

377.5

K-11-2

1-85

# 磁気減衰振動現象の特性評価パラメータおよび 連成解析時の数値的不安定性に関する研究



九州工業大学附属図書館



\*0010459329\*

田中 義和

# 要旨

次世代の電力供給源として期待されている核融合炉や超高速・大量輸送技術として期待されている磁気浮上列車などの強磁場中に設置される機器においては、解決しなければいけない構造工学的な諸問題のひとつとして、電磁場と構造物の連成による電磁構造連成現象がある。導電性の構造物に、過渡的な磁場が印加されると、誘導起電力により構造物に電流が流れる。この発生した電流と磁場により、電磁力(ローレンツ力)が構造物に生じ構造物に変形する。また、その変形速度と磁場により速度起電力が誘起され、この速度起電力によって生じる渦電流と外部定常磁場により、変形を抑える方向の電磁力が発生する。こうした電磁構造連成現象は磁気減衰現象とも呼ばれ、強磁場中に設置される機器の合理的な設計には、電磁構造連成現象の解明や設計基準の確立が必要である。

そこで、本研究は、磁気減衰振動特性を定量的に評価できる特性評価パラメータおよび強制振動時における振動特性の評価方法の確立、および効率的な連成解析方法の開発を目的とする。

第2章では、磁気減衰振動の特性評価パラメータとして連成強度パラメータおよび連成効果を考慮した渦電流と構造物の時定数を用いて連成時定数比を定義した。そして、連成強度パラメータと連成時定数比により

- 連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定である条件を設定し、有限要素解析を行った。その解析結果より、連成強度パラメータと連成時定数比が一定であれば、磁気減衰振動特性は一致し、かつ、その特性を一意に表すことができること示した。
- 1自由度連成モデルより、連成強度パラメータは、磁気減衰の強さを表すパラメータであることを示した。また、連成時定数比は、構造モードの変位成分に対して、渦電流モードの変位成分が、早く減衰するか、もしくは、遅く減衰するかを表すパラメータであることを示した。
- 連成強度パラメータおよび連成時定数比を用いて、磁気減衰振動特性の分類を行なった。そして、有限要素解析によりこの分類の妥当性を示した。

第3章では、シェル構造物に生じる磁気減衰振動の2つの簡易解析方法を提案した。1つは運動方程式に基づく方法であり、この方法では連成強度パラメータを用いているため、連成強度パラメータ



タのデータベースと組み合わせて使用することができる。もう 1 つは磁気減衰振動の 3 階微分方程式に基づく方法であり、この方法では連成固有値と 3 階微分方程式の振動解を用いている。これらの簡易解析方法を、平板のたわみ磁気減衰振動問題、および、複数の振動モードが必要となる円筒シェルの磁気減衰振動問題に適用し、

- 運動方程式に基づく方法より得られた振動応答と連成有限要素解析結果を比較した。その結果、磁気減衰が強くなると振動応答に若干遅れが見られたが、実用上十分な精度で磁気減衰振動を得ることができる。
- 運動方程式に基づく方法と同様に、3 階微分方程式に基づく方法で得られた振動応答と連成有限要素解析結果を比較した。その結果、連成固有値を用いているため、磁気減衰が強い時にも連成有限要素解析結果と良く一致した。

ことを確認した。よって、これらの簡易解析方法で磁気減衰振動応答のパラメータスタディを行うことは、磁気減衰効果を考慮した機器を効率良く設計する上で有用である。

第 4 章では、強磁場中に置かれる機器の強制振動特性について検討した。磁気減衰振動特性は 3 階微分方程式によって記述されるため、一般の減衰振動と強制振動特性が異なると考えられる。そこで、有限要素解析と 1 自由度連成モデルで検討を行った。その結果をまとめると

- 外力による強制振動状態においては、形状と磁場の組合せにより、共振振動数が固有振動数よりも大きくなることを有限要素解析により示した。また、有限要素解析および 1 自由度連成モデルより得られた共振振動数を比較し、1 自由度連成モデルの評価式が妥当であることを示した。
- 支持部の周期的変位による強制振動状態においては、一般の減衰振動と同様に、磁場が強くなり、磁気減衰効果が強くなることで、共振振動数が固有振動数よりも大きくなることを示した。また、1 自由度連成モデルより得られる評価式が妥当であることを示した。
- 導電率の高い材料を用いれば、共振状態における振動振幅を減少させることができる。
- 1 自由度連成モデルより得られる共振振動数の評価式は、強磁場中に置かれた機器の強制振動特性のパラメータスタディに用いることができる。

である。

第 5 章では、電磁構造連成解析における数値的不安定性について検討した。種々の連成解析方法における時間積分法の漸化式から特性方程式を導出し、それに基づき平板のたわみ磁気減衰振動問題において連成解析方法の安定性を検討した。その結果をまとめると

- 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法は、種々の交互解析方法の中で最も数値的不安定が発生しやすい方法であることを示した。しかし、反復計算を付加することにより安定性が改善できるが、計算量が増加するという欠点がある。
- 速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法は、高次振動モードの安定性を改善する効果があることを示した。また、渦電流解析に、弱い磁場 (1.0 T 以下) では後退差分法を用い、強い磁場 (1.0 T 以上) では Crank-Nicolson 法を用いると最も時間刻み幅を大きく設定することができる。
- 同時解析方法では、磁場および時間刻み幅をどのような値にしても、数値的不安定が発生しない。

である。

第6章では、結論として本研究成果をまとめた。このように、本研究では磁気減衰振動の特性評価パラメータ、磁場中に置かれた機器を効率的に設計するために有用である簡易解析方法、磁場中に置かれた平板の強制振動特性の評価方法を提案し、さらに連成解析における数値的不安定の発生条件と安定性の改善方法を示した。これらの研究は、核融合炉などの強磁場中に設置される機器の設計に、有用な情報を与えるのみならず、磁気減衰効果を積極的に取り入れた設計に大きく貢献することが期待される。

# Abstract

Large Lorentz force which is produced by an eddy current and a magnetic field is applied to conductive thin shell structures in fusion reactor and magnetically levitated vehicle. When the structures deform in the magnetic field, the electromotive force, which is produced by the deformation velocity and the magnetic field, reduces the eddy current. Therefore, it is important to evaluate the electromagnetic and structural coupled effect or magnetic damping effect for the design of these components.

In chapter 2, the coupling intensity parameter and the ratio of coupled time constants of eddy current and structure are proposed as the evaluation parameter of the magnetically damped vibration. In order to verify that these parameters can indicate the characteristics of the magnetic damping, numerical calculations were performed. The results show that

- the magnetically damped vibration obtained from the finite element analysis agree very well under the various condition to keep the coupling intensity parameter and the ratio of coupled time constants of eddy current and structure constant,
- the coupling intensity parameter expresses the magnetic damping effect and the ratio of coupled time constants of eddy current and structure expresses the damping of the deformation of eddy current mode,
- the classification of magnetically damped vibration using these parameters is verified by the results of finite element analysis.

Chapter 3 describes two simplified analysis methods for the magnetically damped vibration. One is the method modifying the result of finite element uncoupled analysis using the coupling intensity parameter, and the other is the method using the solution and coupled eigenvalues of the single-degree-of-freedom coupled model. To verify these methods, numerical analyses of a plate and a thin cylinder are performed. According to the comparison between the results of these methods and the finite element tightly coupled analysis,

- the comparison between the results of the former method and the finite element tightly coupled analysis show almost satisfactory agreement,
- the results of the latter method agree very well with the finite element tightly coupled results because of the coupled eigenvalues.

Since the vibration with magnetic damping can be evaluated using these methods without the finite element coupled analysis, these approximate methods will be practical and useful for the wide range of design analyses taking account of the magnetic damping effect.

Chapter 4 describes the resonance characteristics of magnetically damped vibration. According to the results of finite element analysis and the single-degree-of-freedom coupled model,

- on the harmonic vibration, the resonance characteristics are different from the general damping problem because the magnetically damped vibration is based on the 3 order differential equation,
- on the harmonic motion of the base, the resonance angular frequency is increased when magnetic fields become strong,
- the amplitude of resonance curve is decreased using high conductivity material.

In chapter 5, the numerical instability of the coupled analysis is examined using the recurrence formula of time integration scheme. The results show that

- the staggered method using the velocity of previous time step to evaluate the electromotive force is most unstable in the various staggered method,
- the staggered method using the evaluation of the electromotive force with forward difference is more stable than the staggered method using the velocity of previous time step,
- the simultaneous method is unconditionally stable even if the magnetic field and the time increment are large.

