した曲面シェル座標形でのひずみとして (3.14) 式を用いるが、この定式化では参照形状を要素の変形に応じて更新する。そのため、ひずみ増分の (3.15) 式の変位  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  の微分項がゼロ、すなわち、(3.15) 式第 2 項がゼロとなる。また、(3.15) 式の第 1 項は変位増分に関して線形項であるため (3.31) 式左辺第 1 項および左辺第 3 項の  ${}^te_{ij}$  に対応し、また、(3.15) 式の第 3 項は変位増分の 2 次の項を含むため (3.31) 式左辺第 2 項の  ${}^t\eta_{ij}$  に対応する。

Total Lagrangian 定式化と同様に、(3.31) 式と (3.15) 式の第 2 項をゼロとした式から、大変形を考慮した有限要素式を導くことができ、これを磁気減衰振動問題に拡張すると、表記上は total Lagrangian 定式化と同一の、(3.16) 式の有限要素式が得られる。しかし、updated Lagrangian 定式化では (3.15) 式の第 2 項をゼロとすることから、接線剛性マトリックス  $[K_T]$  は、

$$[K_T^{(k)}] = [K_L] + [K_\sigma] \quad (3.32)$$

となり、また、これらの剛性マトリックスと (3.16) 式の等価節点力ベクトル  $\{R\}$  は変形した要素形状を参照して導出される。

### 3.2.2 渦電流の有限要素式

大変形においては、構造物に対して渦電流が作る磁束密度や外部から与えられる磁束密度の向き・大きさが要素形状の変形に応じて変化するため、これらのマトリックスやベクトルも変形毎に変化する。しかし、ここでは、こうした大変形による渦電流への影響は小さいと仮定し、渦電流の有限要素式を微小変形解析と同様に、

$$[\mathbf{U}]\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{R}]\{T\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{C}_e]\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{B}^{ex}\}_{t+\Delta t} \quad (3.33)$$

とする。この時、大変形の効果は、速度起電力項である (3.33) 式の第 3 項で考慮される。

### 3.2.3 連成解析方法

構造物の有限要素式 (3.16) 式に Newmark の  $\beta$  法を適用すると、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{4}{\Delta t^2} [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}_T^{(k)}]_{t+\Delta t} \right) \{\Delta u\}^{(k)} + [\mathbf{C}_s]\{T\}_{t+\Delta t} \\ & = \{F^{ex}\}_{t+\Delta t} - \{R\}_{t+\Delta t}^{(k-1)} - [\mathbf{M}] \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} (\{u\}_{t+\Delta t}^{(k-1)} - \{u\}_t) - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}\}_t - \{\ddot{u}\}_t \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり、渦電流の有限要素式 (3.33) 式に Crank–Nicolson 法を適用すると、

$$\begin{aligned} -[\mathbf{C}_e]\{u\}_{t+\Delta t} - ([\mathbf{U}] + \alpha\Delta t[\mathbf{R}])\{T\}_{t+\Delta t} & = -\alpha\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_{t+\Delta t} - (1-\alpha)\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_t \\ & - [\mathbf{C}_e]\{u\}_t - ([\mathbf{U}] - (1-\alpha)\Delta t[\mathbf{R}])\{T\}_t \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。ここで  $\Delta t$  は時間ステップ幅、 $\beta$  と  $\alpha$  は、それぞれ Newmark の  $\beta$  法と Crank–Nicolson 法の定数である。

(3.34) 式と (3.35) 式を組み合わせて連成系の有限要素式とするためには、(3.35) 式左辺第 1 項の  $\{u\}_{t+\Delta t}$  を増分形にする必要がある。そこで、この項に (3.17) 式を代入すると、(3.35) 式は、

$$\begin{aligned} -[\mathbf{C}_e]\{\Delta u\}^{(k)} - ([\mathbf{U}] + \alpha\Delta t[\mathbf{R}])\{T\}_{t+\Delta t} & = -\alpha\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_{t+\Delta t} - (1-\alpha)\Delta t\{\dot{B}^{ex}\}_t \\ & - [\mathbf{C}_e] (\{u\}_t - \{u\}_{t+\Delta t}^{(k-1)}) - ([\mathbf{U}] - (1-\alpha)\Delta t[\mathbf{R}])\{T\}_t \end{aligned} \quad (3.36)$$

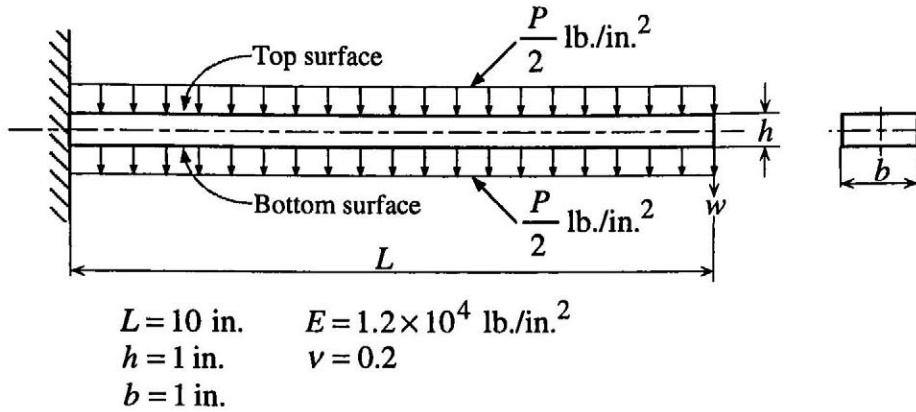


Fig. 3.1 Large deflection problem of a cantilever

となり、この式と (3.34) 式を組み合わせることにより、時間積分を適用した大変形の電磁構造連成系有限要素式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{(k)} + \frac{\mathbf{M}}{\beta(\Delta t)^2} & \mathbf{C}_s \\ -\mathbf{C}_e & -(\mathbf{U} + \alpha\Delta t\mathbf{R}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ T \end{Bmatrix}_{t+\Delta t}^{(k)} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

となる。ここで、 $\{F_1\}$  と  $\{F_2\}$  は、それぞれ、(3.34) 式と (3.36) 式の右辺である。この (3.37) 式に Newton-Raphson 法を適用して解を求めるが、この式の  $[\mathbf{K}_T^{(k)}]$  は、(3.18) 式や (3.32) 式で表されるように  $[\mathbf{K}_u]$  や  $[\mathbf{K}_\sigma]$  を含んでおり、これが非線形性を持つため、反復毎に  $[\mathbf{K}_T^{(k)}]$  を更新する必要がある。

### 3.3 定式化の検証

大変形解析の検証として、Fig.3.1 に示す、はりの曲げ問題を解析する。これは、片端が完全固定されたはりに上下面から  $P/2$  の一様荷重を与える問題である。大変形解析で得られた板の自由端変位を Fig.3.2 に示す。また、本解析では、定式化に 8 節点アイソパラメトリックシェル要素を採用したため、板の上面と下面に分けて荷重を与えることができないが、本解析では、板の上面から  $P$  の荷重を与えて解析した。解析結果は、Batheらの解析結果<sup>(3.9)</sup>と良く一致しており、大変形問題に対する本解析コードの妥当性が確認される。

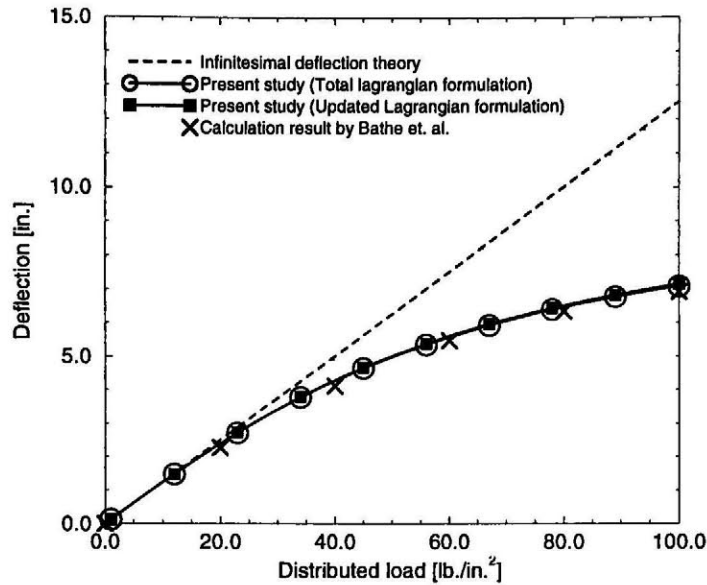


Fig. 3.2 Result of the large deflection problem

## 3.4 大変形を生じる平板の連成解析

### 3.4.1 解析問題

連成効果に対する大変形の影響、および、大変形を考慮した連成解析が必要となる条件について検討するため、Fig.3.3に示す一様磁場中に置かれた平板の磁気減衰振動問題を解析する。ここでは、板に、

$$B_z = b_0 \exp \frac{-t}{6.6 \times 10^{-3}} [\text{T}] \quad (3.38)$$

なる時間的に変化する磁場  $B_z$  を印加して、平板に渦電流を発生させる。この渦電流と板の長手方向の一様磁場  $B_x$  によって電磁力が生じて、板を振動させ、また、振動による変形速度と磁場  $B_x$  によって速度起電力が発生し、渦電流に影響を与えるという問題である。

解析に使用した要素分割を Fig.3.4に示す。要素には8節点アイソパラメトリックシェル要素を使用し、全節点数 117、要素数 48 である。時間積分の時間幅は 0.2[msec] とした。また、平板は銅とステンレス鋼 (316 SS) を設定した。これらの材料定数を Table 3.1 に示す。

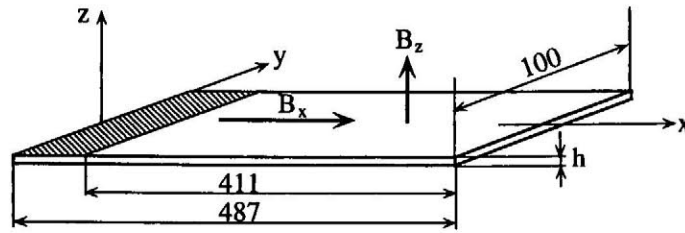


Fig. 3.3 Schematic diagram of a plate placed in electromagnetic field

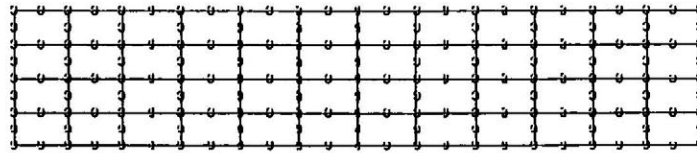


Fig. 3.4 Mesh subdivision of the plate

Table 3.1 Material properties of the plate

	Copper	316 SS
Young's modulus [Pa]	$1.1 \times 10^{11}$	$1.8 \times 10^{11}$
Poisson's ratio	0.0	0.27
Mass density [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	$8.912 \times 10^3$	$7.9 \times 10^3$
Electrical resistivity [ $\Omega\text{m}$ ]	$1.72 \times 10^{-8}$	$7.2 \times 10^{-7}$

### 3.4.2 解析結果

定常磁場  $B_x$  を 0.5[T] とし, (3.38) 式の変動磁場の初期値  $b_0$  を変化させた場合の, 銅板の自由端たわみを Fig.3.5 に示す. ただし, 板厚は 3.175[mm] とした. 大変形解析で得られるたわみは, 微小変形解析で得られるたわみと比較して小さくなっており, 変動磁場が大きくなるに従い, 2つの解析方法の差が大きくなっていることがわかる.

Fig.3.6 に,  $b_0$  を変化させた場合の, 316 SS の自由端のたわみを示す. ただし, 定常磁場  $B_x$  は 5.0[T] とした. 変動磁場  $B_z$  が小さい場合 (同図 (a)) には, 大変形解析と微小変形解析による結果が一致しており, 変動磁場  $B_z$  が大きくなるに従い両解析法に結果の差が大きくなっている.

初期変動磁場  $b_0$  を 5.0[T] に固定し、定常磁場  $B_x$  を変化させた場合の 316 SS の自由端たわみを Fig.3.7 に示す。減衰振動状態 (同図 (a)(b)) では、大変形解析によるたわみの方が、微小変形解析によるたわみと比較して小さくなっているが、過減衰状態 (同図 (c)) においては、大変形解析結果と微小変形解析結果の差が小さくなっていることがわかる。

## 3.5 大変形の連成効果への影響

### 3.5.1 非定常磁場の影響

316SS 板の最大たわみと変動磁場の初期値  $b_0$  との関係を Fig.3.8 に示す。微小変形解析では、 $b_0$  に比例して最大たわみも大きくなっているが、大変形解析では、 $b_0$  が大きくなるに従い最大たわみが微小変形解析と比較して小さくなっている。従って、変動磁場  $B_x$  が大きい場合に大変形解析が必要となる。

### 3.5.2 定常磁場の影響

板の最大たわみと定常磁場  $B_x$  の関係を Fig.3.9 に示す。定常磁場  $B_x$  が 5.0[T] 以下では、 $B_x$  が大きくなるに従い、電磁力も大きくなるため最大変位も大きくなっている。この時、大変形解析によるたわみは、微小変形解析によるたわみより小さくなっている。しかし、磁気減衰が大きくなる 5.0[T] 以上では、大変形解析によるたわみは、微小変形解析によるたわみと比較して大きくなっていることがわかる。これは、大変形を考慮することにより変形が小さくなり、それに伴い速度起電力も減少し、その結果、磁気減衰効果が小さくなったためであると考えられる。従って、大変形を考慮した解析では、微小変形解析と比較して、必ずしも変形が小さくなるとは限らず、微小変形解析が常に安全側の評価になるとは限らないことになり、注意が必要である。

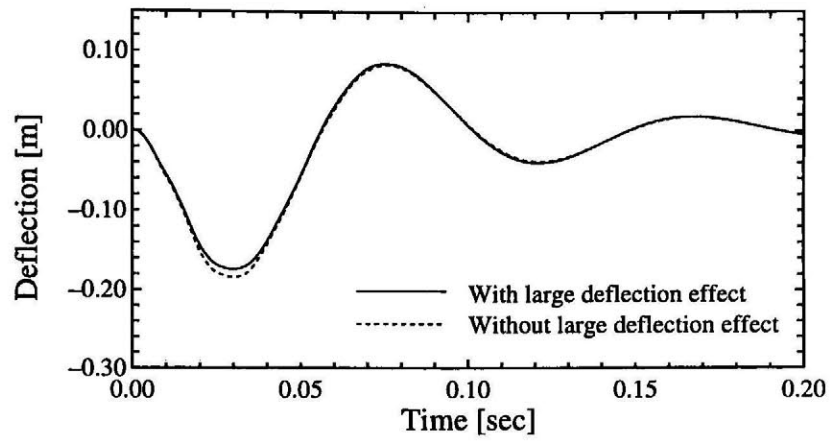
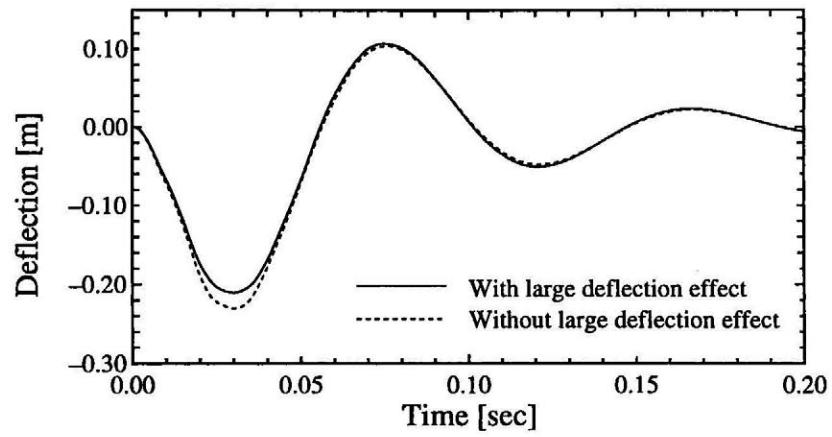
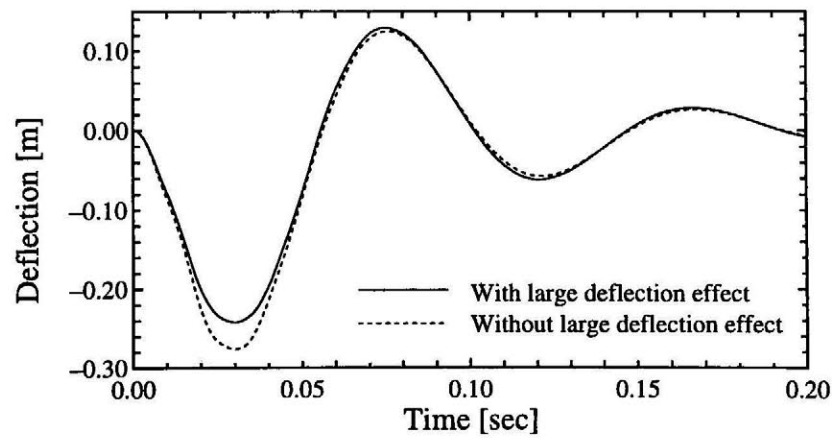
(a)  $b_0 = 0.8[\text{T}]$ (b)  $b_0 = 1.0[\text{T}]$ (c)  $b_0 = 1.2[\text{T}]$ 

Fig. 3.5 Deflection of the copper plate with transient magnetic field ( $h = 3.175[\text{mm}]$ ,  $B_x = 0.5[\text{T}]$ )

### 3.6 まとめ

大変形による幾何学的な非線形性を含む磁気減衰振動問題に対して、これまで提案した連成サブマトリックスを用いた解析方法を、total Lagrangian 定式化および updated Lagrangian 定式化に基づき拡張した。また、平板たわみの磁気減衰振動問題の解析を行ない、

- 変動磁場の大きさにより、大変形解析と微小変形解析結果に、明らかな差が確認された。このため、問題によっては大変形による非線形性を考慮した解析が必要となる。
- 定常磁場が小さい場合は、大変形解析の方が微小変形解析結果と比較してたわみが小さくなるが、定常磁場が大きくなり、板が過減衰状態になると、大変形効果は必ずしもたわみを小さくするとは限らないことがわかった。これにより、微小変形解析が必ずしも安全側の評価とならないため、設計の際に注意が必要である。

ここでは、構造解析のみに大変形による幾何学的な非線形性を考慮したが、構造物の大きな変形が渦電流に影響を与えることも十分考えられるため、こうした点でさらに研究が必要である。



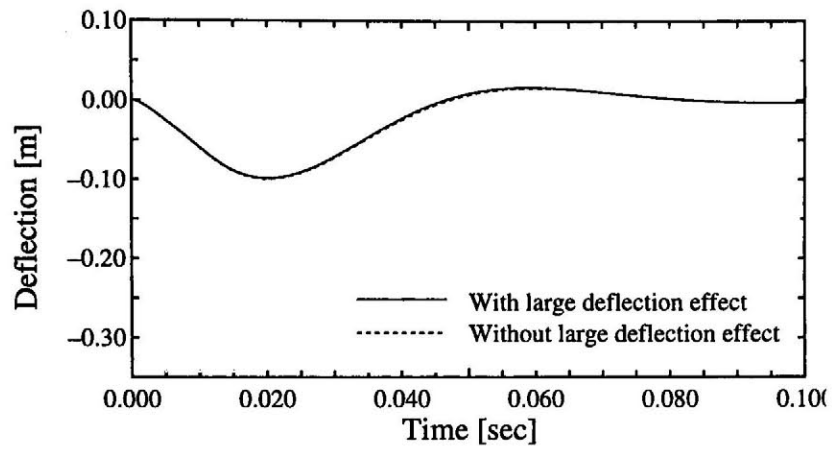
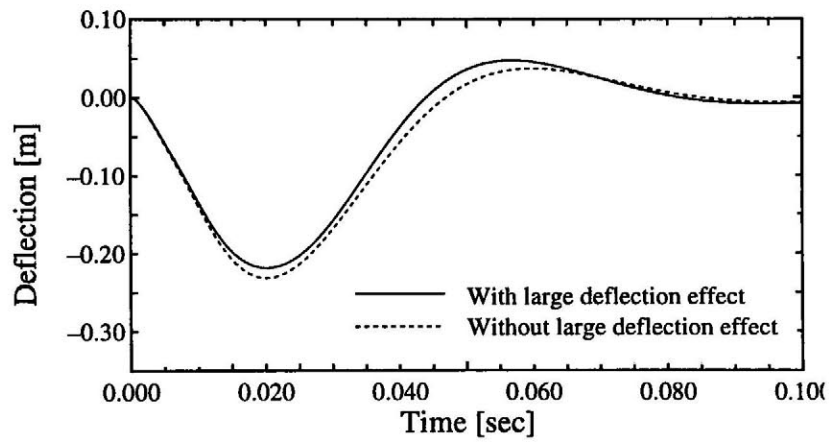
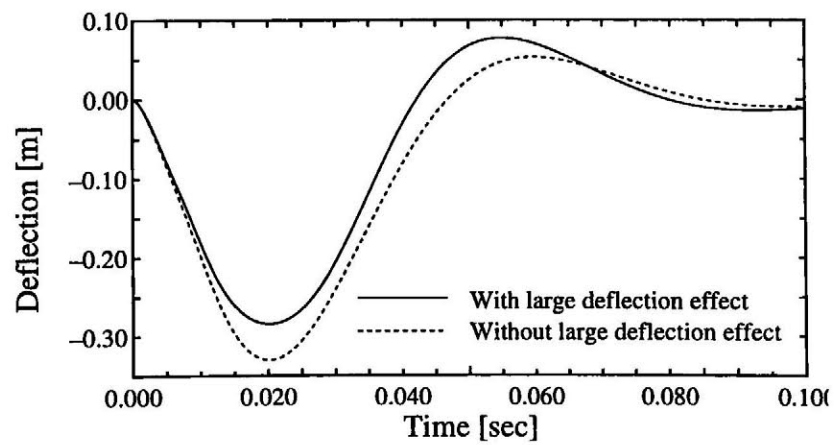
(a)  $b_0 = 3.0[\text{T}]$ (b)  $b_0 = 7.0[\text{T}]$ (c)  $b_0 = 10.0[\text{T}]$ 

Fig. 3.6 Deflection of the stainless steel plate with transient magnetic field ( $h = 3.175[\text{mm}]$ ,  $B_x = 5.0[\text{T}]$ )

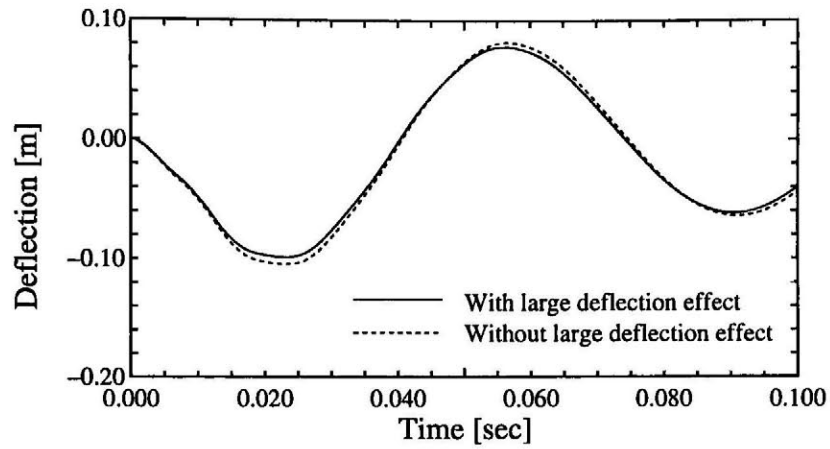
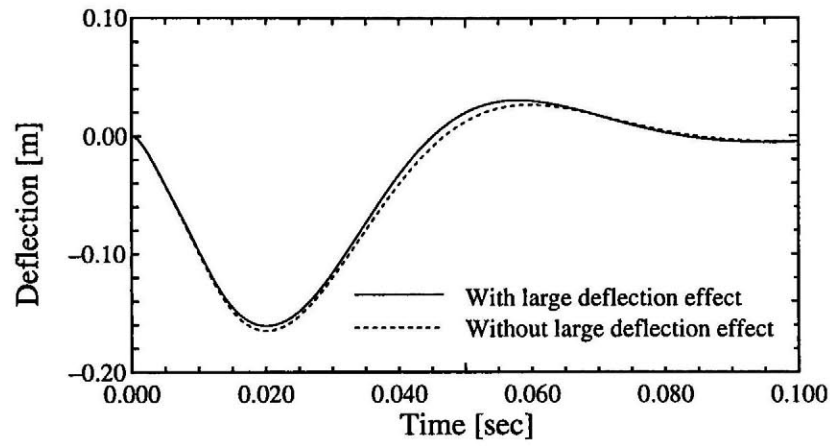
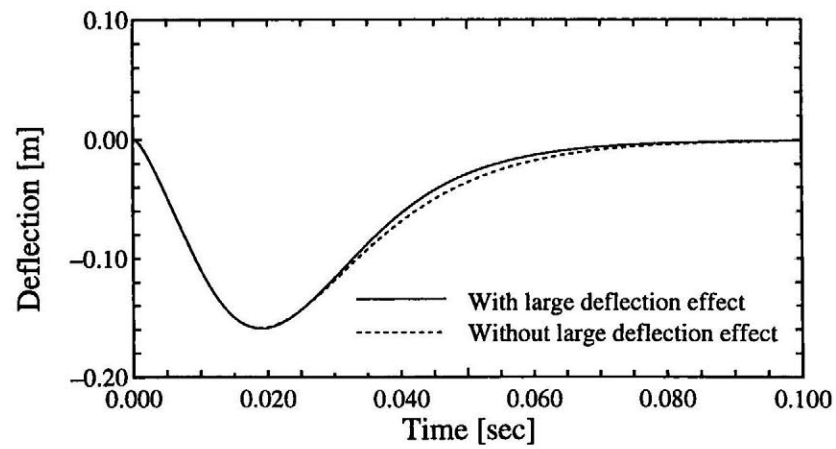
(a)  $B_x = 2.0[\text{T}]$ (b)  $B_x = 5.0[\text{T}]$ (c)  $B_x = 7.0[\text{T}]$ 

Fig. 3.7 Deflection of the stainless steel plate with steady magnetic field ( $h = 3.175[\text{mm}]$ ,  $b_0 = 5.0[\text{T}]$ )

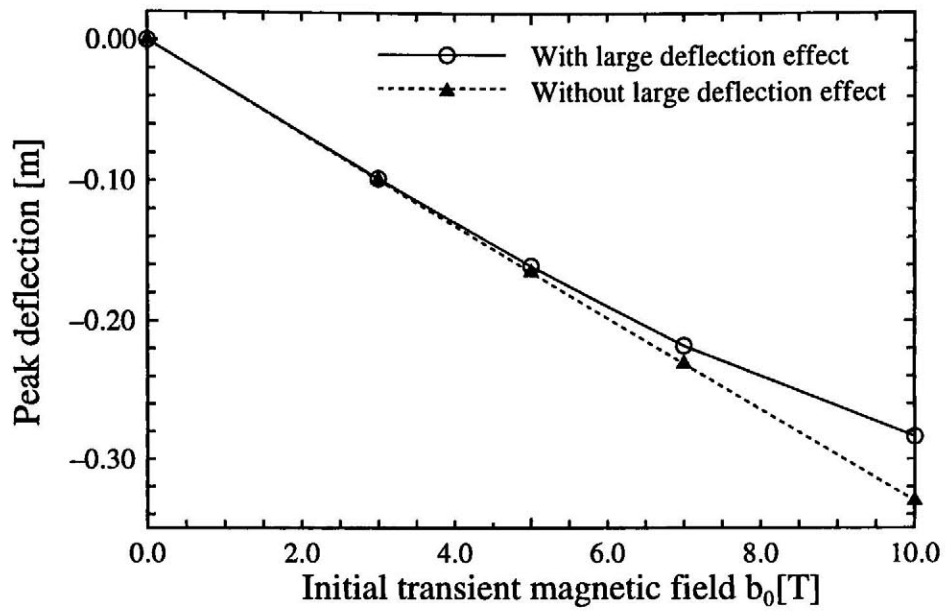


Fig. 3.8 Peak deflection of the plate with transient magnetic field

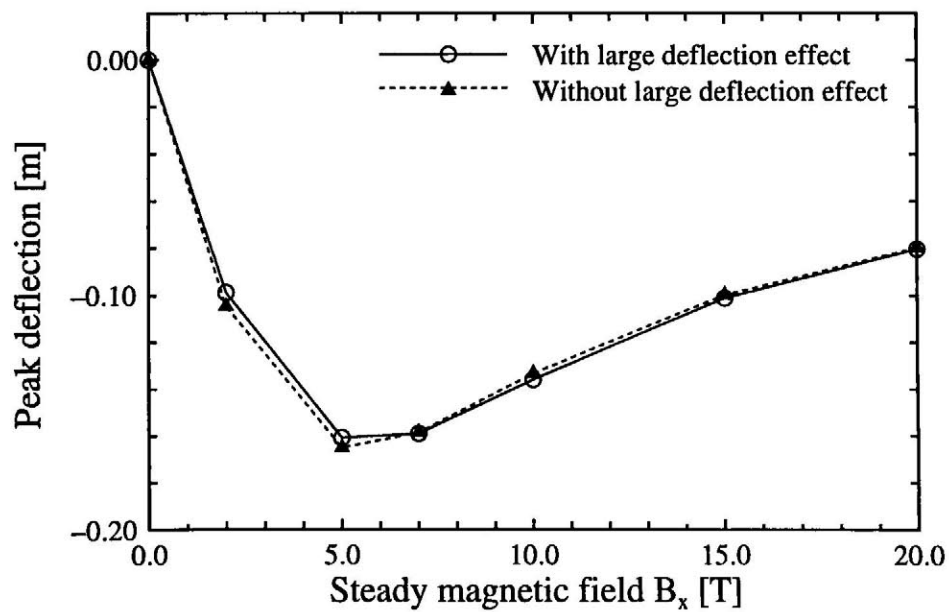


Fig. 3.9 Peak deflection of the plate with steady magnetic field

## 参考文献

- (3.1) L. R. Turner and T. Q. Hua, Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields, *COMPEL*, 9-3 (1990), 205-216.
- (3.2) T. Takagi, Summary of The Results for Magnetic Damping in Torsional Mode (TEAM Problem 16), *COMPEL*, 14-2-3 (1995), 77-89.
- (3.3) I. Nishiguchi and J. Yamamoto, A Large Deformation Theory of Inelasticity Subjected to Electromagnetic Forces, *Simulation and Design of Applied Electromagnetic Systems*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 105-108.
- (3.4) I. Nishiguchi and M. Sasaki, A Large Deformation Theory of Solids Subject to Electromagnetic Loads, *IEEE Trans. Magn*, 30-5 (1994), 3272-3275.
- (3.5) K. Demachi, Y. Yoshida and K. Miya, Numerical Analysis of Magnetoelastic Buckling of Fusion Reactor Components, *Fusion Engineering and Design*, 27 (1995), 490-498.
- (3.6) K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, (1982).
- (3.7) 例えば 久田俊明, 非線形有限要素解析のためのテンソル解析の基礎, 丸善株式会社, (1992).
- (3.8) A. Kameari, Transient Eddy Current Analysis on Thin Conductors with Arbitrary and Shapes, *Journal of Computational Physics*, 42 (1981), 124-140.
- (3.9) K. J. Bathe and A. P. Cimento Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, *Computers method in applied mechanics and engineering design*, 22 (1980), 59-85.

## 第 4 章

# 連成固有値に基づく磁気減衰パラメータ

### 4.1 はじめに

核融合炉構造物等の強磁場中で使用される機器では、外部磁場と渦電流による電磁力と同時に、外部磁場と構造物の変形による速度起電力が生じている。こうした相互作用は電磁構造連成現象と呼ばれるが、一般に構造物の振動を抑える磁気減衰効果を及ぼすため、これを考慮することによって強磁場中で使用される構造物を合理的に設計することが可能となる。したがって、こうした機器の設計には、電磁構造連成効果を定量的に評価し、また、それを考慮した強度評価方法を確立する必要がある。

磁気減衰現象に関するパラメータとしては、Takagi らが、渦電流のジュール熱損失に基づいて critical magnetic viscous damping ratio を定義し、その磁場、ヤング率、密度に対する依存性や、構造物の境界条件に対するこのパラメータの依存性を調べ<sup>(4.1)</sup>、このパラメータを用いた MMD (Modal Magnetic Damping) 法を提案している<sup>(4.2, 4.3)</sup>。また、Yoshida らは、無次元した磁気減衰振動の微分方程式にあらわれる無次元パラメータを inductance parameter, magnetic force parameter, magnetic damping parameter と定義し、これを用いた縮小モデル実験の条件決定を検討している<sup>(4.4)</sup>。

ここでは、連成効果を含んだ固有値に基づいて、連成強度パラメータを提案する。このパラメータは電磁構造連成問題において複素固有値として定義され、連成の強さに応じてこの値が変化することから、連成の強さをこのパラメータ 1 つで表現できる可能性がある。さらに、連成強度パラメータの、材料定数、外部磁場、板厚への依存性についての検討も行なう。

## 4.2 連成強度パラメータの定義

### 4.2.1 一般の減衰問題における減衰比

一般に、1自由度の自由減衰振動問題

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (4.1)$$

の固有値  $\alpha$  は、この式の特性方程式

$$m\alpha^2 + c\alpha + k = 0 \quad (4.2)$$

の解から、

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \quad (4.3)$$

$$= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_\gamma \quad (4.4)$$

と表される。ただし、

$$\gamma = \frac{c}{2m}, \quad (4.5)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c_c}{2m} \quad (4.6)$$

である。ここで  $c_c$  は臨界減衰係数と呼ばれ、

$$c_c = 2\sqrt{mk} \quad (4.7)$$

である。 $c$  が  $c_c$  より大きくなると (4.3) 式の虚数部がゼロとなり、(4.1) 式の運動は過減衰状態となる。減衰の性質を表す減衰比  $\zeta$  は、この  $c$  と  $c_c$  との比率から

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (4.8)$$

で表されるが、この  $\zeta$  は (4.4) 式の固有値  $\alpha$  から、

$$\zeta = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|} \quad (4.9)$$

によっても表すことができる。

減衰振動の性質として、角振動数  $\omega_\gamma$  は、

$$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \quad (4.10)$$

である。また、固有値  $\alpha$  の絶対値は常に固有角振動数  $\omega_0$  と一定であり、減衰の大きさとは無関係である。

## 4.2.2 磁気減衰振動問題における連成強度パラメータ

## (a) 1 自由度連成モデル

1 自由度系の電磁構造連成問題における運動方程式は、変位  $u$  および 電流ポテンシャル  $T$  を未知変数として、

$$m\ddot{u} + C_s T + ku = f^{ex} \quad (4.11)$$

となる。ここで、 $m, k, f^{ex}, C_s T$  は、それぞれ、質量、剛性、外荷重、渦電流により生じる電磁力を表す。また、渦電流に関しては、

$$U\dot{T} + C_e \dot{u} + RT = \dot{B}^{ex} \quad (4.12)$$

となる。ここで、 $U, R, \dot{B}^{ex}, C_e \dot{u}$  は、それぞれ、インダクタンス、レジスタンス、外部変動磁場、変形速度により生じる速度起電力を表す。

連成系の運動方程式は、(4.11), (4.12) 式を組み合わせることによって得られ、その特性方程式は、

$$mU\alpha^3 + mR\alpha^2 + (kU - C_e C_s)\alpha + kR = 0 \quad (4.13)$$

となる。これを解くことにより、連成効果を含む固有値は

$$\alpha_1 = -\frac{R}{3U} + \left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2, \alpha_3 = & -\frac{R}{3U} - \frac{\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ & \pm \frac{-\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} i \end{aligned} \quad (4.15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{R^2}{9U^2} + \frac{-C_e C_s + kU}{3mU} \\ b &= -\frac{R^3}{27U^3} - \frac{kR}{2mU} + \frac{R(kU - C_e C_s)}{6mU^2} \end{aligned}$$

となる。この(4.14), (4.15)式において、連成に関する  $C_e$  および  $C_s$  の値を 0 とおくと、

$$\alpha_1 = -\frac{R}{U}, \quad \alpha_2, \alpha_3 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (4.16)$$

となるため、実固有値  $\alpha_1$  が渦電流の減衰に、複素固有値  $\alpha_2, \alpha_3$  が構造物の振動に対応していることがわかる。

連成問題では、連成効果により構造物の振動が減衰する。そこで、連成強度パラメータ  $C_{es}$  を、連成効果を含む (4.15) 式の固有値  $\alpha$  に基づいて、(4.9) 式の  $\zeta$  と同様に、

$$C_{es} = \frac{\text{Re } \alpha}{|\alpha|} \quad (4.17)$$

と定義し、磁気減衰挙動を評価することにする。

## (b) 有限要素モデル

構造物の有限要素式

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{u}\} + [\mathbf{K}]\{u\} + [\mathbf{C}_s]\{T\} = \{F^{ex}\} \quad (4.18)$$

と渦電流の有限要素式

$$[\mathbf{U}]\{\dot{T}\} + [\mathbf{C}_e]\{\dot{u}\} + [\mathbf{R}]\{T\} = \{\dot{B}^{ex}\} \quad (4.19)$$

を組み合わせることによって、対称な電磁構造連成系の有限要素式、

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_e & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F^{ex} \\ -\dot{B}^{ex} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

が得られる。ここで、 $-\mathbf{C}_e$  と  $\mathbf{C}_s$  は転置であり、また  $\{v\}$  は変位速度を意味している。有限要素モデルにおける連成強度パラメータは、(4.20) 式から得られる連成固有値  $\alpha$  を用いて、1 自由度連成モデルと同様に (4.17) 式で定義する。

## 4.3 有限要素法による平板曲げ連成問題の解析

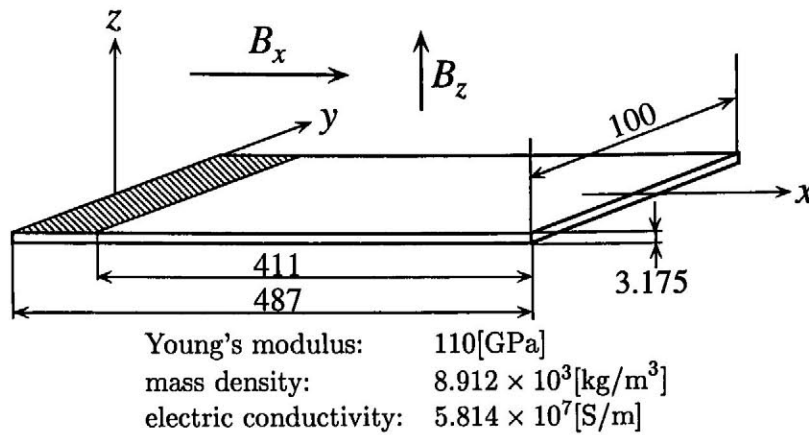
### 4.3.1 解析問題

連成強度パラメータ  $C_{es}$  の外部磁場、材料定数、板厚に対する依存性を、Fig.4.1 に示される一様磁場  $B_x$  中に置かれた片側固定平板の電磁構造連成問題で検討する。この例題は、TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 12<sup>(4.5)</sup>と同じ条件に設定している。ここでは、平板に垂直方向の

$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp \frac{-t}{6.6 \times 10^{-3}} [\text{T}] \quad (4.21)$$

なる変動磁場  $B_z$  を印加して、平板に渦電流を発生させる。この渦電流と一様磁場  $B_x$  による電磁力が構造物に作用し、また、構造物の振動と一様磁場  $B_x$  が速度起電力を誘起し、渦電流に影響を与えるという問題である。

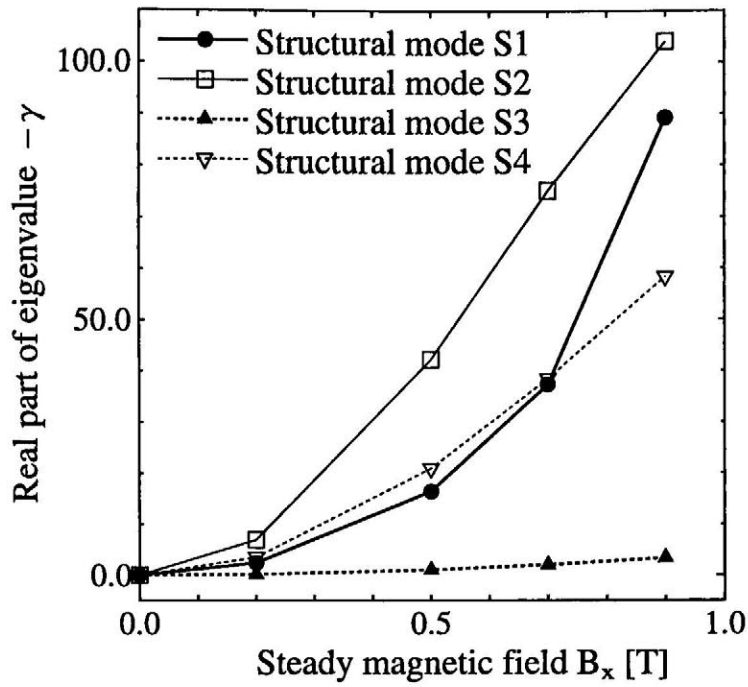


Fig. 4.1 Schematic diagram of a bending plate in steady electromagnetic field  $B_x$ 