In chapter 6, the conclusions of this study are summarized. It will be expected that the results of this study are useful and applicable to the design activity of the components settled in the magnetic field.

# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 電磁構造連成現象の重要性	1
1.2 磁気減衰振動に関する研究	3
1.3 本研究の目的	5
参考文献	8
<b>第2章 磁気減衰振動の評価パラメータとその力学的意味</b>	<b>11</b>
2.1 はじめに	11
2.2 連成固有値に基づく磁気減衰現象の評価パラメータ	12
2.2.1 評価パラメータの定義	12
2.2.2 有限要素解析による評価パラメータの決定方法	14
2.2.3 評価パラメータを用いた条件の導出方法	15
2.3 磁気減衰振動の解析結果	18
2.3.1 解析問題	18
2.3.2 連成強度パラメータおよび時定数比を一定とした解析	19
2.3.3 連成強度パラメータおよび連成時定数比を一定とした解析	25
2.4 評価パラメータの力学的意味に関する検討	31
2.4.1 連成強度パラメータについて	31
2.4.2 連成時定数比について	33
2.4.3 連成強度パラメータ値による振動特性の変化	38
2.5 おわりに	41
参考文献	42
<b>第3章 磁気減衰振動の簡易解析</b>	<b>43</b>
3.1 はじめに	43
3.2 簡易解析の提案	44

3.2.1	磁気減衰振動の微分方程式 . . . . .	44
3.2.2	運動方程式に基づく方法 (Method 1) . . . . .	45
3.2.3	3階微分方程式に基づく方法 (Method 2) . . . . .	46
3.3	平板の簡易磁気減衰振動解析 . . . . .	47
3.3.1	解析問題 . . . . .	47
3.3.2	解析結果 . . . . .	47
3.3.3	簡易解析方法の有用性 . . . . .	50
3.4	円筒シェルの簡易磁気減衰振動解析 . . . . .	51
3.4.1	均一な初期変位を付加した場合 . . . . .	51
3.4.2	不均一な初期変位を付加した場合 . . . . .	52
3.5	おわりに . . . . .	56
	参考文献 . . . . .	57
<b>第4章</b>	<b>磁場中における共振特性</b> . . . . .	<b>58</b>
4.1	はじめに . . . . .	58
4.2	周期的外力による強制振動 . . . . .	59
4.2.1	磁気減衰時の共振特性 . . . . .	59
4.2.2	有限要素解析による妥当性の検証 . . . . .	62
4.2.3	共振振動数の変化 . . . . .	67
4.3	支持部周期的変位による強制振動 . . . . .	70
4.3.1	磁気減衰時の共振特性 . . . . .	70
4.3.2	有限要素解析による妥当性の検証 . . . . .	71
4.3.3	実験による妥当性の検証 . . . . .	73
4.3.4	共振振動数の変化 . . . . .	90
4.4	おわりに . . . . .	92
	参考文献 . . . . .	93
<b>第5章</b>	<b>電磁構造連成解析に生じる数値的不安定</b> . . . . .	<b>94</b>
5.1	はじめに . . . . .	94
5.2	電磁構造連成問題の解析方法 . . . . .	95
5.2.1	電磁構造連成問題の有限要素式 . . . . .	95
5.2.2	連成解析方法 . . . . .	97
5.2.3	数値的不安定の発生例 . . . . .	100
5.3	連成解析方法の安定性評価方法 . . . . .	104
5.3.1	時間積分の漸化式と安定性の判定方法 . . . . .	104

5.3.2	同時解析方法の特性方程式 . . . . .	105
5.3.3	各交互解析方法の特性方程式 . . . . .	107
5.4	連成解析方法の安定性の比較および検討 . . . . .	112
5.4.1	振動モード 1 の安定性 . . . . .	112
5.4.2	高次振動モードの安定性 . . . . .	124
5.5	おわりに . . . . .	127
	参考文献 . . . . .	128
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>130</b>
	<b>謝辞</b>	<b>132</b>



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 電磁構造連成現象の重要性

力学という学問の発達の流れの中では、固体力学、熱・流体力学、機械力学など個別の事象に着目した研究が進められてきた。しかし、実現象はむしろ複数現象が連成する状態が普通であり、単現象のように見える場合も、たまたまある特定の条件の元でただ一つの力学現象が支配的になっているにすぎない。しかし、この見極めがなかなか難しく、連成現象の見逃しがしばしば重大な事故の要因となる。自然界を構造物、電磁場、熱、流体などに関連する現象に分類した時、ある現象がそれ以外の現象に影響を与える連成現象が数多く存在し、その代表例が熱と流体の伝熱流動問題、構造物と流体の流体構造連成問題である。こうした連成現象においては、個々の現象が容易に連成するため工学上問題となることが多く、早くから研究が行なわれてきた。しかし、その一方で、これまで設計上無視されてきた現象の間の相互作用が、近年の技術の高度化や厳密な設計の要求から無視できなくなり、その結果、連成現象として取り扱わなければならない問題も生じてきている。その一例が超電導コイルによって発生する強磁場を利用したトカマク型核融合炉で生じる電磁構造連成問題である。

核融合炉は主な燃料として海水中にほぼ無限に含まれる重水素を使い、現在の原子力発電と比較して放射性物質もほとんど問題とならず、また、環境汚染で問題となる  $\text{CO}_2$  も発生せず、さらに炉が暴走する恐れもない安全かつクリーンな人類の究極のエネルギー源であり、これまでの化石燃料や核分裂を利用した原子力発電に代わる次世代のエネルギー源として期待されている。実用化に最も近いといわれるトカマク型核融合炉では、1982～1984 年から日本の JT-60(Japan Atomic Energy Research Institute Tokamak-60) <sup>(1.1, 1.2)</sup>、ヨーロッパ共同体の JET(Joint European Torus) アメリカの TFTR(Tokamak Fusion Test Reactor) が運転を開始し、1990 年までに臨界条件(出力エネルギーが核融合反応のために入力されたエネルギーを上回る)をほぼ達成した。そして、トカマク型核融合炉の研究は次の実験炉実現に向けて進められている。実験炉では、プラズマの自己点火条

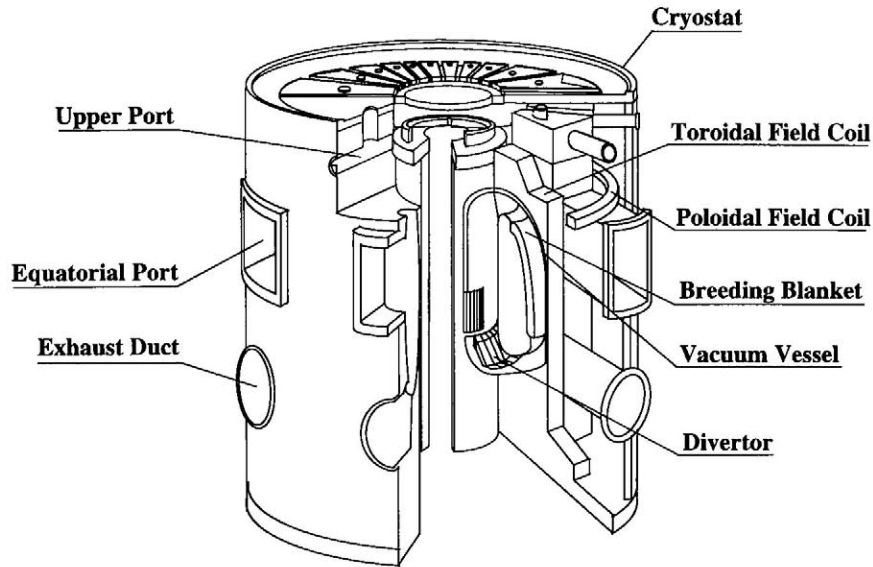


Fig. 1.1 Overall view of Tokamak type fusion reactor

件と長時間燃焼を目的として、日本の FER(Fusion Experimental Reactor)<sup>(1.3, 1.4)</sup>、ヨーロッパ共同体の NET(Next European Torus)<sup>(1.5)</sup>などの設計が進められており、また、ITER(International Thermonuclear Experimental Reactor)<sup>(1.6-1.8)</sup>の設計が、現在は日本、ヨーロッパ共同体、ロシアの3極の協力のもとに進められている。この実験炉の次には、工学システム全体を実証する原型炉、経済的な面も考慮した実証炉が作られて、最終的に動力炉で核融合炉は実用化される予定である。

トカマク型核融合炉<sup>(1.9)</sup>は、Fig. 1.1に示すように、プラズマ閉じ込めに必要な磁場を作るトロイダル磁場コイルやポロイダル磁場コイル、プラズマ生成に欠かすことができない高真空を確保するための真空容器、数億度にも達するプラズマに面する第一壁やダイバータ板などの多くの機器から構成される。こうした核融合炉特有の問題として、プラズマディスラプションに起因した電磁構造連成問題がある。プラズマの急激な消滅に伴い、プラズマ電流が作る磁場が変化すると、真空容器などの導電性構造物に渦電流が発生し、これとトロイダル磁場が作る強磁場により非常に大きな電磁力が構造物に作用する問題である。

この連成現象を模式的に Fig. 1.2 に示す。導電性構造物に変動磁場が印加されると、ファラデーの法則により速度起電力を生じ、これにより、この構造物に渦電流  $j$  が発生する。この渦電流  $j$  と磁場  $B$  により  $j \times B$  電磁力が構造物に作用し、構造物に変形する。また、構造物の変形速度  $\dot{u}$  と磁場  $B$  が  $\dot{u} \times B$  速度起電力を生じ、これが構造物の渦電流に影響する。この  $\dot{u} \times B$  速度起電力による渦電流と磁場  $B$  が発生する電磁力は、一般に構造物の変形を抑えるように作用するため、こうした電磁構造連成現象は磁気減衰現象とも呼ばれる。このため、磁気減衰振動挙動の解析・評価方法の確立は、核融合炉などの強磁場中に設置される機器を合理的に設計する上で重要な課題である。

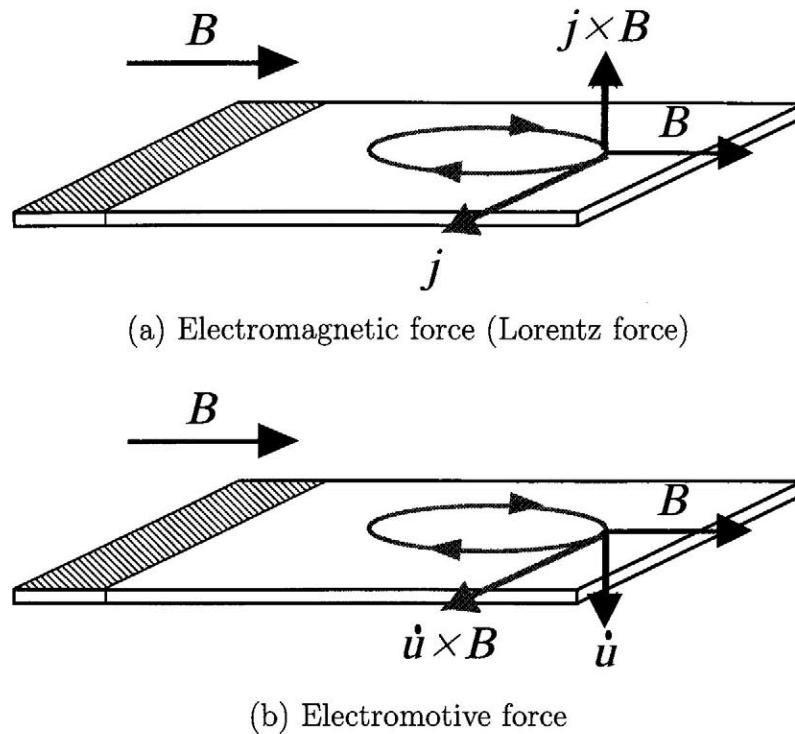


Fig. 1.2 Electromagnetic and structural coupling effect

## 1.2 磁気減衰振動に関する研究

強磁場中に設置される機器においては、渦電流や電磁力による変形を把握することは、機器の設計上非常に重要であり、これまで、数多くの研究が行われてきた。Bialek らは、回転固定した平板の電磁構造連成問題の解析を行い、核融合炉の開発においてはこの連成現象が重要であることを指摘している<sup>(1.10)</sup>。Kameari は電流ポテンシャルによる 3 次元薄肉導体上の渦電流解析方法を提案し、また、これを T 字接続問題へ拡張するとともに、この方法が INTOR-J の第一壁といった複雑な構造物に生じる渦電流解析に適用可能であることを検証した<sup>(1.11)</sup>。Takatsu らは電磁力が作用する JT-60 真空容器の解析を行ない、その変形挙動を明らかにした<sup>(1.12)</sup>。Nishio らは有限要素分割-渦電流解析-構造解析-解析結果表示を行なうシステムを開発し、それが設計研究に有効であることを示している<sup>(1.13)</sup>。

磁気減衰振動問題の解析方法の研究としては、TEAM(Testing Electromagnetic Analysis Method) でベンチマーク問題 12 番 “Cantilevered Beam in A Crossed Field”<sup>(1.14)</sup> および 16 番 “Magnetic Damping in Torsional Mode” が設定され、解析方法の提案・検証が行われた<sup>(1.15-1.19)</sup>。Turner らにより設定されたベンチマーク問題 12 番は、片端が完全に固定された銅板の、たわみ変形磁気減衰振動問題である。また、Takagi らにより設定されたベンチマーク問題 16 番は、銅板がねじり変形の磁気減衰振動を生じる。

磁気減衰振動問題に対して、Morisue は有限差分法を用いた解析方法を提案し、ベンチマーク問

題 12 番でその妥当性を検証した<sup>(1.20)</sup>. Takagi らは構造解析の時間積分に Duhamel 積分を用いた解析方法を提案し、ベンチマーク問題 12 番および問題 16 番を解析した<sup>(1.16, 1.21)</sup>. Niikura らは速度起電力を求める際に、オイラー座標系では数値的不安定の問題があるとして、速度起電力をラグランジュ座標系で評価し、真空容器を模擬した円筒の磁気減衰振動を解析している<sup>(1.19, 1.22)</sup>. Yoshida らは国際熱核融合炉 ITER の CDA 設計に基づいたモデルで、第一壁に生じる磁気減衰振動の解析を行い、トロイダル磁場の強さが磁気減衰振動に与える影響を検討し<sup>(1.17)</sup>, また、Demachi らはこのモデルにおいて板厚を変化させた解析を行っている<sup>(1.23)</sup>. これらの解析方法は、そのほとんどが 1 つの時間ステップ内で構造物と渦電流を有限要素法を交互に解析している. このため、構造解析の解析コード、渦電流解析の解析コードを別々に所有している場合においても、電磁構造連成解析を行えるという利点がある. しかし、解析条件の組み合わせによっては、数値的不安定性が発生するという問題がある.

核融合炉などの大規模構造物では、解析コストも問題となるため、高速な連成解析方法あるいは簡易解析法の研究も行なわれている. Takagi らは MMD (Modal Magnetic Damping) 法を提案した<sup>(1.24, 1.25)</sup>. これは、渦電流によるジュール損が磁気減衰によるエネルギー消失と等価であるとして equivalent magnetic critical damping ratio を定義し、これを、一般の減衰振動問題の減衰項として解析する方法である. この方法では、磁場・ヤング率・密度や境界条件を変化させても、equivalent magnetic critical damping ratio の依存性<sup>(1.26)</sup>を用いて、磁気減衰問題を高速に解析することができる. Nishio らは渦電流解析に、コンピュータの記憶容量や解析時間の点で有利な network mesh method を提案し、その妥当性を検証している<sup>(1.27)</sup>. Siakavellas は平板の電磁構造連成問題をモデル化し、その解析解を用いて TEAM ベンチマーク問題 12 番を解析しモデル化方法の妥当性を検証している<sup>(1.28, 1.29)</sup>. こうした、解析コストまで考慮した解析方法の確立は、特に核融合炉などの大規模システムの設計で重要であり、効率的な解析方法の確立が期待されている.

また、汎用有限要素解析コードを利用した解析方法としては、Bialek らは、SPARK を利用して CIT(compact ignition tokamak) の真空容器を解析し<sup>(1.30)</sup>, Crutzen らは ABAQUS を利用した磁気減衰振動解析手法を示し<sup>(1.18)</sup>, Brauer らは MSC/EMAS<sup>TM</sup> と MSC/NASTRAN<sup>TM</sup> を用いた解析を行なった<sup>(1.31)</sup>. これらの汎用コードを用いた解析は、プリ・ポストプロセスにおいて非常に有効な手法であり、設計においては、メッシュ生成から解析結果の可視化までを 1 つのシステムとして考えていく必要がある.