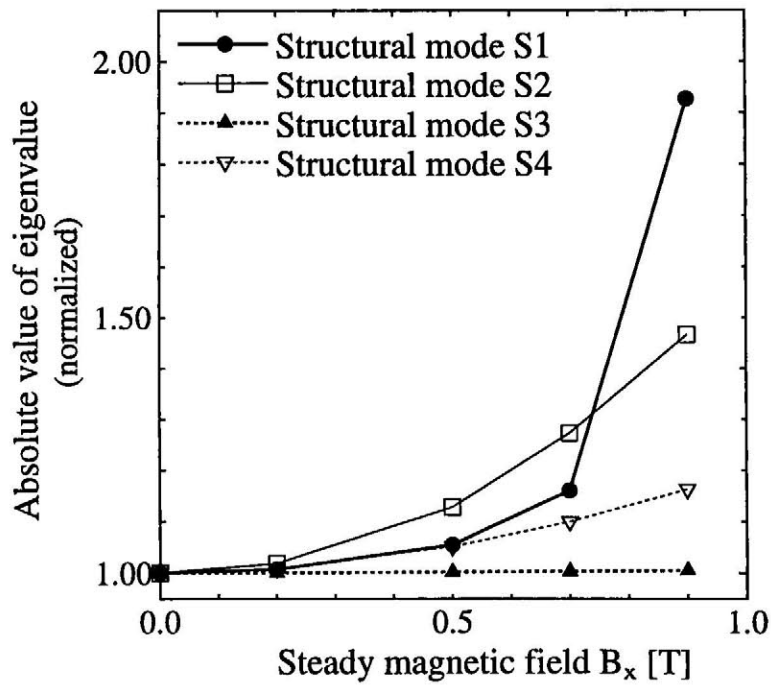
### 4.3.2 解析結果

有限要素解析から、外部定常磁場の強さに応じた連成固有値が得られる。共役複素数と実数の2種類の固有値が得られるが、複素数の連成固有値は構造物の減衰振動に対応しており、その実数部は磁気減衰振動の減衰率、虚数部は固有角振動数に相当し、外部磁場が0のとき非連成振動の固有値に等しくなる。Fig.2.6に、外部定常磁場  $B_x$  が0.7[T]の場合の連成固有モードベクトルを示す。有限要素解析から、複素固有モードベクトルと実固有モードベクトルの2種類の固有モードベクトルが得られ、これらをそれぞれ、構造モード S1,S2,...および渦電流モード E1,E2,...と呼ぶことにする。構造モードは、非連成時の振動モードが渦電流との連成により変化したものである。したがって、同図に示されるように、1つの連成固有モードベクトルは、変位、速度、電流ポテンシャルの3つの成分から構成されている。

Fig.4.2に、外部定常磁場  $B_x$  の値を0~0.9[T]の範囲で変化させ、有限要素解析で得られた複素固有値の実部および絶対値の変化を示す。同図から、いずれのモードのいずれの成分とも、磁場の強さに対して強く依存していることがわかる。特に、複素固有値の絶対値も磁場の強さに依存していることは、4.2.1.節で示した通常の減衰振動の場合と明らかに異なっており、これが電磁構造連成による磁気減衰振動の特徴といえる。なお、同図に見られる様に、各振動モード毎に磁場との連成挙動が異なるため、順番が上下しているが、本問題においては構造モード S1 が主たる振動モードである。また、磁場等への依存性に関しては、複素固有値の実数部および絶対値の両方が変化するため、連成強度パラメータに基づき次章で詳しく検討する。



(a) Real part



(b) Absolute value

Fig. 4.2 The change of eigenvalues with steady magnetic field

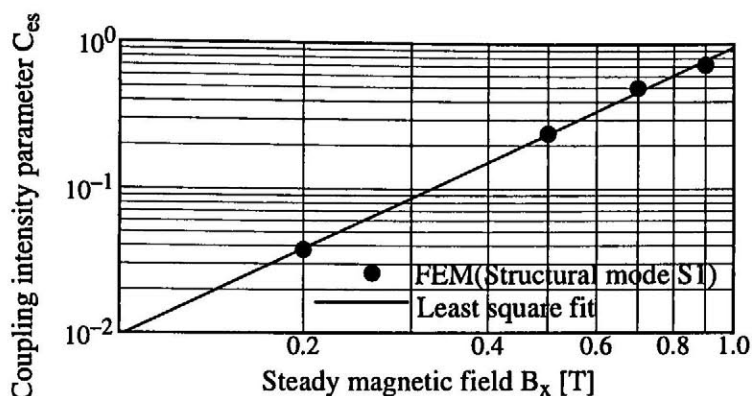


Fig. 4.3 Dependence on magnetic field by finite element coupled analysis

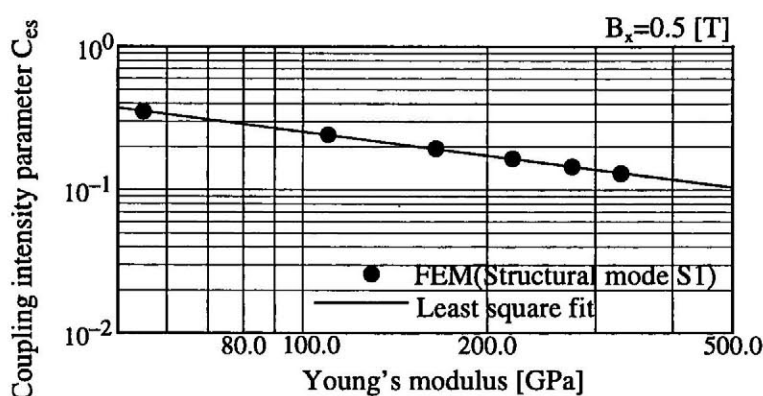


Fig. 4.4 Dependence on Young's modulus by finite element coupled analysis

## 4.4 連成強度パラメータの磁場・材料定数・板厚への依存性

### 4.4.1 有限要素解析に基づく依存性

有限要素解析によって得られた、構造モード S1 による連成強度パラメータ  $C_{es}$  の、定常磁場  $B$  への依存性を Fig.4.3 に示す。両対数プロット上でほぼ直線となっており、最小自乗近似によって得られるこの傾きから、定常磁場への依存性として、

$$C_{es} \propto B^{2.074} \quad (4.22)$$

が得られる。同様にして、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  に対する依存性を、Fig.4.4-4.7にそれぞれ示す。板厚への依存性を除くと、いずれの場合も良好な直線関係が得られており、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の依存性として、

$$C_{es} \propto B^{2.074} E^{-0.567} \rho^{-0.500} \kappa^{1.000} \quad (4.23)$$

が得られる。板厚に関しては、Fig.4.7において直線とならず、べき指数は求まらないが、これに関しては次節以降で検討する。

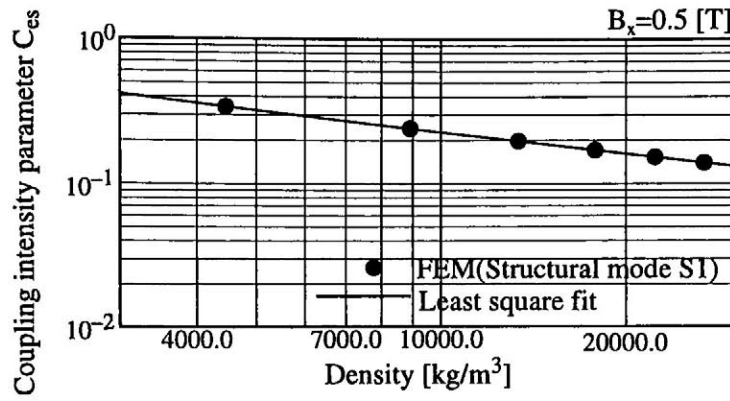


Fig. 4.5 Dependence on density by finite element coupled analysis

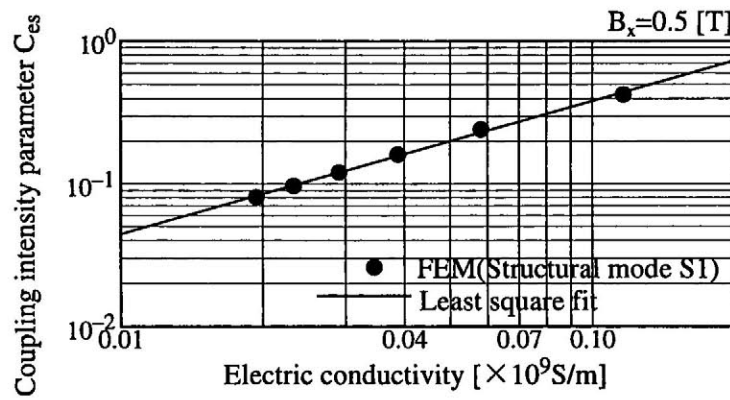


Fig. 4.6 Dependence on electric conductivity by finite element coupled analysis

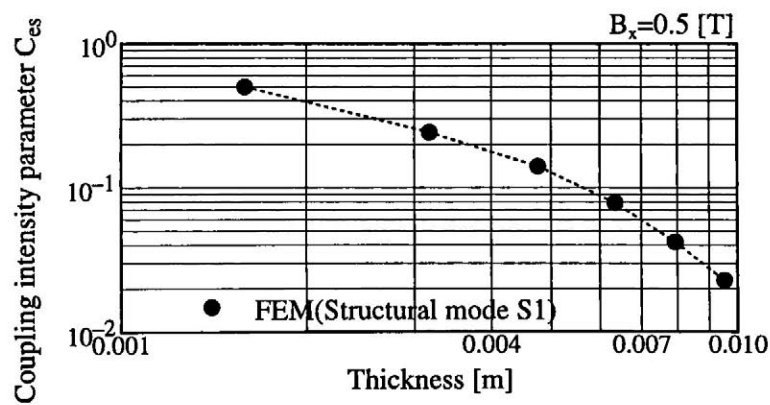


Fig. 4.7 Dependence on thickness by finite element coupled analysis

## 4.4.2 1 自由度連成モデルによる依存性の検討

前節の有限要素解析で得られた連成強度パラメータ  $C_{es}$  のべき指数の意味を明らかにするため、1 自由度連成モデルを用いて理論的に連成強度パラメータの磁場・材料定数・板厚に対する依存性を求める。1 自由度連成モデル (4.11), (4.12) 式において、質量  $m$  は密度と板厚との間に  $m \propto \rho h$ 、曲げ剛性  $k$  はヤング率と断面 2 次モーメントより  $k \propto Eh^3$ 、抵抗  $R$  は導電率と板厚より  $R \propto \frac{1}{\kappa h}$ 、連成効果に関する  $C_s, C_e$  は磁場との間に  $C_s \propto B, C_e \propto B$  の関係が成立するため、比例定数  $P_s, P_e, P_c$  を用いて、

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = P_s \frac{Eh^2}{\rho} \\ \frac{R}{U} = P_e \frac{1}{\kappa h} \\ \frac{C_e C_s}{mU} = P_c \frac{B^2}{\rho h} \end{cases} \quad (4.24)$$

なる 3 つの関係式が得られる。これらの関係式を構造に関する連成固有値 (4.15) 式に代入すると、磁場、材料定数、板厚および  $P_s, P_e, P_c$  の関数

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{3\kappa h} P_e - \frac{\left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ &\quad \pm \frac{-\left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} i \\ &= \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{9\kappa^2 h^2} P_e^2 + \frac{Eh^2}{3\rho} P_s - \frac{B^2}{3\rho h} P_c \\ b &= -\frac{1}{27\kappa^3 h^3} P_e^3 - \frac{Eh}{3\rho\kappa} P_s P_e - \frac{B^2}{6\rho\kappa h^2} P_e P_c. \end{aligned}$$

となる。この連成固有値  $\alpha$  を (4.17) 式に代入することにより、1 自由度連成モデルにおける連成強度パラメータ  $C_{es}$  も、

$$C_{es} = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \quad (4.26)$$

の形の、外部磁場や材料定数などの関数となる。

## (a) インダクタンスが無視できる時

板の振動時定数と渦電流の時定数の比が十分大きい時、すなわち、インダクタンスの効果が十分小さい場合、(4.15) 式をテーラー展開し、(4.24) 式を代入すると、連成固有値  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{\kappa B^2 P_c}{2\rho P_e} \pm \sqrt{\frac{Eh^2}{\rho} P_s - \left(\frac{\kappa B^2 P_c}{2\rho P_e}\right)^2} i \quad (4.27)$$

となる。したがって、連成強度パラメータ  $C_{es}$  は、

$$C_{es} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\rho}} \frac{\kappa B^2}{h} \frac{P_c}{P_e \sqrt{P_s}} \quad (4.28)$$

となり、これから、

$$C_{es} \propto B^2 E^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \kappa^1 h^{-1} \quad (4.29)$$

なる  $C_{es}$  の依存性が得られる。これは、有限要素解析による (4.23) 式と比較すると、 $B, \rho, \kappa$  に関しては良く一致している。  $E$  に関しては 10% 程度の誤差が見られ、また  $h$  に関しては、Fig.4.7 において  $h$  が 5[mm] 以下だと、 $-1.198$  乗となるが、それ以上ではべき指数で依存性をあらわすことができない。これはインダクタンスを無視した影響と考えられるため、以下にインダクタンスを考慮して、連成強度パラメータの依存性を検討する。

## (b) インダクタンスが無視できない時

インダクタンスの効果が無視できない場合、(4.26) 式は (4.29) 式のように、べき乗数を用いて依存性を表すことができない。しかし、比例定数  $P_s, P_e, P_c$  を求め、(4.26) 式を直接グラフ上にプロットすることで、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の依存性が得られる。

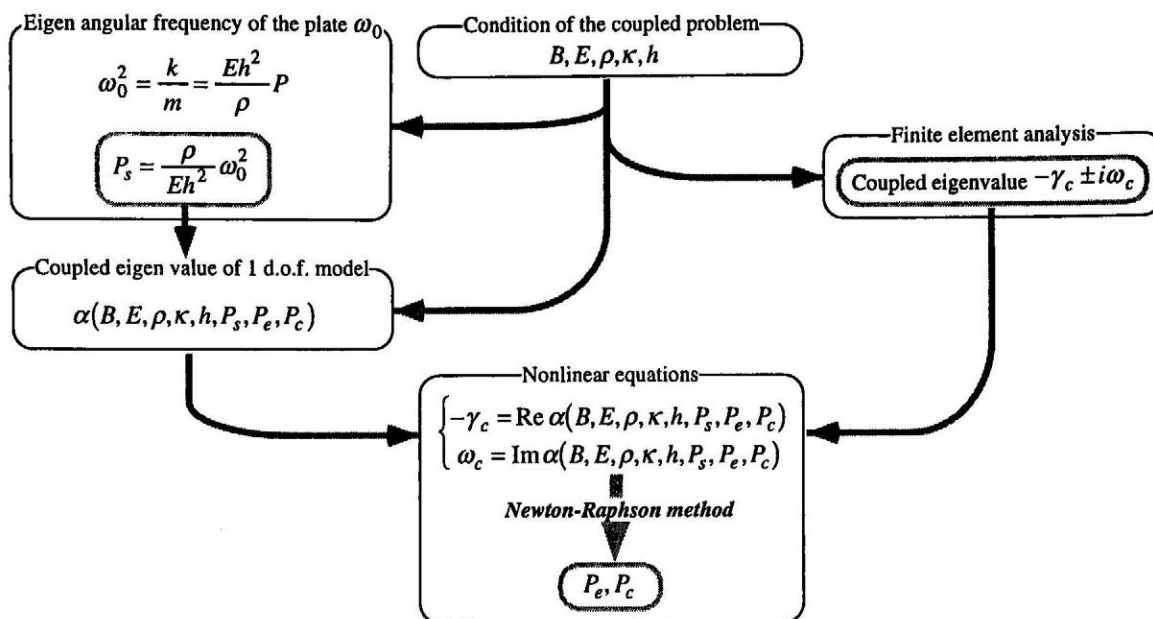
まず、比例定数  $P_s$  は、Fig.4.8 に示すように、(4.24) 式の第 1 式と平板の自然固有角振動数  $\omega_0$  から得られる

$$\frac{Eh^2}{\rho} P_s = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (4.30)$$

より求めることができる。また、 $P_e$  と  $P_c$  は、ある特定の磁場や材料定数の条件下で有限要素解析を行ない、得られた連成固有値  $\alpha_c = -\gamma_c \pm i\omega_c$  の値と (4.25) 式を書き下した式から、

$$\begin{cases} -\gamma_c &= \operatorname{Re} \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \\ \omega_c &= \operatorname{Im} \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \end{cases} \quad (4.31)$$

なる連立非線形方程式を作り、Newton-Raphson 法などを用いて解くことにより  $P_e, P_c$  を求めることができる。比例定数  $P_s, P_e, P_c$  は、(4.24) 式において板幅や板長さなどの幾何学的形状を考慮するための定数であり、これらを求めるには、有限要素解析を 1 度だけ行なう必要がある。

Fig. 4.8 Method to obtain  $P_s, P_e, P_c$ 

比例定数  $P_s, P_e, P_c$  が求まると、(4.26) 式から連成強度パラメータ  $C_{es}$  の磁場や材料定数、板厚に対する依存性が求められる。この方法の妥当性を検証するため、Fig.4.9 にこの方法で得られた、構造モード S1, S2, S3, S4 に対する連成強度パラメータ  $C_{es}$  の磁場に関する依存性を示す。(4.26) 式をプロットした曲線は、有限要素解析結果と良く一致していることがわかる。同様に、ヤング率、密度、導電率、板厚に関する依存性を、Fig.4.10–4.13 にそれぞれ示す。これらも、良く一致しており本解析手法の妥当性が確認される。また、有限要素解析では明確な依存性が得られなかった板厚に対しても、(4.26) 式を用いることで依存性を表すことができる。すなわち、インダクタンスの効果が大きくなると依存性はべき指数であらわすことができず、ここで述べた方法で連成強度パラメータの依存性をあらわさなければならない。

本手法では、1 度の有限要素解析から比例定数  $P_s, P_e, P_c$  を求めることで、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の磁場、ヤング率、密度、導電率および板厚に対する依存性を簡易的に求めることができる。設計時の解析で、有限要素解析だけを用いて、この様な多数のパラメータに対する依存性を求めるには、膨大なケース数の解析が必要となる。したがって、本手法は設計を行なう上でも極めて有効であると考えられる。

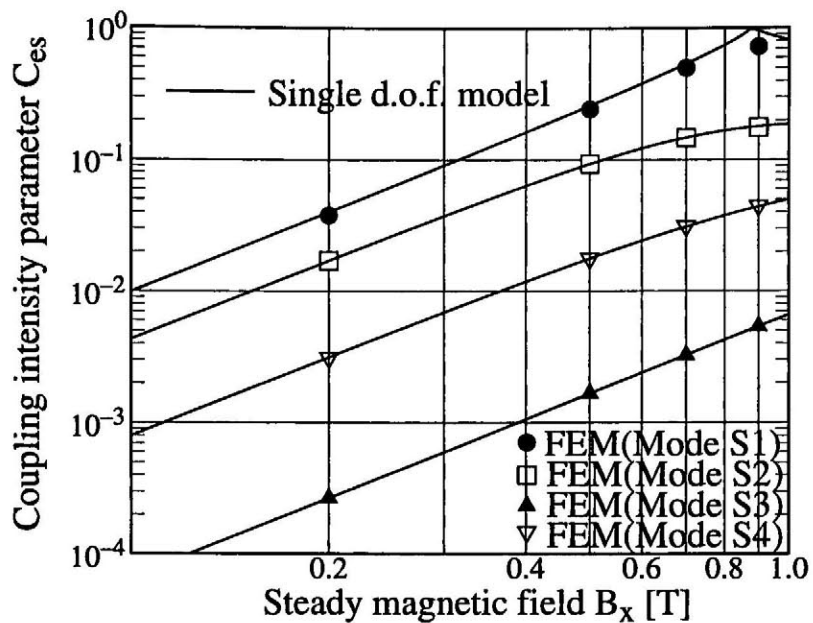


Fig. 4.9 Dependence on magnetic field by single d.o.f. model

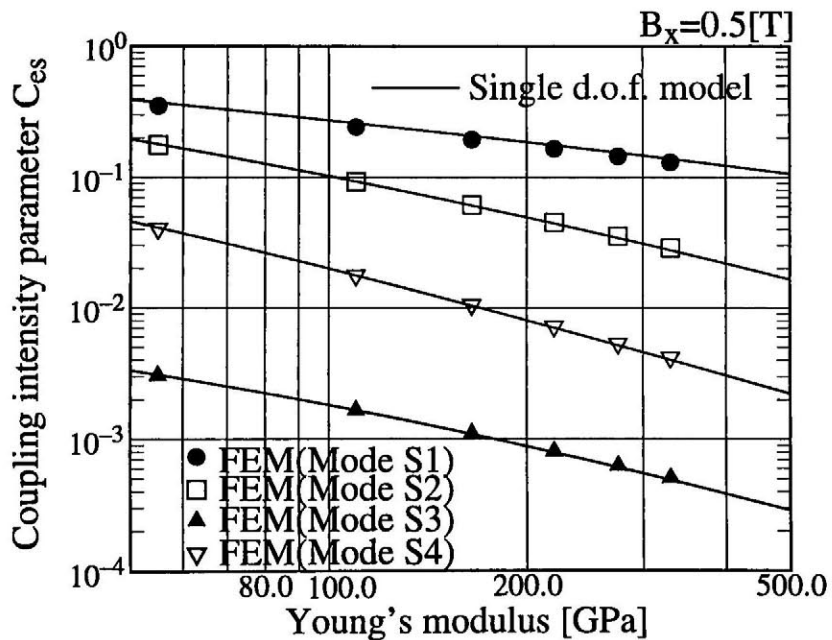


Fig. 4.10 Dependence on Young's modulus by single d.o.f. model



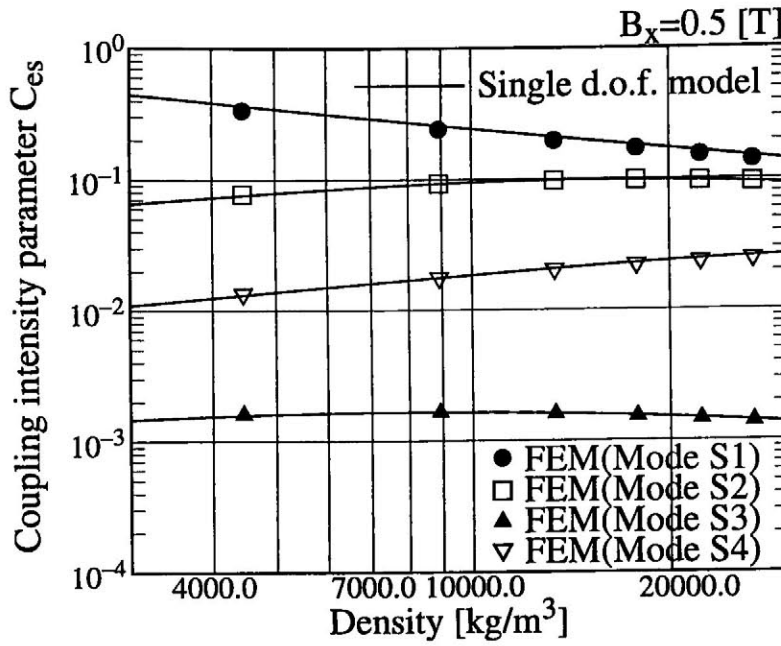


Fig. 4.11 Dependence on density by single d.o.f. model

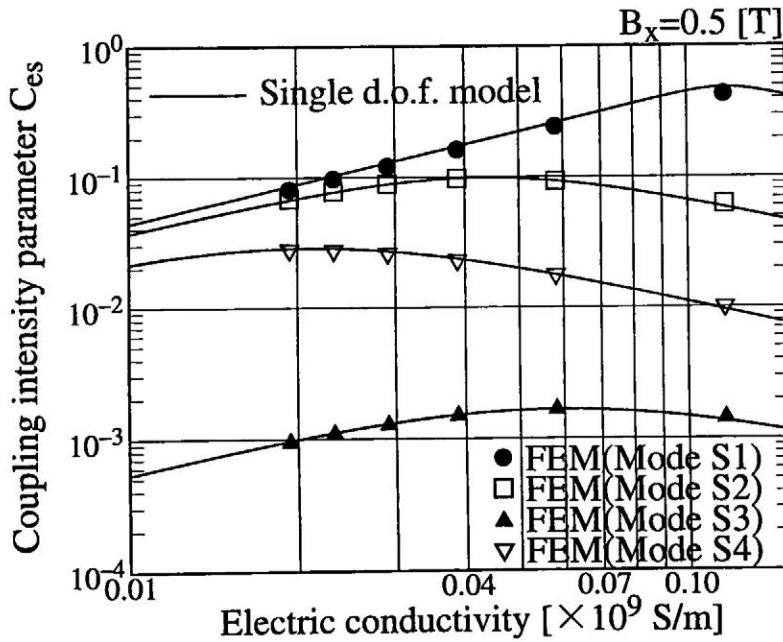


Fig. 4.12 Dependence on electric conductivity by single d.o.f. model

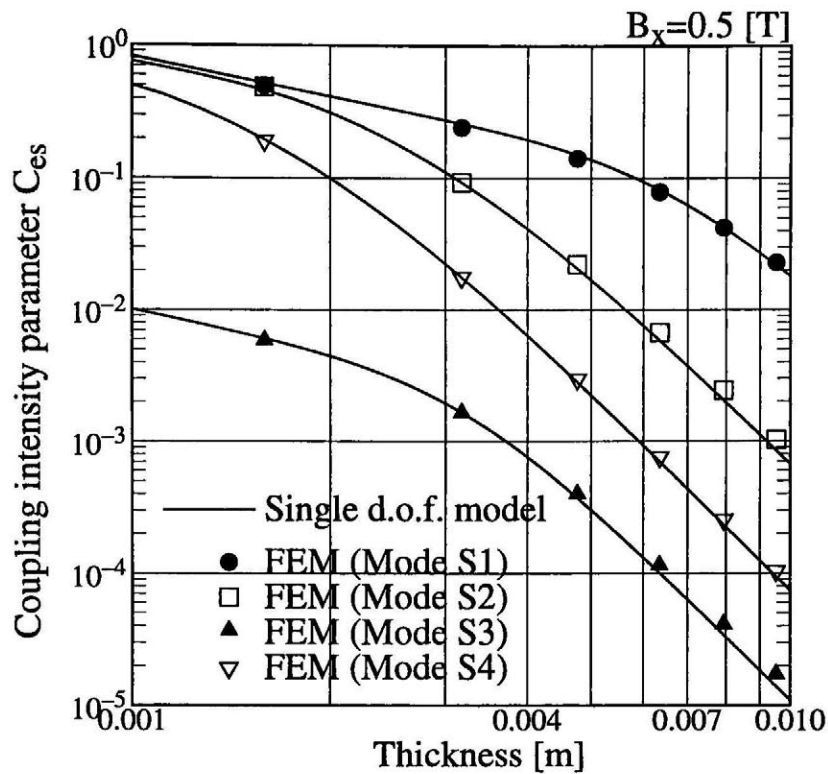


Fig. 4.13 Dependence on thickness by single d.o.f. model

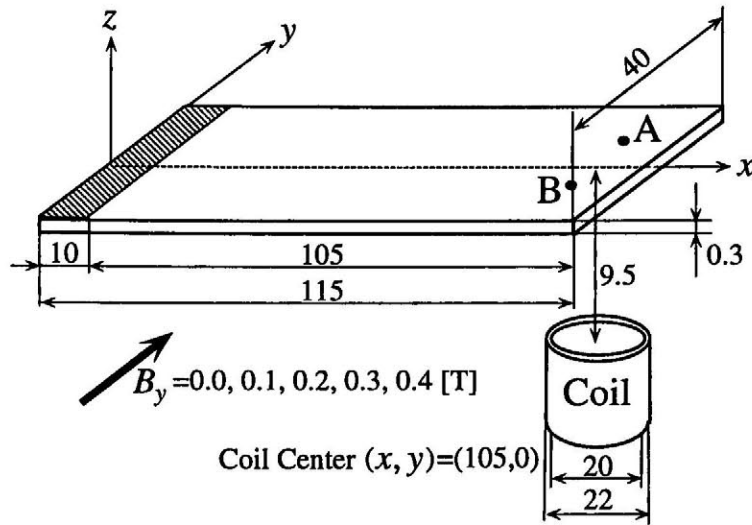
## 4.5 平板ねじり問題の連成解析とパラメータの依存性

### 4.5.1 解析問題

ねじり変形する平板の連成問題で、連成強度パラメータの依存性を検討する。解析問題は、Fig.4.14 に示す TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 16<sup>(4,6)</sup> と同条件の連成問題である。これは、コイルが作る変動磁場により板に渦電流が発生し、この渦電流と板の短手方向の磁場による電磁力で、板はねじり変形する。

### 4.5.2 解析結果

Fig.4.15 に、定常磁場  $B_y$  が 0.2[T] の場合の構造物に対応する連成モードベクトルを示す。同図から、たわみ変形が連成モードベクトルの S1, S3, S5, ねじり変形が S2, S4, S6 であることがわかる。また、ねじり変形に対応する S2, S4, S6 には、連成効果により大きな渦電流分布があらわれているのに対し、たわみ変形に対応する S1, S3, S5 には渦電流成分が小さいことがわかる。これは、ねじり変形では、外部定常磁場  $B_y$  が平板の面を貫くため、強い連成効果が生じるが、たわみ変形に対しては  $B_y$  が面を貫かないため、連成効果が小さくなるからである。



Young's modulus:	110[GPa]
Poisson's ratio:	0.34
mass density:	$8.912 \times 10^3[\text{kg}/\text{m}^3]$
electric conductivity:	$5.814 \times 10^7[\text{S}/\text{m}]$

Fig. 4.14 Schematic diagram of a plate in steady electromagnetic field  $B_y$  (torsion and bending)

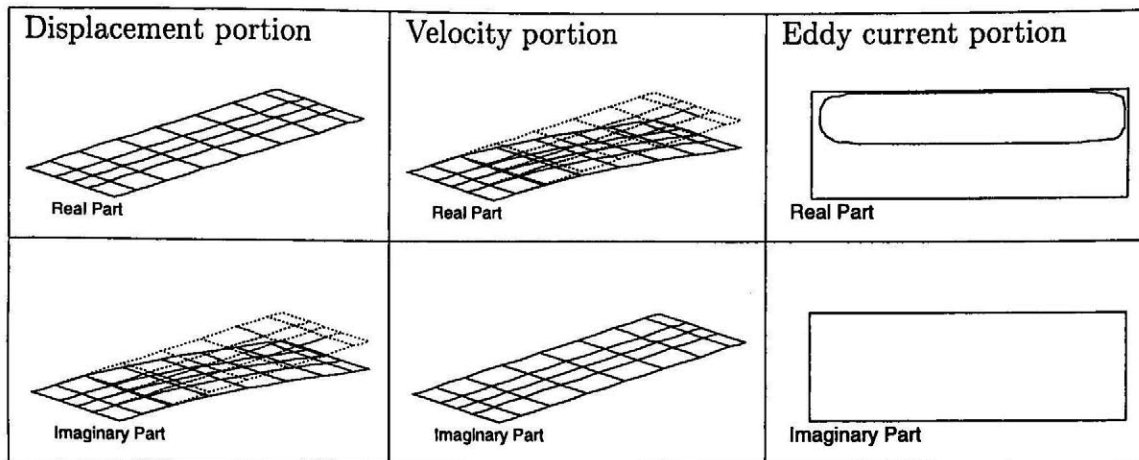
Fig.4.16 に、定常磁場  $B_y$  の値を 0 ~ 0.4[T] の範囲で変化させ、有限要素解析で得られた複素固有値の実部、および、絶対値に変化を示す。同図から、ねじり変形に対応する S2, S4, S6 は実部および絶対値とも、4.3.2 節と同様に、磁場に強く依存していることがわかる。しかし、たわみ変形に対応する S1, S3, S5 は連成効果が小さいため、その値の変化も小さいことがわかる。

#### 4.5.3 有限要素解析に基づく依存性

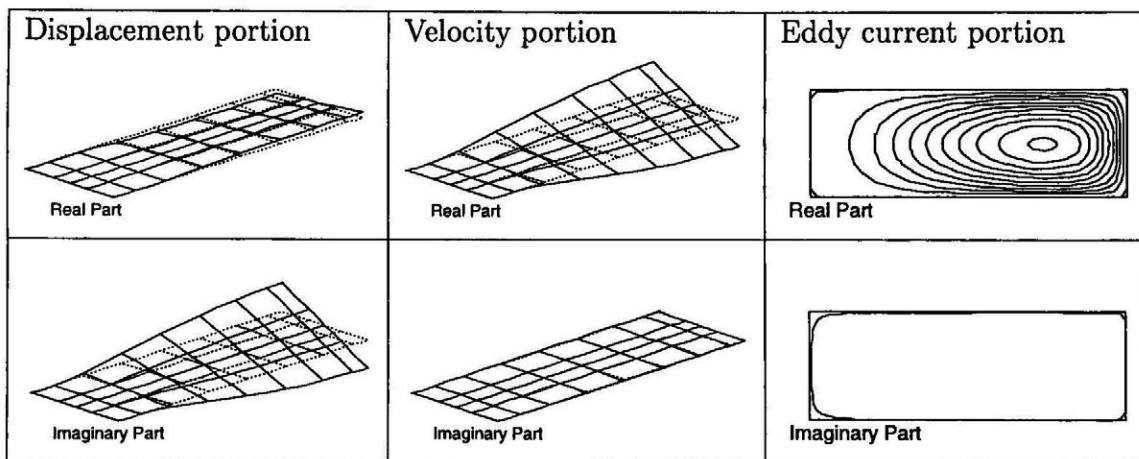
Fig.4.16 において、構造モード S2 の依存性の変化が大きいことから、この構造モードによる連成強度パラメータ  $C_{es}$  の、定常磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  に対する依存性を Fig.4.17~4.21 に示す。これらの結果は両対数プロットでほぼ直線になっており、この傾きから Fig.4.14 に示す平板ねじり問題の磁場・材料定数・板厚に対する依存性として、

$$C_{es} \propto B^{2.033} E^{-0.505} \rho^{-0.507} \kappa^{1.019} h^{-1.078} \quad (4.32)$$

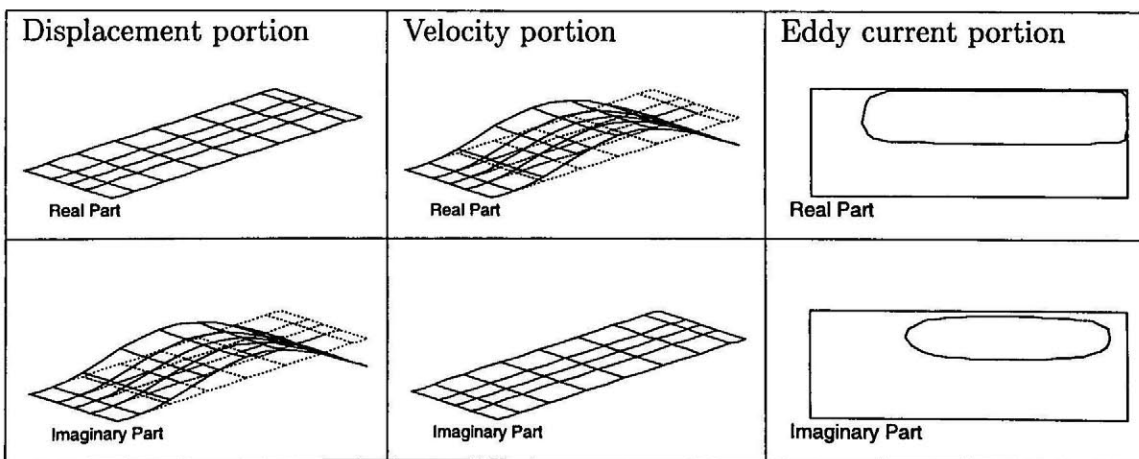
が得られた。



(a) Structural mode S1

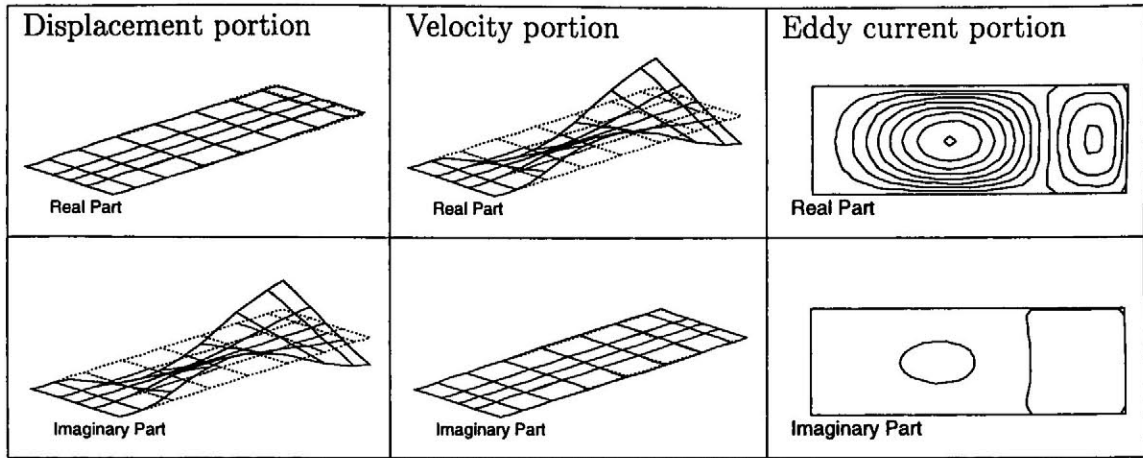


(b) Structural mode S2

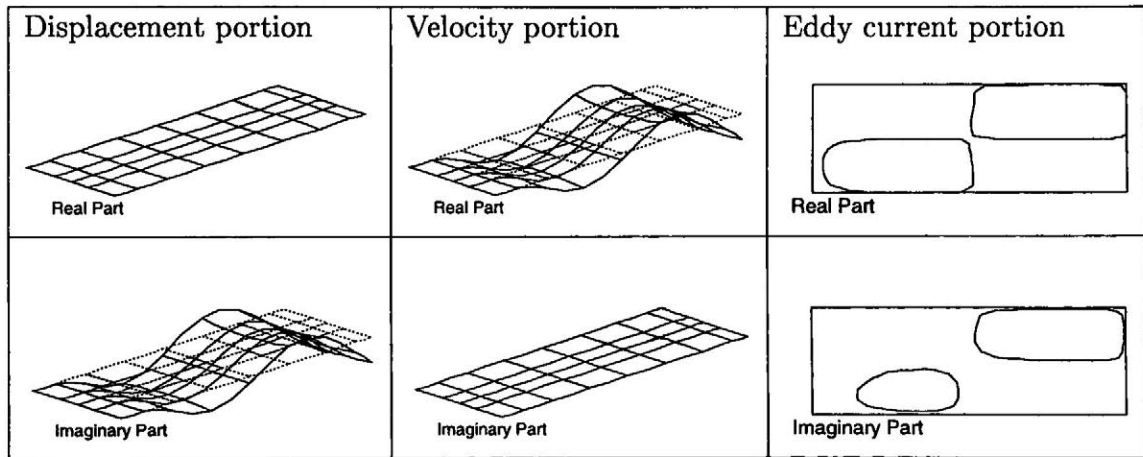


(c) Structural mode S3

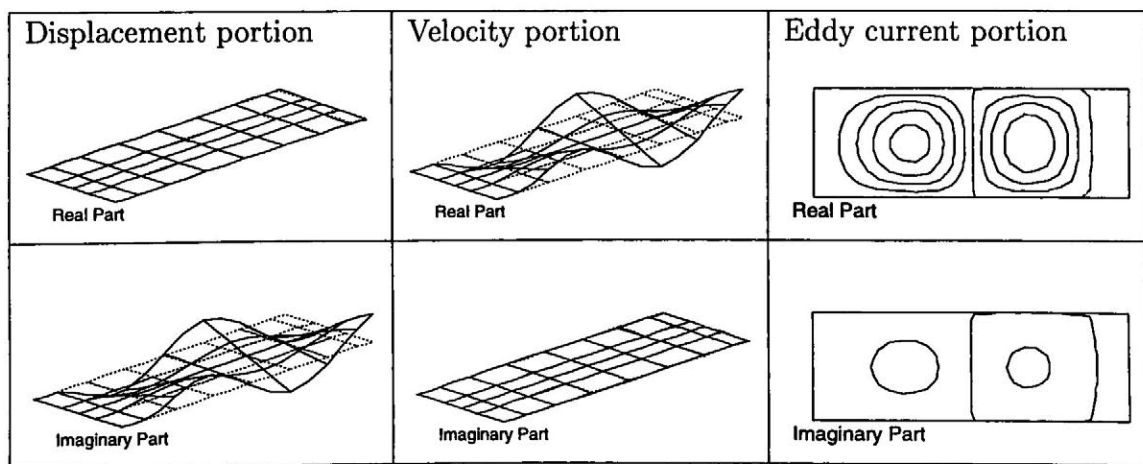
Fig. 4.15 Coupled modes of the plate



(d) Structural mode S4

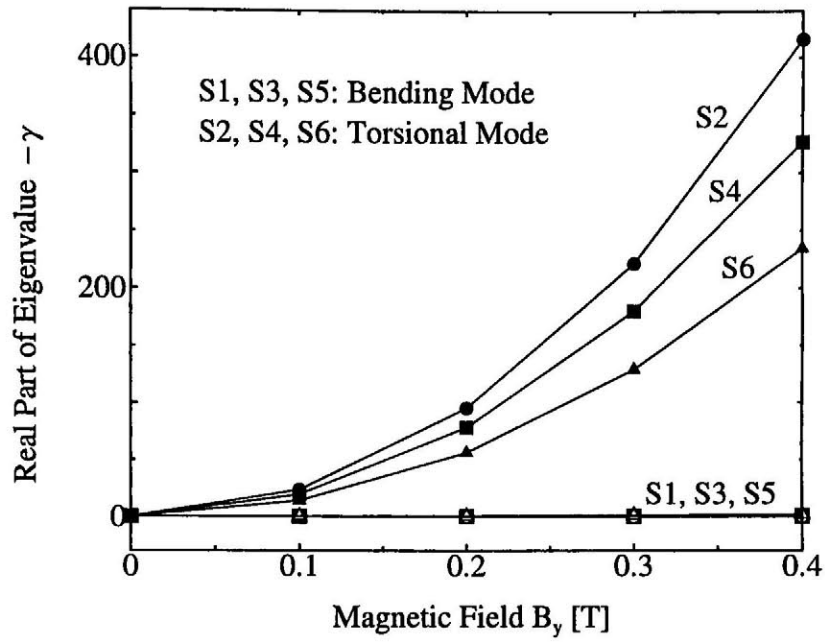


(e) Structural mode S5

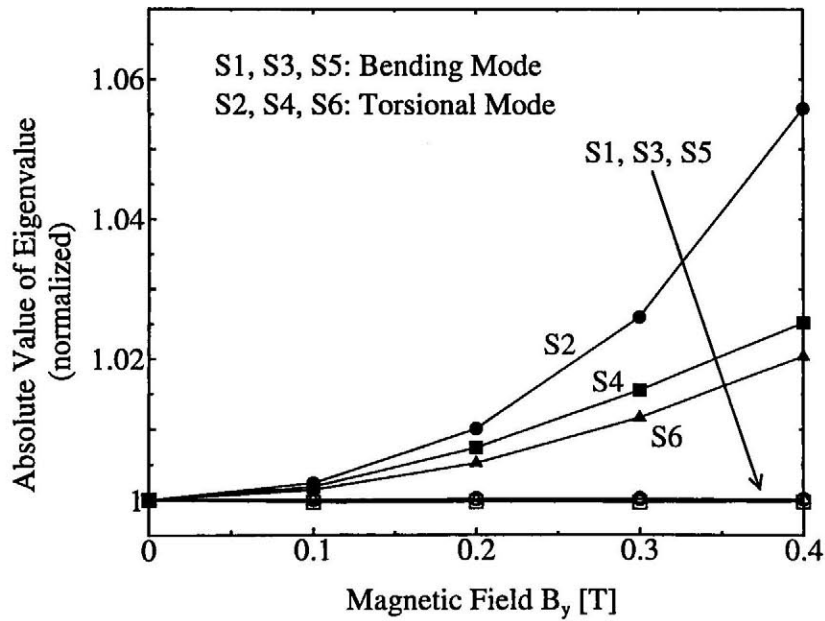


(f) Structural mode S6

Fig. 4.15 Coupled modes of the plate (contd.)