磁気減衰振動の実験としては、Hua らが変動磁場や定常磁場の時定数比を変化させて平板の磁気減衰振動実験を行い、数値解析結果と比較した<sup>(1.32)</sup>. これは、TEAM ワークショップのベンチマーク問題 12 番に設定された. Takagi らは部分円筒シェル形状やき裂を有する平板の磁気減衰振動実験<sup>(1.33)</sup>や、ねじり変形を生じる平板の実験<sup>(1.16, 1.21)</sup>を行った. このねじり変形問題は、TEAM ワークショップベンチマーク問題 16 番に設定された. また、Crutzen らがフレーム形状の実験を行ない、数値解析結果とモデリング技術を検討している<sup>(1.18)</sup>. Nishio らは平板の固定方法を変化

させた実験を行ない、はりモデルとシェルモデルを用いた数値解析結果と比較している<sup>(1.27)</sup>。しかし、これらの磁気減衰振動実験は、そのほとんどが数値解析結果の検証のためであり、磁気減衰振動現象の実験的な研究は少ない。また、振動問題の中で重要な問題の1つとして強制振動特性がある。これは、耐震設計において重要な要素の1つであり、強磁場というこれまでに経験したことのない環境下での強制振動特性に関する実験はほとんど行われていない。

核融合炉などの大規模構造物を設計する場合、実寸大の機器を作成し実験を行うことは経済的に負担が大きい、もしくは不可能である。そこで、縮小モデル実験で、その力学的特性を把握する必要がある。Yoshidaらは無次元化した磁気減衰振動の支配方程式から magnetic damping parameter を定義し、磁気減衰振動のスケーリング則を示している<sup>(1.34)</sup>。このような縮小モデル実験に対する検討などは、実際に設計を行なう上で最も重要になると考えられる。しかし、磁気減衰振動現象に対して、評価方法・評価基準は確立されていない。

## 1.3 本研究の目的

前節で述べた磁気減衰振動挙動に関する技術課題をまとめると、磁気減衰振動特性の評価方法に関して、

- 評価方法および評価基準の確立
- 強制振動時における振動特性の解明およびその評価方法の確立

であり、磁気減衰振動解析に関して、

- 効率的な連成解析方法の開発

であり、また、こうした磁気減衰振動を生じる構造物を実際に設計する場合に、

- 簡易解析方法の確立

が必要であると考えられる。そこで、本研究は、磁気減衰振動特性を定量的に評価できる特性評価パラメータ、強制振動時における振動特性の評価方法の確立、磁気減衰振動の簡易解析方法の開発および効率的な連成解析方法の開発を目的とする。

### (a) 磁気減衰振動特性を定量的に評価できる特性評価パラメータ

磁気減衰振動特性を把握することは、強磁場中に置かれる機器を合理的に設計する上で有用であると考えられる。そこで、特性を評価する方法として、特性評価パラメータを用いた方法を開発する。特性評価パラメータに求められる条件としては、

- 磁気減衰振動特性を2つ程度のパラメータにより定量的に表すことができる
- そのパラメータの設計パラメータ(磁場、材料定数など)に対する依存性を得ることができる

を課した。こうした条件を満たす特性評価パラメータにより、設計時に磁気減衰振動特性を把握することができ、また、磁気減衰効果を積極的に利用した設計を行うことが可能になると考えられる。



### (b) 磁気減衰時の強制振動特性に関する研究

地震波などによる強制振動時の振動特性を把握することは、機器の耐震設計を行なう上で重要である。しかし、磁気減衰時の強制振動特性に関する研究はこれまで行われていない。そこで、本研究では、磁気減衰時の強制振動特性を明らかにし、その評価方法を開発する。また、評価方法に求められる条件として、磁場や材料定数に対する依存性を得ることができるということを想定し、評価方法の開発を行う。

### (c) 簡易解析方法の開発

磁気減衰効果を考慮して機器を効率良く設計する上では、簡易解析方法が有用であるといえる。機器の設計では、材料、形状、拘束条件、外部磁場などの様々な組合せを想定しなければならない。そして、そのすべてを有限要素法で解析し検討して行くことは、非常に手間がかかり、設計作業の長期化をまねいてしまう。そこで、設計の初期および中盤段階においては、簡易解析方法により設計の選択肢をせばめ、最終段階で有限要素解析により設計の確認を行えば、効率良く設計を行えるといえる。このように、簡易解析方法は機器を効率良く設計する上で有用であるため、本研究では、磁気減衰振動を高速に得ることができる簡易解析方法の開発を行う。

### (d) 電磁構造連成解析方法の効率化

電磁構造連成問題の解析方法には、渦電流と構造物の有限要素法を同一時間ステップ内で同時に解く同時解析方法と、それらの有限要素法を交互に解く交互解析方法がある。この交互解析方法においては、解析問題が大規模化するにつれ、同時解析方法よりも高速に解析を行うことができ、MARC, NASTRAN など既存の信頼性の高い有限要素解析コードを適用できるという利点を持つ。既存の有限要素解析コードを使えるという点は、解析コードの保守性という点で非常に魅力的である。しかし、交互解析方法においては、解析条件の組合せにより、数値的不安定が発生することが知られている。そこで、電磁構造連成問題における交互解析方法の安定条件の導出およびその安定化方法について検討し、効率の良い連成解析方法の開発を行う。

## 論文の構成

第2章では、磁気減衰振動特性の特性評価パラメータとして、連成強度パラメータおよび連成時定数比を提案している。磁気減衰振動問題の振動特性は、3階常微分方程式で表されるため、2階常微分方程式で表される一般の減衰振動とは振動特性が異なると考えられる。そこで、ここでは連成効果を含む渦電流の減衰率を連成効果を含む構造物の固有周期で割った値を連成時定数比と定義し、連成時定数比を磁気減衰振動特性の評価パラメータとして提案する。その妥当性を検証するた

め、時定数比では分類することができない磁気減衰振動特性を連成時定数比により分類できることを示す。また、連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定であれば、磁気減衰振動特性が同一となることを示す。そして、磁気減衰振動現象の1自由度連成モデルにより連成強度パラメータおよび連成時定数比の力学的意味を検討し、これらの評価パラメータにより磁気減衰振動特性を定量的に評価できることを示す。

第3章では、シェル構造物に生じる磁気減衰振動の2つの簡易解析方法を提案している。核融合炉など大規模な構造物を効率良く設計するためには、簡易解析方法の確立が重要であるといえる。1つめの方法は、2階常微分方程式に基づく方法である。この方法では、非連成有限要素解析結果を連成強度パラメータを用いて修正し、磁気減衰振動応答を得る。もう1つの簡易解析方法は、磁気減衰振動問題の1自由度連成モデルすなわち3階常微分方程式に基づく方法である。これら簡易解析方法を、平板および円筒シェルの磁気減衰振動問題に適用し、その有効性を検討する。

第4章では、強磁場中に置かれる機器の強制振動特性について検討する。一般の減衰振動においては、その振動特性は2階常微分方程式に基づく。しかし、磁気減衰振動においては、振動特性は一般の減衰振動と異なり3階常微分方程式で記述されるため強制振動特性が、一般の減衰振動と異なると考えられる。また、3階常微分方程式に基づくため、固有値は磁場によって変化するという特徴を持つために、構造物の設計で重要である共振振動数が、特異な変化をされると考えられる。そこで、本章では、強磁場中に置かれる平板の強制振動特性に対して、有限要素解析および1自由度連成モデルを用いて検討する。

第5章では、電磁構造連成解析における数値的不安定性について述べる。これまで電磁構造連成問題に対して、構造と渦電流の有限要素式を同時間ステップ内で同時に解く同時解析方法と、これらの有限要素式を同時間ステップ内で交互に解く交互解析方法が提案されている。この交互解析方法においては、既存の解析コードを用いることができる、同時解析方法に比べ高速であるといった利点があるが、解析条件によっては数値的不安定が生じてしまう。そこで、交互解析方法の安定条件について検討し、その結果をまとめる。



## 参考文献

- (1.1) M. Yoshikawa, JT-60 project, *Fusion Technology 1978*, 1079–1083, 1979.
- (1.2) H. Ninomiya, T. Ando, T. Horie et.al., “JT-60 upgrade device for confinement and steady state studies”, *Plasma Devices and Operations*, **1**, 43–65, 1990.
- (1.3) T. Tone, N. Fujisawa, Y. Seki et.al., “Conceptual design of fusion experimental reactor(FER)”, *Nucl. Technol./Fusion*, **4-2**, 573–578, 1983.
- (1.4) T. Tone, “Fusion experimental reactor(FER) design concept”, *Fusion Reactor Design and Technology 1986*, **1-2**, 93–116, 1987.
- (1.5) R. Toschi, “The NET experimental reactor”, *Engineering Aspects of Thermonuclear Fusion Reactors. Lectures from a Course*, 479–509, 1981, Harwood Academic Publishers.
- (1.6) International Atomic Engineering Agency, ITER Concept Definition, *Int. Atomic Eng. Agency*, 1980, Vienna.
- (1.7) R. R. Parker, “Status of the ITER design”, *Fusion Technol.*, **25-2T** 385, 1994.
- (1.8) 高津英幸, 多田英介, 柴沼清 他, 日本原子力学会誌, **33-8**, 9–18, 1991.
- (1.9) 矢川元基, 堀江知義, 核融合炉構造設計, 1995, 培風館.
- (1.10) J. Bialek, D. Weissenburger, M. Ulrickson, J. Cecchi, “Modelling the coupling of magnetodynamics and elastomechanics in structural analysis”, *Symposium on Fusion Engineering : Proceedings*, **5-9**, 51–55, 1983.
- (1.11) A. Kameari, “Transient eddy current analysis on thin conductors with arbitrary and shapes”, *Journal of Computational Physics*, **42**, 124–140, 1981.
- (1.12) H. Takatsu, M. Shimizu, M. Ohta et.al., “Dynamic response of the JT-60 vacuum vessel under the electromagnetic force”, *Nucl. Eng. Des.*, **71-2**, 161–172, 1982.
- (1.13) S. Nishio and T. Horie, “A computer program for transient electromagnetic analysis on a tokamak device”, *IEEE Trans. on Mag.*, **26-2**, 865–868, 1990.
- (1.14) L. R. Turner and T. Q. Hua, “Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields”, *COMPEL*, **9-3**, 205–216, 1990.

- (1.15) T. Takagi, "Summary of the results for magnetic damping in torsional mode (TEAM Problem 16)", *COMPEL*, 14-2-3, 77-89, 1995.
- (1.16) 高木敏行, 谷順二, 川村修平, "導電性薄板の強磁場中での動的挙動に関する解析と実験", 日本機械学会論文集 (C), 58-556, 3537-3542, 1992.
- (1.17) Y. Yoshida, K. Miya, K. Demachi and M. Kurokawa, "Magnetic damping effects on vibration of conductive shells", *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, 4, 1-11, 1993.
- (1.18) Y. Crutzen, S. Papadopoulos and F. Van Paemel, "Modeling, analysis and validation of electromagnetic-mechanical coupling on clean test peaces", *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5, 3276-3279, 1994.
- (1.19) 新倉節夫, 亀有昭久, "非磁性シェル構造物の電磁構造連成解析", 日本機械学会論文集 (C), 61-585, 1911-1916, 1995.
- (1.20) T. Morisue, "Analysis of coupled problem: The FELIX cantilevered beam", *IEEE Trans. on Mag.*, 26-2, 540-543, 1990.
- (1.21) T. Takagi, J. Tani, S. Matsuda and S. Kawamura, "Analysis and experiment of dynamic deflection of a thin plate with a coupling effect", *IEEE Trans. on Mag.*, 28-2, 1259-1262, 1992.
- (1.22) S. Niikura and A. Kameari, "Analysis for coupled problems between eddy currents and dynamic deflections of a thin shell structure", *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5, 3284-3287, 1994.
- (1.23) K. Demachi, Y. Yoshida, M. Kurokawa, K. Miya and S. Nishio, "Magnetic viscous damping effects in ITER blanket", in *Simulation and Design of Electromagnetic System*, (ed. T. Honma), pp. 114-116, 1994, Elsevier.
- (1.24) T. Takagi and J. Tani, "A new numerical analysis methods of dynamic behavior of a thin plate under magnetic field considering magnetic viscous damping effect", *Int. J. Applied Electromagn. in Mater.*, 4, 35-42, 1993.
- (1.25) T. Takagi and J. Tani, "Dynamic behavior of a plate in magnetic field by full coupling and MMD methods", *IEEE Trans. on Magn.*, 30-5, 3296-3299, 1994.
- (1.26) T. Takagi and J. Tani, "Evaluation of critical magnetic viscous damping ratios for plate vibrations with different boundary conditions", in *Simulation and Design of Electromagnetic System*(ed. T. Honma), pp. 101-104, 1994, Elsevier.

- (1.27) S. Nishio, H. Miura and A. Isono, "An applicability of eddy current analysis by a network mesh method to electromagnetomechanical problems and its experimental verification", *Int. J. Appl. Electromagn. in Mater.*, **6**, 37–54, 1995.
- (1.28) N. J. Siakavellas, "Analytical modelling of eddy currents induced by a time-varying magnetic field in a conductive plate", *COMPEL*, **13**–3, 497–508, 1994.
- (1.29) N. J. Siakavellas, "Eddy current modelling in a coupled electromagnetic-mechanical problem", *COMPEL*, **15**–2, 52–72, 1996.
- (1.30) J. M. Bialek, D. Weissenburger, M. Pelovitz, "Modelling the forces produced by plasma disruptions on the compact ignition tokamak (CIT) vacuum vessel", *IEEE*, 132–135, 1989.
- (1.31) J. R. Brauer and J. J. Ruehl, "3D coupled electromagnetic and structural finite element analysis of motional eddy current problems", *IEEE Trans. on Magn.*, **30**–5, 3288–3291, 1994.
- (1.32) T. Q. Hua, M. J. Knott, L. R. Turner and R. B. Wehrle, "Experimental modelling of eddy current and deflection for tokamak limiters", *Fusion Technology*, **10**, 1047–1052, 1986.
- (1.33) T. Takagi, J. Tani, S. Kawamura and K. Miya, "Coupling effect between magnetic field and deflection in thin structure", *Fusion Engineering and Design*, **18**, 425–433, 1991.
- (1.34) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, "Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall", *Fusion Eng. Des.*, **27**, 473–480, 1995.

## 第 2 章

# 磁気減衰振動の評価パラメータとその力学的意味

### 2.1 はじめに

強磁場中に設置される機器には、電磁場と構造物の相互作用による電磁構造連成現象が生じる<sup>(2.1)(2.2)</sup>。この連成現象は一般に構造物の振動を抑えるように作用するため、磁気減衰振動現象とも呼ばれる。したがって、磁気減衰振動現象を定量的に評価すれば、経済的かつ合理的な設計が可能になると考えられる。

磁気減衰効果を評価する方法としては、評価パラメータを用いる方法が考えられる。Takagi らによって提案された Critical magnetic viscous damping ratio<sup>(2.3)</sup> は磁気減衰振動の簡易解析に適用することができ、設計における解析時間を短縮することができる。Yoshida らによる Magnetic damping parameter<sup>(2.4)</sup> は、実機形状の磁気減衰振動を把握するために用いられる縮小モデル実験の条件決定に適用できる。著者らは、磁気減衰振動の 3 次特性方程式から得られる連成固有値に基づき、連成効果の強さを表すパラメータとして連成強度パラメータを提案し、磁気減衰振動実験と有限要素解析により、連成強度パラメータが磁気減衰振動特性を定量的に評価できることを検証した<sup>(2.5)(2.6)</sup>。

これまでの著者らの解析においては、磁気減衰振動特性の補助的なパラメータとして、非連成状態における渦電流の減衰率を非連成状態における構造物の固有周期で割った値で定義される時定数比を用いているが、磁気減衰振動現象においては、渦電流の減衰率、構造物の角振動数は磁場に依存するため、時定数比で磁気減衰振動を定量的に評価することは困難になると考えられる。

磁気減衰振動特性を定量的に評価するためには、連成効果を含んだ渦電流の減衰率と連成効果を含んだ構造物の固有周期を用いたパラメータが必要になると考えられる。そこで、ここでは連成効果を含む渦電流の減衰率を連成効果を含む構造物の固有周期で割った値を連成時定数比と定義し、連成時定数比を磁気減衰振動特性の評価パラメータとして提案する。その妥当性を検証するため、