(a) Real part



(b) Absolute value

Fig. 4.16 The change of eigenvalues with steady magnetic field (torsion and bending)

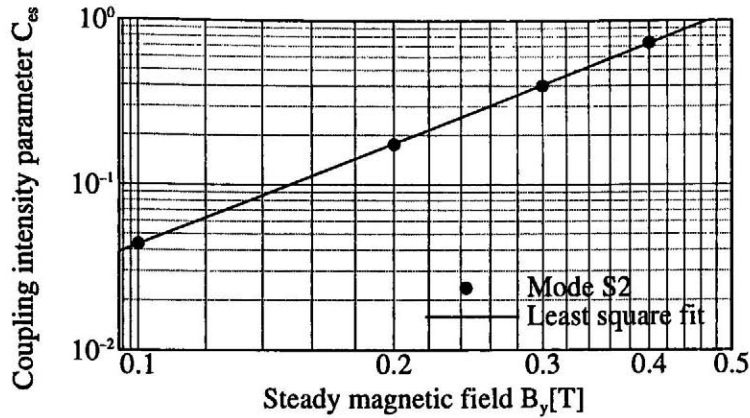


Fig. 4.17 Dependence on magnetic field by finite element coupled analysis (torsion and bending)

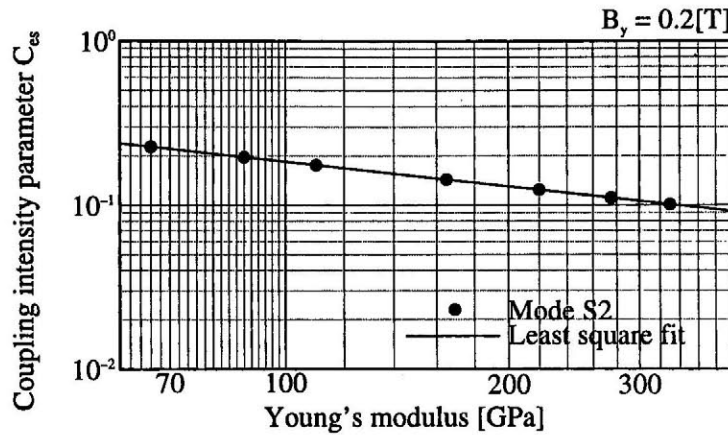


Fig. 4.18 Dependence on Young's modulus by finite element coupled analysis (torsion and bending)

#### 4.5.4 1 自由度連成モデルによる依存性の検討

前節の有限要素法で得られた連成強度パラメータのべき指数の意味を明らかにするため、4.4.2 節と同様に 1 自由度連成モデルを用いて、理論的に連成強度パラメータの依存性を求める。

その導出手順は 4.4.2 節と同様であるが、(4.1) 式の  $k$  は平板曲げ問題において曲げ剛性であったが、この平板ねじり問題では  $k$  はねじり剛性を表す。しかし、曲げ剛性とねじり剛性のどちらにおいても、ヤング率と板厚より  $k \propto Eh^3$  となるため、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の磁場・材料定数・板厚に対する依存性は、4.4.2 節と同様に (4.26) 式となる。ただし、平板曲げ問題と平板ねじり問題で (4.24) 第 1 式の  $P_s$  の力学的な意味が異なる。

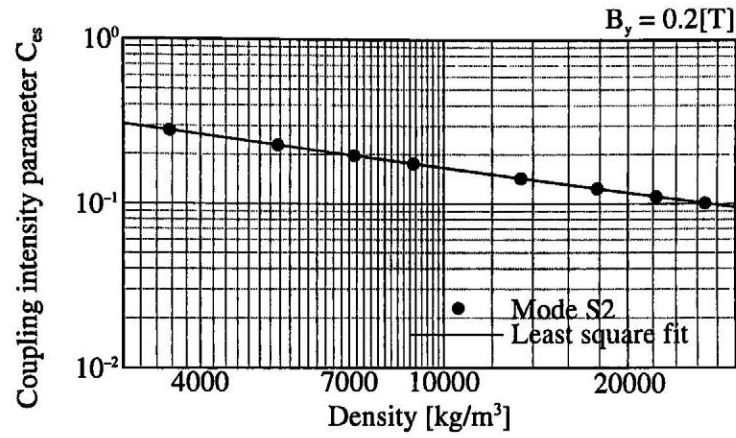


Fig. 4.19 Dependence on density by finite element coupled analysis (torsion and bending)

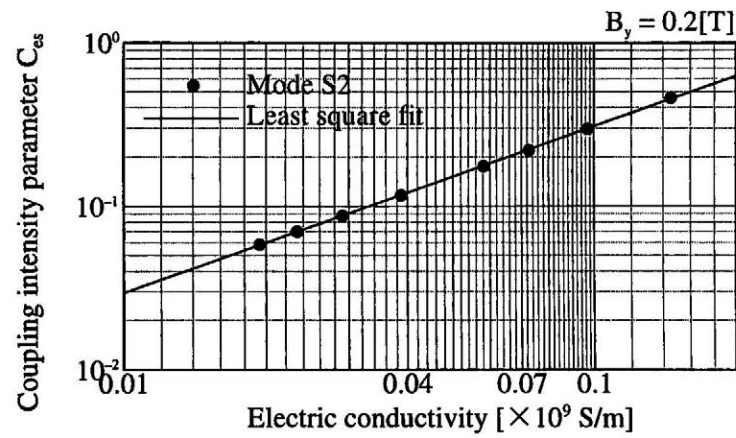


Fig. 4.20 Dependence on electric conductivity by finite element coupled analysis (torsion and bending)

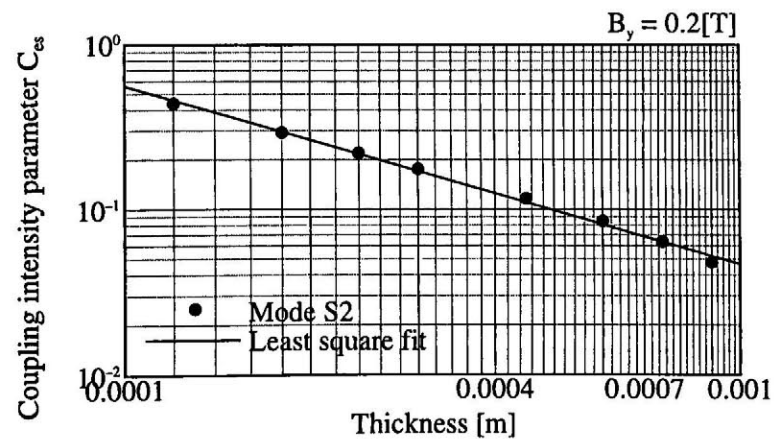


Fig. 4.21 Dependence on thickness by finite element coupled analysis (torsion and bending)



## (a) インダクタンスが無視できる場合

インダクタンスの効果が無視できるほど小さい場合、連成強度パラメータ  $C_{es}$  の依存性は平板曲げ問題における依存性と同様に

$$C_{es} \propto B^2 E^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \kappa^1 h^{-1} \quad (4.33)$$

となる (4.4.2 節 (a) 参照)。これは有限要素解析により得られた (4.32) 式と比較すると非常に良く一致していることがわかる。

しかし、4.4 節で述べたようにインダクタンスの効果が大きくなると (4.26) 式は (4.33) 式の様にはべき指数を用いて依存性を表すことができないため、4.4.2 節 (b) で述べた依存性解析方法を用いる必要があると考えられる。

## (b) インダクタンスが無視できない時

有限要素解析および 4.4.2 節 (b) で述べた依存性解析方法で得られた、連成強度パラメータの定常磁場に対する依存性を Fig.4.22 に示す。簡易解析による結果は、有限要素解析結果と良く一致している。同様に、ヤング率、密度、導電率、板厚に対する依存性を、Fig.4.23–4.26 に示す。板厚に対する Fig.4.26 において、S5, S6 の高次のモードでは、若干の誤差がみられるが、それ以外では良く一致していることがわかる。

また、Fig.4.26 の S4 が両対数プロットで直線になっておらず、べき指数で依存性を表せないことがわかるが、ここで提案した依存性解析方法と有限要素解析による S4 の連成強度パラメータの依存性は良く一致している。このように本解析方法を用いると、平板ねじり問題においても連成強度パラメータの依存性を簡易的に求めることができる。

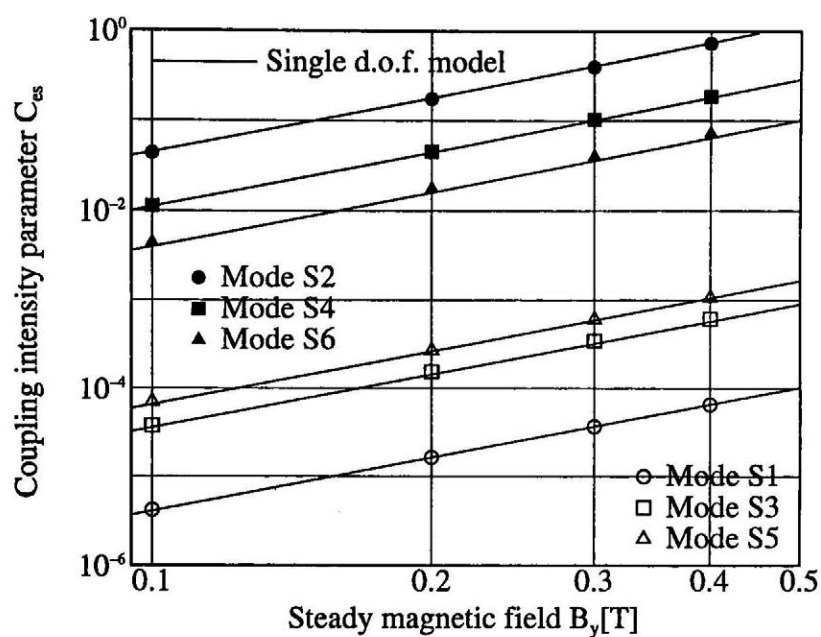


Fig. 4.22 Dependence on magnetic field by single d.o.f. model (torsion and bending)

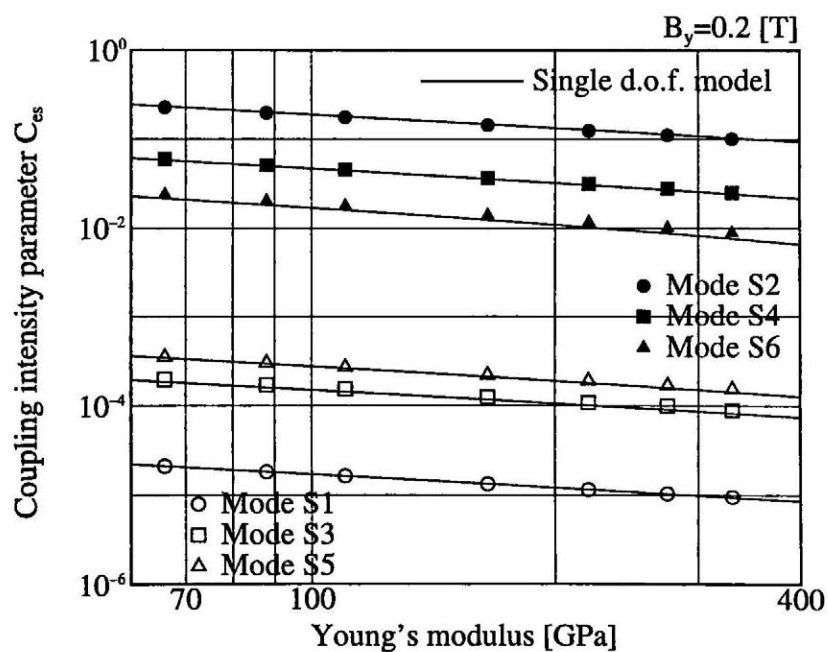


Fig. 4.23 Dependence on Young's modulus by single d.o.f. model (torsion and bending)

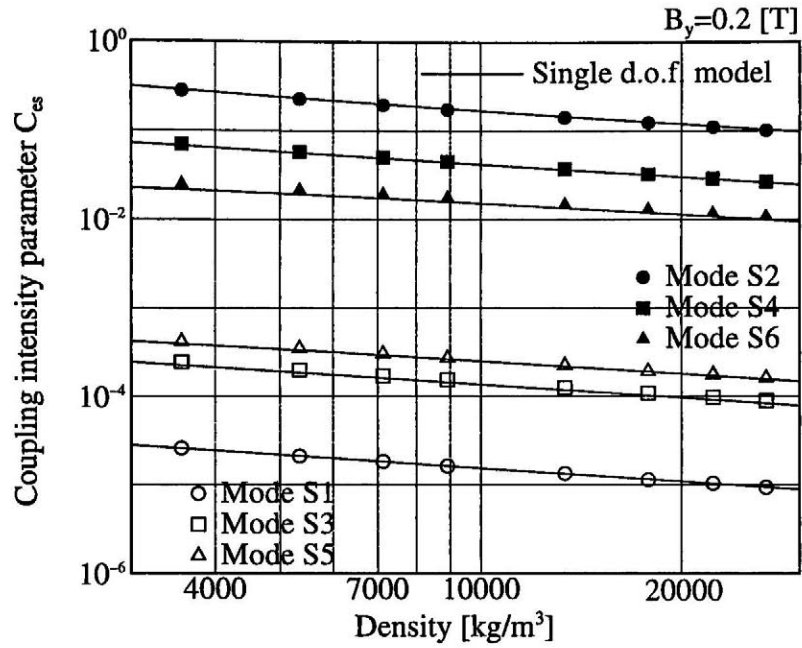


Fig. 4.24 Dependence on density by single d.o.f. model (torsion and bending)

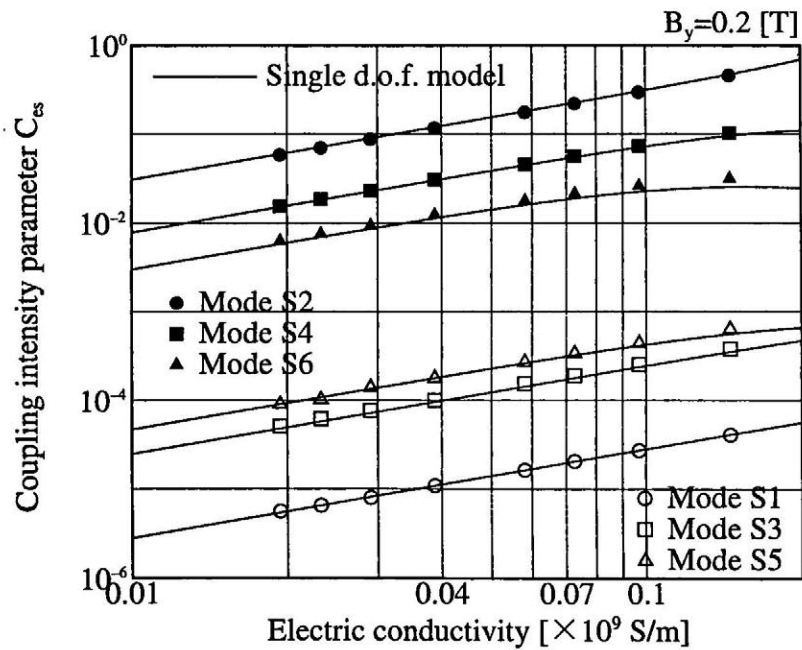


Fig. 4.25 Dependence on electric conductivity by single d.o.f. model (torsion and bending)

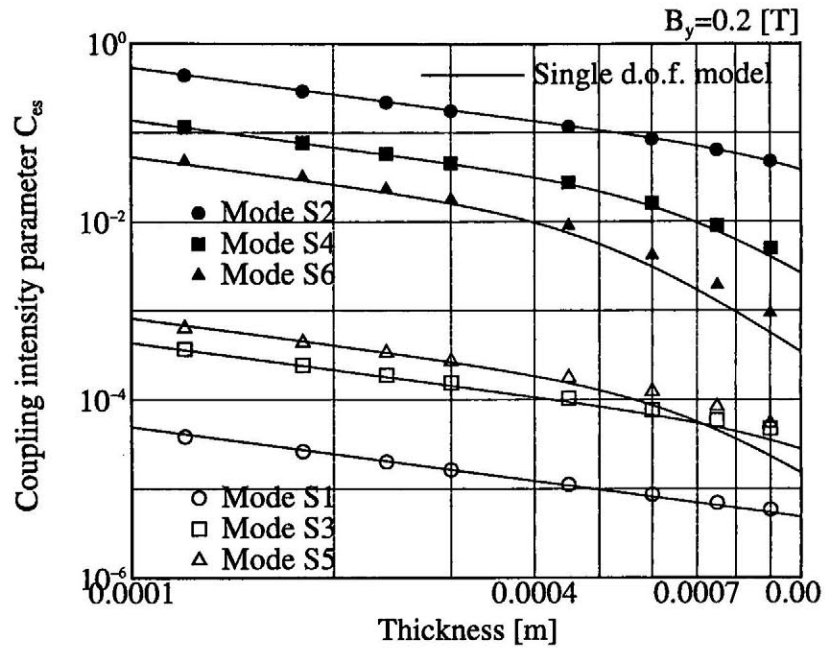


Fig. 4.26 Dependence on thickness by single d.o.f. model (torsion and bending)

## 4.6 まとめ

強磁場中に設置される導電性構造物に生じる磁気減衰現象に対し、電磁場と構造物の連成効果の強さを定量的にあらわすパラメータとして、連成効果を含む固有値に基づいた連成強度パラメータを提案した。本パラメータは、有限要素モデルと1自由度連成モデルで定義されるパラメータである。また、この連成強度パラメータに関して、

- 平板たわみの連成問題、および、平板ねじりの連成問題における連成強度パラメータの磁場、ヤング率、密度、導電率、板厚に対する依存性を求めた。本パラメータにより連成効果を定量的に評価できるため、その依存性を明らかにすることは、強磁場中の機器の健全かつ合理的な設計に有効である。
- たわみ変形やねじり変形といった変形挙動によって異なる連成効果の強さを、連成強度パラメータにより定量的にあらわせることを示した。これにより、変形挙動毎に連成効果を評価できるため、設計に有効な情報をあたえることができる。
- 1自由度連成モデルを用いた、連成強度パラメータの依存性の簡易解析手法を提案し、その妥当性を平板たわみ変形、および、平板ねじり変形の磁気減衰問題で検証した。本解析手法では、1度の有限要素解析結果から連成強度パラメータの磁場、ヤング率、密度、導電率、板厚に対する依存性を求めることができるため、設計の合理化に有効である。

## 参考文献

- (4.1) T. Takagi and J. Tani, Evaluation of Critical Magnetic Viscous Damping Ratios for Plate Vibrations with Different Boundary Conditions, *Simulation and Design of Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 101–104.
- (4.2) T. Takagi and J. Tani, A New Numerical Analysis Methods of Dynamic Behavior of a Thin Plate under Magnetic Field Considering Magnetic Viscous Damping Effect, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, 4 (1993), 35–42.
- (4.3) T. Takagi and J. Tani, Dynamic Behavior of a Plate in Magnetic Field by Full Coupling and MMD Methods, *IEEE Trans. on Magn.*, 30–5 (1994), 3296–3299.
- (4.4) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, Study of Magnetic Damping Effect on Dynamic Deflection of Fusion Reactor First Wall, *Fusion Eng. Des.*, 27 (1995), 473–480.
- (4.5) L. R. Turner and T. Q. Hua, Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields, *COMPEL*, 9–3 (1990), 205–216.
- (4.6) T. Takagi, Summary of The Results for Magnetic Damping in Torsional Mode (TEAM Problem 16), *COMPEL*, 14–2-3 (1995), 77–89.

## 第 5 章

# 磁気減衰パラメータの実験

### 5.1 はじめに

磁場中に設置される機器の健全かつ合理的な設計には、磁気減衰特性を定量的にあらわせるパラメータが必要である。しかし、こうした磁気減衰振動の実験には強い磁場が必要となるため、その実験例は少ない。

磁気減衰の実験としては、Turner や Hua らは、最大 4[T] までの磁場を得ることができ、FELIX (Fusion ELeCtromagnetic Induction eXperiment) の実験施設<sup>(5.1, 5.2)</sup> で、平板曲げの磁気減衰振動実験を行なった。この実験での最大磁場は 0.9[T] であり、また、この問題は TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Method) ワークショップのベンチマーク問題 12 番に設定された<sup>(5.3)</sup>。高木らは、最大 0.4[T] の磁場下で、平板ねじりの磁気減衰振動実験を行ない<sup>(5.4)</sup>、この問題は TEAM ワークショップのベンチマーク問題 16 番に設定された。Crutzen らは、最大で 0.5[T] の磁場が得られる ELBA 実験装置で、フレーム形状の試験片の実験を行ない、数値解析と実験におけるモデリング技術の妥当性を検証した<sup>(5.5)</sup>。Nishio らは、最大 0.55[T] の磁場で平板の固定方法を変えた磁気減衰振動の実験を行ない、数値解析手法である network mesh method の妥当性を検証している<sup>(5.6)</sup>。一方、磁気減衰振動に対するパラメータとしては、前章で述べたように、Takagi らが critical magnetic viscous damping ratio<sup>(5.7)</sup>、Yoshida らが magnetic damping parameter<sup>(5.8)</sup> を提案しているが、これらは数値解析に関するものである。このように、磁気減衰振動実験に基づいた磁気減衰振動パラメータの研究は少ないが、設計においては、実験結果から求められる磁気減衰のパラメータが必要になると考えられる。

ここでは、磁気減衰振動実験を行ない、その実験結果から、前章で定義した連成強度パ

ラメータを導出する手法を確立する。また、実験から得られた連成強度パラメータを数値解析結果と比較し、その連成強度パラメータ導出手法の妥当性を検証する。さらに、連成強度パラメータの磁場と板厚に対する依存性を、実験結果に基づいて検討する。

## 5.2 磁気減衰挙動のパラメータ

磁気減衰振動を、4章で定義した連成強度パラメータ  $C_{es}$  を用いて評価する。この連成強度パラメータは、磁気減衰振動の固有値  $\alpha$  により、

$$C_{es} = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|} \quad (5.1)$$

と定義される。

Fig.5.1に示す初期変位  $u_0$  の磁気減衰振動は、固有値  $\alpha$  を用いて、

$$u = u_0 e^{-\alpha t} \quad (5.2)$$

とあらわすことができ、また、固有値  $\alpha$  は磁気減衰率  $\gamma_c$  およびこの時の角速度  $\omega_c$  を用いて、

$$\alpha = \gamma_c \pm i\omega_c \quad (5.3)$$

である。この(5.3)式を(5.1)式に代入すると、連成強度パラメータは、

$$C_{es} = \frac{\gamma_c}{\sqrt{\gamma_c^2 + \omega_c^2}} \quad (5.4)$$

となることから、磁気減衰振動実験で得られた振動波形から磁気減衰率  $\gamma_c$  と角速度  $\omega_c$  を求め、これらを(5.4)式に代入することにより連成強度パラメータが求められる。

## 5.3 磁気減衰振動の実験方法

### 5.3.1 実験の概要

磁気減衰振動実験の実験装置概観を Photo 1 に示す。実験装置は Fig.5.2に示すように直流定電圧・定電流電源、ソレノイドコイル、試験片およびその支持部、レーザー変位計、ひずみゲージおよび動ひずみ計、A/D変換器と測定結果を処理するパーソナルコンピュータで構成される。

磁気減衰振動は、直流電源からの電流によってソレノイドコイル内に磁場を作り、この磁場中で片端固定平板の試験片に初期変位を与えて振動させることにより発生させ、こ



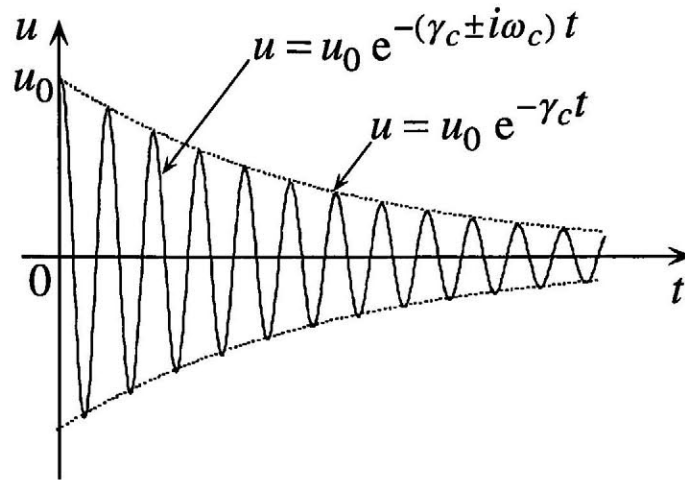


Fig. 5.1 Vibration of magnetic damping

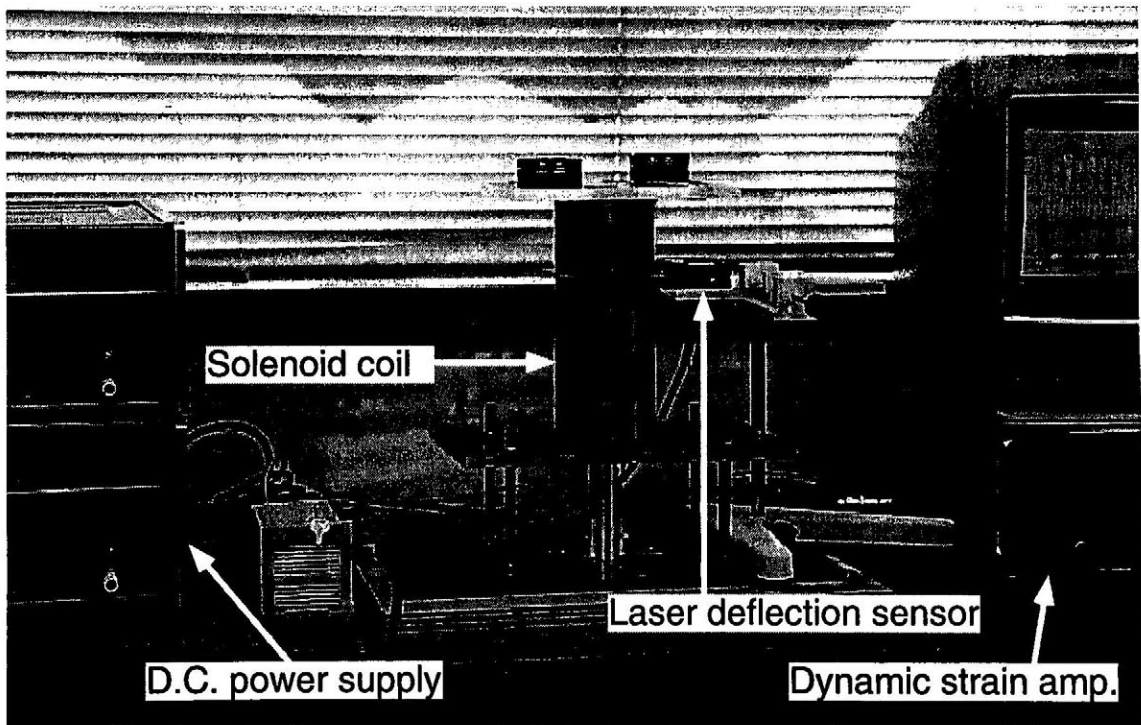


Photo 1 Experimental apparatus

の試験片の振動をレーザー変位計とひずみゲージで測定する。Fig.5.3 に示す試験片の A 点 ( $x = 120.0, z = 10.0$ [mm]) 変位を、ソレノイドコイルに設けたスリットを通して、コイルの外から測定し、また、試験片の B 点 ( $x = 25.0, z = 0.0$ [mm]) ひずみの測定には、ひずみゲージが磁場中に設置されることを考慮して、抗磁性ひずみゲージを使用する。本実験では、磁場中で信頼性の高い測定を行なうため、2 種類の測定方法を併用した。

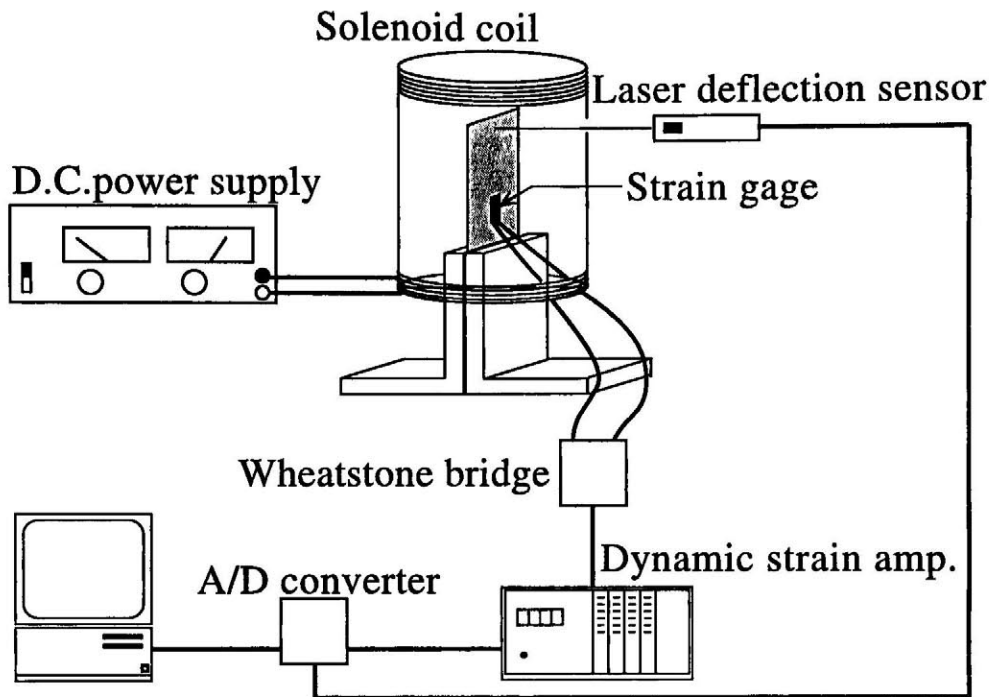


Fig. 5.2 Experimental system of magnetic damping phenomena

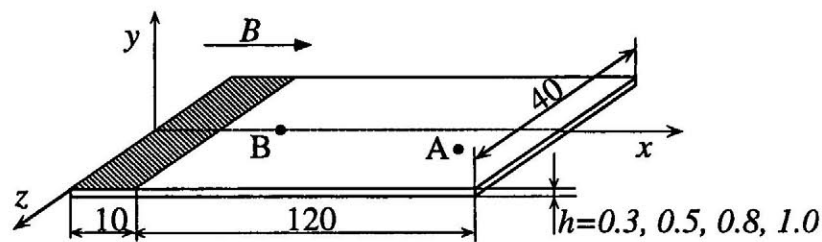


Fig. 5.3 Test piece

### 5.3.2 実験装置

#### (a) 試験片と支持部

試験片は Fig.5.3 に示すように、長さ 130[mm]、幅 40[mm] の銅板で、連成強度パラメータの板厚に対する依存性を求めるため板厚 0.3, 0.5, 0.8, 1.0[mm] の 4 種類の試験片を使用する。この銅板の材料定数を Table 5.1 に示す。ヤング率は、それぞれの試験片に対して、引張り試験により値を求めた。また、密度、導電率は、この銅板の材料仕様値である。

試験片の片端 10[mm] の部分は、Photo 2 に示すように支持部で完全固定される。この支持部は、Fig.5.4に示すように、ソレノイドコイルが作る磁場に影響を与えないように、非磁性材料であるアルミニウムで作られている。また、試験片と支持部の間にベークライト板を挟むことにより、相互間に電流が流れないよう絶縁している。

Table 5.1 Material properties of the copper test piece

Thickness [mm]	0.306	0.507	0.807	1.029
Young's modulus [GPa]	111.7	116.8	108.1	115.8
Density [ $\times 10^3 \text{kg/m}^3$ ]	8.93			
Electrical conductivity [ $\times 10^7 \text{S/m}$ ]	5.99			

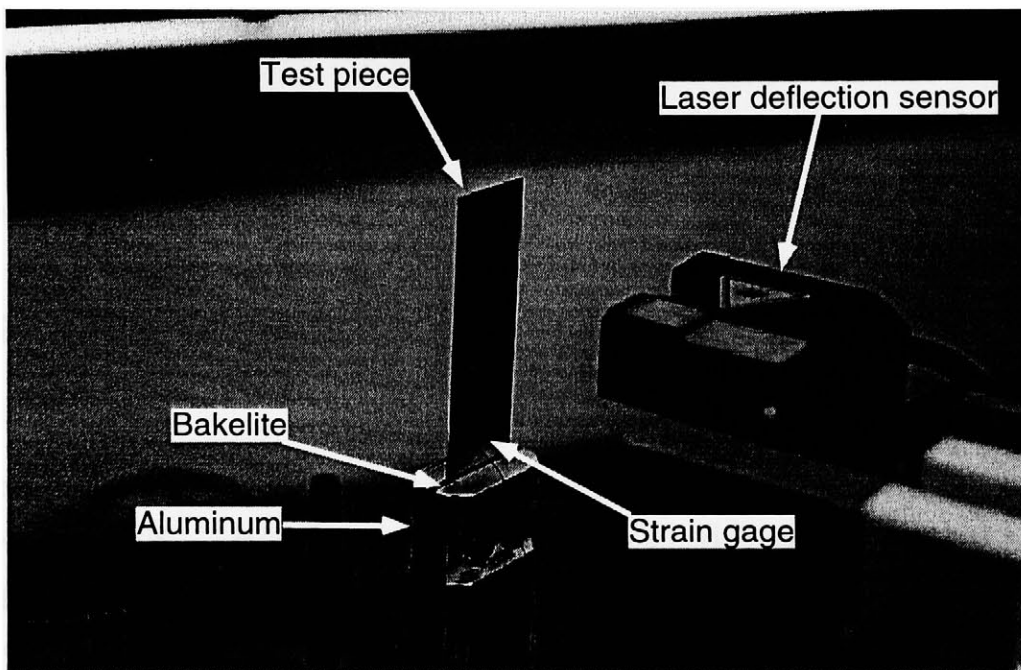


Photo 2 Test piece and clamp component

#### (b) 直流電源とソレノイドコイル

電源は最大出力電圧 110[V], 最大出力電流 10[A] の直流定電圧・定電流であり, これを定電流電源として使用する. これは, ソレノイドコイルに電流を流すと, その抵抗によるジュール熱により導線の温度が変化し, その結果, 導線の抵抗も変化するため, 定電圧状態ではコイルに流れる電流が一定にならないためである. また, コイルが作る磁場を強くするため, この電源を 2 台使用する.

ソレノイドコイルは, この定電流電源の性能を有効に使えるように設計した. これは, コイルの抵抗値によって, 電源の最大出力電圧から, コイルに流す電流値が制限されるか

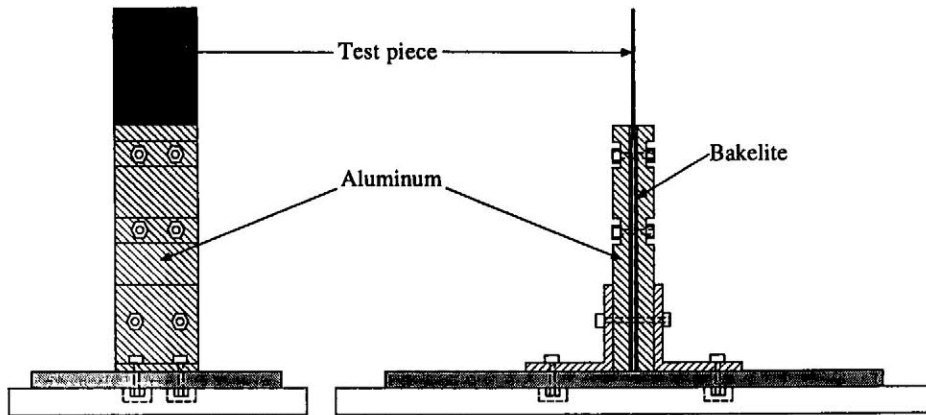


Fig. 5.4 Rigid support of the test piece

らである。ここでは、電源 1 台の最大出力電圧が 110[V]、最大出力電流が 10[A] であるため、オームの法則から最適なコイルの抵抗値  $R$  は 11[ $\Omega$ ] となり、また、導線の半径  $r$  と導電率  $\kappa$  を用いて導線の抵抗  $R$  は、

$$R = \frac{l}{\kappa \pi r^2} \quad (5.5)$$

となることから導線の全長  $l$  を求めた。こうして設計した、ソレノイドコイルの形状寸法を Fig5.5 に示す。これは、長さ 220[mm]、内径 45[mm]、外径 49[mm] のアクリルパイプに、直径 1[mm]、被覆部厚さ 0.027[mm]、耐熱区分 H 180 ° C (IEC Publication 172 による) の全長 995[m] 銅線が、22 段 4352 回巻かれている。コイルは内側コイルと外側コイルから構成され、内側コイルには銅線が 12 段 2381 回、外側コイルには 10 段 1971 回巻かれており、それぞれが独立に 2 台の定電流電源に接続されている。また、コイル内部に設置した試験片の試験片変位をコイル外部からレーザー変位計により測定するため、このソレノイドコイルには片端から 66[mm] の位置に幅 2[mm] のスリットが設けられている (スリット幅の大きさは次節参照)。

ソレノイドコイル内に設置した試験片長軸上の磁場分布を Fig.5.6 に示す。これは、ビオサバルの法則

$$dB = \frac{\mu_0 I ds \times r}{4\pi r^3} \quad (5.6)$$

を数値積分して磁場分布を求め、それを最大磁場で規格化したものである。(5.6) 式の  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $ds$ ,  $r$  は、それぞれ、透磁率、コイルに流れる電流、電流の方向ベクトル、電流が流れている点と磁場の評価点との距離である。Fig.5.6より、コイルの両端とスリット部分での磁束洩れにより、コイル内部は一様磁場となっていないが、試験片上では最大磁場の

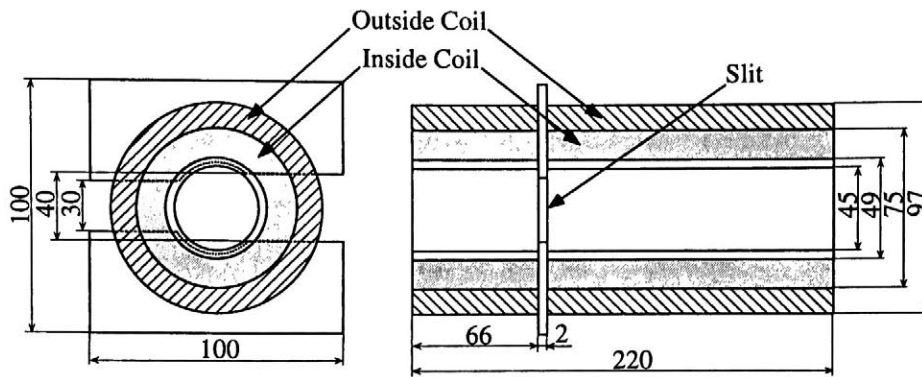


Fig. 5.5 Schematic diagram of the solenoid coil

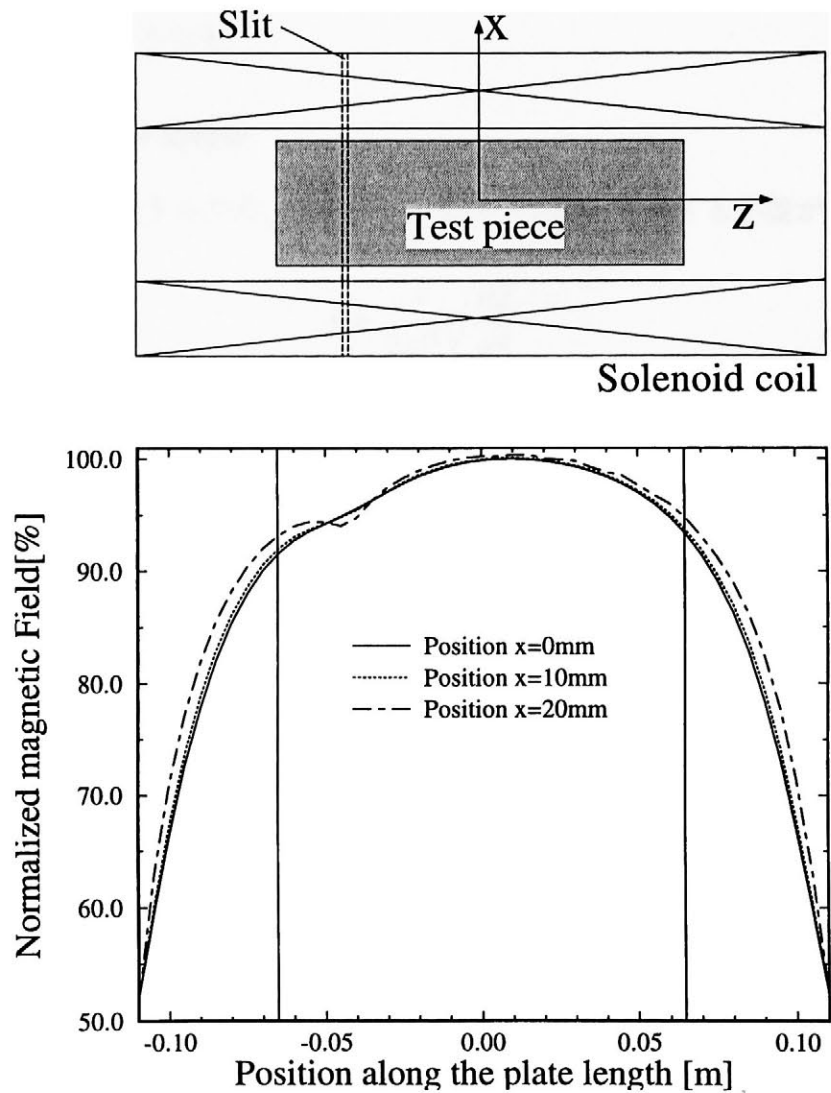


Fig. 5.6 Distribution of the magnetic field in solenoid coil

Table 5.2 Specifications of the laser deflection sensor

Standard distance	50mm
Range	±6mm
Sample rate	3KHz / 300Hz / 30Hz
Sampling time	0.15msec / 1.5msec / 15msec (SW)
Resolution (2σ)	30μm / 10μm / 3μm

90% 以上の値を得ることができる。以後、磁場の大きさは、最大磁場の値を用いて述べる。本実験では、ジュール熱によるソレノイドコイルへの熱負荷を考慮して、コイルに流す電流は、直流電源 2 台からそれぞれ 9[A] を最大値とした。この時、ソレノイドコイルの作る磁場は 0.21[T] となる。

### (c) 測定装置とデータ処理系

試験片の振動を測定するため、測定装置の応答周波数を考慮する必要がある。平板の振動数は、

$$f = \frac{\lambda^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.7)$$

で求めることができる。ここで、 $l$  は板長さ、 $E$  はヤング率、 $\rho$  は密度、 $I$  は平板の断面 2 次モーメント、 $A$  は板の断面積である。また、 $\lambda$  は振動モードと板の固定方法に関する定数で、片端固定平板の 1 次振動モードでは 1.875 となる。実験を行なう試験片で 1 次振動モードの振動数が最大になるのは、板厚 1.0[mm] の場合の 40.39[Hz] であり、レーザー変位計、動ひずみ計、A/D 変換器は、この値を考慮して選定した。

また、レーザー変位計においては、ソレノイドコイルの外からコイル内の試験片変位を測定するため、レーザー変位計と試験片との距離も問題となる。コイルの中心に試験片を設置した場合、Fig.5.5 よりレーザー変位計は 48.5[mm] 以上離れた試験片変位を測定できる性能が必要となる。こうした点を考慮して選定した、レーザー変位計、動ひずみ計、A/D 変換器の仕様を Table 5.2-5.4 に示す。

レーザー変位計はソレノイドコイルに設けたスリットを通して振動を測定するため、測定可能なスリット幅を求めておく必要がある。ここでは、スリットを模擬した Fig.5.7 に示す実験装置で、スリット幅を 1.0, 1.3, 1.5, 2.0[mm] とした実験を行なったところ、Table 5.5 に示す結果が得られた。また、スリット幅が大きい場合、コイルが作る磁場の磁束洩れが大きくなることを考慮して、スリット幅は測定誤差が 0.5% 未満となる 2[mm] とした。

Table 5.3 Specifications of the dynamic strain amplifier

Range	1 ~ 5k $\mu$ strain
Sample rate	0 ~ 5kHz
Low-pass filter	10, 30, 100, 300, 1kHz, F(flat)

Table 5.4 Specifications of the analog/digital converter

Channels	8 channel
Resolution	12 bit
Maximum sampling time	20 $\mu$ sec/channel

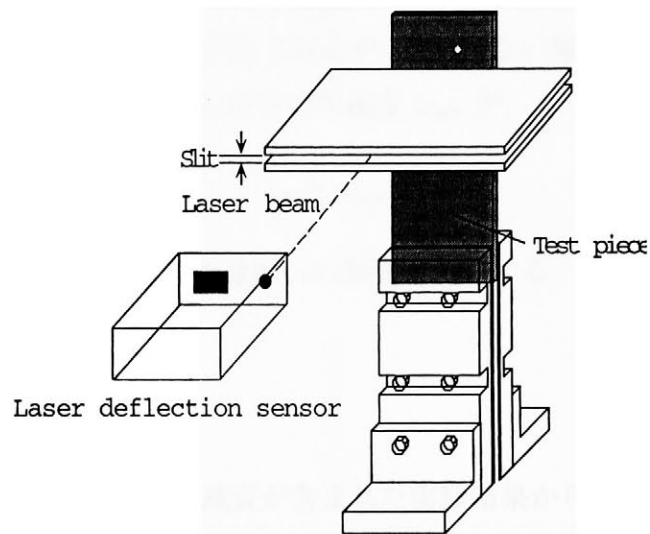


Fig. 5.7 Experimental apparatus of the laser deflection sensor

Table 5.5 Error of the laser deflection sensor

Slit width[mm]	Deflection[mm]	Error[%]
Without slit	1.198	—
1.0	1.804	50.58
1.3	1.165	2.75
1.5	1.192	0.50
2.0	1.201	0.25

### 5.3.3 連成強度パラメータの導出方法

#### (a) 導出手順

連成強度パラメータ  $C_{es}$  は, (5.4) 式より磁気減衰率  $\gamma_c$  と角速度  $\omega_c$  から求めることができる. 磁気減衰率  $\gamma_c$  は, Fig.5.8に示すように, 実験で得られた振動波形のピーク点データから, 磁気減衰以外の成分, すなわち, 空気抵抗による減衰や構造減衰の成分を除去し (次節参照), その磁気減衰効果のみのピーク点データを,

$$u = u_0 e^{-\gamma_c t} \quad (5.8)$$

の指数関数を用いて最小自乗近似することにより求められる.