時定数比では分類することができない磁気減衰振動特性を連成時定数比により分類できることを示す。また、材料定数を広い範囲で変化させて数値解析を行い、それらの条件下においても連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定であれば、磁気減衰振動特性が同一となることを示す。そして、磁気減衰振動現象の1自由度連成モデルにより連成時定数比の力学的意味を検討し、連成強度パラメータおよび連成時定数比により磁気減衰振動特性を定量的に評価できることを示す。

## 2.2 連成固有値に基づく磁気減衰現象の評価パラメータ

### 2.2.1 評価パラメータの定義

#### (a) 連成強度パラメータ

1自由度系の電磁構造連成問題における運動方程式は、変位  $u$  および電流ポテンシャル  $T$  を未知変数として、

$$m\ddot{u} + C_s T + ku = f^{ex} \quad (2.1)$$

となる。ここで、 $m, k, f^{ex}, C_s T$  は、それぞれ、質量、剛性、外荷重、渦電流により生じる電磁力を表す。また、渦電流に関しては、

$$U\dot{T} + C_e \dot{u} + RT = \dot{B}^{ex} \quad (2.2)$$

となる。ここで、 $U, R, \dot{B}^{ex}, C_e \dot{u}$  は、それぞれ、インダクタンス、レジスタンス、外部変動磁場の時間1階微分、変形速度により生じる速度起電力を表す。

連成系の運動方程式は (2.1), (2.2) 式を組合せることによって得られ、その特性方程式は

$$mU\alpha^3 + mR\alpha^2 + (kU - C_e C_s)\alpha + kR = 0 \quad (2.3)$$

となる。これを解くことにより、連成効果を含む固有値は

$$-\gamma_e = -\frac{R}{3U} + \left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_s \pm \omega_s i &= -\frac{R}{3U} - \frac{\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ &\quad \pm \frac{-\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} i \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし、

$$a = -\frac{1}{9} \frac{R^2}{U^2} + \frac{1}{3} \frac{k}{m} - \frac{1}{3} \frac{C_s C_e}{mU}, \quad b = -\frac{1}{27} \frac{R^3}{U^3} - \frac{1}{3} \frac{kR}{mU} - \frac{1}{6} \frac{R C_s C_e}{U mU} \quad (2.6)$$

となる。この (2.4), (2.5) 式において、連成に関する  $C_e$  および  $C_s$  の値を 0 とおくと、

$$-\gamma_e = -\frac{R}{U}, \quad \gamma_s = 0, \quad \omega_s = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (2.7)$$

となるため、実固有値  $-\gamma_e$  が渦電流の減衰に、複素固有値  $-\gamma_s \pm \omega_s i$  が構造物の振動に対応していることがわかる。

連成問題では、連成効果により構造物の振動が減衰する。そこで、連成強度パラメータ  $C_{es}$  を、連成効果を含む固有値  $-\gamma_s \pm \omega_s i$  ((2.5) 式) を用いて一般の減衰振動で定義されている減衰比  $\zeta$  と同様に、

$$C_{es} = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}} \quad (2.8)$$

と定義し、磁気減衰挙動を評価することにする。なお、1 質点系の弾性軸の振動モデル (2.7) においても、3 次特性方程式が得られるが、磁気減衰振動における 3 次特性方程式 (2.3) 式の係数と 1 対 1 の対応関係がないため、そこで用いられている評価パラメータを磁気減衰振動に応用することはできない。

### (b) 時定数比

磁気減衰振動問題においては、渦電流の減衰率が、振動特性に大きく影響を与える。そこで、構造物の時定数と渦電流の時定数の比を時定数比と定義する。

非連成状態における運動方程式は

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.9)$$

となる。この (2.9) 式より、固有角振動数  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  が求まる。また、非連成状態における渦電流の支配方程式は

$$U\dot{T} + RT = 0 \quad (2.10)$$

となる。この (2.10) 式より、固有値  $\gamma_0 = \frac{R}{U}$  が求まる。そこで、構造物の時定数を  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 、渦電流の時定数を  $\frac{1}{\gamma_0}$  とし、構造物と渦電流の時定数の比を時定数比  $R_T$

$$R_T = \frac{\frac{1}{\gamma_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{U}{R} \quad (2.11)$$

と定義する。

### (c) 連成時定数比

2.2.1 節 (b) で説明した時定数比  $R_T$  は、非連成状態における構造物と渦電流の時定数を用いて定義されるが、磁気減衰振動問題においては、電磁場と構造物の連成により、構造物の角振動数、および渦電流の減衰率は磁場に依存して変化する。そこで、ここでは、この連成効果を考慮した構造物と渦電流の時定数を用いて、連成時定数比  $R_{ct}$  を定義する。

電磁構造連成問題における、渦電流の減衰率  $\gamma_e$  および構造物の角振動数  $\omega_s$  は (2.3) 式より

$$\gamma_e = -\frac{R}{3U} + \left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (2.12)$$

$$\omega_s = \frac{-\left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} \quad (2.13)$$

ただし

$$a = -\frac{1}{9} \frac{R^2}{U^2} + \frac{1}{3} \frac{k}{m} - \frac{1}{3} \frac{C_s C_e}{mU}, \quad b = -\frac{1}{27} \frac{R^3}{U^3} - \frac{1}{3} \frac{k R}{mU} - \frac{1}{6} \frac{R C_s C_e}{U mU} \quad (2.14)$$

となる。そこで、構造物の時定数を  $\frac{2\pi}{\omega_s}$ 、渦電流の時定数を  $\frac{1}{\gamma_e}$  として、連成効果を考慮した構造物と渦電流の時定数の比を連成時定数比  $R_{ct}$

$$R_{ct} = \frac{\frac{1}{\gamma_e}}{\frac{2\pi}{\omega_s}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_s}{\gamma_e} \quad (2.15)$$

と定義する。

### 2.2.2 有限要素解析による評価パラメータの決定方法

磁気減衰振動問題における構造物の有限要素式

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{u}\} + [\mathbf{K}]\{u\} + [\mathbf{C}_s]\{\dot{T}\} = \{F^{ex}\} \quad (2.16)$$

と渦電流の有限要素式

$$[\mathbf{U}]\{\dot{T}\} + [\mathbf{C}_e]\{\dot{u}\} + [\mathbf{R}]\{T\} = \{\dot{B}^{ex}\} \quad (2.17)$$

を組合せると、対称な電磁構造連成系の有限要素式

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{K} & 0 & \mathbf{C}_s \\ 0 & \mathbf{C}_e & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F^{ex} \\ \dot{B}^{ex} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

が得られる。ここで  $\{v\}$  は変位速度を表している。(2.18)式に連成モード合成法を適用することにより、連成固有値  $\alpha = -\gamma_s^{(FEM)} \pm \omega_s^{(FEM)}i$  と  $-\gamma_e^{(FEM)}$  が得られる。このとき、連成強度パラメータ  $C_{es}$  は、1自由度連成モデルと同様、

$$C_{es} = \frac{\text{Re}(\alpha)}{|\alpha|} \quad (2.19)$$

で決定することができ、同様に連成時定数比も

$$R_{ct} = \frac{\frac{1}{\gamma_e^{(FEM)}}}{\frac{2\pi}{\omega_s^{(FEM)}}} \quad (2.20)$$

で決定することができる。



### 2.2.3 評価パラメータを用いた条件の導出方法

#### (a) 連成強度パラメータおよび時定数比が一定となる条件の導出方法

ここでは、連成強度パラメータおよび時定数比が一定となる条件の導出方法について述べる。

連成強度パラメータおよび時定数比が一定となる条件を求めるためには、これらのパラメータの磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  に対する依存性を求める必要がある。平板の磁気減衰振動問題と 1 自由度連成モデルの間においては、質量  $m$  は密度と板厚より  $m \propto \rho h$ 、曲げ剛性  $k$  はヤング率と断面 2 次モーメントより  $k \propto Eh^3$ 、抵抗  $R$  は導電率と板厚より  $R \propto \frac{1}{\kappa h}$ 、連成効果に関する  $C_s, C_e$  はそれぞれ、電磁力、速度起電力に対応するので  $C_s \propto B, C_e \propto B$  の関係が成立するため、形状に関する比例定数  $P_s, P_e, P_c$ <sup>(2.8)</sup> を用いて、

$$\frac{k}{m} = P_s \frac{Eh^2}{\rho}, \quad \frac{R}{U} = P_e \frac{1}{\kappa h}, \quad \frac{C_e C_s}{mU} = P_c \frac{B^2}{\rho h} \quad (2.21)$$

なる 3 つの関係式が得られる。この (2.21) 式を連成固有値の (2.5) 式に代入し、さらに連成強度パラメータの定義式である (2.8) 式に代入することによって

$$C_{es} = \frac{\text{Re } \alpha}{|\alpha|} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \quad (2.22)$$

となる。また、時定数比  $R_T$  の場合においても同様に、時定数比の定義式である (2.11) 式に (2.21) 式を代入することにより

$$R_T = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa h^2}{P_e} \sqrt{\frac{EP_s}{\rho}} = R_T(E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \quad (2.23)$$

となる。

ここで、 $P_s, P_e, P_c$  は比例定数であるが、 $P_s$  に関しては、(2.21) 式の第 1 式が、平板の自然固有振動数  $\omega_0$  の自乗であることより

$$\frac{Eh^2}{\rho} P_s = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (2.24)$$

を解くことによって  $P_s$  を決定することができる。ここでは  $\omega_0$  を、はりの振動モード 1 の固有角振動数

$$\omega_0 = 1.016 \times \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.25)$$

により近似する。ただし、 $L$  ははりの長さである。また、 $P_e, P_c$  は有限要素解析から得られる連成固有値  $\alpha = -\gamma_s^{(\text{FEM})} \pm i\omega_s^{(\text{FEM})}$  と (2.5) 式に (2.21) 式を代入した式から、

$$\begin{cases} -\gamma_s^{(\text{FEM})} &= \text{Re } \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \\ \omega_s^{(\text{FEM})} &= \text{Im } \alpha(B, E, \rho, \kappa, h, P_s, P_e, P_c) \end{cases} \quad (2.26)$$

なる非線形連立方程式を解くことにより求められる。このようにして求まる比例定数  $P_s, P_e, P_c$  は板長さと幅が変化しなければ一定となる。この比例定数  $P_s, P_e, P_c$  を、(2.22) 式、(2.23) 式に代入

することにより、連成強度パラメータ、および時定数比の依存性は

$$C_{es} = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (2.27)$$

$$R_T = R_T(E, \rho, \kappa, h) \quad (2.28)$$

となる。

これら、(2.27)式と(2.28)式により、連成強度パラメータ、および構造物と渦電流の時定数比が一定となる問題を設定することができる。連成強度パラメータ値を  $C_{es}^0$ 、時定数比値を  $R_T^0$  に設定するためには(2.27)式と(2.28)式より

$$C_{es}^0 = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (2.29)$$

$$R_T^0 = R_t(E, \rho, \kappa, h) \quad (2.30)$$

なる関係を満足するように、 $B, E, \rho, \kappa, h$ の値の組合せを求める。ここでは、[磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 板厚  $h$ ]の組合せで連成強度パラメータ値を  $C_{es}^0$ 、時定数比値を  $R_T^0$  とする方法を述べる。なお、この時、密度  $\rho$  と導電率  $\kappa$  は既知量に固定しておくものとする。Fig. 2.1に示すように、(2.30)式に  $E$  を与えると  $h$  が求められ、また、この  $E$  と  $h$  を(2.29)式に代入すると、この式は  $B$  のみの関数となる。この非線形方程式をNewton法などで解くことにより、連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ 、時定数比が  $R_T^0$  となる [磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 板厚  $h$ ] の値の組合せが求められる。また、同様な手順により、[磁場  $B$ , 質量  $\rho$ , 板厚  $h$ ], [磁場  $B$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$ ] などの組合せでも、連成強度パラメータ値が  $C_{es}^0$ 、時定数比値が  $R_T^0$  となる問題を設定できる。

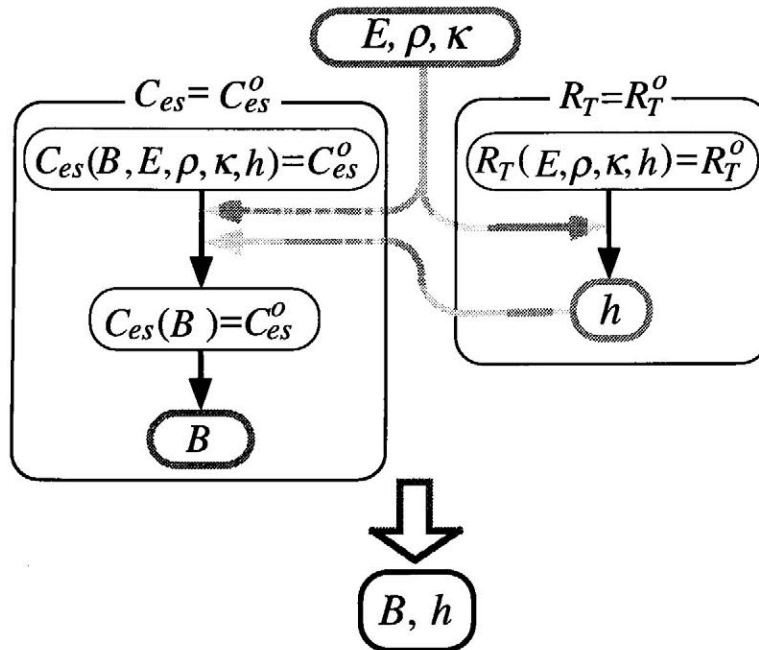


Fig. 2.1 Method to determine the condition to keep  $C_{es} = C_{es}^0$  and  $R_t = R_t^0$

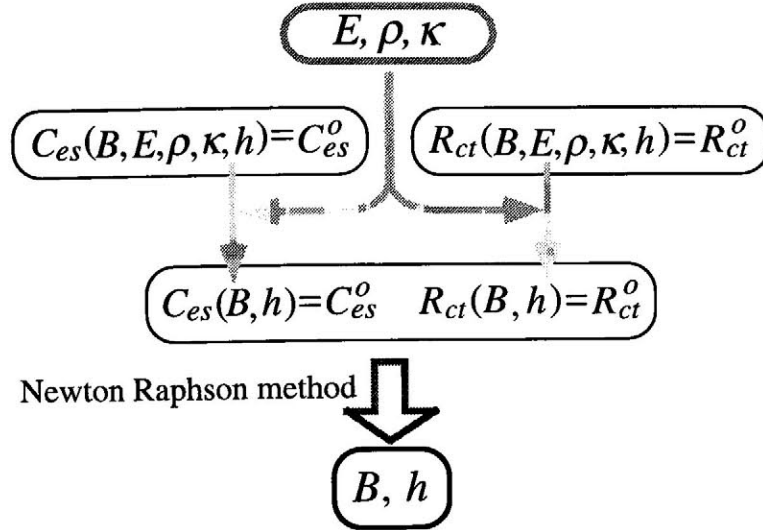


Fig. 2.2 Method to determine the condition to keep  $C_{es} = C_{es}^0$  and  $R_{ct} = R_{ct}^0$

### (b) 連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定となる条件の導出方法

2.2.3節(a)においては、連成強度パラメータ、および時定数比が一定となる条件の導出方法について述べた。ここでは、連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定となる条件の導出方法について述べる。

連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定となる条件を求めるためには、これらのパラメータの磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$ 、導電率  $\kappa$ 、板厚  $h$  に対する依存性を求める必要がある。連成強度パラメータについては、2.2.3節(a)で述べたように、比例関係式(2.21)式を(2.8)式に代入することにより、連成強度パラメータの依存性を(2.27)式のように表すことができる。連成時定数比の場合においても同様に、(2.21)式を連成時定数比の定義式(2.15)式に代入することにより、連成時定数比の  $B, E, \rho, \kappa, h$  に対する依存性は

$$R_{ct} = \frac{\frac{1}{\gamma_e^{(\text{FEM})}}}{\frac{2\pi}{\omega_s^{(\text{FEM})}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_s}{\gamma_e} = R_{ct}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (2.31)$$