角速度  $\omega_c$  は, 磁気減衰振動をフーリエ変換して求める. なお, こうして得られた振動数には空気抵抗や構造減衰の効果が含まれるが, 減衰のない場合の角速度  $\omega_0$  と空気抵抗などの磁気減衰以外の成分がある場合の角速度  $\omega_{air}$  が,

$$\omega_0 \simeq \omega_{air} \quad (5.9)$$

であると仮定し, 空気抵抗などの角速度への影響を無視する. この (5.9) 式の正当性は, 5.3.4 節の実験で確認する.

#### (b) 磁気減衰成分の抽出

空気抵抗などの磁気減衰以外の減衰が含まれた実験結果から, その成分を除去する方法としては, 時刻  $t_i$  で除去する方法と変位  $u_i$  で除去する方法がある. 空気抵抗などによる減衰率を  $\gamma_{air}$  とすると減衰は,

$$u = u_0 e^{-\gamma_{air} t} \quad (5.10)$$

であり, 空気抵抗などによる減衰と磁気減衰が含まれた減衰は, (5.8) 式と (5.10) 式より,

$$u = u_0 e^{-(\gamma_{air} + \gamma_c) t} \quad (5.11)$$

となる.

時刻  $t_i$  で空気抵抗などの影響を除去する方法を述べる. Fig.5.9 に示すように時刻  $t_i$  での変位が, 磁気減衰のみの場合, (5.8) 式より

$$u_c = u_0 e^{-\gamma_c t_i} \quad (5.12)$$



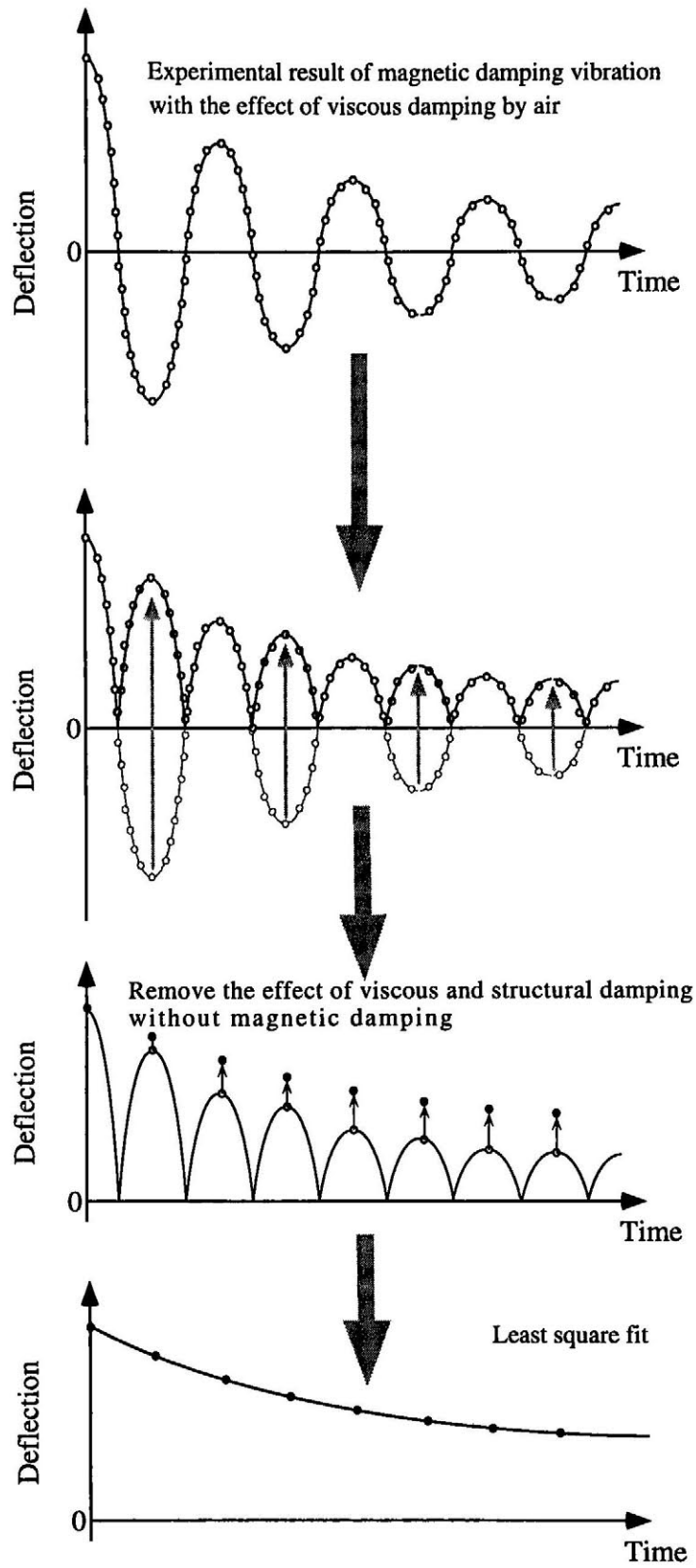


Fig. 5.8 Method to obtain magnetic damping rate from experimental result

であり、空気抵抗などの磁気減衰以外の場合、(5.10) 式より、

$$u_{air} = u_0 e^{-\gamma_{air} t_i} \quad (5.13)$$

となる。また、同様に空気抵抗などの影響と磁気減衰が含まれた場合、(5.11) 式より、

$$u_{all} = u_0 e^{-(\gamma_c + \gamma_{air}) t_i} \quad (5.14)$$

となる。実験により、(5.13) 式の  $u_{air}$  と (5.14) 式の  $u_{all}$  を求めることができるので、これらと (5.13) 式、(5.14) 式および (5.12) 式から、

$$u_c = \frac{u_{all}}{u_{air}} u_0 \quad (5.15)$$

が得られる。これが、時刻  $t_i$  における磁気減衰のみの変位である。

次に、変位  $u_i$  で空気抵抗などの磁気減衰以外の減衰の影響を除去する方法を述べる。Fig.5.10に示すように、(5.12) 式で変位が  $u_i$  となる時刻を  $t_c$  とすると、(5.12) 式は、

$$u_i = u_0 e^{-\gamma_c t_c} \quad (5.16)$$

であり、(5.14) 式で変位が  $u_i$  となる時刻を  $t_{air}$  とすると、

$$u_i = u_0 e^{-\gamma_{air} t_{air}} \quad (5.17)$$

である。同様に (5.14) 式で変位が  $u_i$  となる時刻を  $t_{all}$  とすると、

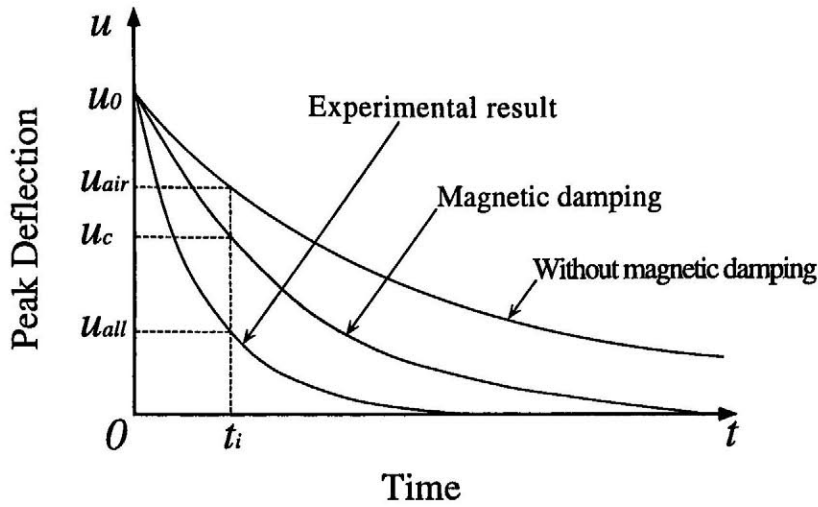
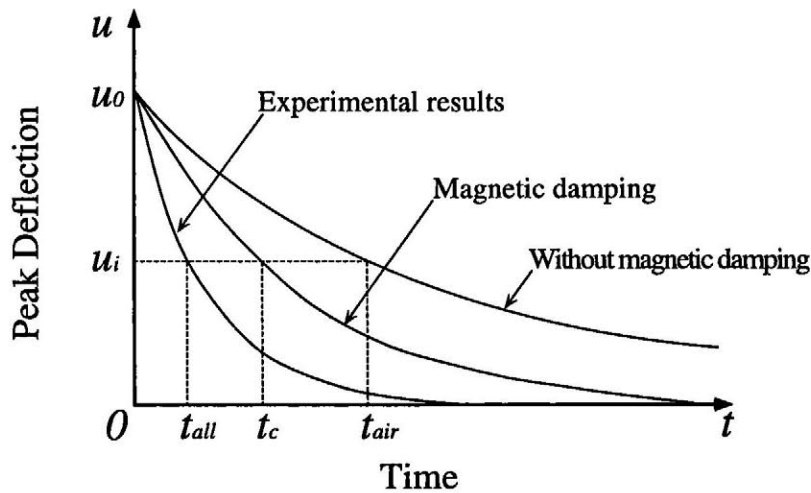
$$u_i = u_0 e^{-(\gamma_c + \gamma_{air}) t_{all}} \quad (5.18)$$

となる。実験により、(5.17) 式の  $t_{air}$  と (5.18) 式の  $t_{all}$  を求めることができるので、これらと (5.17) 式、(5.18) 式および (5.16) 式から、

$$t_c = \frac{t_{all} \log \frac{u_i}{u_0}}{\log \frac{u_i}{u_0} + t_{all} \gamma_{air}} \quad (5.19)$$

が得られる。これにより、磁気減衰のみで変位が  $u_i$  となる時刻を求めることができる。

このように、2つの方法で空気抵抗などの磁気減衰以外の減衰成分を除去することができるが、両者とも空気抵抗などの磁気減衰以外の成分の減衰率  $\gamma_{air}$  を必要とする。そこで、この  $\gamma_{air}$  を求めるため、磁場を 0.0[T] として、ソレノイドコイル内で板厚 0.3[mm] の試験片を振動させる実験を行なった。得られた振動波形のピーク点と、これを指数関数で最小自乗近似した結果を Fig.5.11に示す。また同図にはコイルを取り外した状態での

Fig. 5.9 Method to obtain magnetic damping from experimental results at  $t_i$ Fig. 5.10 Method to obtain magnetic damping from experimental results at  $u_i$ 

結果も示している。実験結果より、コイル内での減衰はコイルを外した状態と大きく異なり、さらに、コイル内では減衰を指数関数で近似できていないことがわかる。コイル内での減衰を、変位に対して微小区間に分割し、それぞれの区間で、Fig.5.12に示すように、時刻  $t=0$  で変位が  $u_0$  となる指数関数で最小自乗近似して得られた  $\gamma_{air}$  を Fig.5.13に示す。同図より、 $\gamma_{air}$  が変位に依存して変化していることがわかる。

本実験では、試験片に任意の初期変位を与えて振動させるために時刻  $t_i$  での (5.15) 式の  $u_{air}$  が未知量となり、時刻  $t_i$  で空気抵抗などの効果を除去する方法は適用が困難である。一方、変位  $u_i$  で空気抵抗などの影響を除去する方法では、(5.19) 式の  $t_c$  を、Fig.5.13の  $\gamma_{air}$  を用いて、求めることができる。このため、本実験では、変位  $u_i$  で空気抵抗などの影響を除去する方法を使用する。

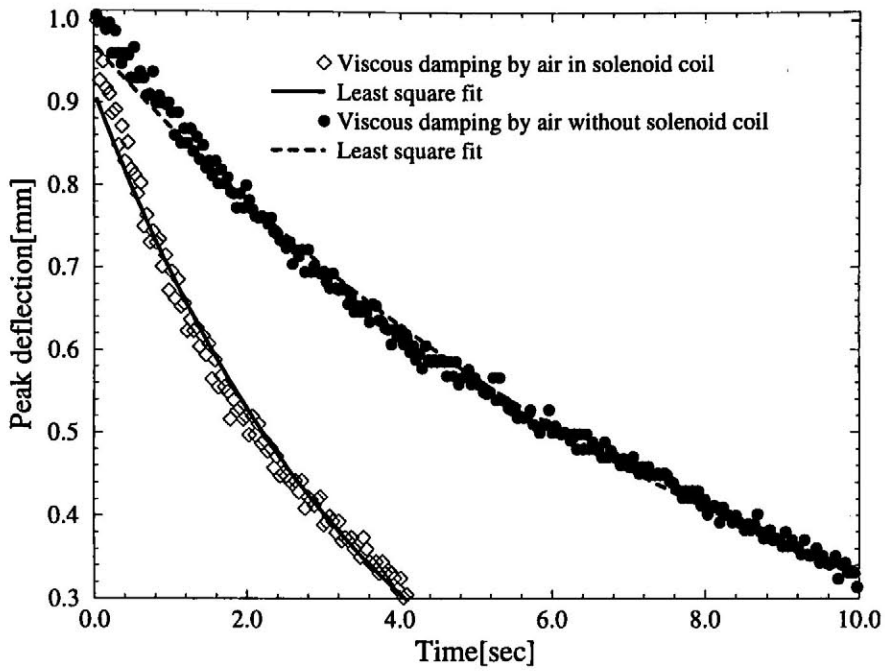


Fig. 5.11 Viscous damping by air in solenoid coil

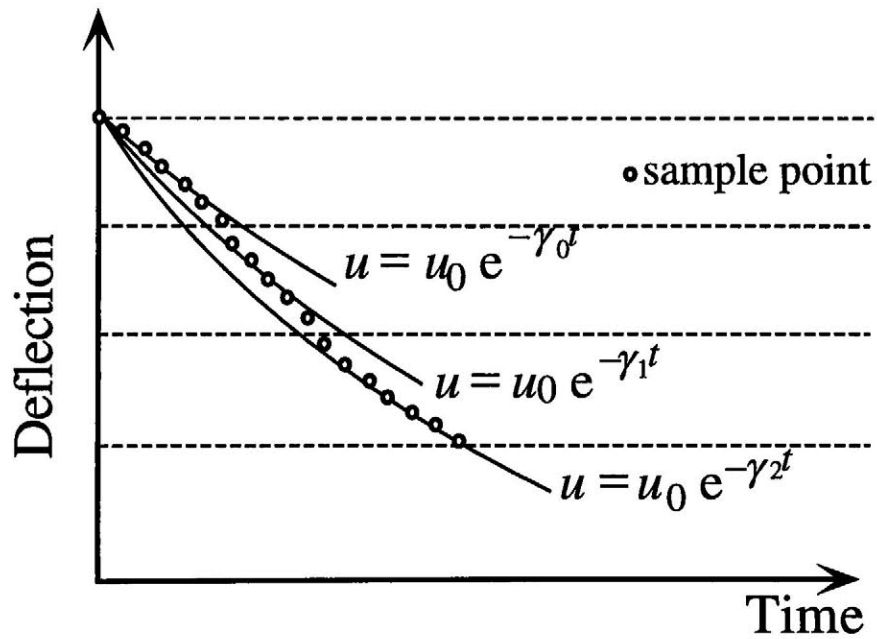


Fig. 5.12 Least square fitting of the rate of the viscous damping by air

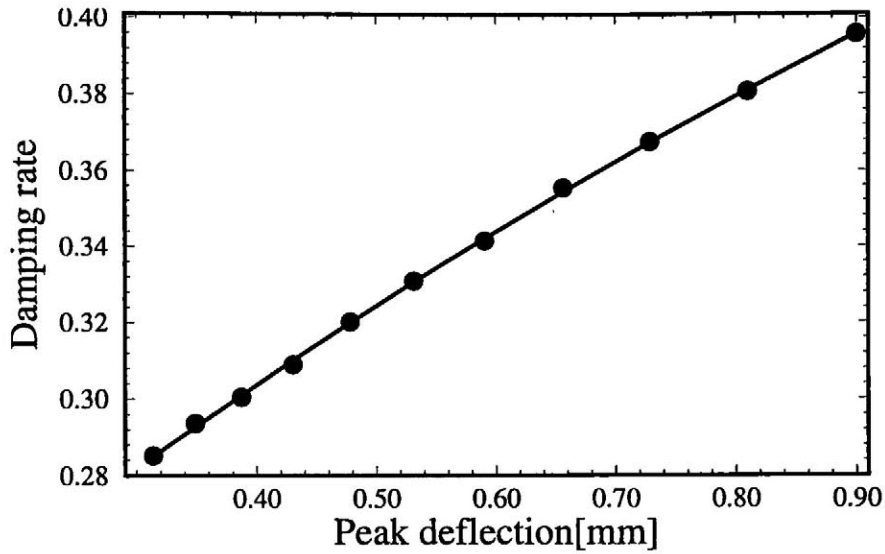


Fig. 5.13 Damping rate of air viscous in solenoid coil

#### 5.3.4 測定結果の妥当性の検証

測定結果, 空気抵抗の影響による角速度の変化は無視できるとした (5.9) 式の仮定および空気抵抗による減衰成分の除去方法の妥当性を実験により検証する. 磁場を  $0.0[\text{T}]$  とし, 角速度が 4 種類の試験片の中で最大となる板厚  $1.0[\text{mm}]$  の試験片で振動実験を行った. ひずみゲージで測定した試験片の B 点ひずみと, レーザ変位計で測定した A 点の変位からは理論を用いて求めた B 点ひずみを, Fig.5.14 に示す. 同図より, 2 種類の測定装置による結果は良く一致しており, 測定結果の妥当性が確認される.

次に, 空気抵抗による振動数の変化を実験により求める. 板厚が異なる 4 種類の試験片に対して, 磁場が  $0.0[\text{T}]$  の条件で振動実験を行ない, その測定で得られた振動をフーリエ変換した結果を Fig.5.15 に示す. この結果から, 本実験では 1 次モードに振動が支配的であることがわかり, また, その周波数もこれらの結果から得られる. こうして求めた試験片の 1 次モードの振動数および (5.7) 式により解析的に求めた振動数を Table 5.6 に示す. 実験結果と空気抵抗を考慮せず解析的に求めた結果の誤差が 5% 以下になっていることがわかる. これにより, 空気抵抗による振動数の変化を無視できるとした (5.9) 式の仮定が検証される.

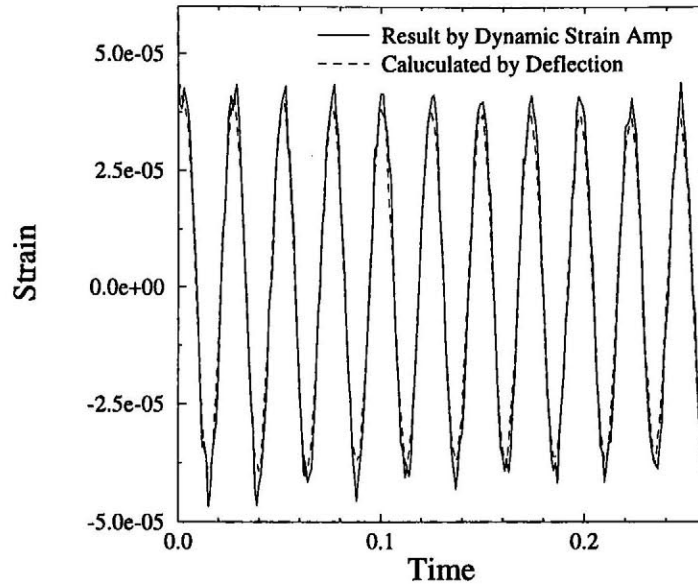
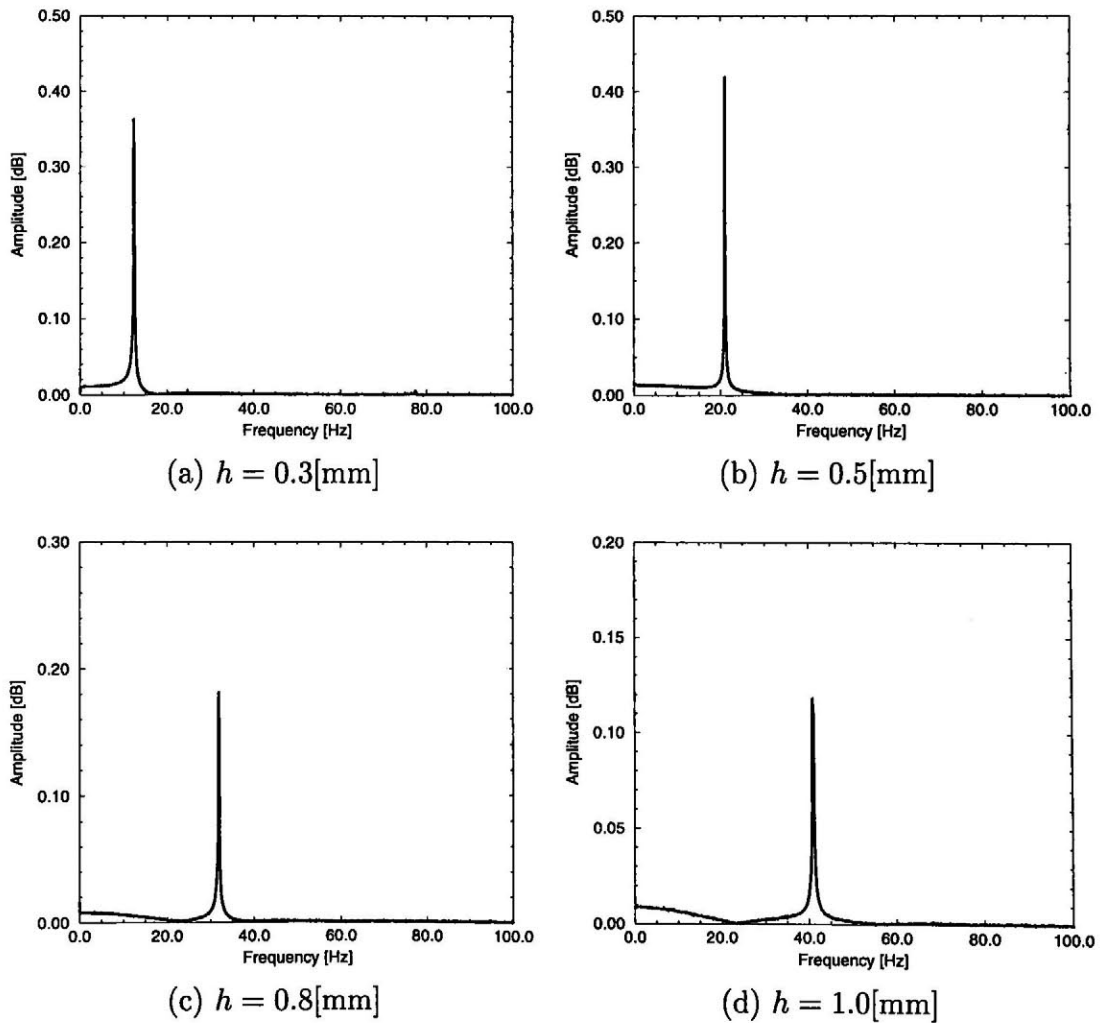
Fig. 5.14 Strain of the plate at point B( $h = 1.0$ [mm])

Fig. 5.15 Results of Fourier transform

Table 5.6 Frequency of the test piece

Thickness [mm]	Frequency [Hz]	
	Experimental results	Analytical results
0.3	12.08	11.90
0.5	21.00	20.28
0.8	31.82	31.22
1.0	41.02	40.39

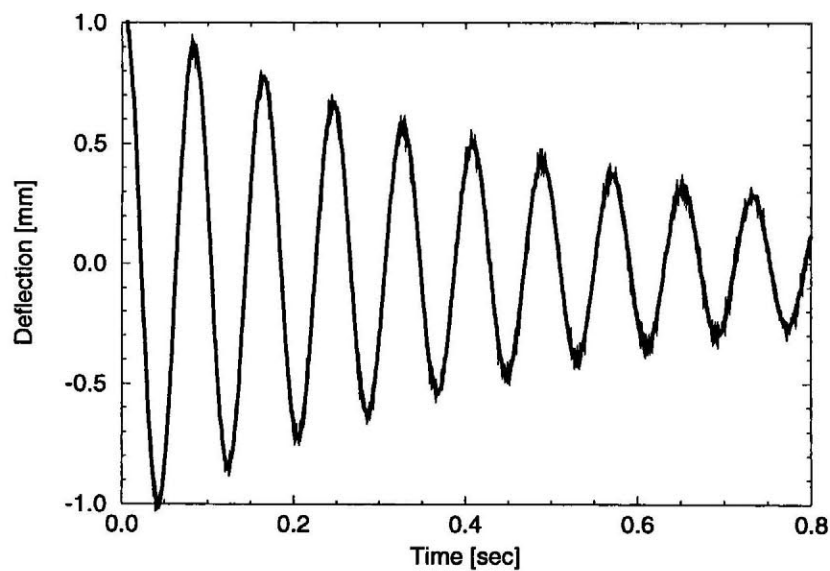


Fig. 5.16 Magnetic damping vibration in solenoid coil

空気抵抗による減衰成分の除去方法の妥当性を、板厚 0.3[mm] の試験片に 0.118[T] の磁場を印加した磁気減衰振動実験で確認する。実験で得られた A 点変位を Fig.5.16 に示す。この振動波形には、磁気減衰と空気抵抗による減衰が含まれるため、5.3.3 節に述べた方法で空気抵抗による減衰成分を除去する。こうして得られた、磁気減衰のみの減衰を Fig.5.17 に示す。また、同図には、磁気減衰のみの減衰を指数関数により最小自乗近似した結果も示している。磁気減衰は指数関数で良く近似されており、空気抵抗による減衰成分を除去する方法の妥当性が確認される。

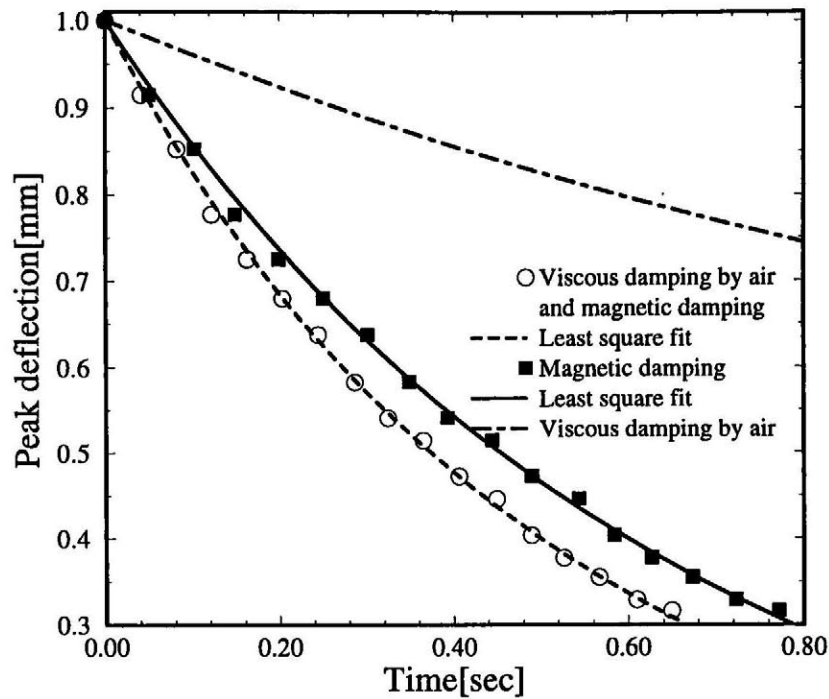


Fig. 5.17 Magnetic damping from experimental result

## 5.4 連成強度パラメータの磁場・板厚への依存性

連成強度パラメータ  $C_{es}$  の磁場と板厚に対する依存性を求めるため、Table.5.7に示すように、磁場に対して7ケース、板厚に対して4ケースの磁気減衰振動実験を行なう。設定した7ケースの磁場は、Table 5.8 に示すような電流をソレノイドコイルの内側コイルと外側コイルに流すことによって得られる。また、変位測定を行なうレーザー変位計の応答速度は 3[kHz] とし、A/D 変換器のサンプリングタイムは 0.5[ms] に設定した。

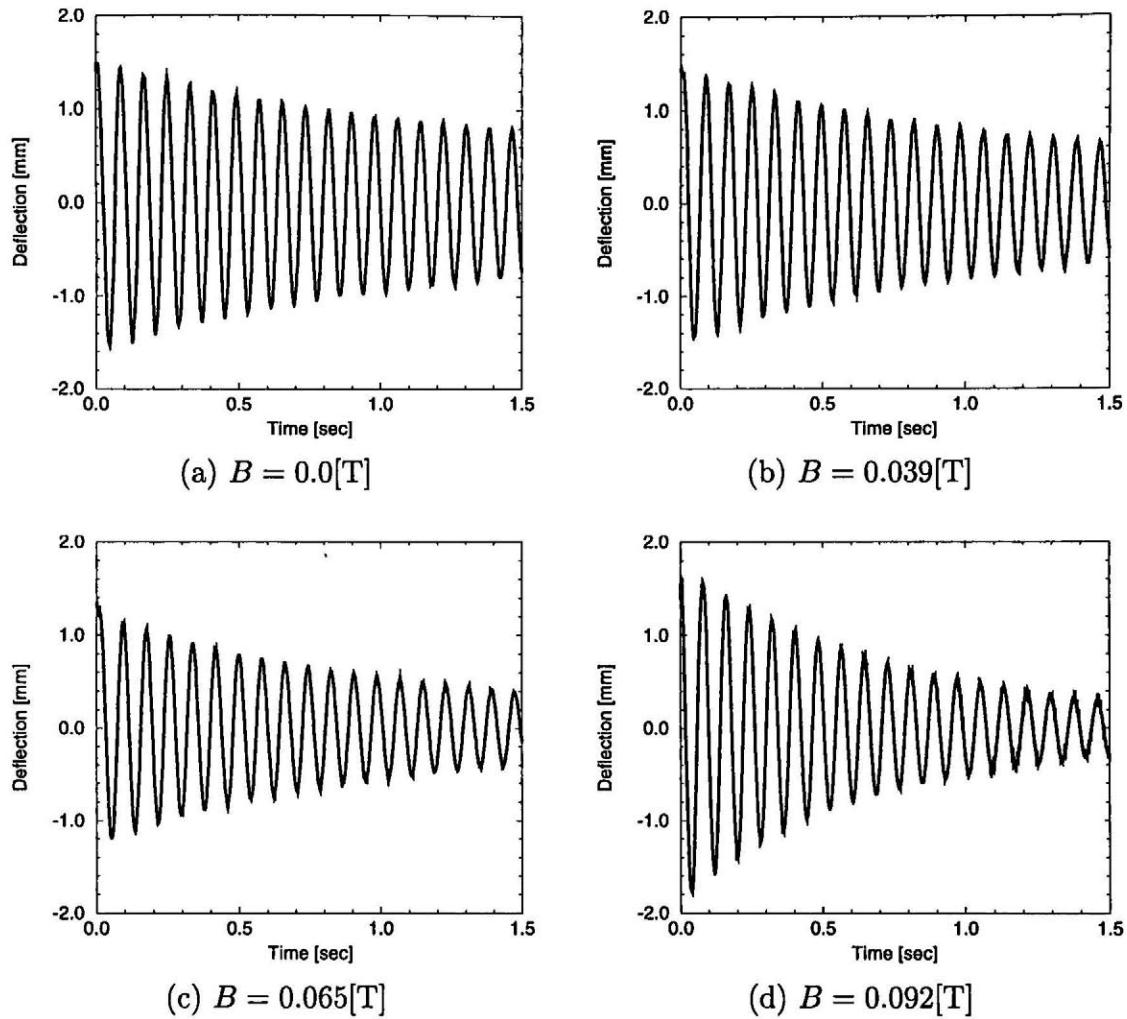
Table 5.7 Experimental conditions of magnetic field and thickness

Magnetic field [T]	0.039, 0.065, 0.092, 0.118, 0.139, 0.165, 0.210	7 cases
Thickness [mm]	0.3, 0.5, 0.8, 0.9	4 cases

Table 5.8 Magnetic field of solenoid coil by current

Magnetic field [T]	0.0	0.039	0.065	0.092	0.118	0.139	0.165	0.210
Current of inside coil [A]	0.0	3.0	5.0	3.0	5.0	5.0	7.0	9.0
Current of outside coil [A]	0.0	0.0	0.0	5.0	5.0	7.0	7.0	9.0

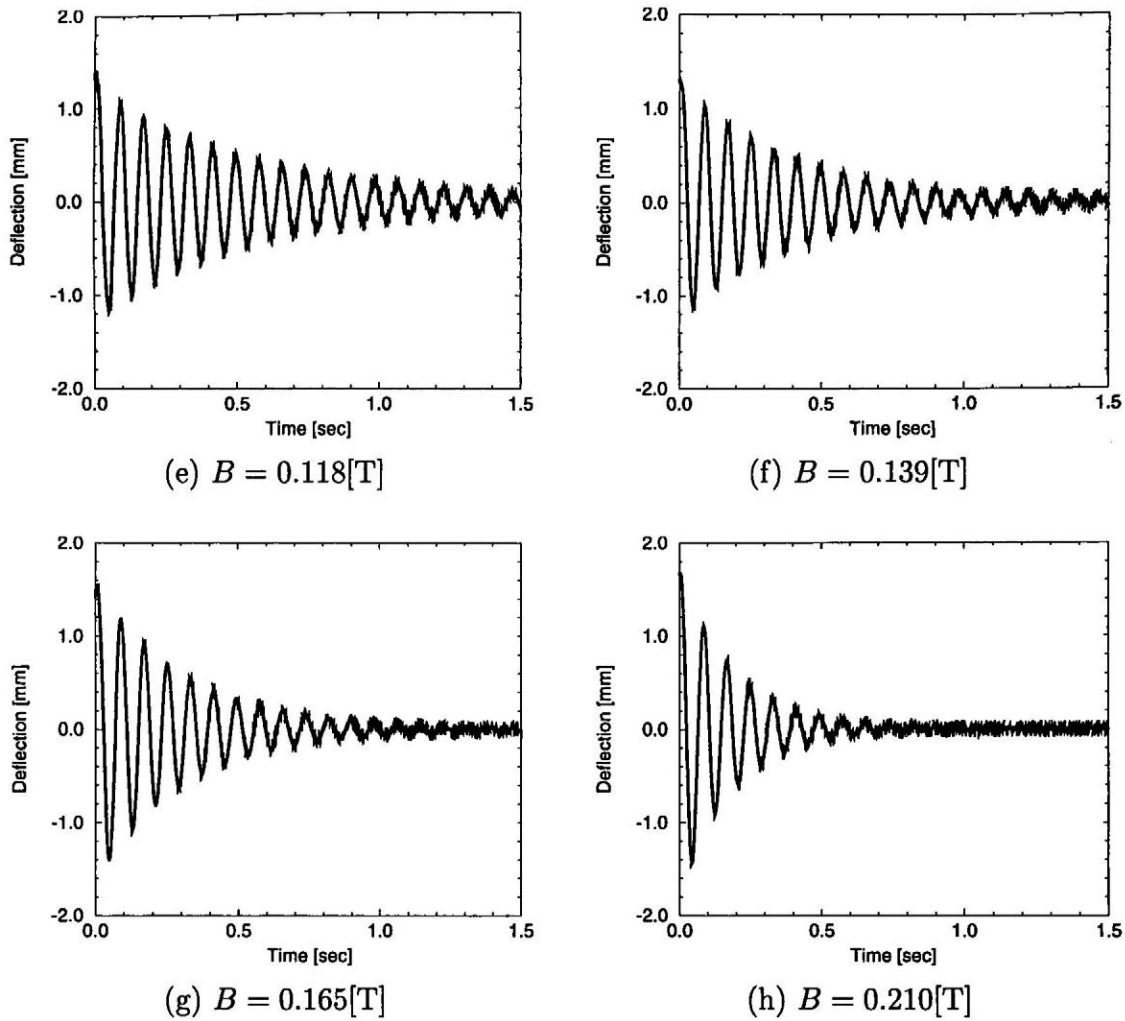


Fig. 5.18 Deflection of the plate ( $h = 0.3[\text{mm}]$ )

#### 5.4.1 実験結果

板厚  $0.3[\text{mm}]$  の試験片に対して、磁場を印加しない場合と Table 5.7 に示した7ケースの磁場を与えた場合のA点変位を Fig.5.18に示す。また、同様に、板厚  $0.5, 0.8, 1.0[\text{mm}]$  の試験片に対して、 $0.039, 0.092, 0.165, 0.210[\text{T}]$  の磁場を与えた場合のA点変位を Fig.5.19–5.21 に示す。実験結果より、磁場を強くすることにより、減衰が強くなっていることがわかる。

このように、Table 5.7 に示す全 28 ケースの実験を行ない、磁気減衰振動を測定した。これらの実験結果を用いて、連成強度パラメータの磁場と板厚に対する依存性を求める。

Fig. 5.18 Deflection of the plate ( $h = 0.3[\text{mm}]$ ) contd.

### 5.4.2 磁場と板厚に対する依存性

磁気減衰振動の実験結果から求めた、板厚  $0.3[\text{mm}]$  の試験片に  $0.039, 0.092, 0.105, 0.210[\text{T}]$  の磁場を与えた場合のピーク点と、それから空気抵抗による減衰成分を除去した結果を Fig.5.22 に示す。同図には、磁気減衰のみの結果を (5.8) 式を用いて最小自乗近似した結果も示している。実験結果から、磁気減衰のみの結果は (5.8) 式で良く近似されていることがわかり、また、この最小自乗近似で磁気減衰率  $\gamma_c$  が求められる。Fig.5.23–5.25 には、板厚  $0.5, 0.8, 1.0[\text{mm}]$  の試験片に  $0.039, 0.092, 0.105, 0.210[\text{T}]$  の磁場を与えた場合の結果も示している。

磁気減衰率  $\gamma_c$  と振動波形をフーリエ変換して得られる角速度  $\omega_c$  により、(5.4) 式を用いて連成強度パラメータが求められる。板厚  $0.3[\text{mm}]$  の試験片の磁気減衰率  $\gamma_c$  と角速度  $\omega_c$  および連成強度パラメータ  $C_{es}$  を Table 5.9 に示す。同様に、板厚  $0.5, 0.8, 1.0[\text{mm}]$  の場合の  $\gamma_c, \omega_c, C_{es}$  を、それぞれ Table 5.10–5.12 に示す。次節では、この Table 5.9–5.12 に基づいて連成強度パラメータの依存性を検討する。

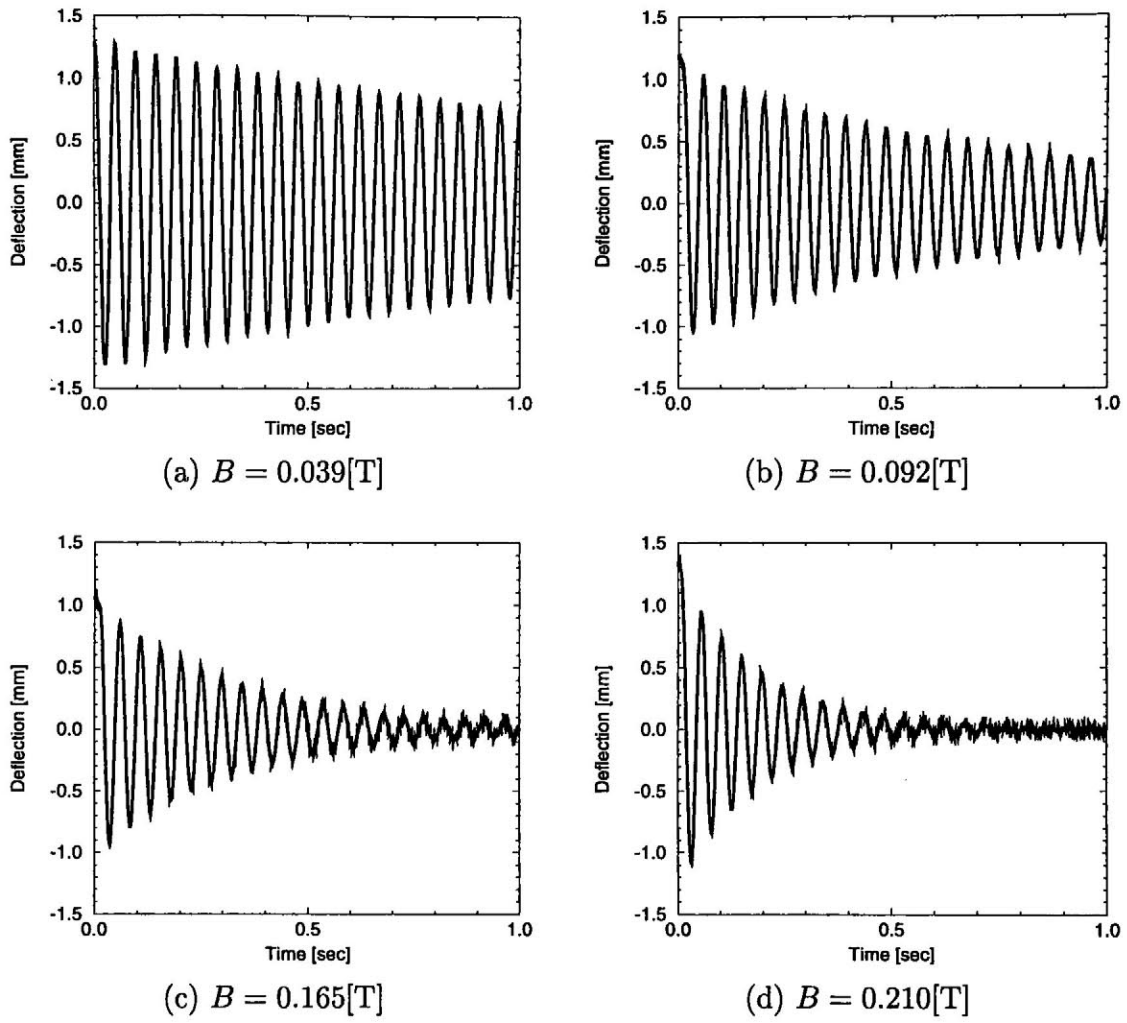


Fig. 5.19 Deflection of the plate ( $h = 0.5[\text{mm}]$ )

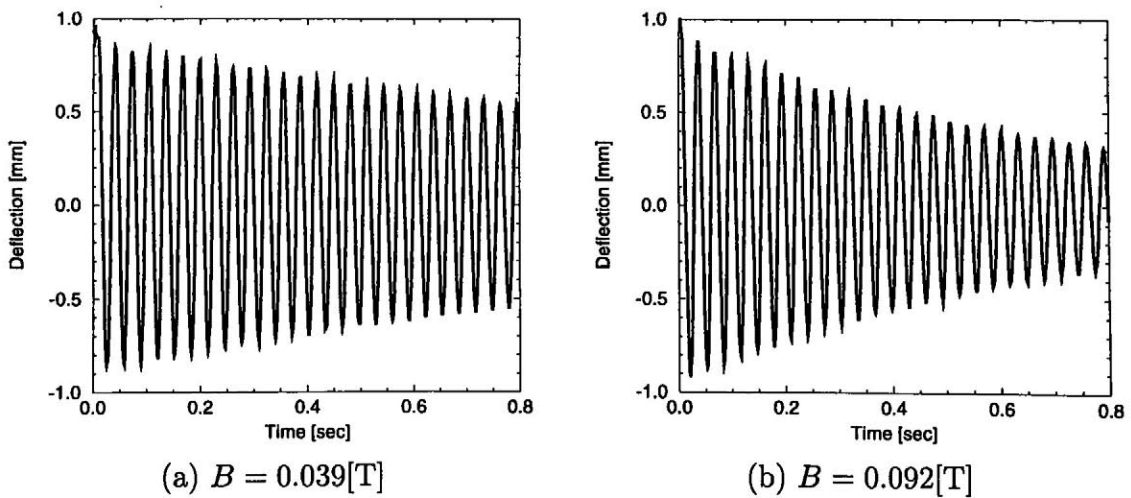
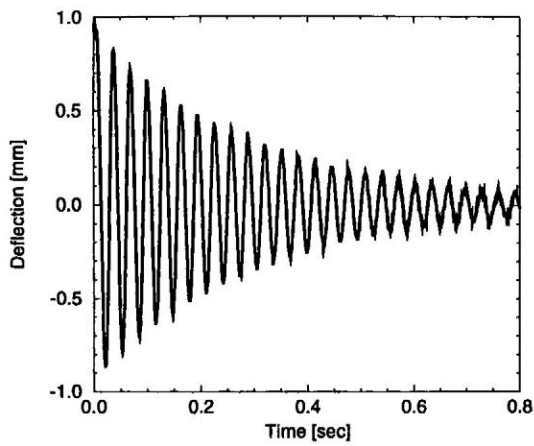
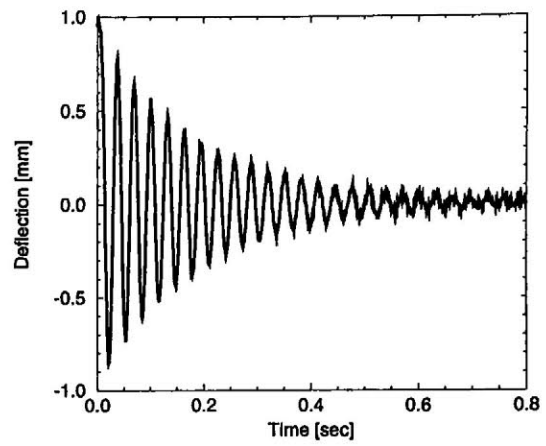


Fig. 5.20 Deflection of the plate ( $h = 0.8[\text{mm}]$ )

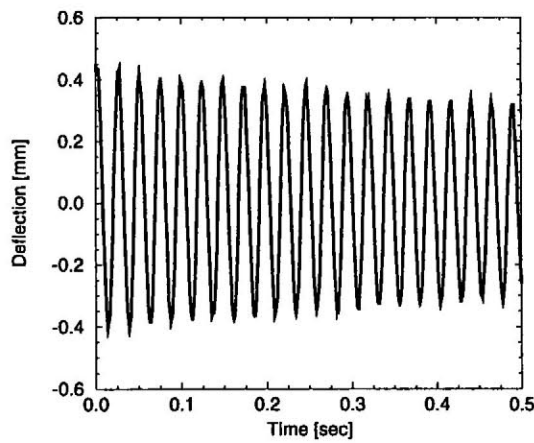


(c)  $B = 0.165[\text{T}]$

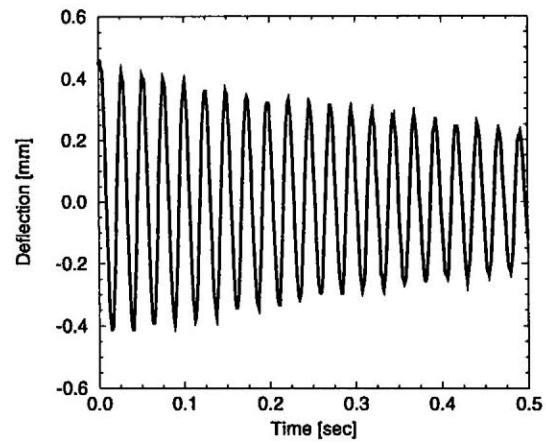


(d)  $B = 0.210[\text{T}]$

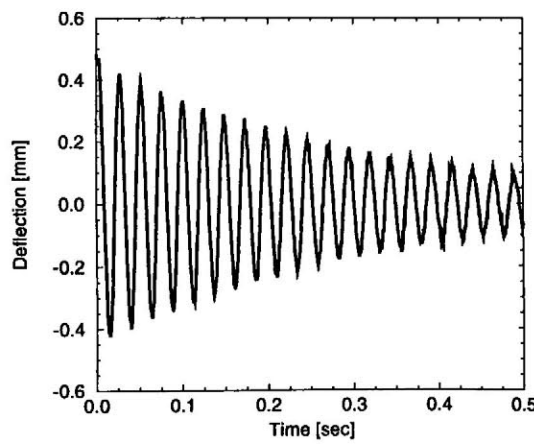
Fig. 5.20 Deflection of the plate ( $h = 0.8[\text{mm}]$ ) contd.



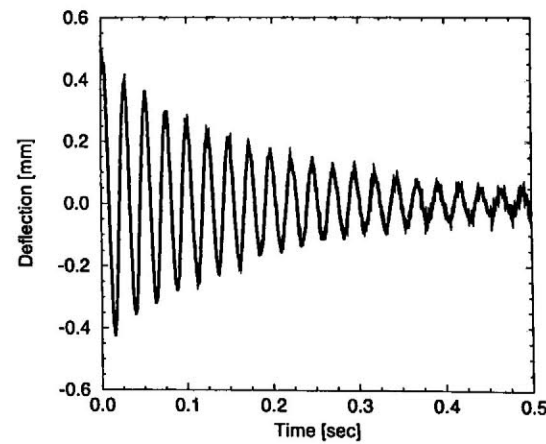
(a)  $B = 0.039[\text{T}]$



(b)  $B = 0.092[\text{T}]$

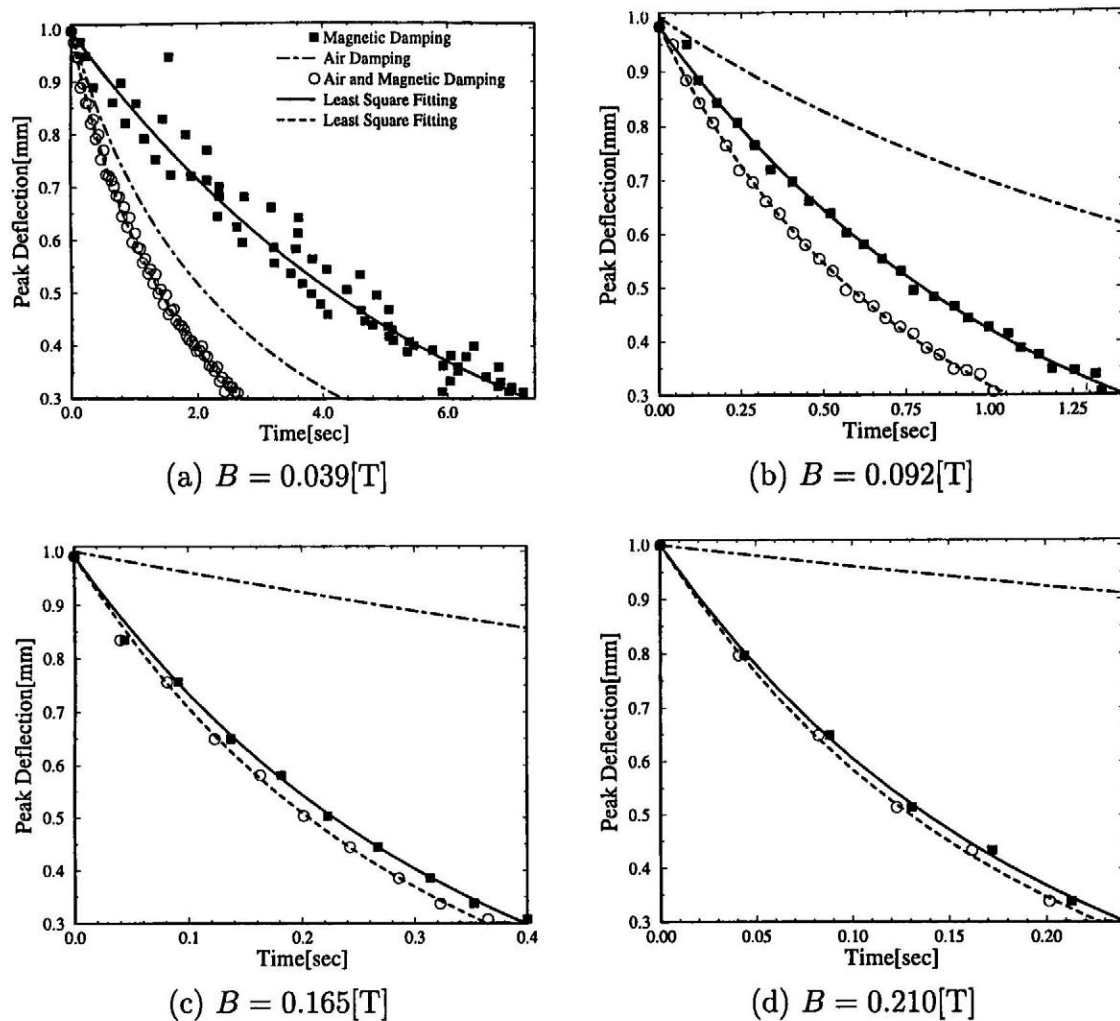


(c)  $B = 0.165[\text{T}]$



(d)  $B = 0.210[\text{T}]$

Fig. 5.21 Deflection of the plate ( $h = 1.0[\text{mm}]$ ) contd.

Fig. 5.22 Peak deflection at point A ( $h = 0.3[\text{mm}]$ )Table 5.9 Magnetic damping rate, revolution velocity and coupling intensity parameter of the plate ( $h = 0.3[\text{mm}]$ )

Magnetic field $B[\text{T}]$	Magnetic damping rate $\gamma_c$	Revolution velocity $\omega_c[\text{rad/s}]$	Coupling intensity parameter $C_{es}$
0.039	0.151	77.577	$1.946 \times 10^{-3}$
0.065	0.444	77.176	$5.753 \times 10^{-3}$
0.092	0.856	77.024	$1.111 \times 10^{-2}$
0.118	1.473	77.428	$1.902 \times 10^{-2}$
0.139	2.029	77.039	$2.633 \times 10^{-2}$
0.165	2.896	77.405	$3.739 \times 10^{-2}$
0.210	4.897	76.189	$6.414 \times 10^{-2}$

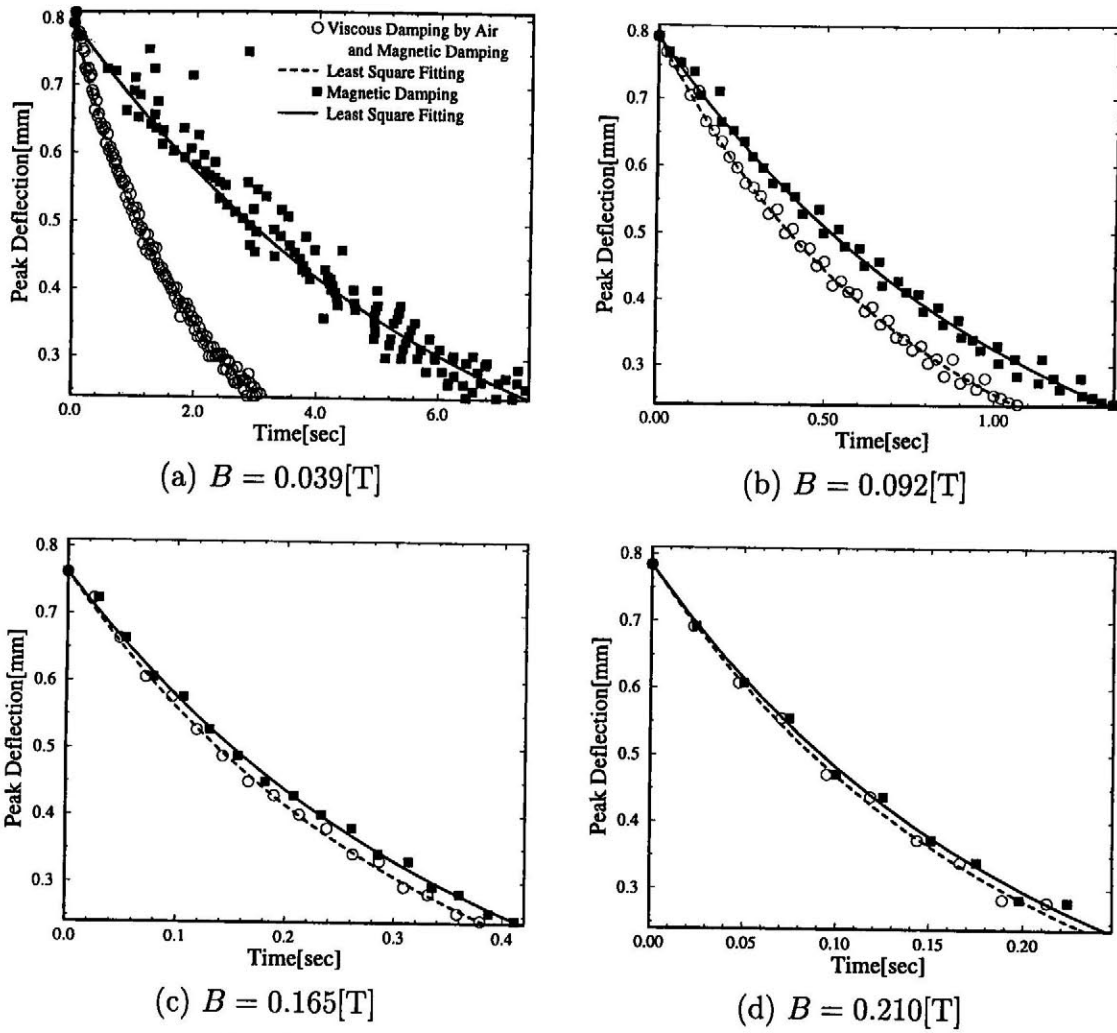

 Fig. 5.23 Peak deflection at point A ( $h = 0.5[\text{mm}]$ )

 Table 5.10 Magnetic damping rate, revolution velocity and coupling intensity parameter of the plate ( $h = 0.5[\text{mm}]$ )

Magnetic field $B[\text{T}]$	Magnetic damping rate $\gamma_c$	Revolution velocity $\omega_c[\text{rad/s}]$	Coupling intensity parameter $C_{es}$
0.039	0.160	132.133	$1.211 \times 10^{-3}$
0.065	0.441	132.173	$3.337 \times 10^{-3}$
0.092	0.888	132.313	$6.711 \times 10^{-3}$
0.118	1.455	132.328	$1.099 \times 10^{-2}$
0.139	1.981	132.291	$1.497 \times 10^{-2}$
0.165	2.788	132.140	$2.109 \times 10^{-2}$
0.210	4.801	132.328	$3.626 \times 10^{-2}$

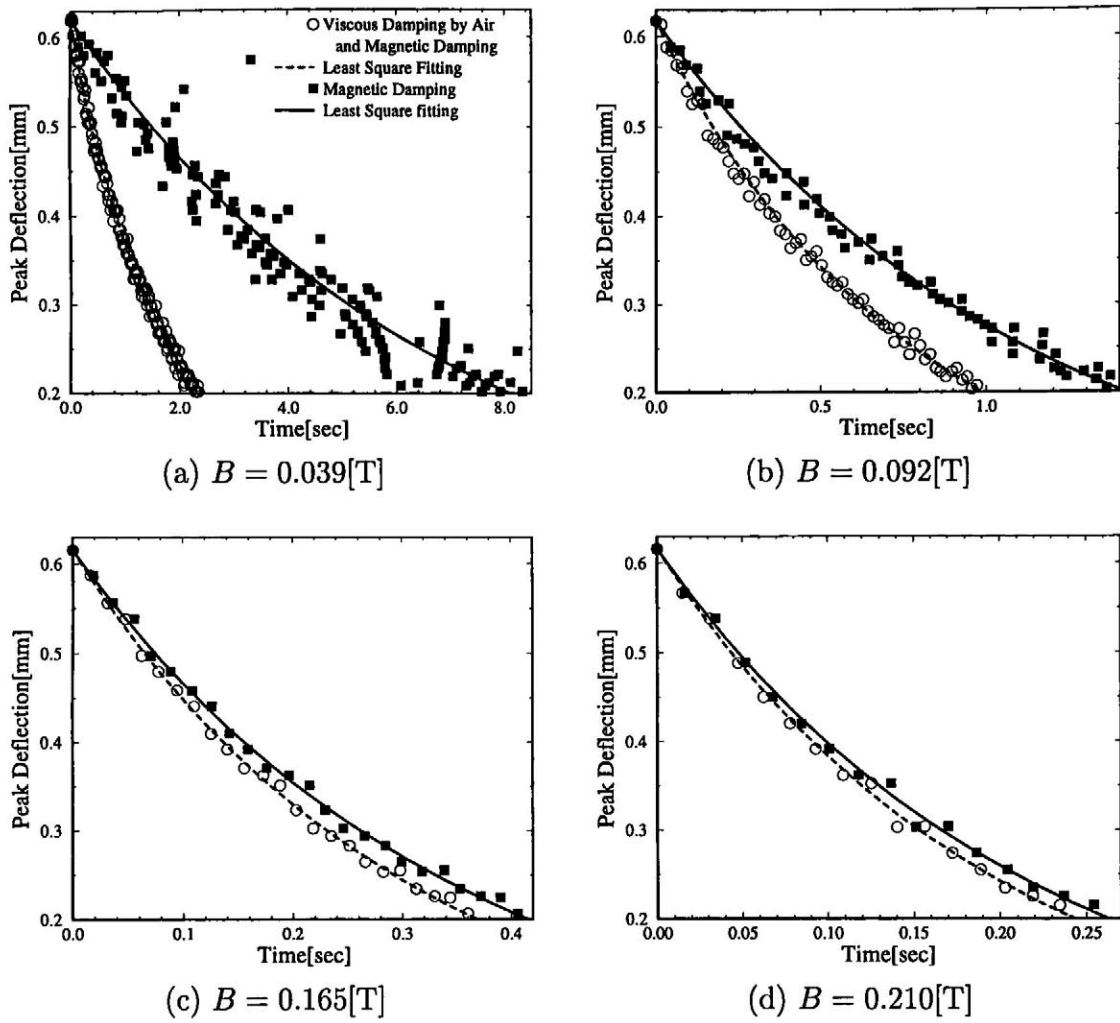
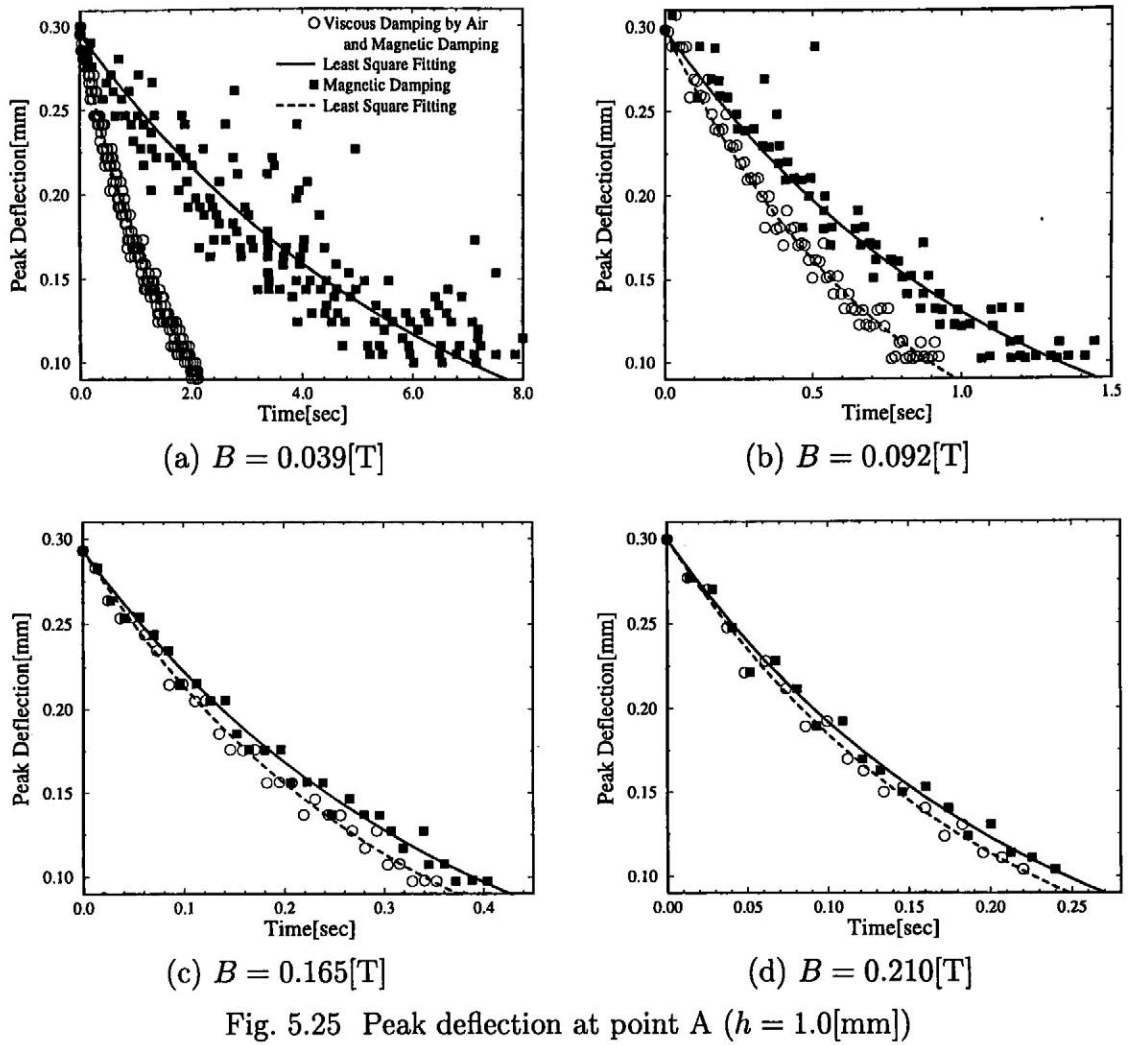

 Fig. 5.24 Peak deflection at point A ( $h = 0.8$ [mm])

 Table 5.11 Magnetic damping rate, revolution velocity and coupling intensity parameter of the plate ( $h = 0.8$ [mm])

Magnetic field $B$ [T]	Magnetic damping rate $\gamma_c$	Revolution velocity $\omega_c$ [rad/s]	Coupling intensity parameter $C_{es}$
0.039	0.147	200.206	$7.342 \times 10^{-4}$
0.065	0.443	200.150	$2.213 \times 10^{-3}$
0.092	0.843	199.761	$4.220 \times 10^{-3}$
0.118	1.356	199.841	$6.785 \times 10^{-3}$
0.139	1.981	200.967	$9.857 \times 10^{-2}$
0.165	2.821	200.282	$1.408 \times 10^{-2}$
0.210	4.581	200.059	$2.289 \times 10^{-2}$


 Table 5.12 Magnetic damping rate, revolution velocity and coupling intensity parameter of the plate ( $h = 1.0[\text{mm}]$ )

Magnetic field $B[\text{T}]$	Magnetic damping rate $\gamma_c$	Revolution velocity $\omega_c[\text{rad/s}]$	Coupling intensity parameter $C_{es}$
0.039	0.146	257.809	$5.663 \times 10^{-4}$
0.065	0.417	257.984	$1.616 \times 10^{-3}$
0.092	0.819	258.019	$3.174 \times 10^{-3}$
0.118	1.312	258.289	$5.080 \times 10^{-3}$
0.139	1.843	257.989	$7.143 \times 10^{-3}$
0.165	2.675	258.547	$1.035 \times 10^{-2}$
0.210	4.469	258.562	$1.728 \times 10^{-2}$



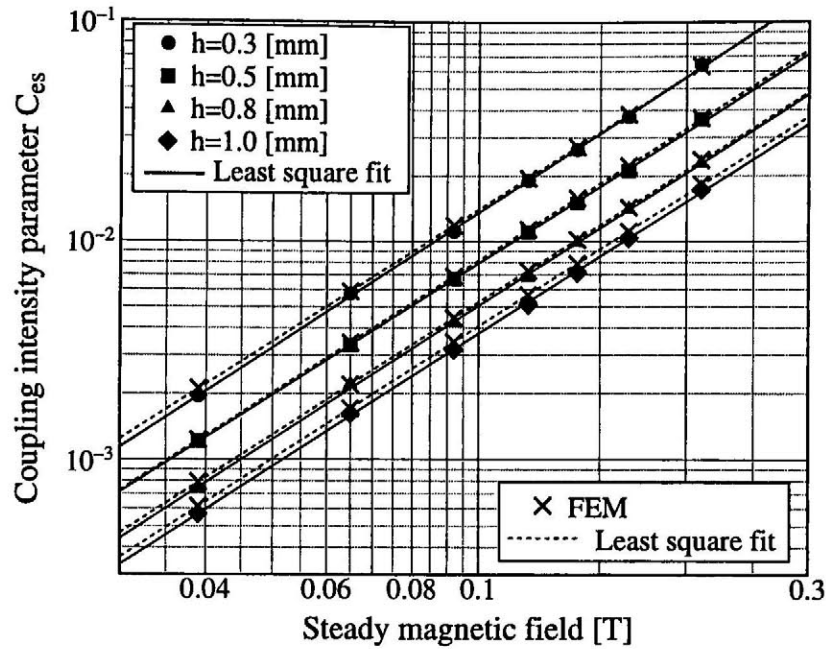


Fig. 5.26 Dependence of coupling intensity parameter with magnetic field

## 5.5 依存性に関する検討

Table 5.9-5.12 に示す連成強度パラメータより得られた、磁場に対する依存性を Fig.5.26 に、板厚に対する依存性を Fig.5.27 に示す。これらの図には、実験モデルを有限要素解析して得られた連成強度パラメータも示している。実験結果は、有限要素解析結果と良く一致しており、本実験の妥当性が検証される。

実験結果を最小自乗近似した結果、連成強度パラメータの磁場と板厚に対する依存性として、

$$C_{es} \propto B^{2.024} h^{-1.040} \quad (5.20)$$

が得られた。また、有限要素解析結果においては、

$$C_{es} \propto B^{2.014} h^{-1.007} \quad (5.21)$$

となった。(5.20) 式と (5.21) 式は、前章の 4.4.2 節で議論したインダクタンスが無視できる場合での依存性、

$$C_{es} \propto B^2 E^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \kappa^1 h^{-1} \quad (5.22)$$

と良好な一致となっている。このことから、本実験は、インダクタンスの効果が無視できる状態であったことがわかる。

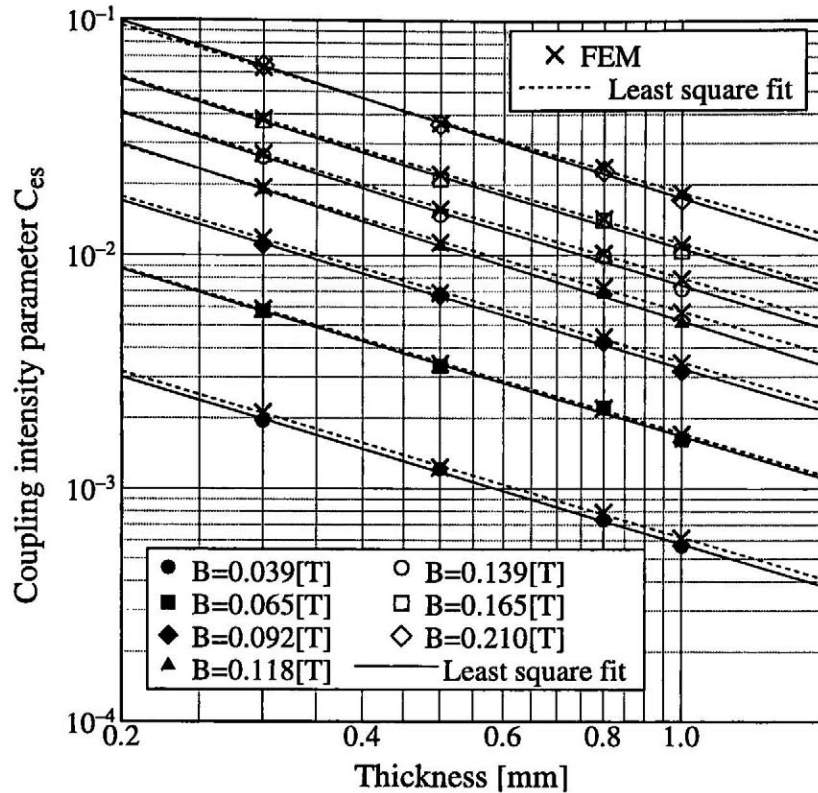


Fig. 5.27 Dependence of coupling intensity parameter with thickness

次にインダクタンスの効果と連成効果の関係について述べる。構造物の変形速度と磁場による速度起電力は構造物に渦電流を発生させるが、この時、インダクタンスは発生する渦電流に時間遅れを生じさせる。すなわち、インダクタンスの効果が小さい場合、変形によって生じる渦電流、また、この渦電流と磁場によって生じる電磁力が瞬時に応答することになる。この電磁力は減衰力として構造物に作用するため、この時の磁気減衰振動は、一般の減衰振動

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.23)$$

と同じ状態になる。しかし、インダクタンスの効果が大きい場合は、変形に対して減衰力として働く電磁力の発生が遅れるため、一般の減衰振動問題と異なる。これが磁気減衰振動の大きな特徴である。また、前章の Fig.4.13 で、板厚が大きくなるに従い連成強度パラメータの依存性が大きく変化したが、これは、板厚を大きくすることで振動数が大きくなり、その結果、相対的に電磁力の遅れが大きくなったためであると解釈できる。したがって、こうした条件下での実験を行ない、連成強度パラメータの依存性を、さらに検討する必要がある。

また、前章で提案した、1自由度連成モデルを用いた依存性解析手法は、1度の実験で得られた磁気減衰率  $\gamma_c$  と角速度  $\omega_c$  から (4.24) 式の  $P_s, P_e, P_c$  を求めることで、連成強度パラメータの依存性を簡易的に求めることができる。これは、磁場中の機器を合理的に設計する上で有効となる。

## 5.6 まとめ

磁気減衰振動の実験を行ない、

- 実験結果から連成強度パラメータを導出する手法を提案し、その妥当性を数値解析結果との比較により検証した。これにより、磁気減衰振動実験から、連成効果の強さを定量的に評価することができる。
- 連成強度パラメータの磁場と板厚に対する依存性を、種々の条件下での実験により求めた。この依存性を用いることにより、連成強度パラメータに基づいた設計を合理的に行なうことができる。
- 前章で提案した1自由度連成モデルを依存性の簡易解析手法の妥当性を確認した。

しかし、実験で得られた依存性を検討した結果、本実験がインダクタンスの効果が小さい条件となっており、そのため、さらにインダクタンスの効果が大きい条件下での実験が必要である。

## 参考文献

- (5.1) L. R. Turner, W. F. Prage, M. J. Lari et.al., FELIX Construction status and Experimental Program, *Nucl. Technol.Fusion*, 4-2 (1983), 745-750.
- (5.2) T. Q. Hua, M. J. Knott, L. R. Turner et.al. Experimental Modeling of Eddy Currents and Deflections for Tokamak Limiters, *Trans. Am. Nucl. Soc.*, 52 (1986), 233-234.
- (5.3) T. Q. Hua, M. J. Knott, L. R. Turner and R. B. Wehrle, Experimental Modelling of Eddy Current and Deflection for Tokamak Limiters, *Fusion Technology*, 10 (1986), 1047-1052.
- (5.4) 高木敏行, 谷順二, 川村修平, 導電性薄板の強磁場中での動的挙動に関する解析と実験, 日本機械学会論文集, C 58-556 (1992), 3537-3542.
- (5.5) Y. Crutzen, S. Papadopoulos and F. Van Paemel, Modeling, Analysis and Validation of Electromagnetic-Mechanical Coupling on Clean Test Peaces, *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5 (1994), 3276-3279.
- (5.6) S. Nishio, H. Miura and A. Isono, An Applicability of Eddy Current Analysis by a Network Mesh Method to Electromagnetomechanical Problems and Its Experimental Verification, *Int. J. Appl. Electromagn. in Mater.*, 6 (1995), 37-54.
- (5.7) T. Takagi and J. Tani, Evaluation of Critical Magnetic Viscous Damping Ratios for Plate Vibrations with Different Boundary Conditions, *Proc. of ISEM-Sapporo*, (1993), 101-104.
- (5.8) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, Study of Magnetic Damping Effect on Dynamic Deflection of Fusion Reactor First Wall, *Fusion Eng. Des.*, 27 (1995), 473-480.

## 第 6 章

# 磁気減衰現象の評価パラメータ

### 6.1 はじめに

強磁場中に設置される機器においては、その構造物の健全性評価や設計に指針を与えるために、磁気減衰振動特性を定量的に評価できるパラメータが必要となる。また、こうしたパラメータの磁場などに対する依存性を求めておくと、磁気減衰効果により振動が抑えられるといった性質を積極的に利用した設計も可能となる。

磁気減衰振動に関するパラメータとしては、Takagi らにより、磁気減衰振動の簡易解析<sup>(6.1, 6.2)</sup>に利用される critical magnetic viscous damping ratio<sup>(6.3)</sup>や Yoshida らにより、無次元化した磁気減衰振動の微分方程式から inductance parameter, magnetic force parameter, magnetic damping parameter<sup>(6.4)</sup>が定義されている。また、本研究においても、第 4 章で述べたように、連成効果を含む連成固有値に基づいて連成強度パラメータを定義し、その磁場や材料定数・板厚に対する依存性を、数値解析(第 4 章)および実験(第 5 章)により求めている。

ここでは、この連成強度パラメータを磁気減衰振動特性の評価パラメータとして提案し、数値解析および実験で特性評価パラメータとしての妥当性を検証する。数値解析では、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比が一定となる種々の問題を、第 4 章で述べた連成強度パラメータの依存性解析方法を用いて設定し、同一の磁気減衰振動特性が得られることを示す。また、実験では、実験装置の制約から自由に問題を設定できないため、連成強度パラメータが一定といった条件のみを課して問題を設定し、検証実験を行なう。

## 6.2 磁気減衰の評価パラメータ

連成効果の強さを表すパラメータとして、第4章で連成固有値に基づいた連成強度パラメータを定義したが、これを磁気減衰の評価パラメータとして提案する。1自由度連成モデルにおける連成強度パラメータは、1自由度連成モデルの特性方程式から得られる連成固有値により定義され、この特性方程式は、構造物の運動方程式と渦電流に関する式を組み合わせると、

$$mU\alpha^3 + mR\alpha^2 + (kU - C_e C_s)\alpha + kR = 0 \quad (6.1)$$

である。ここで、 $m$  は質量、 $U$  はインダクタンス、 $R$  はレジスタンス、 $k$  は剛性、 $C_e$  は変形速度により生じる速度起電力に関する項、 $C_s$  は渦電流により生じる電磁力に関する項を表す。これを解くことにより、連成効果を含む固有値は、

$$\alpha_1 = -\frac{R}{3U} + \left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2,3} = & -\frac{R}{3U} - \frac{\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ & \pm \frac{-\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} i \end{aligned} \quad (6.3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{R^2}{9U^2} + \frac{-C_e C_s + kU}{3mU} \\ b &= -\frac{R^3}{27U^3} - \frac{kR}{2mU} + \frac{R(kU - C_e C_s)}{6mU^2} \end{aligned}$$

となる。1自由度連成モデルにおける連成強度パラメータは、この(6.3)式の固有値に基づいて、

$$C_{es} = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|} \quad (6.4)$$

と定義される。

また、有限要素モデルにおいて、構造物の有限要素式と渦電流の有限要素式を組み合わせた連成系有限要素式は、

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_e & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{ex} \\ -\dot{\mathbf{B}}^{ex} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

となる。ここで、 $\{v\}$  は変位速度を意味している。有限要素モデルにおける連成強度パラメータは、この(6.5)式から得られる連成固有値  $\alpha$  を用いて、1自由度連成モデルと同様に(6.4)式で定義される。

## 6.3 評価パラメータとしての妥当性の検証方法

### 6.3.1 検証手順

連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を一定とした種々の条件下で、有限要素解析と実験を行ない、同一の磁気減衰特性が得られることを示す。これにより、連成強度パラメータの磁気減衰特性評価パラメータとしての妥当性を検証する。

### 6.3.2 解析・実験条件の決定方法

連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を一定にするためには、これらの、磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  に対する依存性を求める必要がある。平板の磁気減衰振動問題における連成強度パラメータの  $B, E, \rho, \kappa, h$  に対する依存性は、比例関係、

$$\frac{k}{m} = P_s \frac{Eh^2}{\rho}, \quad \frac{R}{U} = P_e \frac{1}{\kappa h}, \quad \frac{C_e C_s}{mU} = P_c \frac{B^2}{\rho h} \quad (6.6)$$

を連成固有値の (6.3) 式に代入し、さらに連成強度パラメータの定義式である (6.4) 式に代入することによって、

$$C_{es} = \frac{\text{Re } \alpha}{|\alpha|} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \quad (6.7)$$

となる。ここで、 $P_s, P_e, P_c$  は比例定数であるが、 $P_s$  は (6.6) 式の第 1 式と平板の自然固有振動数  $\omega_0$  から得られる、

$$\frac{Eh^2}{\rho} P_s = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (6.8)$$

から求められる。また、 $P_e, P_c$  は有限要素解析から得られる連成固有値  $\alpha_c = -\gamma_c \pm i\omega_c$  と (6.3) 式に (6.6) を代入した式から、

$$\begin{cases} -\gamma_c = \text{Re } \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \\ \omega_c = \text{Im } \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \end{cases} \quad (6.9)$$

なる非線形連立方程式を解くことにより求められ、これらを (6.7) 式に代入することにより、連成強度パラメータの依存性は、

$$C_{es} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (6.10)$$

となる。

また、構造物の時定数として、非連成状態の運動方程式、

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (6.11)$$

から得られる固有値  $\omega_0$  を用い、渦電流の時定数として、渦電流の支配方程式、

$$U\dot{T} + RT = 0 \quad (6.12)$$

から得られる固有値  $\gamma_0$  を用いると、(6.6) 式より、構造物と渦電流の時定数比  $I$  は、

$$I = \frac{\gamma_0}{\omega_0} = \frac{\frac{R}{U}}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{P_e}{\kappa h^2} \sqrt{\frac{\rho}{P_s E}} = I(E, \rho, \kappa, h) \quad (6.13)$$

となる。この時定数比  $I$  は、連成固有値から求まる比例定数  $P_s, P_e$  を用いてあらわされるため、連成強度パラメータと同様に、各連成固有値毎に定義される。

これら、(6.10) 式と (6.13) 式により、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比が一定となる問題を設定する。連成強度パラメータを  $C_{es}^0$ 、時定数比を  $I^0$  に設定するためには (6.10) 式と (6.13) 式より、

$$C_{es}^0 = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (6.14)$$

$$I^0 = \frac{P_e}{\kappa h^2} \sqrt{\frac{\rho}{P_s E}} = I(E, \rho, \kappa, h) \quad (6.15)$$

なる関係を満足するように、 $B, E, \rho, \kappa, h$  の値の組合せを求める。(磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、板厚  $h$ ) の組合せで連成強度パラメータを  $C_{es}^0$ 、時定数比を  $I^0$  とする方法を述べる。なお、この時、密度  $\rho$  と導電率  $\kappa$  は既知量に固定しておくものとし、また、 $P_s, P_e, P_c$  は板長さと幅が変化しなければ一定である。Fig.6.1に示すように、(6.15) 式に  $E$  を与えると  $h$  が求められ、また、この  $E$  と  $h$  を (6.14) 式に代入すると、この式は  $B$  のみの関数となる。この非線形方程式を Newton 法などで解くことにより、連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ 、時定数比が  $I^0$  となる  $(B, E, h)$  の値の組合せが求められる。さらに、Fig.6.2に示すように、 $E$  を何通りか与えることにより、 $(B, E, h)$  の組合せでも複数のケースが設定できる。また、同様な手順により、(磁場  $B$ 、質量  $\rho$ 、板厚  $h$ ) などの組合せでも、連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ 、時定数比が  $I^0$  となる問題を設定できる。



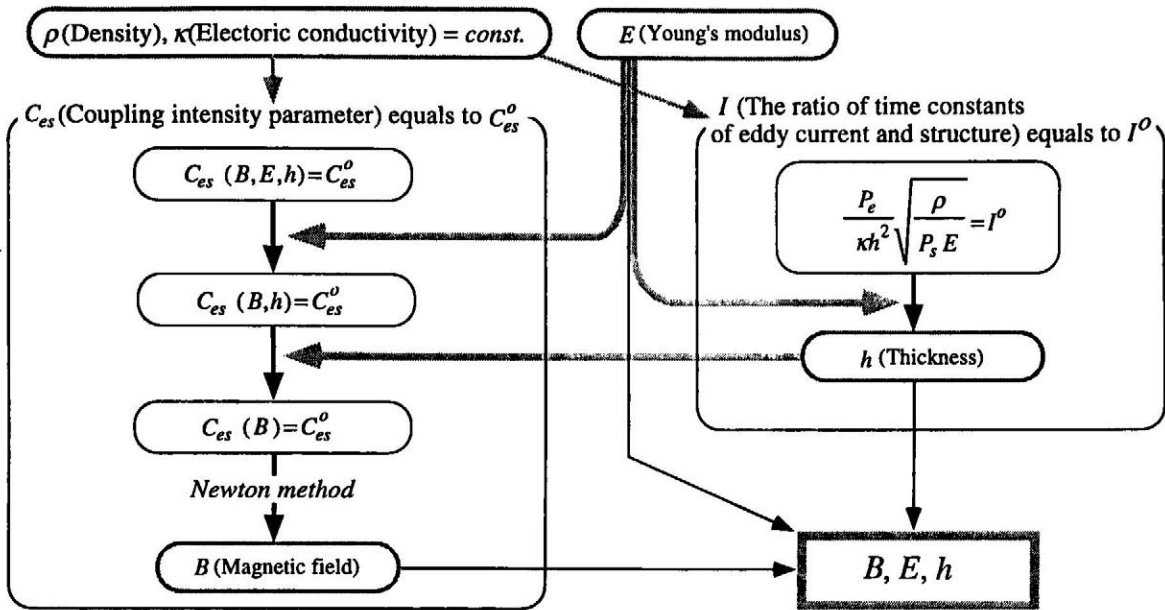


Fig. 6.1 Method to determine conditions to keep  $C_{es} = C_{es}^0$  and  $I = I^0$

## 6.4 数値解析による妥当性の検証

### 6.4.1 解析問題

連成強度パラメータの磁気減衰特性評価パラメータとしての妥当性を検証するため、Fig.6.3 に示される一様磁場  $B_x$  中に置かれた片側固定平板の磁気減衰振動問題を解析する。ここでは、平板に垂直方向の変動磁場  $B_z$  を印加して、平板に渦電流を発生させる。この渦電流と一様磁場  $B_x$  による電磁力により構造物が変形し、同時に、構造物の変形と一様磁場  $B_x$  による速度起電力によって、振動が減衰する問題である。

これは、TEAM ワークショップ問題 12 番 “Cantilevered Beam in Crossed Field”<sup>(6.5)</sup> と同じ問題設定である。妥当性を検証するための基準となる問題を、Table 6.1 に示すように、磁場の強さに応じて 2 ケース設定した。この 2 ケースの条件における板の自由端変位を Fig.6.4 に示す。この結果からわかるように、この 2 ケースの基準問題は、磁気減衰が小さい場合と大きい場合に対応している。なお、この時、磁気減衰が小さい場合の連成強度パラメータの値は、0.037410、磁気減衰が大きい場合の連成強度パラメータの値は 0.24114 であり、構造物と渦電流の時定数比は 4.1113 となる。

磁気減衰の強さに応じた 2 ケースの基準問題と、連成強度パラメータおよび時定数比が等しくなる問題を設定して解析するが、こうして設定した問題では、材料定数が変わ

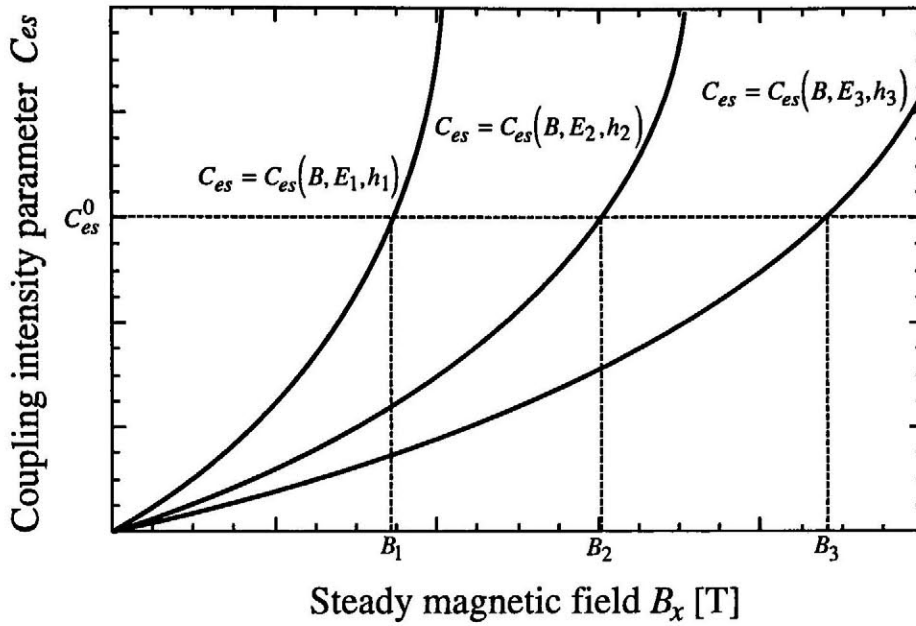
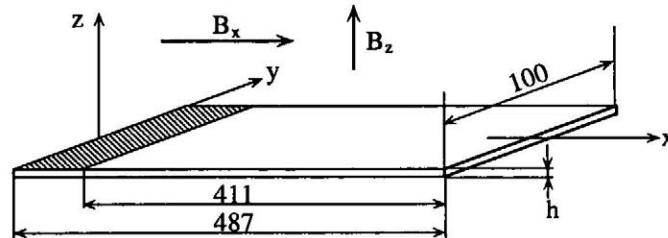
Fig. 6.2 Various case to keep  $C_{es} = C_{es}^0$  and  $I = I^0$ 

Fig. 6.3 Schematic diagram of a plate placed in electromagnetic field

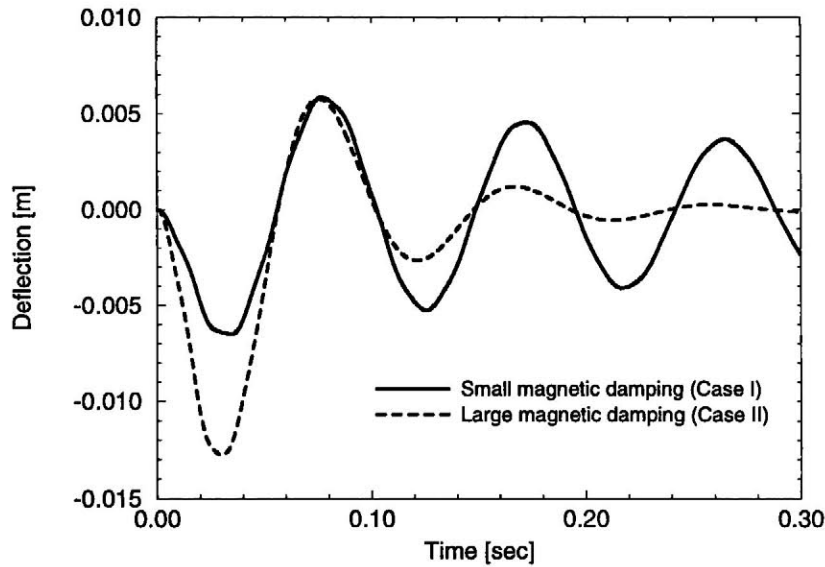
るため、問題に応じて板の時定数も変化する。そのため、平板に垂直に印加する変動磁場も、問題に応じて変化させる必要がある。ここでは、設定した問題における平板の固有周期  $T$  を用いて、

$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp\left(-14.2 \times \frac{t}{T}\right) [\text{T}] \quad (6.16)$$

と規格化した変動磁場を板に印加する。

Table 6.1 Magnetic field, material property and thickness of the reference problem

	Case I	Case II
Magnetic field $B_x$ [T]	0.2	0.5
Young's modulus $E$ [Pa]	$1.1 \times 10^{11}$	
Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$8.912 \times 10^3$	
Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	$5.81 \times 10^7$	
Thickness $h$ [mm]	3.175	
Coupling intensity parameter $C_{es}^0$	0.037410	0.24114
Ratio of time constants of eddy current and structure $I^0$	4.1113	

Fig. 6.4 Deflection of the plate ( $B_x = 0.2$ [T] and  $0.5$ [T])

### 6.4.2 解析結果

設定するパラメータの組合せとして、 $(B, E, \rho)$ ,  $(B, E, \kappa)$ ,  $(B, E, h)$ ,  $(B, \rho, \kappa)$ ,  $(B, \rho, h)$ ,  $(B, \kappa, h)$ ,  $(E, \rho, \kappa)$ ,  $(E, \rho, h)$ ,  $(E, \kappa, h)$ ,  $(\rho, \kappa, h)$  の 10 ケースが考えられるが、実際の設計では、材料定数と比較して、磁場  $B$  と板厚  $h$  の自由度が大きいことから、 $(B, E, h)$ ,  $(B, \rho, h)$ ,  $(B, \kappa, h)$  の  $B$  と  $h$  を含む 3 つの組合せで、磁気減衰評価パラメータとしての妥当性を検証する。また、これらの値を求める時にも、その自由度を考慮して、材料定数を与えて  $B$  と  $h$  を設定する。

Table 6.2 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness (small magnetic damping)

Young's modulus $E$ [GPa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
1.10	$1.1378 \times 10^{-1}$	$1.0040 \times 10^1$
$1.10 \times 10^1$	$1.5172 \times 10^{-1}$	5.6460
$1.10 \times 10^2$	$2.0233 \times 10^{-1}$	3.1750
$1.10 \times 10^3$	$2.6981 \times 10^{-1}$	1.7854
$1.10 \times 10^4$	$3.5979 \times 10^{-1}$	1.0040

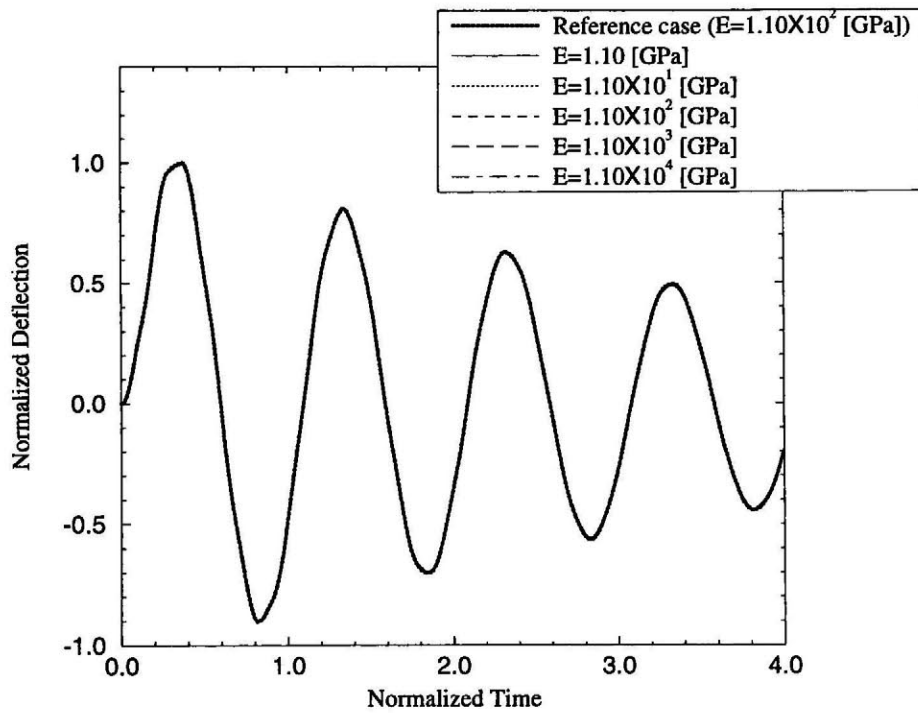


Fig. 6.5 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness (small magnetic damping)

(a) 磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 板厚  $h$  を変化させる場合

ヤング率  $E$  を  $1.10 \sim 1.10 \times 10^4$  [GPa] の 5 通りに設定し、6.3.2 節で述べた方法で、連成強度パラメータ  $C_{es} = 0.037410$ 、構造物と渦電流の時定数比  $I = 4.1113$  となる磁場  $B$  と板厚  $h$  の値の組合せを Table 6.2 に示す。これら 5 ケースについて有限要素解析を行なって得られた、板の自由端変位を Fig.6.5 に示す。なお、時間軸は平板の固有周期、変位は最大変位で規格化した。解析結果は、いずれの設定も振動波形が非常に良く一致している。

Table 6.3 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness (large magnetic damping)

Young's modulus $E$ [GPa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
1.10	$2.8117 \times 10^{-1}$	$1.0040 \times 10^1$
$1.10 \times 10^1$	$3.7495 \times 10^{-1}$	5.6460
$1.10 \times 10^2$	$5.0000 \times 10^{-1}$	3.1750
$1.10 \times 10^3$	$6.6676 \times 10^{-1}$	1.7854
$1.10 \times 10^4$	$8.8914 \times 10^{-1}$	1.0040

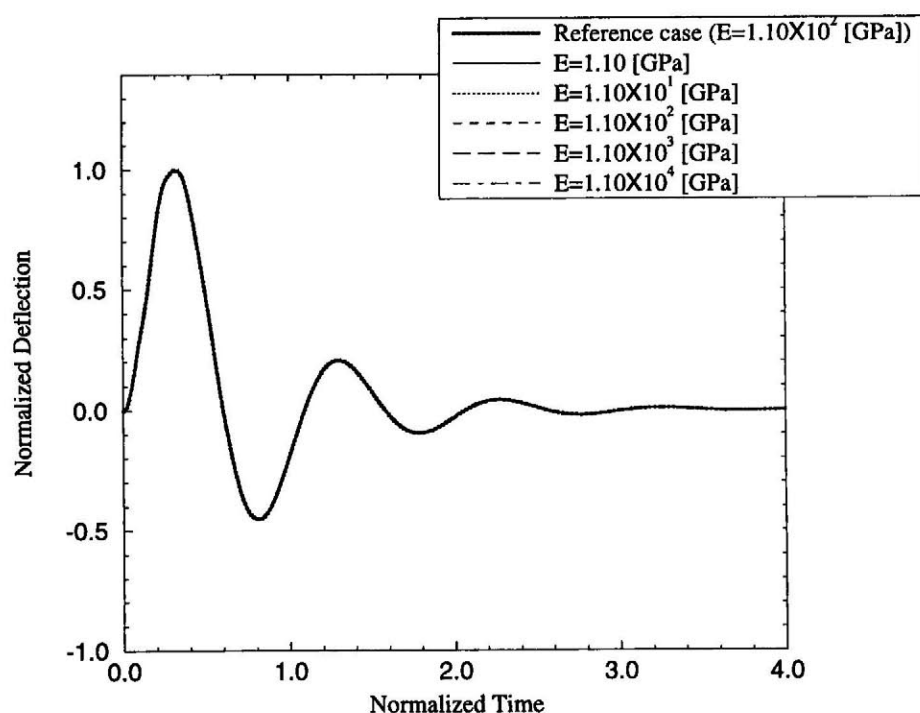


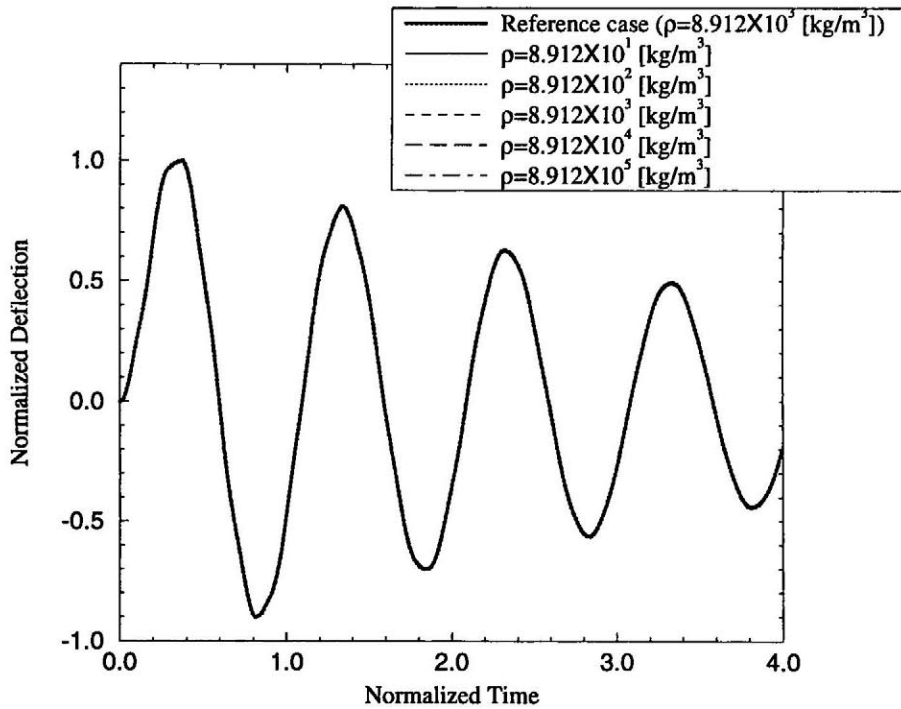
Fig. 6.6 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness (large magnetic damping)

同様に、磁気減衰が大きい  $C_{es} = 0.24114$ ,  $I = 4.1113$  となるようなヤング率  $E$ , 磁場  $B$ , 板厚  $h$  の値の組合せを、Table 6.3 に示す。磁気減衰が小さい時の Table 6.2 と比較すると、ヤング率  $E$  と板厚  $h$  の値の組合せが同じであることがわかる。これは、時定数比を  $I^0$  とする (6.15) 式から、減衰の強さと無関係に板厚  $h$  が求められるからである。これら 5 ケースについて解析して得られた板の自由端変位を Fig. 6.6 に示す。いずれのケースも振動波形が良く一致していることがわかる。

このように、磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 板厚  $h$  を変化させても、連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ , 構造物と渦電流の時定数比が  $I^0$  であれば、同一の磁気減衰振動波形が得られる。このため、連成強度パラメータ  $C_{es}$  と時定数比  $I$  のみで磁気減衰特性を評価できる。

Table 6.4 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, density and thickness (small magnetic damping)

Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$8.912 \times 10^1$	$3.5979 \times 10^{-2}$	1.0040
$8.912 \times 10^2$	$8.5320 \times 10^{-2}$	1.7854
$8.912 \times 10^3$	$2.0233 \times 10^{-1}$	3.1750
$8.912 \times 10^4$	$4.7979 \times 10^{-1}$	5.6460
$8.912 \times 10^5$	1.1378	$1.0040 \times 10^1$

Fig. 6.7 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, density and thickness (small magnetic damping)(b) 磁場  $B$ , 密度  $\rho$ , 板厚  $h$  を変化させる場合

密度  $\rho$  を  $8.912 \times 10^1 \sim 8.912 \times 10^5$  [kg/m<sup>3</sup>] の 5 通りに設定し、6.3.2 節で述べた方法で、連成強度パラメータ  $C_{es} = 0.037410$ 、構造物と渦電流の時定数比  $I = 4.1113$  となる磁場  $B$  と板厚  $h$  の値の組合せを Table 6.4 に示す。これら 5 ケースについて有限要素解析を行なって得られた、板の自由端変位を Fig.6.7 に示す。解析結果は、いずれの設定も振動波形が非常に良く一致している。

同様に、磁気減衰が大きい  $C_{es} = 0.24114$ ,  $I = 4.1113$  となるような密度  $\rho$ , 磁場  $B$ , 板厚  $h$  の値の組合せを、Table 6.5 に示す。これら 5 ケースについて解析して得られた板の自由端変位を Fig. 6.8 に示す。いずれのケースも振動波形が良く一致している。

Table 6.5 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, density and thickness (large magnetic damping)

Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$8.912 \times 10^1$	$8.8914 \times 10^{-2}$	1.0040
$8.912 \times 10^2$	$2.1085 \times 10^{-1}$	1.7854
$8.912 \times 10^3$	$5.0000 \times 10^{-1}$	3.1750
$8.912 \times 10^4$	1.1857	5.6460
$8.912 \times 10^5$	2.8117	$1.0040 \times 10^1$

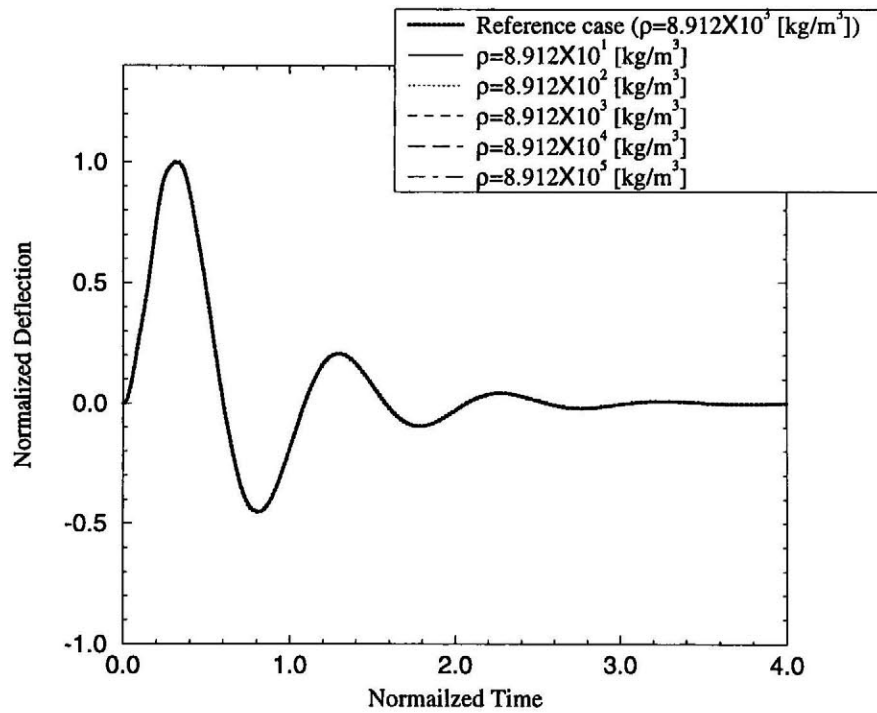


Fig. 6.8 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, density and thickness (large magnetic damping)

Table 6.6 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness (small magnetic damping)

Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$5.814 \times 10^5$	6.3981	$3.1750 \times 10^1$
$5.814 \times 10^6$	1.1378	$1.0040 \times 10^1$
$5.814 \times 10^7$	$2.0233 \times 10^{-1}$	3.1750
$5.814 \times 10^8$	$3.5979 \times 10^{-2}$	1.0040
$5.814 \times 10^9$	$6.3981 \times 10^{-3}$	$3.1750 \times 10^{-1}$

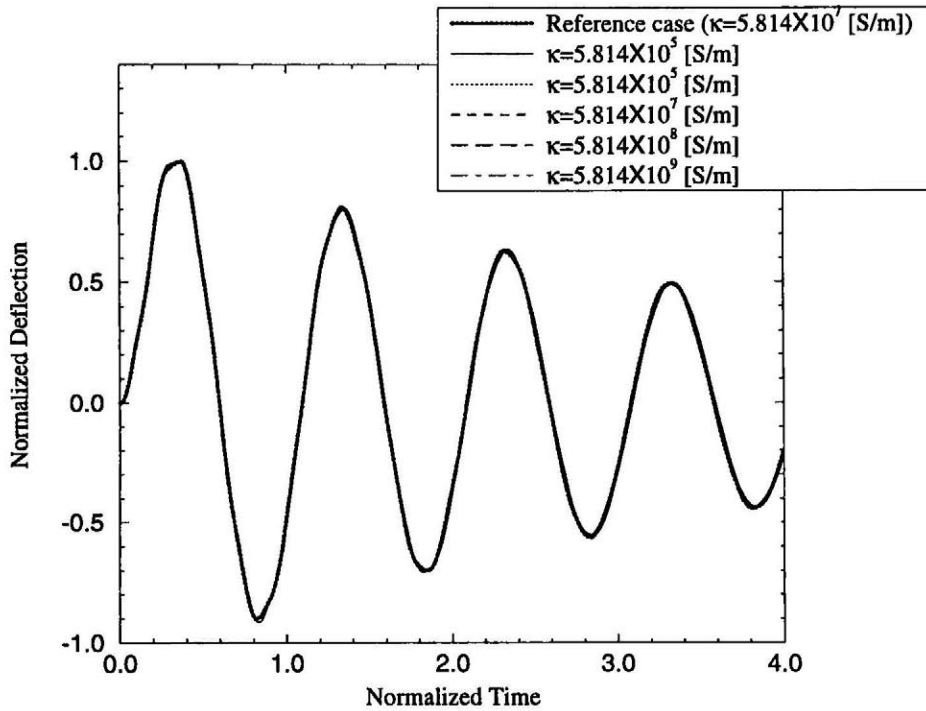


Fig. 6.9 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.037410$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness (small magnetic damping)

(c) 磁場  $B$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$  を変化させる場合

導電率  $\kappa$  を  $5.814 \times 10^5 \sim 5.814 \times 10^9$  [S/m] の 5 通りに設定し、6.3.2 節で述べた方法で、連成強度パラメータ  $C_{es} = 0.037410$ 、構造物と渦電流の時定数比  $I = 4.1113$  となる磁場  $B$  と板厚  $h$  の値の組合せを Table 6.6 に示す。これら 5 ケースについて有限要素解析を行なって得られた、板の自由端変位を Fig.6.9 に示す。解析結果は、いずれの設定も振動波形が非常に良く一致している。



Table 6.7 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness (large magnetic damping)

Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$5.814 \times 10^5$	$1.5811 \times 10^1$	$3.1750 \times 10^1$
$5.814 \times 10^6$	2.8117	$1.0040 \times 10^1$
$5.814 \times 10^7$	$5.0000 \times 10^{-1}$	3.1750
$5.814 \times 10^8$	$8.8914 \times 10^{-2}$	1.0040
$5.814 \times 10^9$	$1.5811 \times 10^{-2}$	$3.1750 \times 10^{-1}$

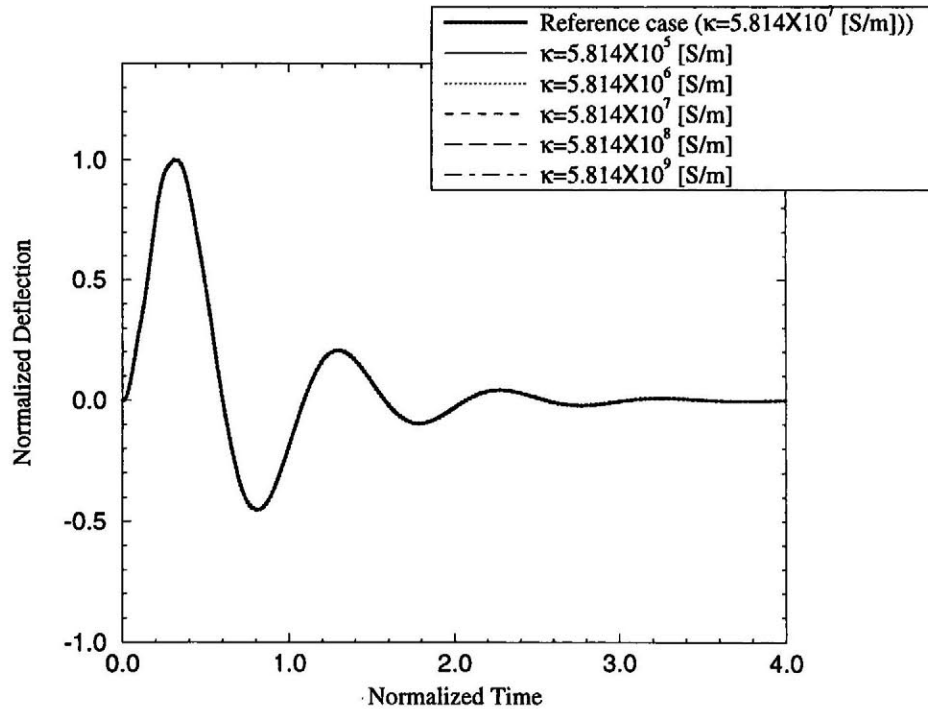


Fig. 6.10 Deflection of the plates of  $C_{es} = 0.24114$  and  $I = 4.11113$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness (large magnetic damping)

同様に、磁気減衰が大きい  $C_{es} = 0.24114$ ,  $I = 4.11113$  となるような導電率  $\rho$ , 磁場  $B$ , 板厚  $h$  の値の組合せを、Table 6.7 に示す。これら 5 ケースについて解析して得られた板の自由端変位を Fig. 6.10 に示す。いずれのケースも振動波形が良く一致している。

### 6.4.3 妥当性の検討

連成強度パラメータの磁気減衰振動評価パラメータとしての妥当性を検証するため、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比が一定となる種々の条件下で数値解析を行なった。この時、材料定数を、ヤング率  $E = 1.10 \sim 1.10 \times 10^4$  [GPa]、密度  $\rho = 8.912 \times 10^1 \sim 8.912 \times 10^5$  [kg/m<sup>3</sup>]、導電率  $\kappa = 5.814 \times 10^5 \sim 5.814 \times 10^9$  [S/m] の範囲で変化させて条件を決定したが、実用金属材料の材料定数が、ヤング率が数 10 ～ 数 100 [GPa]、密度が数 1000 [kg/m<sup>3</sup>]、導電率が  $10^6 \sim 10^8$  [S/m] であることを考えると、材料定数に関して、十分な範囲で磁気減衰振動評価パラメータとしての妥当性が検証された。

連成強度パラメータが 0.03714 および 0.24114 の時、Fig.6.4に示す磁気減衰振動となり、それぞれを磁気減衰が小さい場合と磁気減衰が大きい場合として解析したが、連成強度パラメータは (6.4) 式の定義から、0.0～1.0 の範囲で値が変化する。そこで、連成強度パラメータの値が 0.5, 0.75, 0.99 となる問題を設定し解析する。

連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.5、構造物と渦電流の時定数比  $I$  が 4.1113 となる問題設定を Table 6.8 に示す。ここでは、前節で変化させた材料定数の最大値および最小値を用いて条件を決定した。この条件で得られた磁気減衰振動の解析結果を Fig.6.11 に示す。解析結果は設定した全てのケースが非常に良く一致している。同様に、連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.75、構造物と渦電流の時定数比  $I$  が 4.1113 となる問題設定を Table 6.9 に、この時の磁気減衰振動応答を Fig.6.12 に示す。また、連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.99、構造物と渦電流の時定数比  $I$  が 4.1113 となる問題設定を Table 6.10 に、この時の磁気減衰振動応答を Fig.6.13 に示す。これらの解析結果も全てのケースにおいて良く一致している。このように、連成強度パラメータが定義される全ての範囲において、連成強度パラメータの磁気減衰振動評価パラメータとしての妥当性が確認される。

Table 6.8 Analytical conditions for specimens with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.5$  and  $I = 4.1113$ )

	Young's modulus $E$ [GPa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 1	1.10	$3.9684 \times 10^{-1}$	$1.0040 \times 10^1$
CASE 2	$1.10 \times 10^4$	1.2549	1.0040
	Density $\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 3	$8.912 \times 10^1$	$1.2549 \times 10^{-1}$	1.0040
CASE 4	$8.912 \times 10^5$	3.9684	$1.0040 \times 10^1$
	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 5	$5.184 \times 10^5$	$2.2316 \times 10^1$	$3.175 \times 10^1$
CASE 6	$5.184 \times 10^9$	$2.2316 \times 10^{-2}$	$3.175 \times 10^{-1}$

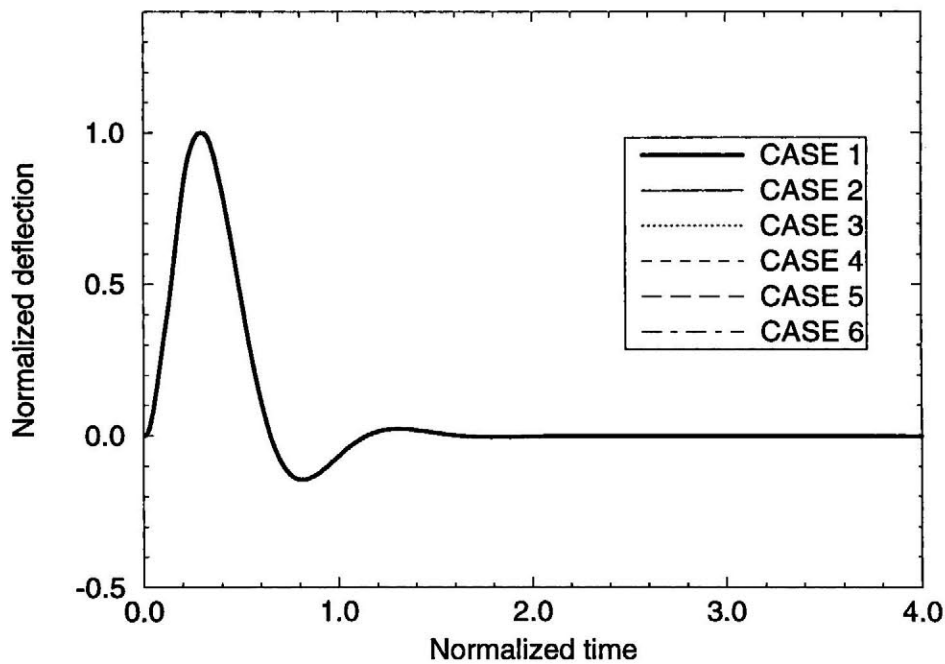


Fig. 6.11 Deflection of the plates with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.5$  and  $I = 4.1113$ )

Table 6.9 Analytical conditions for specimens with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.75$  and  $I = 4.1113$ )

	Young's modulus $E$ [GPa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 1	1.10	$4.6855 \times 10^{-1}$	$1.0040 \times 10^1$
CASE 2	$1.10 \times 10^4$	1.4817	1.0040
	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 3	$8.912 \times 10^1$	$1.4817 \times 10^{-1}$	1.0040
CASE 4	$8.912 \times 10^5$	4.6855	$1.0040 \times 10^1$
	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 5	$5.184 \times 10^5$	$2.6348 \times 10^1$	$3.175 \times 10^1$
CASE 6	$5.184 \times 10^9$	$2.6348 \times 10^{-2}$	$3.175 \times 10^{-1}$

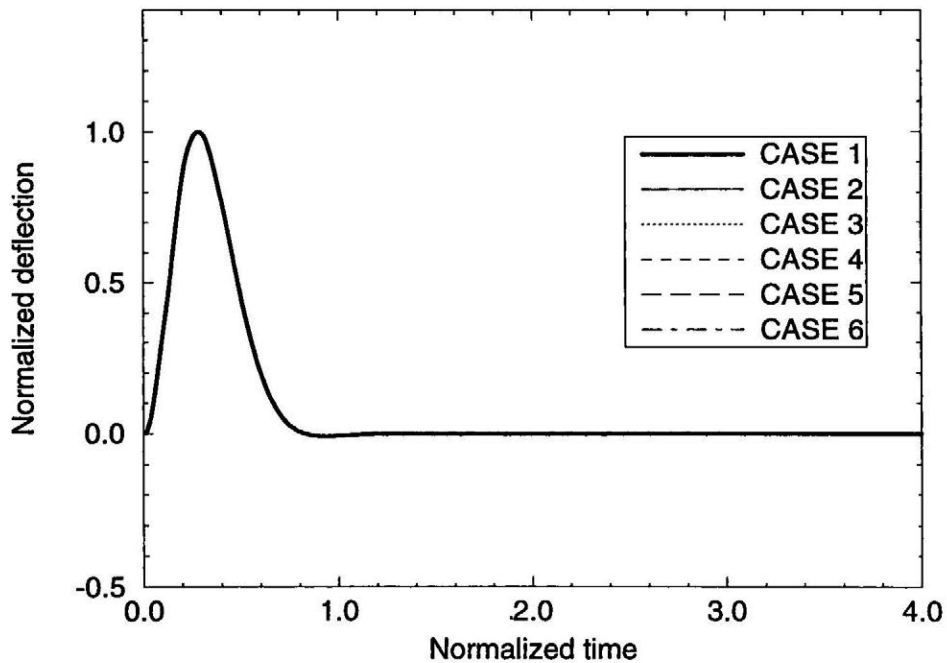


Fig. 6.12 Deflection of the plates with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.75$  and  $I = 4.1113$ )

Table 6.10 Analytical conditions for specimens with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.99$  and  $I = 4.1113$ )

	Young's modulus $E$ [GPa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 1	1.10	$5.0885 \times 10^{-1}$	$1.0040 \times 10^1$
CASE 2	$1.10 \times 10^4$	1.6091	1.0040
	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 3	$8.912 \times 10^1$	$1.6091 \times 10^{-1}$	1.0040
CASE 4	$8.912 \times 10^5$	5.0885	$1.0040 \times 10^1$
	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
CASE 5	$5.184 \times 10^5$	$2.8615 \times 10^1$	$3.175 \times 10^1$
CASE 6	$5.184 \times 10^9$	$2.8615 \times 10^{-2}$	$3.175 \times 10^{-1}$

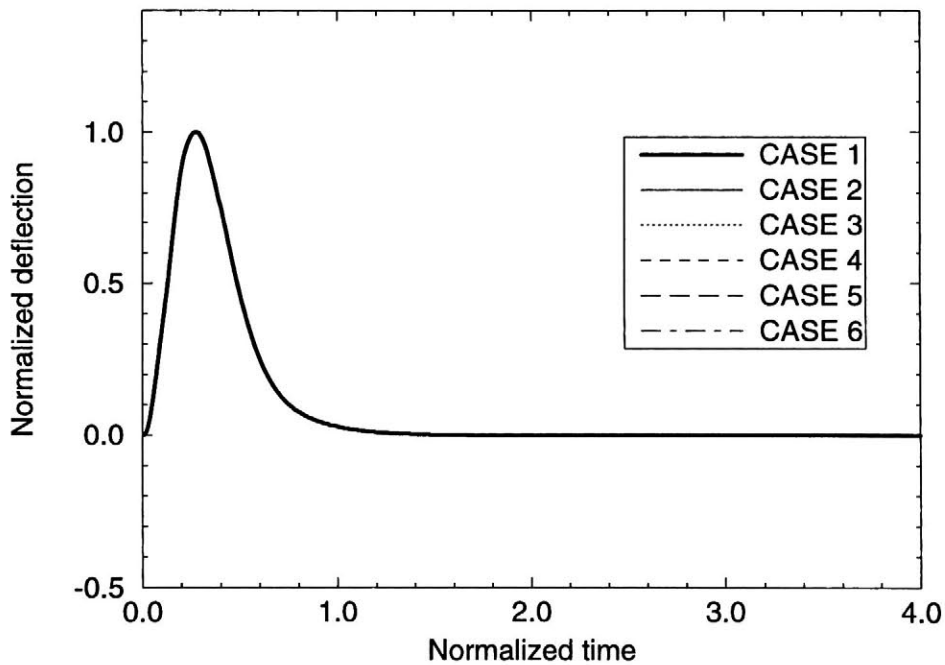


Fig. 6.13 Deflection of the plates with different magnetic field, Young's modulus, density, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.99$  and  $I = 4.1113$ )

## 6.5 実験による妥当性の検証

### 6.5.1 実験の概要

実験装置の概観図を Fig.6.14に示す。片端を完全固定された平板が、最大 0.21[T] の磁場を得ることができるソレノイドコイル中に設置されており、試験片に初期変位を与えて振動させる。振動波形はレーザー変位計で測定するが、この減衰振動波形には、空気抵抗による減衰成分が含まれるため、第 5 章 3.3 節で述べたように、磁場を印加しない時の振動波形を用いて、これを除去した。なお、試験片も第 5 章と同様に、長さ 130[mm]、幅 40[mm]、クランプ 10[mm]、板厚は 0.3, 0.5, 0.8, 1.0[mm] の 4 種類の銅板であり、これらの銅板の材料定数は Table 5.1 に示す値である。

数値解析条件は、(6.14) 式と (6.15) 式を満足するように、磁場・材料定数・板厚の値を求めたが、本実験装置の制約上、これらの値を自由に変化させることができない。そこで、本実験では、磁場  $B$  と板厚  $h$  を変化させ、(6.14) 式のみを満足するように  $B$  と  $h$  の値を設定する。また、連成強度パラメータを  $C_{es}^0$  とするためには、この (6.14) 式を解いて、 $B$  と  $h$  を求めることもできるが、ここでは、あらかじめ各板厚の試験片に対して、磁場を変化させて有限要素解析を行ない、Fig.6.15 に示すような磁場と連成強度パラメータの関係をグラフにプロットする。このグラフから、 $C_{es} = C_{es}^0$  となる磁場  $B$  の値を読み取り、実験の条件を設定した。

### 6.5.2 実験結果

Fig.6.15より、各板厚の試験片に対して連成強度パラメータの値が、 $1.03 \times 10^{-3}$  となる磁場を読み取った結果、Table 6.11 に示す条件が得られた。この条件のもとで、実験により得られた磁気減衰特性を Fig.6.16に示す。これは、磁気減衰振動波形からピーク点を抽出し、これから空気抵抗による減衰成分を除去した結果である。なお、この実験結果の時間軸は平板の固有周期、変位は初期変位で規格化している。実験結果はいずれのケースも良く一致していることがわかる。

同様に、連成強度パラメータの値が  $1.70 \times 10^{-2}$  となる条件を Table 6.12、この時の磁気減衰特性を Fig.6.17 に示す。また、連成強度パラメータの値が  $2.23 \times 10^{-2}$  となる条件を Table 6.13、この時の磁気減衰特性を Fig.6.18 に示す。これらの結果より、いずれの条件においても、各連成パラメータの値ごとに、磁気減衰特性が非常に良く一致している。

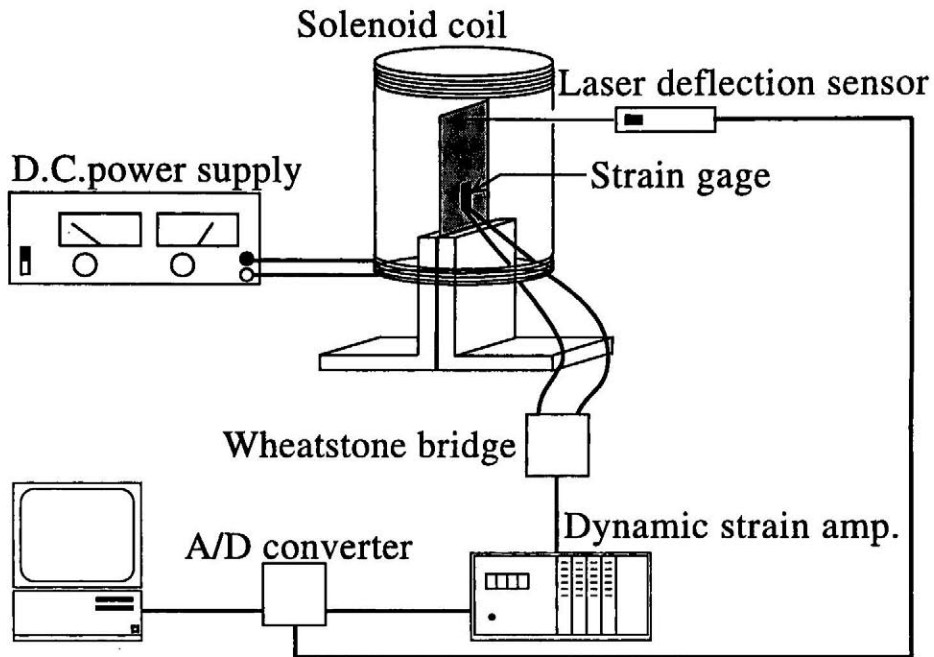


Fig. 6.14 Experimental apparatus

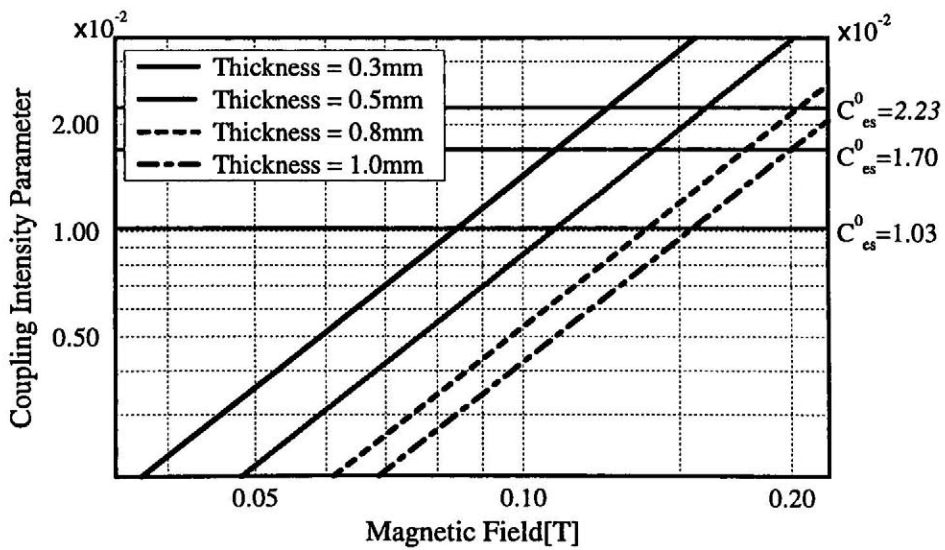
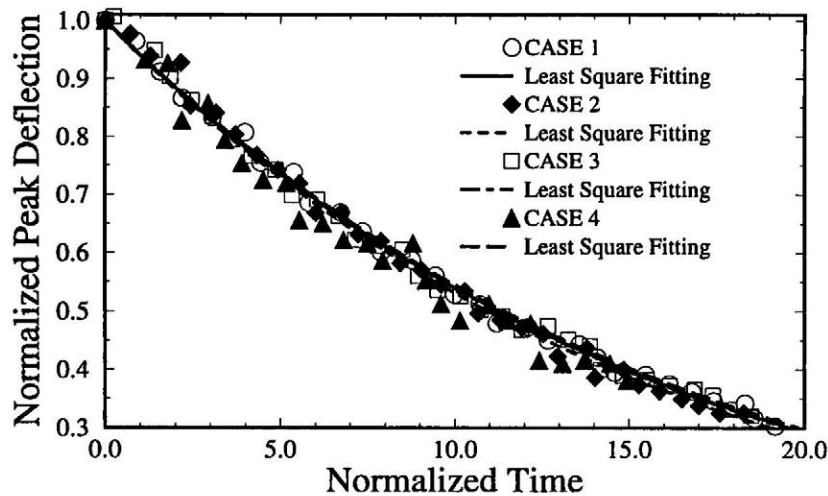


Fig. 6.15 Method to determine conditions to keep  $C_{es}$  constant

Table 6.11 Experimental conditions for specimens with different thickness for  $C_{es} = 1.03 \times 10^{-2}$ 

	Thickness[mm]	Magnetic Field[T]
CASE 1	0.3	0.087
CASE 2	0.5	0.114
CASE 3	0.8	0.142
CASE 4	1.0	0.165

Fig. 6.16 Magnetic damping characteristics of different thickness specimens for  $C_{es} = 1.03 \times 10^{-2}$ 

### 6.5.3 妥当性の検討

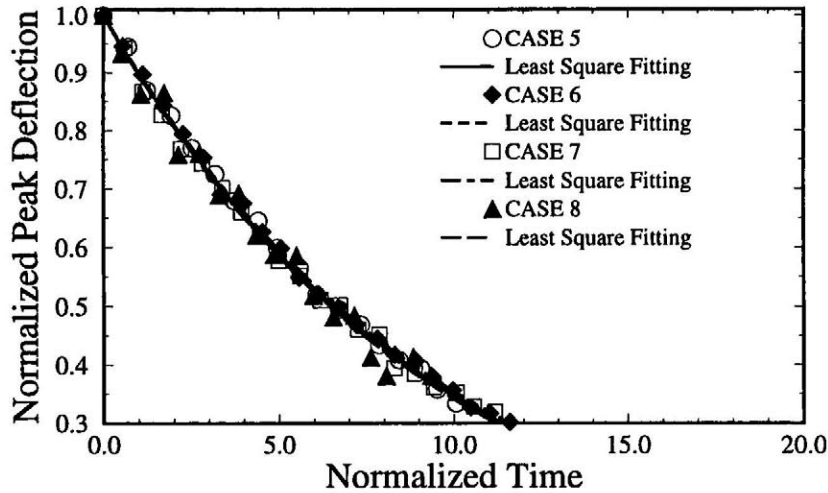
本実験では実験装置の制約上、磁場を  $0.0 \sim 0.21$ [T]、板厚を  $0.3 \sim 1.0$ [mm] の範囲で値を変化させて、連成強度パラメータの磁気減衰振動評価パラメータとしての妥当性検証実験を行なった。その結果、これらの磁場や板厚の値の範囲では、連成強度パラメータを一定とするのみで同一の磁気減衰振動特性が得られ、評価パラメータとしての妥当性が検証された。また、連成強度パラメータの値は、 $1.03 \times 10^{-2}$ 、 $1.70 \times 10^{-2}$ 、 $2.23 \times 10^{-2}$  と設定したが、連成強度パラメータは  $0.0 \sim 1.0$  の範囲で定義されるため、さらに連成強度パラメータが大きく磁気減衰の強い実験体系で検証実験を行なう必要がある。

本実験では、数値解析による検証の条件決定方法と異なり、連成強度パラメータ一定の条件のみで問題を設定し、構造物と渦電流の時定数比を一定としなかったが、同一の磁気減衰振動特性が得られた。次節では、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比の力学的な意味について述べ、また、時定数比一定条件が必要となる問題について検討する。



Table 6.12 Experimental conditions for specimens with different thickness for  $C_{es} = 1.70 \times 10^{-2}$ 

	Thickness[mm]	Magnetic Field[T]
CASE 5	0.3	0.112
CASE 6	0.5	0.146
CASE 7	0.8	0.180
CASE 8	1.0	0.210

Fig. 6.17 Magnetic damping characteristics of different thickness specimens for  $C_{es} = 1.70 \times 10^{-2}$ 

## 6.6 評価パラメータとしての妥当性の検討

連成強度パラメータ  $C_{es}$  は連成固有値  $\alpha_c = -\gamma_c \pm i\omega_c$  を用いて,

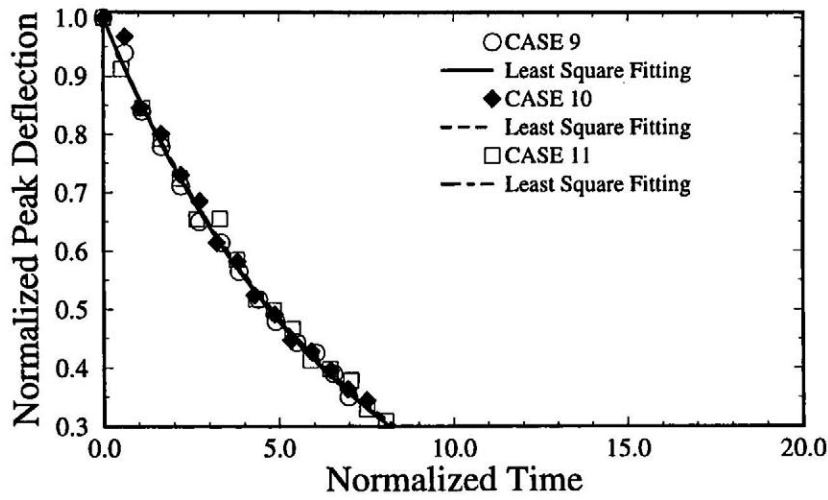
$$C_{es} = \frac{\text{Re } \alpha}{|\alpha|} \quad (6.17)$$

と定義され、 $\gamma_c$  が減衰率、 $\omega_c$  が角振動数であることから、自由振動の場合  $C_{es} = 0.0$ 、また、磁気減衰効果が強く、系が過減衰状態の場合  $C_{es} = 1.0$  となる。すなわち、この連成強度パラメータは、過減衰状態とその時の磁気減衰振動の比を定量的にあらわすパラメータである。

また、構造物と渦電流の時定数比  $I$  は、構造物の固有周期と、渦電流の変動磁場や速度起電力に対する応答遅れ時間の比をあらわす。この応答遅れはインダクタンスによって生じ、また、これが磁気減衰振動特有の現象である。Fig.6.3 の磁気減衰振動問題において、外部定常磁場を  $B_x = 0.0[\text{T}]$  とした場合の、外部変動磁とこれにより平板に生じる渦電流の時間変化を Fig.6.19 に示す。同図には、インダクタンスを無視して解析した場合

Table 6.13 Experimental conditions for specimens with different thickness for  $C_{es} = 2.23 \times 10^{-2}$ 

	Thickness[mm]	Magnetic Field[T]
CASE 9	0.3	0.127
CASE 10	0.5	0.171
CASE 11	0.8	0.210

Fig. 6.18 Magnetic damping characteristics of different thickness specimens for  $C_{es} = 2.23 \times 10^{-2}$ 

の結果も示している。また、Fig.6.20には、外部定常磁場を  $B_x = 0.5$ [T] とした場合の平板の変形速度とこれか生じる速度起電力による渦電流の時間変化を示す。これらの結果から、インダクタンスにより変動磁場や速度起電力により生じる渦電流に時間遅れが生じていることがわかる。このように構造物と渦電流の時定数比  $I$  は、Fig.6.19 や Fig.6.20 に示すような、構造物の振動に対する渦電流の時間遅れを定量的にあらわすパラメータである。

数値解析による、連成強度パラメータの磁気減衰振動特性評価パラメータとしての妥当性を検証する際には、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を用いて条件を設定したが、実験では、連成強度パラメータ一定条件のみでも同一の磁気減衰特性が得られた。そこで、時定数比一定条件が必要となる問題の条件を検討する。Fig.6.14 に示す実験体系において、第4章で述べた依存性解析方法を用いて得られた、連成強度パラメータの板厚に対する依存性を Fig.6.21 に、また、時定数比の変化を Fig.6.22 に示す。Fig.6.21 にはインダクタンスの効果を無視した場合の依存性も示しており、板厚が大きくなるに従い、インダクタンスの効果により依存性に違いがあらわれてくることがわか

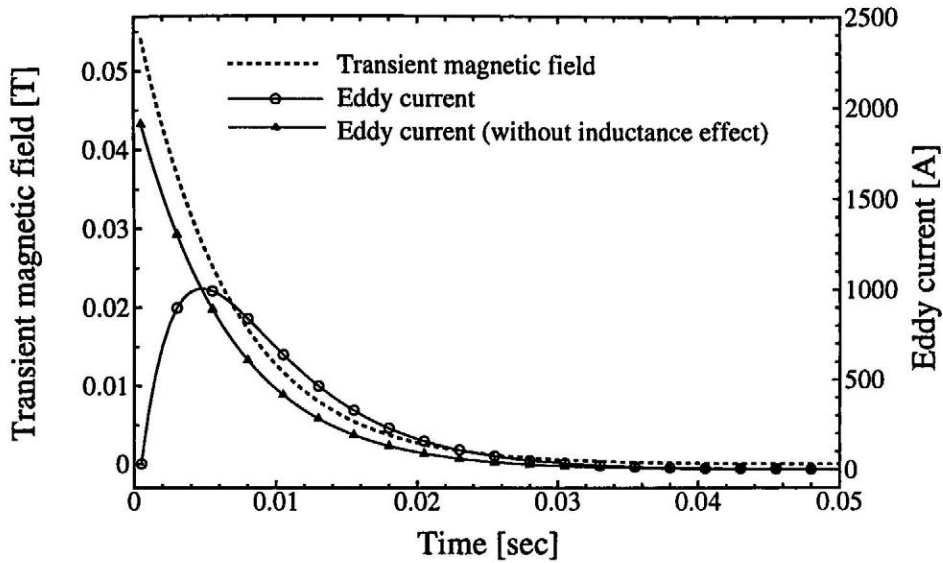


Fig. 6.19 Eddy current response by transient magnetic field

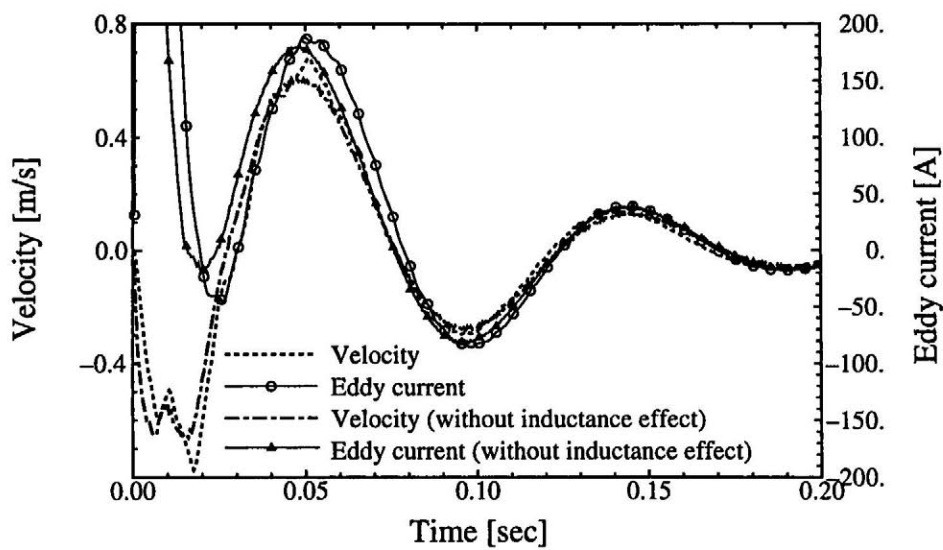


Fig. 6.20 Eddy current response by electromotive force

る。本実験で変化させた板厚の範囲は 0.3~1.0[mm] (時定数比 116.3~10.58) であり、この時の連成強度パラメータの依存性は、インダクタンスを無視した場合の依存性と一致する。このため、連成強度パラメータ一定条件のみで同一の磁気減衰特性が得られる。さらに、実験により、連成強度パラメータの磁気減衰振動特性評価パラメータとしての妥当性を検証するためには、Fig.6.22よりインダクタンスが無視できない、板厚が 2.0[mm] 以上 (時定数比 2.644 以下) の範囲で問題を設定する必要がある。

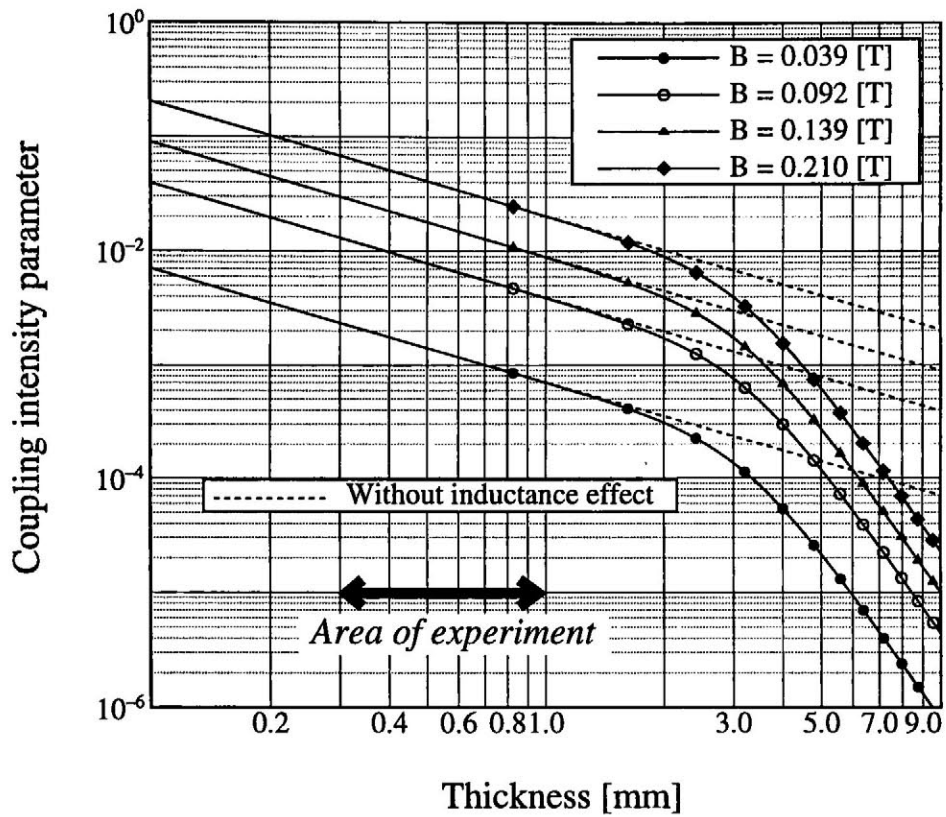


Fig. 6.21 Dependence of coupling intensity parameter on thickness

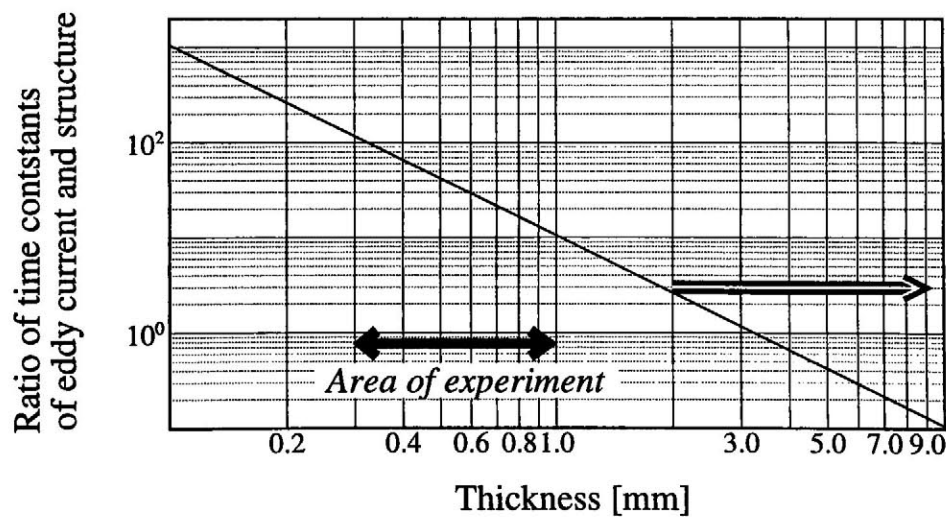


Fig. 6.22 Dependence of ratio of time constants of eddy current and structure on thickness

## 6.7 まとめ

磁気減衰振動問題に対して、

- 連成固有値に基づき、連成効果の強さをあらわすパラメータとして定議した連成強度パラメータを、磁気減衰振動特性の評価パラメータとして提案した。
- 磁場・ヤング率・密度・導電率・板厚の値を変化させることにより、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を、任意の値に設定する方法を示した。

また、連成強度パラメータの磁気減衰振動特性評価パラメータとしての妥当性を検証するため、

- 連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比が一定となる種々の条件で数値解析を行ない、同一の磁気減衰振動特性が得られた。
- 連成強度パラメータが一定となる条件で実験を行ない、同一の磁気減衰特性が得られた。

これにより、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比で、磁気減衰振動特性を評価することができる。

## 参考文献

- (6.1) T. Takagi and J. Tani, A New Numerical Analysis Method of Dynamic Behavior of a Thin Plate under Magnetic Field Considering Magnetic Viscous Damping Effect, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, 4 (1993), 35–42.
- (6.2) T. Takagi and J. Tani, Dynamic Behavior of a Plate in Magnetic Field by Full Coupling and MMD Methods, *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5 (1994), 3296–3299.
- (6.3) T. Takagi and J. Tani, Evaluation of Critical Magnetic Viscous Damping Ratios for Plate Vibrations with Different Boundary Conditions, *Simulation and Design of Applied Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 101–104.
- (6.4) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, Study of Magnetic Damping Effect on Dynamic Deflection of Fusion Reactor First Wall, *Fusion Eng. Des.*, 27 (1995), 473–480.
- (6.5) L. R. Turner and T. Q. Hua, Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields, *COMPEL*, 9-3 (1990), 205-216.

## 第 7 章

# 連成強度パラメータの設計および研究開発への応用

### 7.1 はじめに

これまでに、連成固有値に基づいた連成強度パラメータにより、磁気減衰振動特性を定量的にあらわせることを示した。ここでは、このパラメータの設計への応用例として、連成強度パラメータを用いた縮小モデルの条件決定方法および簡易解析方法を述べる。

核融合炉などの大規模構造物の設計では、その力学的挙動を把握するため、数値シミュレーションと同様に、縮小モデル実験が必要不可欠である。しかし、こうした縮小モデルは、実形状モデルと同一の磁気減衰振動挙動を得ることができるよう設計する必要がある。磁気減衰振動の縮小モデル実験の条件設定に対して、Yoshida らは、無次元化した磁気減衰振動の支配方程式から得られる magnetic damping parameter を一定にすると、磁気減衰振動のスケーリング則が成り立つことを示した<sup>(7.1)</sup>。ここでは、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比により、磁気減衰振動特性が一意に決まることを利用した、縮小モデル実験の条件決定方法を示し、その妥当性を数値解析と実験により検証する。これにより、連成強度パラメータが縮小モデル実験の条件決定に応用できることを示す。

また、核融合炉などの大規模構造物では、数値解析に多大なコストと時間が必要となるため、簡易解析により設計の方針を得た上で数値解析を行なうことは設計の上で有効である。Takagi らは、渦電流によるジュール熱損失が磁気減衰振動のエネルギー消失と等価として critical magnetic viscous damping ratio<sup>(7.2)</sup>を定義し、このパラメータを用いた簡易解析方法を提案している<sup>(7.3, 7.4)</sup>。ここでは、連成固有値や連成強度パラメータを用

いた磁気減衰振動の簡易解析方法として、1 自由度連成モデルにより解析的に磁気減衰振動を得る方法と、磁気減衰効果を考慮せずに得られた振動応答を連成強度パラメータにより磁気減衰振動とする方法を示し、平板の磁気減衰振動問題で、その妥当性を検証する。

## 7.2 連成強度パラメータの縮小モデル実験への応用

### 7.2.1 縮小モデル実験の条件決定方法

第 6 章で述べたように、連成強度パラメータ  $C_{es}$  および構造物と渦電流の時定数比  $I$  を一定に保つと、磁場・材料定数・板厚等を変化させても同一の磁気減衰特性を得ることができる。こうした性質を利用して、基準モデルと同一の磁気減衰特性となる、縮小モデルの条件を決定する。

Fig.7.1に示すように、基準モデルでの連成強度パラメータ  $C_{es}$  および構造物と渦電流の時定数比  $I$  が、有限要素解析や第 4 章 4.2 節で述べた依存性の解析方法で、 $C_{es} = C_{es}^0, I = I^0$  と求められているとする。この時、縮小モデルにおける連成強度パラメータを  $C_{es}^0$ 、時定数比を  $I^0$  とするためには、この縮小モデルにおける連成強度パラメータと時定数比の磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  を求めておく必要がある。

連成強度パラメータの依存性は、第 4 章 4.2 節で述べたように、縮小モデルで有限要素解析を行なうことにより、縮小モデルの比例定数  $P_s, P_e, P_c$  が求まり、これを用いて、連成強度パラメータの依存性として

$$C_{es} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \quad (7.1)$$

の関係式が得られる。また、時定数比の依存性は第 6 章 3.2 節で述べたように、

$$I = \frac{\gamma_0}{\omega_0} = \frac{R}{\sqrt{\frac{U}{K}}} = \frac{P_e}{\kappa h^2} \sqrt{\frac{\rho}{P_s E}} = I(E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e) \quad (7.2)$$

となり、この (7.1) 式と (7.2) 式より、縮小モデルの連成強度パラメータと時定数比を、基準モデルと同じ、 $C_{es}^0$  と  $I^0$  とするためには、

$$C_{es}^0 = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (7.3)$$

$$I^0 = I(E, \rho, \kappa, h) \quad (7.4)$$

を満足するような  $B, E, \rho, \kappa, h$  の値の組合せを求めればよい。また、こうした値の組合せは、第 6 章 3.2 節で述べたように、(7.3) 式と (7.4) 式に、 $B, E, \rho, \kappa, h$  のうちの 3 つの値を既知量として与えれば、残りの 2 つの値は、この 2 つの式を解くことにより求められる。



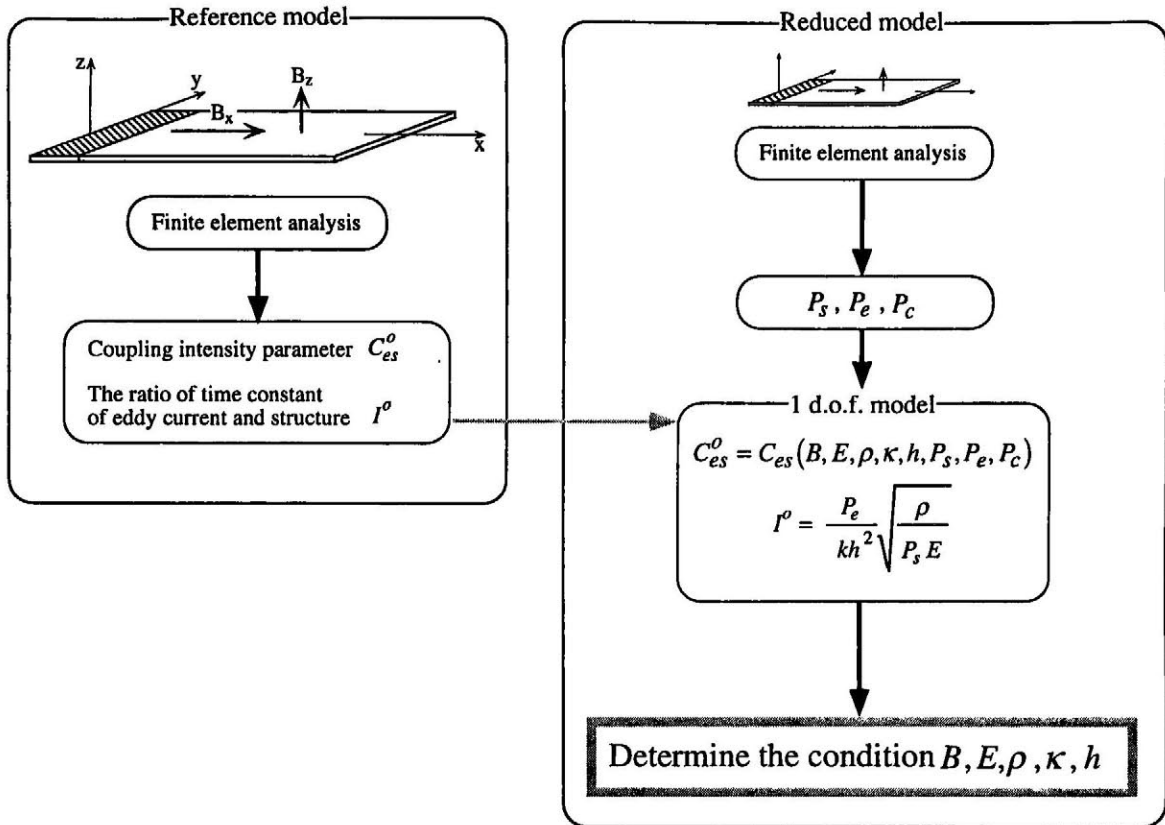


Fig. 7.1 Method to determine conditions to keep  $C_{es} = C_{es}^0$  and  $I = I^0$  on reduced model

### 7.2.2 数値解析による検証

#### (a) 解析モデル

解析モデルを Fig.7.2に示す. 縮小モデルは板長さと板幅の比が基準モデルと同じで, 大きさを 10 分の 1 とした平板の磁気減衰振動問題である. 基準モデルは, 定常磁場  $B_x = 0.5[\text{T}]$ , ヤング率  $E = 1.10 \times 10^2[\text{GPa}]$ , 密度  $\rho = 8.912 \times 10^3[\text{kg/m}^3]$ , 導電率  $\kappa = 5.814 \times 10^7[\text{S/m}]$ , 板厚  $h = 3.175[\text{mm}]$  とし, この時の連成強度パラメータ  $C_{es}^0$  は 0.24114, 構造物と渦電流の時定数比  $I^0$  は 4.1113 である. 縮小モデルでは, 連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ , 時定数比が  $I^0$  と基準モデルと同じになるように, 前述の方法で, 磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 密度  $\rho$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$  を設定する.

また, 設定した縮小モデルでは, 大きさ・材料定数等の変化により, 平板の時定数が基準モデルと異なるため, 外部変動磁場も設定したモデルの条件に従って変化させる必要

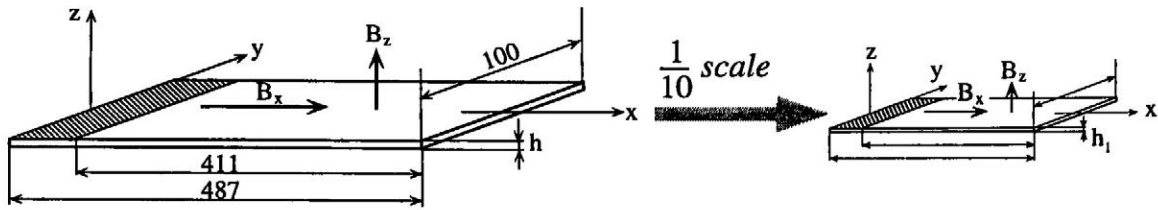


Fig. 7.2 Schematic diagram of reduced plate in electromagnetic field

Table 7.1 Analytical conditions for specimens with different sizes ( $B, E, h$ )

	Magnetic field [T]	Thickness [m]	Young's modulus [Pa]
CASE 1	1.0	$0.6261 \times 10^{-2}$	$0.4697 \times 10^8$
CASE 2	2.0	$0.1565 \times 10^{-2}$	$0.1202 \times 10^{11}$
CASE 3	3.0	$0.6957 \times 10^{-3}$	$0.3081 \times 10^{12}$
CASE 4	4.0	$0.3913 \times 10^{-3}$	$0.3078 \times 10^{13}$
CASE 5	5.0	$0.2505 \times 10^{-3}$	$0.1835 \times 10^{14}$

がある。ここでは、設定したモデルの固有周期  $T$  を用いて

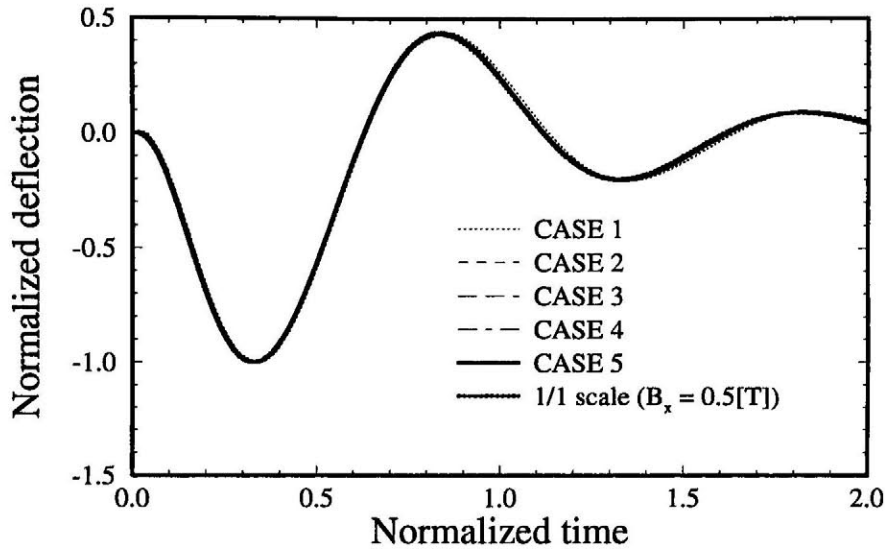
$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp\left(-14.2 \times \frac{t}{T}\right) [\text{T}] \quad (7.5)$$

と規格化した変動磁場を、平板に印加する。

### (b) 解析結果

縮小モデルにおいて、連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.24114, 構造物と渦電流の時定数比  $I$  が 4.1113 となる, 磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 板厚  $h$  の値の組合せとして Table 7.1 に示す値が得られた。この時, 密度  $\rho$  と導電率  $\kappa$  は, 基準モデルと同じ,  $\rho = 8.912 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ ,  $\kappa = 5.814 \times 10^7 [\text{S/m}]$  である。この Table 7.1 に示す縮小モデルの条件で, 有限要素解析により得られた, 板の自由端変位を Fig.7.3 に示す。なお, 時間軸は平板の固有周期で, 変位は最大変位で規格化した。解析結果は, 縮小モデルのいずれのケースも, 基準モデルの磁気減衰振動波形と良く一致している。

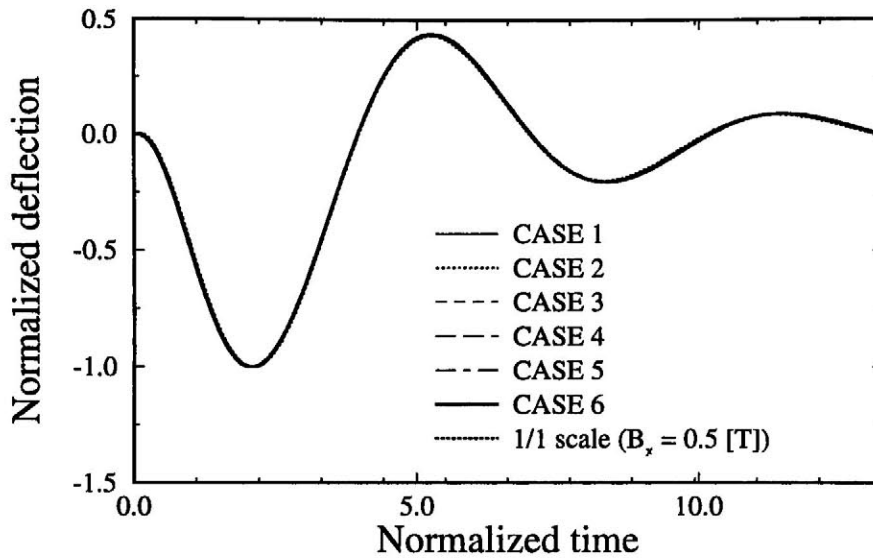
磁場  $B$ , 密度  $\rho$ , 板厚  $h$  を変化させた場合の, 連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.24114, 時定数比  $I$  が  $I = 4.1113$  となる縮小モデルの条件を Table 7.2 に示す。この時, ヤング率  $E$  と導電率  $\kappa$  は基準モデルと同じ,  $E = 1.10 \times 10^2 [\text{GPa}]$ ,  $\kappa = 5.814 \times 10^7 [\text{S/m}]$  である。これら 6 ケースの縮小モデルで, 有限要素解析により得られた板の自由端変位を Fig.7.4

Fig. 7.3 Deflections of the plates with different sizes ( $B, E, h$ )Table 7.2 Analytical conditions for specimens with different sizes ( $B, \rho, h$ )

	Magnetic field[T]	thickness[m]	Mass density[kg/m <sup>3</sup> ]
CASE 1	0.5	$0.29700 \times 10^{-3}$	$0.1057 \times 10^3$
CASE 2	1.0	$0.47150 \times 10^{-3}$	$0.6711 \times 10^3$
CASE 3	2.0	$0.74840 \times 10^{-3}$	$0.4261 \times 10^4$
CASE 4	3.0	$0.98070 \times 10^{-3}$	$0.1256 \times 10^5$
CASE 5	4.0	$0.11880 \times 10^{-3}$	$0.2706 \times 10^5$
CASE 6	5.0	$0.13790 \times 10^{-3}$	$0.4906 \times 10^5$

に示す。解析結果は、縮小モデルのいずれのケースにおいても、基準モデルの磁気減衰振動波形と非常に良く一致している。

磁場  $B$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  を変化させた場合の、連成強度パラメータ  $C_{es}$  が 0.24114、時定数比  $I$  が  $I = 4.1113$  となる縮小モデルの条件を Table 7.3 に示す。この時、ヤング率  $E$  と密度  $\rho$  は基準モデルと同じ、 $E = 1.10 \times 10^2$  [GPa]、 $\rho = 8.912 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>] である。これら 6 ケースの縮小モデルで、有限要素解析により得られた板の自由端変位を Fig.7.5 に示す。解析結果は、縮小モデルのいずれのケースにおいても、基準モデルの磁気減衰振動波形と非常に良く一致している。このように、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を一定とすれば、その大きさと無関係に同一の磁気減衰振動特性が得られる。

Fig. 7.4 Deflections of the plates with different sizes ( $B, \rho, h$ )Table 7.3 Analytical conditions for specimens with different sizes ( $B, \kappa, h$ )

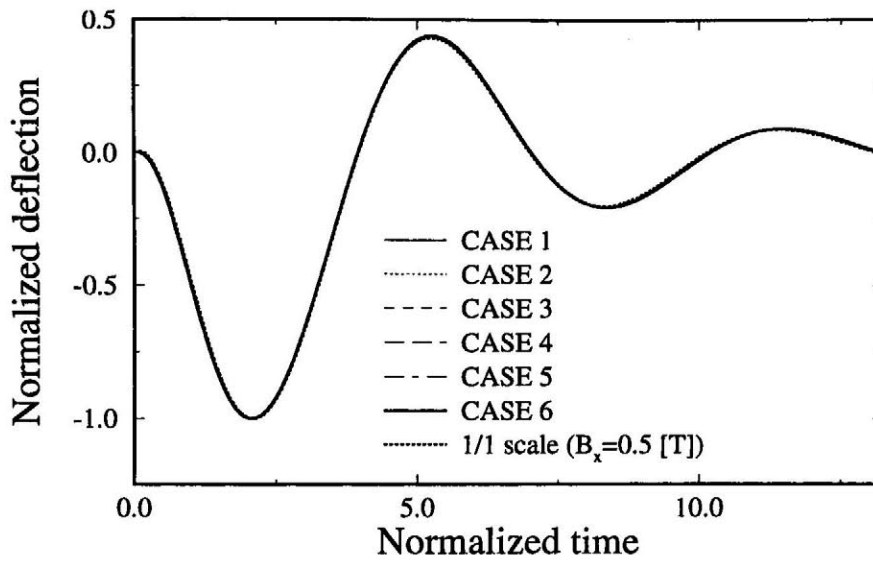
	Magnetic field [T]	Thickness [m]	Electrical conductivity [S/m]
CASE 1	0.5	$0.29700 \times 10^{-3}$	$0.5339 \times 10^9$
CASE 2	1.0	$0.47150 \times 10^{-3}$	$0.2119 \times 10^9$
CASE 3	2.0	$0.74840 \times 10^{-3}$	$0.8410 \times 10^9$
CASE 4	3.0	$0.98070 \times 10^{-3}$	$0.4897 \times 10^8$
CASE 5	4.0	$0.11880 \times 10^{-3}$	$0.3337 \times 10^8$
CASE 6	5.0	$0.13790 \times 10^{-3}$	$0.2478 \times 10^8$

### 7.2.3 実験による検証

#### (a) 実験条件

実験装置概観を Fig.7.6に示す。片端を完全固定された試験片がソレノイドコイルによる最大 0.21[T] の定常磁場中に設置されており、この試験片に初期変位を与えて振動させる。振動波形はレーザー変位計で測定するが、この磁気減衰振動波形には空気抵抗による減衰成分が含まれるため、第5章 3.3 節で述べたように、磁場を印加しない時の振動波形を用いて、これを除去する。また、試験片は Fig.7.7 に示すように、板長さと幅を基準形状から 0.9, 0.8, 0.7, 0.6 倍した銅板を使用する。なお、銅板の板厚は 0.3[mm]、材料定数は Table 5.1 に示す値である。

連成強度パラメータを  $C_{es}^0$ 、構造物と渦電流の時定数比を  $I^0$  とするためには、(7.3) 式と (7.4) 式を満足するような、磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  の値を設定しなければならないが、本実験装置の制約上、これらの値を自由に設定することがで

Fig. 7.5 Deflections of the plates with different sizes ( $B, \kappa, h$ )

きない. そこで本実験では, (7.3) 式のみを満足するように値を設定する. また, 連成強度パラメータを  $C_{es}^0$  とするためには直接 (7.3) 式を解いて,  $B, E, \rho, \kappa, h$  の値を求めることもできるが, ここではあらかじめ各サイズの試験片に対して有限要素解析を行ない, Fig.7.8 に示すような磁場と連成強度パラメータの関係を求めておき, このグラフから,  $C_{es} = C_{es}^0$  となる磁場  $B$  の値を読み取り, 実験の条件を設定した. なお, 本実験では,  $C_{es}^0$  の値を  $1.00 \times 10^{-2}, 2.22 \times 10^{-2}, 3.97 \times 10^{-2}$  とした.

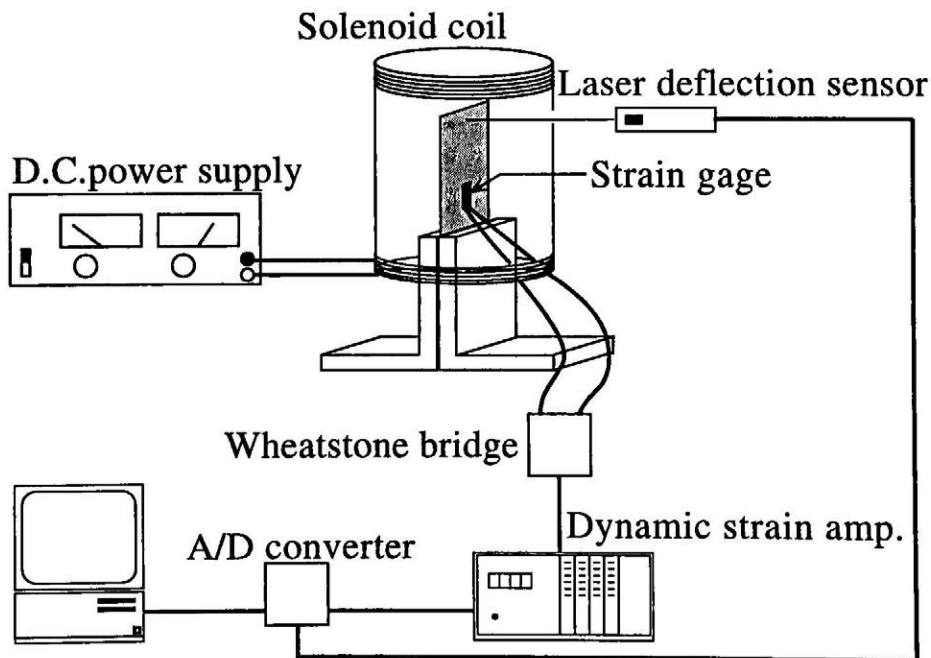


Fig. 7.6 Experimental apparatus

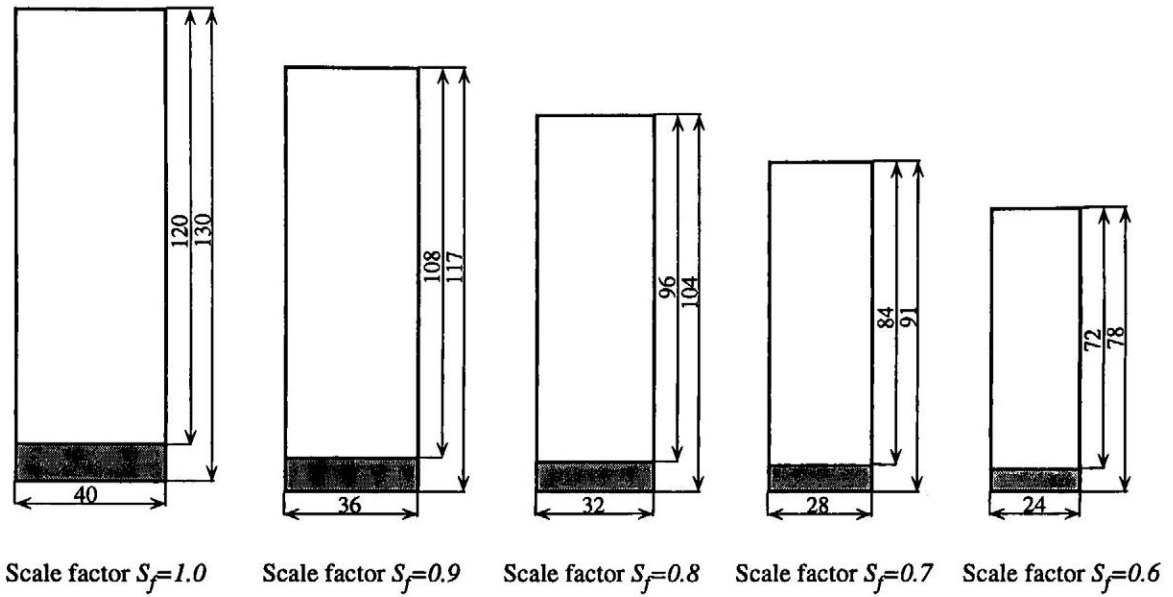


Fig. 7.7 Reduced test piece

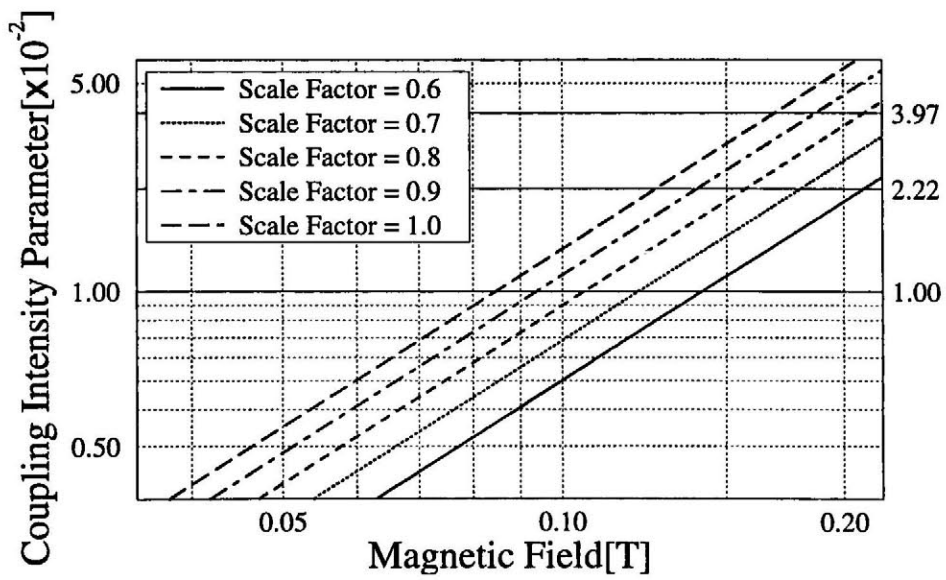
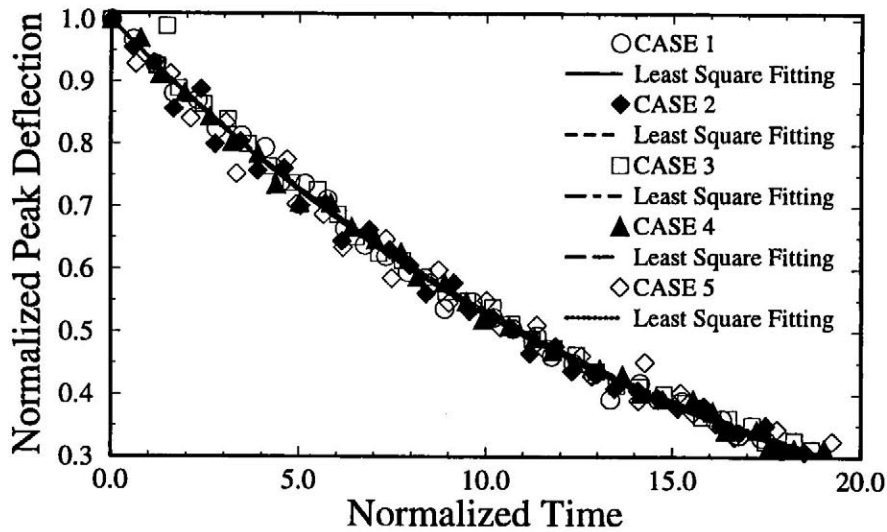


Fig. 7.8 Method to determine conditions to keep  $C_{es}$  constant in reduced model

Table 7.4 Experimental conditions for specimens with different size ( $C_{es} = 1.00 \times 10^{-2}$ )

	Scale Factor	Magnetic Field[T]
CASE 1	0.6	0.142
CASE 2	0.7	0.121
CASE 3	0.8	0.106
CASE 4	0.9	0.094
CASE 5	1.0	0.085

Fig. 7.9 Magnetic damping characteristics of different size specimens for  $C_{es} = 1.00 \times 10^{-2}$ 

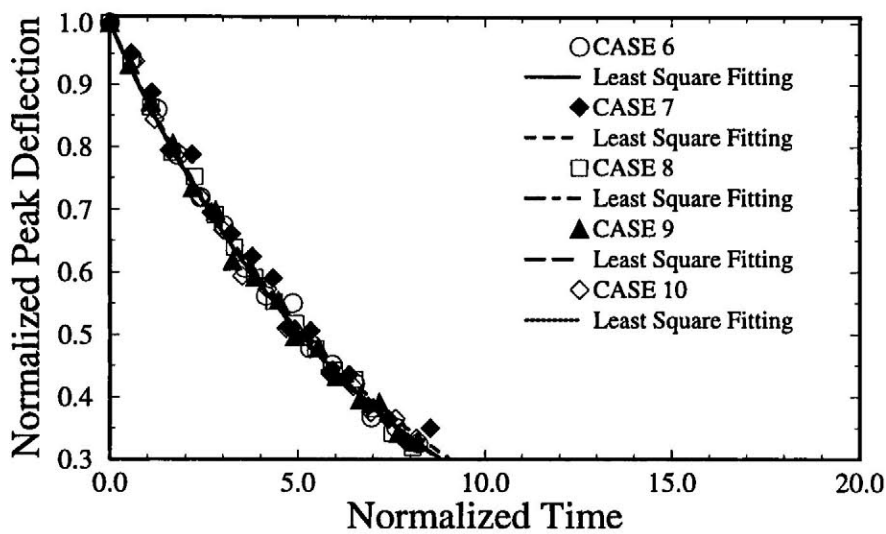
## (b) 実験結果

それぞれの大きさの銅板に対して、連成強度パラメータが  $1.00 \times 10^{-2}$  となる磁場  $B$  の値を Table 7.4 に示す。また、この条件下で実験を行なって得られた板のピーク点変位を Fig. 7.9 に示す。同図は、時間軸に対して各銅板の固有周期で、変位に対して初期変位で規格化している。Fig. 7.9 のいずれの場合も、実験により得られた磁気減衰特性は良く一致している。

各大きさの試験片に対して、連成強度パラメータが  $2.22 \times 10^{-2}$  となる磁場  $B$  の値を Table 7.5 に、また、この条件下の実験で得られたピーク変位を Fig. 7.10 に示す。同様に、各大きさの試験片に対して連成強度パラメータが  $3.97 \times 10^{-2}$  となる磁場  $B$  の値を Table 7.6 に、この条件下での実験結果を Fig. 7.11 に示す。これらの実験結果より、 $C_{es}$  が一定となる種々の条件下で実験を行なって得られた磁気減衰特性は、各  $C_{es}$  の値ごとに、試験片の大きさが異なっても非常に良く一致していることがわかる。

Table 7.5 Experimental conditions for specimens with different size ( $C_{es} = 2.22 \times 10^{-2}$ )

	Scale Factor	Magnetic Field[T]
CASE 6	0.6	0.210
CASE 7	0.7	0.180
CASE 8	0.8	0.157
CASE 9	0.9	0.139
CASE 10	1.0	0.126

Fig. 7.10 Magnetic damping characteristics of different size specimens for  $C_{es} = 2.22 \times 10^{-2}$ 

#### 7.2.4 妥当性の検討

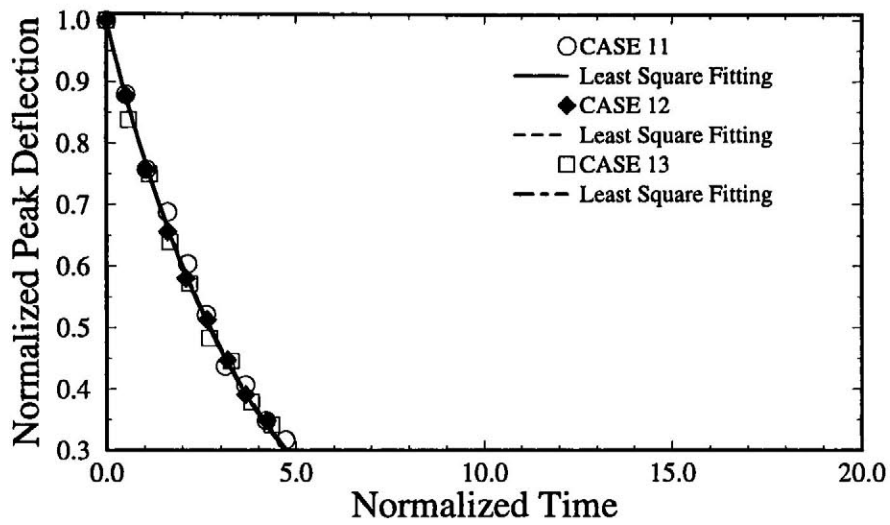
数値解析と実験により、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比を一定とすると、縮小モデルにおいても基準モデルと同一の磁気減衰特性が得られることを示した。これにより、縮小モデル実験を行なう際には、連成強度パラメータおよび時定数比が実機モデルと同じ値になるように、縮小モデルを設計することが重要であることがわかる。

このように、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比により磁気減衰振動特性を定量的に評価することができ、また、これらの磁場・材料定数・板厚に対する依存性の解析方法や、任意の連成強度パラメータと時定数比となる問題の条件決定方法は、強磁場中に設置された磁気減衰振動を生じる構造物の設計に有効となる。



Table 7.6 Experimental conditions for specimens with different size ( $C_{es} = 3.97 \times 10^{-2}$ )

	Scale Factor	Magnetic Field[T]
CASE 11	0.8	0.210
CASE 12	0.9	0.187
CASE 13	1.0	0.168

Fig. 7.11 Magnetic damping characteristics of different size specimens for  $C_{es} = 3.97 \times 10^{-2}$

## 7.3 連成強度パラメータを用いた簡易解析

### 7.3.1 簡易解析方法の提案

ある基準の形状に対して有限要素解析によって連成固有値あるいは連成強度パラメータの値が求まっていると、磁場・材料定数・板厚が変化したときのこれらの値の変化は、第4章で述べた依存性から求めることができる。そのため、これらの値をもとに、有限要素解析を用いずに磁気減衰振動応答が計算できる簡易解析方法が確立されれば、その実用性は高い。ここでは、1自由度連成モデルと連成固有値を用いた簡易解析方法 (Method 1) および磁気減衰効果を考慮せずに得られた有限要素解析結果と連成強度パラメータを用いた簡易解析方法 (Method 2) を提案し、その実用性を検証する。

#### (a) 1自由度連成モデルを用いた簡易解析 (Method 1)

1自由度連成モデルの運動方程式は、変位  $u$  と電流ポテンシャル  $T$  を未知変数として、

$$m\ddot{u} + ku + C_s T = f^{ex} \quad (7.6)$$

である。ここで、 $m, k, C_s T, f^{ex}$  は質量、剛性、電磁力、外荷重を表す。また、1自由度連成モデルの渦電流の式は、

$$U\dot{T} + C_e \dot{u} + RT = \dot{B}^{ex} \quad (7.7)$$

である。ここで、 $U, C_e \dot{u}, R, \dot{B}^{ex}$  はインダクタンス、速度起電力、レジスタンス、外部変動磁場を表す。(7.6),(7.7) 式の1自由度連成モデルにおける変位の一般解は、渦電流の連成固有値を  $\alpha_1$ 、構造物の連成固有値を  $\alpha_2, \alpha_3$  とし、積分定数  $D_1, D_2, D_3$  を用いて、

$$u = D_1 e^{\alpha_1 t} + D_2 e^{\alpha_2 t} + D_3 e^{\alpha_3 t} \quad (7.8)$$

となり、これに、 $\alpha_2, \alpha_3 = \gamma_c \pm i\omega_c$  を代入すると、

$$u = D_1 e^{\alpha_1 t} + e^{\gamma_c t} \{D_2 \cos(\omega_c t) + D_3 \sin(\omega_c t)\} \quad (7.9)$$

が得られる。ただし、 $D_2 = D_2' + D_3', D_3 = D_2' - D_3'$  である。

初期変位  $u_0$  を与える磁気減衰振動問題において、時刻  $t = 0$  における初期条件が、

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad T(0) = 0 \quad (7.10)$$

となるため、これらを (7.9) 式および (7.7) 式に代入すると、

$$D_1 = u_0(1 - A) \quad (7.11)$$

$$D_2 = Au_0 \quad (7.12)$$

$$D_3 = -\frac{u_0}{\omega_c} (\alpha_1 - (\alpha_1 - \gamma_c) A) \quad (7.13)$$

ただし,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad A = \frac{\omega_0^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\gamma_c}{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\gamma_c + \gamma_c^2 + \omega_c^2} \quad (7.14)$$

が得られる. この (7.11)~(7.13) 式中の連成固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  は, 連成系有限要素式

$$\begin{bmatrix} -K & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & -U \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ K & 0 & C_s \\ 0 & -C_e & -R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F^{ex} \\ -\dot{B}^{ex} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

を固有値解析することによって求められ, さらに, 磁場・材料定数・板厚を変化させても, 第4章4.2節で述べた依存性の解析方法で, 連成固有値の変化を求めることができる. また,  $\omega_0$  は平板の自然固有角振動数である.

このように, 初期変位  $u_0$  を与える磁気減衰振動応答は, 連成固有値  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  と平板の自然固有角振動数  $\omega_0$  を (7.11)~(7.13) 式に代入し, さらに, これらを (7.9) 式に代入することにより, 有限要素法によるモード合成を行わずに磁気減衰振動応答が得られる.

#### (b) 非連成解析結果と連成強度パラメータを用いた簡易解析方法 (Method 2)

構造物と渦電流の有限要素式を組み合わせた連成系有限要素式を解く場合と比較して, 速度起電力を考慮しない解析では, 渦電流解析のみで得られた電流から電磁力を計算し, これを構造解析に対して既知ベクトルとして与えれば良く, この時, 構造物と渦電流を独立に解くことができるため, 計算時間が大幅に減少する. ここでは, こうして得られた速度起電力を考慮しない非連成解析結果を, 連成強度パラメータによって修正し, 磁気減衰振動応答とする簡易解析方法を述べる.

一般の振動問題,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (7.16)$$

において, 初期変位  $U_0$  を与えた時の解は,  $c = 0$  の自由振動において,

$$u_f = U_0 \cos(\omega_0 t) \quad (7.17)$$

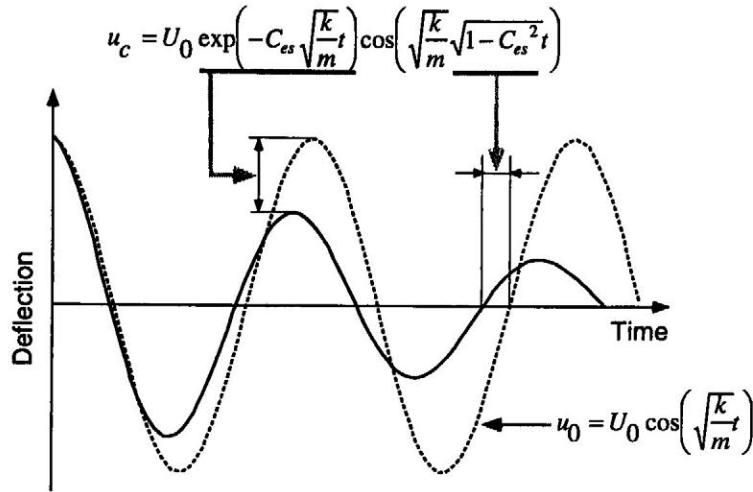


Fig. 7.12 Method to obtain the response of magnetic damping vibration by results without electromotive force

ただし,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.18)$$

となる. ここで,  $\omega_0$  は平板の自然固有角振動数で, その値は解析的に求めることができる. また, 減衰振動解は,

$$u_d = U_0 \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}t\right) \quad (7.19)$$

となるが, 減衰比  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$  を用いると,

$$u_d = U_0 \exp\left(-\zeta\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \quad (7.20)$$

と表すこともできる.

減衰比  $\zeta$  は

$$\zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2\sqrt{mk} \quad (7.21)$$

と定義されるが, 固有値  $\alpha$  を用いると,

$$\zeta = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|} \quad (7.22)$$

と表すことができ, 一方, 連成強度パラメータは連成固有値  $\alpha_c$  を用いて,

$$C_{es} = \frac{\operatorname{Re} \alpha_c}{|\alpha_c|} \quad (7.23)$$

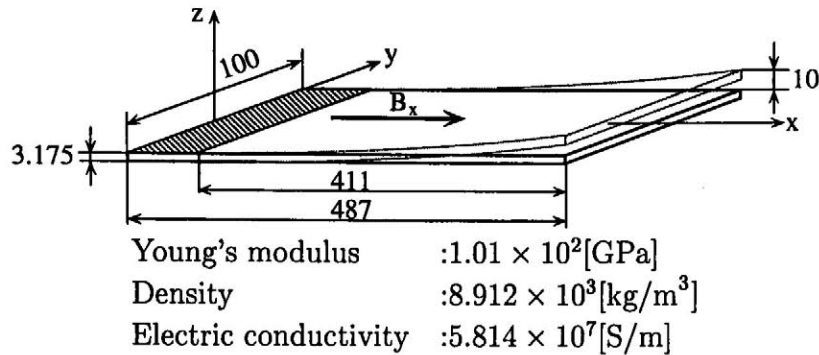


Fig. 7.13 Cantilever beam with initial deflection in magnetic field

と定義されることから,

$$C_{es} \approx \zeta \quad (7.24)$$

と仮定する. 有限要素解析で, 速度起電力を考慮せずに得られた Fig.7.12 に示す振動応答が, (7.17) 式で表されると仮定すると, 磁気減衰振動応答は, (7.20) 式および (7.24) 式を用いて,

$$u_c = U_0 \exp(-C_{es}\omega_0 t) \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - C_{es}^2} t\right) \quad (7.25)$$

と表すことができる. (7.17) 式と (7.25) 式を比較すると, (7.17) 式の時間軸を  $\frac{1}{\sqrt{1 - C_{es}^2}}$  倍, 変位を  $\exp(-C_{es}\omega_0 t)$  倍すれば, (7.25) 式となる. すなわち, 速度起電力を考慮せずに得られた振動応答の, 時間軸を  $\frac{1}{\sqrt{1 - C_{es}^2}}$  倍し, 変位を  $\exp(-C_{es}\omega_0 t)$  することによって, 磁気減衰振動応答を得ることができる.

### 7.3.2 解析結果

Fig.7.13に示す, 一様磁場中に置かれた平板の磁気減衰振動問題で, 簡易解析方法の妥当性を検証する. これは, 平板に 10[mm] の初期変位を与えて振動させ, この変形速度と磁場  $B_x$  により速度起電力を発生させる. この速度起電力により生じた渦電流と磁場  $B_x$  が磁気減衰として働く電磁力を発生し, これが平板に作用する問題である.

有限要素解析, 1 自由度連成モデルを用いた簡易解析方法 (Method 1), 非連成解析結果と連成強度パラメータを用いた簡易解析方法 (Method 2) で得られた, 磁場  $B_x$  が 0.2[T] の時の板の自由端変位を Fig.7.14 に示す. 同図には, Method 2 で使用した非連成解析結果も示してある. 2 つの簡易解析方法により得られた結果は, 有限要素解析結果と非常に良く一致していることがわかる.

磁場  $B_x$  を 0.5[T] として, 磁気減衰を強くした場合の解析結果を Fig.7.15 に示す. ま

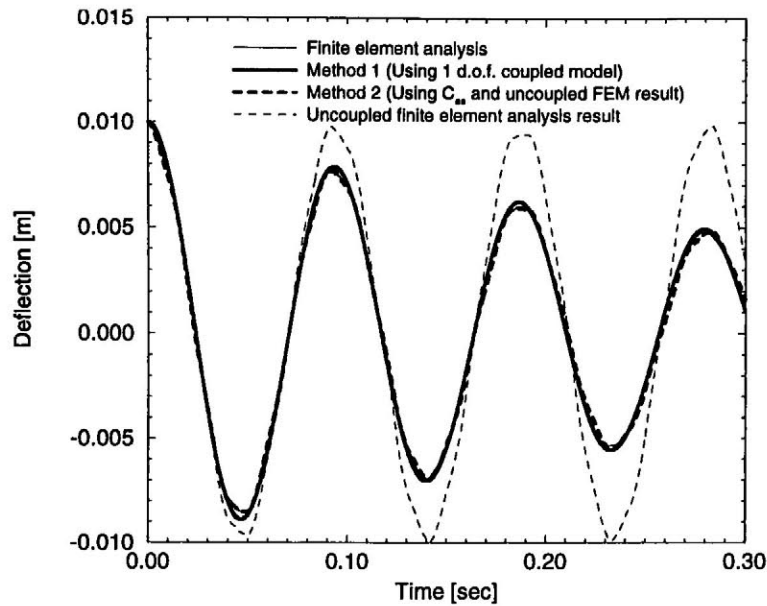


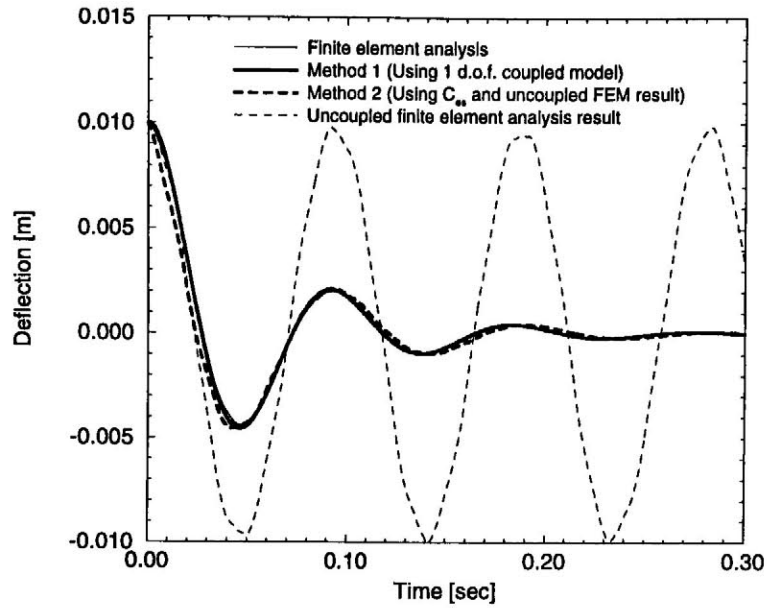
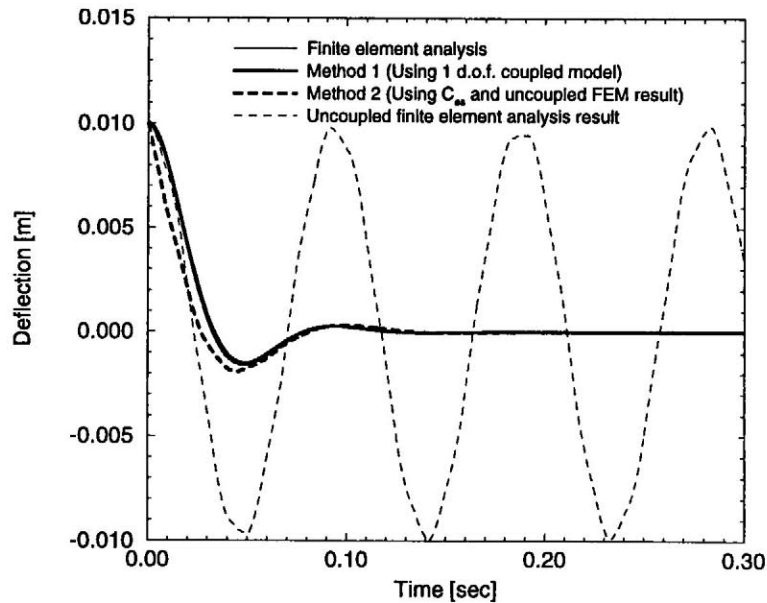
Fig. 7.14 Deflection of the plate by simplified analysis ( $B_x = 0.2[\text{T}]$ )

た、磁場を  $0.7[\text{T}]$  として、さらに磁気減衰を強くした場合の解析結果を、Fig.7.16 に示す。Fig.7.15においては、2つの簡易解析方法による結果は、有限要素解析結果と良く一致しており、また、磁気減衰が大きい Fig.7.16においても、1自由度連成モデルを用いた簡易解析方法 (Method 2) による結果は、有限要素解析結果と良く一致している。

### 7.3.3 簡易解析法の妥当性の検討

1自由度連成モデルを用いた簡易解析では、いずれのケースにおいても有限要素解析と結果が良く一致している。本方法では、有限要素モデルと等価な1自由度連成モデルを解析的に解くため、モデル化の精度が解の精度に大きく影響を与える。また、ここでは、平板たわみの磁気減衰振動問題を解析したが、ねじり等の複数のモードを持つ問題に対しても、それぞれのモードで解析的に解を求め、それらを足しあわせることによって磁気減衰振動応答を求めることができると考えられ、そのため、複雑な問題に対しても適応が可能である。

磁気減衰効果を考慮しない解析結果を、連成強度パラメータで修正して磁気減衰振動を求める方法では、磁気減衰が大きくなると誤差が大きくなったが、これは、(7.24)式が満足されなくなったためである。減衰比 $\zeta$ は(7.21)式の定義から1以上の値を採ることができるが、連成強度パラメータは(7.23)式で定義されるため1以上の値を採ることができない。このため、磁気減衰が大きくなるに従って、減衰比や連成強度パラメータが1に近くなり、(7.24)式が成立しなくなる。

Fig. 7.15 Deflection of the plate by simplified analysis ( $B_x = 0.5[\text{T}]$ )Fig. 7.16 Deflection of the plate by simplified analysis ( $B_x = 0.7[\text{T}]$ )

しかし、この2つの方法は、いずれも簡易解析としては十分な精度を持つため、これらの方法で解析を行ない、その結果から設計の方針を得た上で、精度のある数値解析を行なうことは、設計に非常に有効である。さらに、連成強度パラメータおよび構造物と渦電流の時定数比で、磁気減衰振動特性が一意に決まることを利用して、磁気減衰応答をこれら2つのパラメータで整理したデータベースを作成し、これを用いて磁気減衰振動応答を得る方法も考えられる。このように、連成強度パラメータ(もしくは連成固有値)は、設計の際に、様々な分野で応用できるパラメータである。

## 7.4 まとめ

連成強度パラメータ (あるいは連成固有値) の設計への応用として、

- 連成強度パラメータを用いた縮小モデルの条件決定方法を示し、その妥当性を数値解析および実験により検証した。これにより、実形状モデルと同一の磁気減衰振動となる縮小モデル実験を行なうことができ、これは設計に有効な情報を与える。
- 連成固有値と 1 自由度連成モデルを用いた磁気減衰振動の簡易解析方法を示し、初期変位を与える平板曲げの磁気減衰振動問題で、この簡易解析による結果と有限要素解析結果と比較した。その結果、簡易解析で得られた変位は、有限要素解析結果と良く一致し、本解析方法の妥当性が検証された。
- 磁気減衰を考慮せずに得られた振動応答を連成強度パラメータを用いて、磁気減衰振動応答とする方法を示し、初期変位を与える磁気減衰振動問題で、この方法で得られた変位と有限要素解析結果を比較した。その結果、磁気減衰が小さい場合は、この方法による結果と有限要素解析結果は良く一致した。

このように、連成強度パラメータ (あるいは連成固有値) および構造物と渦電流の時定数比は、磁気減衰振動特性を定量的にあらわすため、こうした性質を利用した様々な応用が可能となる。



## 参考文献

- (7.1) Yoshida, Y., Miya, K. and Demachi, K., Study of Magnetic Damping Effect on Dynamic Deflection of Fusion Reactor First Wall, *Fusion Eng. Des.*, **27** (1995), 473–480.
- (7.2) T. Takagi and J. Tani, Evaluation of Critical Magnetic Viscous Damping Ratios for Plate Vibrations with Different Boundary Conditions, *Simulation and Design of Electromagnetic System*, T. Honma Ed., Elsevier, (1994), 101–104.
- (7.3) T. Takagi and J. Tani, A New Numerical Analysis Methods of Dynamic Behavior of a Thin Plate under Magnetic Field Considering Magnetic Viscous Damping Effect, *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, **4** (1993), 35–42.
- (7.4) T. Takagi and J. Tani, Dynamic Behavior of a Plate in Magnetic Field by Full Coupling and MMD Methods, *IEEE Trans. on Magn.*, **30**–5 (1994), 3296–3299.

## 第 8 章

### 結論

本研究では、磁気減衰振動解析に関して

- 電磁構造連成効果を連成サブマトリックスであらわすことにより、構造物と渦電流を完全かつ同時に解析することができる、電磁構造連成系の有限要素式を導出した。また、ここで提案した連成モード合成法と、従来のモード合成に基づく連成解析の比較を行なった結果、本解析方法ではわずかなモード数で十分な精度の解を得ることができた。このため、本解析方法は効率良く解析することができる。さらに、本解析方法で得られる連成モードベクトルについて検討を行ない、各連成モードベクトルには、連成による効果が全て含まれることを明らかにした。
- 大変形を考慮した磁気減衰振動解析を行ない、変動磁場の大きさにより、大変形解析と微小変形解析結果に差が確認された。このため、磁気減衰振動問題においても大変形解析が必要となる場合がある。また、定常磁場が小さい場合は、大変形解析の方がたわみが小さくなるが、定常磁場が大きくなり振動が過減衰状態になると、大変形効果は必ずしもたわみを小さくするとは限らないため、設計の際に注意が必要である。

という結論が得られた。また、設計を行なう上で必要となる磁気減衰評価に関して、

- 連成効果を含む固有値に基づき、連成効果の強さをあらわすパラメータとして連成強度パラメータを定義し、また、このパラメータの磁場・ヤング率・密度・導電率・板厚に対する依存性を、数値解析結果に基づき求めた。さらに、1自由度連成モデルを用いた、連成強度パラメータの依存性解析手法を示し、その妥当性を有限要素解析結果との比較により検証した。設計時に、有限要素法のみで、この様な多数の設

---

計パラメータに対する依存性を求めるには、膨大なケースの解析が必要となるが、本手法では1度の有限要素解析結果から、この連成強度パラメータの依存性を求めることができるため、設計を行なう上で極めて有効である。

- 磁気減衰振動実験から得られた振動波形から、連成強度パラメータを導出する手法を開発し、その妥当性を数値解析結果との比較により確認した。これにより、磁気減衰振動実験から、連成効果の強さを定量的に評価することができる。また、実験結果に基づいて連成強度パラメータの磁場と板厚に対する依存性を求めた。しかし、さらに磁場や板厚を変化させた実験を行ない、連成強度パラメータの依存性を明らかにしていく必要がある。
- 連成強度パラメータを磁気減衰特性評価パラメータとして提案した。連成強度パラメータを一定とした種々の条件下で数値解析と実験を行なった結果、磁気減衰特性が一致し、連成強度パラメータの評価パラメータとしての妥当性を検証した。この連成強度パラメータは、磁気減衰特性を定量的にあらわすことができるため、設計上極めて有効である。また、磁場・材料定数・板厚を変化させて、連成強度パラメータを任意の値に設定する条件決定方法を提案した。これにより、磁気減衰振動を磁場・材料定数・板厚を変化させて、自由に設定することができる。

以上の連成強度パラメータによる磁気減衰特性評価をまとめると、

- 磁気減衰振動を連成強度パラメータにより定量的に評価することができる。
- 数値解析と実験の両面から、磁気減衰振動を評価することができる。
- 連成強度パラメータを用いて、磁気減衰振動を自由にコントロールすることができる。また、これにより、磁気減衰を積極的に利用した設計が可能となる。

となる。さらに、評価パラメータの設計への応用に関して、

- 連成強度パラメータにより磁気減衰特性が一意に決まることを利用し、縮小モデル実験の条件決定方法を示し、その妥当性を数値解析と実験により確認した。これから、縮小モデルの実験を行なう場合、連成強度パラメータが実機モデルと同じ値となるように、縮小モデルの条件を設定することが重要であることがわかる。また、連成強度パラメータ(あるいは連成固有値)を用いた、磁気減衰振動の簡易解析方法を示し、その実用性を検討した結果、本簡易解析方法は十分な精度を持つため、設計の方針を得るために極めて有効である。

---

以上の研究が、強磁場中に設置される機器の設計および連成問題の研究に、わずかでも貢献できれば幸いである。

## 謝辞

本研究を行なうにあたり直接御指導戴きました、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 堀江 知義 助教授に心からの感謝の意を表します。また、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 中垣 通彦 教授、萩原 世也 助手には、研究を進める過程で、貴重な御助言・励ましの御言葉を戴きました。ここに感謝致します。本研究を始めた当初から、ここに本論文をまとめるに至るまで、数値解析方法などで御討論戴き、また、研究を進めるにあたり、あたたかい励ましの御言葉を戴きました、九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻博士後期課程 3 年 倉前 宏行 氏には、深く感謝致します。

磁気減衰評価パラメータに関する研究を行なうにあたり、モデル化や数値解析で御討論あるいは御協力戴きました、九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻 平成 7 年度修了河野 智城 氏に、心から感謝致します。また、磁気減衰振動実験を行なうにあたり、実験装置の設計、部品の加工・組み立て、測定技術の確立等に至るまで御協力戴いた、九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻 平成 7 年度修了 伊達 幸利 氏、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成 7 年度卒業 平山 順也 氏、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成 6 年度卒業 宮崎 和之 氏に、心から感謝致します。さらに、数値解析結果を評価する上で有効な可視化ツールを開発して戴いた、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成 6 年度卒業 三井 孝宏 氏に、心から感謝致します。

本論文を作成するにあたり、数値解析等で御討論・御協力戴きました、九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻博士前期課程 1 年 田中 義和 氏、戸上 真 氏に、深く感謝致します。また、九州工業大学情報工学部機械システム工学科 堀江研究室および中垣研究室の修了生・卒業生・在校生の皆様には、多くの御助言やあたたかい励ましの御言葉を戴きました。心より感謝致します。

最後に、私の研究生生活をあたたかく見守り、支えて戴きました全ての皆様に深く感謝致します。