となる。

これら、(2.27)式と(2.31)式により、連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定となる条件を設定することができる。連成強度パラメータ値を  $C_{es}^0$ 、連成時定数比値を  $R_{ct}^0$  に設定するためには(2.27)式と(2.31)式より

$$C_{es}^0 = C_{es}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (2.32)$$

$$R_{ct}^0 = R_{ct}(B, E, \rho, \kappa, h) \quad (2.33)$$

なる関係を満足するように、 $B, E, \rho, \kappa, h$  の値の組合せを求める。ここでは、[磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、板厚  $h$ ] の組合せで連成強度パラメータ値を  $C_{es}^0$ 、連成時定数比値を  $R_{ct}^0$  とする方法を述べる。な

お、この時、密度  $\rho$  と導電率  $\kappa$  は既知量に固定しておくものとする。Fig. 2.2 に示すように、 $E$  を与えると、(2.32) 式、(2.33) 式は  $B, h$  の関数となる。この非線形方程式を Newton-Raphson 法などで解くことにより、連成強度パラメータが  $C_{es}^0$ 、連成時定数比が  $R_{ct}^0$  となる  $[B, E, h]$  の値の組合せが求められる。また、同様な手順により、[磁場  $B$ , 質量  $\rho$ , 板厚  $h$ ]、[磁場  $B$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$ ] などの組合せでも、連成強度パラメータ値が  $C_{es}^0$ 、連成時定数比値が  $R_{ct}^0$  となる問題を設定できる。

## 2.3 磁気減衰振動の解析結果

### 2.3.1 解析問題

Fig. 2.3 に示す片端固定平板の曲げ変形磁気減衰問題 (TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 12<sup>(2.9)</sup> と同じ体系の問題) を解析する。この問題は、面に垂直な変動磁場  $B_z$  により平板内に渦電流が発生し、この渦電流と板の長手方向の定常磁場  $B_x$  による電磁力により、平板は曲げ振動を生ずる。また、この曲げ振動による変形速度と、平板の長手方向の定常磁場  $B_x$  によって速度起電力が生じ、この速度起電力による渦電流と、定常磁場  $B_x$  によって生じる電磁力は、変形速度と逆向きに働くため、振動は減衰するという問題である。

本章では Fig. 2.3 に示す問題において、

1. 連成強度パラメータおよび、時定数比を一定とした解析
2. 連成強度パラメータおよび、連成時定数比を一定とした解析

を行う。そして、連成強度パラメータ、時定数比、連成時定数比の磁気減衰振動の評価パラメータとしての妥当性を検証する。なお、平板の垂直方向に働く外部変動磁場  $B_z$  は、規格化した時間において、同じ減衰特性となるように、平板の固有周期  $T_0$  を用いて、時間  $t$  に関して

$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp\left(-0.142 \times 10^2 \frac{t}{T_0}\right) \text{ [T]} \quad (2.34)$$

と規格化したものを用いる。

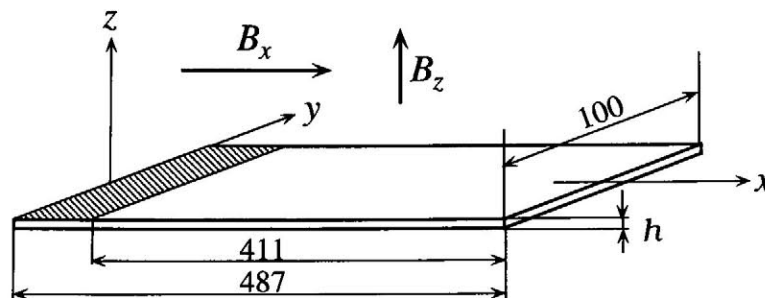


Fig. 2.3 Schematic diagram of a bending plate in steady electromagnetic field  $B_x$

Table 2.1 Magnetic field, material property and thickness of the reference problem

Magnetic field $B_x$ [T]	0.5
Young's modulus $E$ [Pa]	$1.10 \times 10^{11}$
Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$8.91 \times 10^3$
Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	$5.81 \times 10^7$
Thickness $h$ [mm]	5.0
Coupling intensity parameter $C_{es}^0$	0.127
Ratio of time constants of eddy current and structure $R_t^0$	0.0733

### 2.3.2 連成強度パラメータおよび時定数比を一定とした解析

本節では、連成固有値により定義された連成強度パラメータと、非連成状態での構造物、および渦電流の時定数により定義される時定数比を一定とした解析を行い、連成強度パラメータおよび時定数比の評価パラメータとしての妥当性を検証する。

#### (a) 問題設定

Fig. 2.3 に示す問題において、板厚  $h = 5.0$  mm, 外部定常磁場  $B_x = 0.5$  T としたものを基準問題とする。この基準問題における連成強度パラメータ、および時定数比の値を Table 2.1 に示す。

連成強度パラメータ、および時定数比が基準問題のそれと同じになる条件の導出には、2.2.3 節 (a) で説明した方法を用いる。磁場を  $B$ , ヤング率を  $E$ , 板厚を  $h$  とすると、 $[B, E, h]$  の  $B$  と  $h$  を含む組合せにおいて、条件を導出し直接時間積分法を用いて解析を行う。

#### (b) 解析結果

ヤング率  $E$  を  $1.10 \times 10^9 \sim 1.10 \times 10^{13}$  Pa の 5 通りに設定し、それぞれのヤング率において、連成強度パラメータが 0.127, 時定数比が 0.0733 となる磁場、および板厚の組合せを Table 2.2 に示す。Table 2.2 より、連成強度パラメータ、および時定数比を用いた条件決定方法では、それぞれのヤング率において、これらのパラメータが基準問題のものと同じになる  $B, h$  の組合せが 2 つあることがわかる。そこで、得られた条件において、弱い磁場を  $B^{(1)}$  とし、強い磁場を  $B^{(2)}$  とおくことにする。

$[E, B^{(1)}, h]$  の組合せにおいて、直接時間積分法により得られた平板の自由端での振動応答を Fig. 2.4 に示す。Fig. 2.4 においては、時間は平板の固有周期で、変位は静的たわみ  $u_0$  を用いて規格化している。ここで、静的たわみの定義について述べる。Fig. 2.6 に示す片端固定の平板に生ずる渦電流が、Fig. 2.7 (a) に示す  $y$  方向に十分長い平板に生ずるインダクタンスを無視した渦電流

に等しいと仮定する。ただし、以下では、 $l$ は板長さ、 $b$ は板幅、 $c$ は板厚とする。Fig. 2.7 (a) に生ずる電場は、ファラデーの電磁誘導の法則より

$$E(x, t) = \left(x - \frac{l}{2}\right) \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad (2.35)$$

となり、Fig. 2.7 (b) に示す分布となる。この (2.35) 式より、 $y$  方向の電流密度  $j_y$  は

$$j_y = \kappa \left(x - \frac{l}{2}\right) \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad (2.36)$$

となる。そこで、Fig. 2.6 において、 $B_x$  と  $j_y$  によって、平板に生ずる単位体積辺りの電磁力は

$$f = \kappa \left(x - \frac{l}{2}\right) B_x \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad (2.37)$$

となる。したがって、Fig. 2.8 に示すように、板長さ方向の分布荷重は

$$f' = fbc = bck \left(x - \frac{l}{2}\right) B_x \frac{\partial B_z(t)}{\partial t} \quad (2.38)$$

となる。この分布荷重による平板のたわみは、梁のたわみの式より

$$w = \frac{1}{EI} bck B_x \frac{\partial B_z}{\partial t} \left( \frac{1}{120} x^5 - \frac{l}{48} x^4 \right) \quad (2.39)$$

となる。ただし、 $E$  はヤング率、 $I$  は断面2次モーメントである。よって、 $x = l, t = 0$  における平板の自由端でのたわみは (2.39) 式より

$$u_0 = \frac{1}{EI} bhk B_x \frac{\partial B_z(0)}{\partial t} \frac{7}{240} l^5 \quad (2.40)$$

となる。この (2.40) 式を静的たわみとする。この静的たわみで変位を規格化、固有周期で時間を規格化した Fig. 2.4 より、それぞれのヤング率における振動応答は、基準モデルのものとよく一致していることがわかる。

$[E, B^{(2)}, h]$  の組合せにおける平板の自由端での振動応答を Fig. 2.5 に示す。この Fig. 2.5 においても、それぞれのヤング率における振動応答は、よく一致していることがわかる。しかし、この振動応答は Fig. 2.4 に示す基準問題の振動応答とは、明らかに違うものである。

Table 2.2 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.1270$  and  $R_{ct} = 0.0733$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness

Young's modulus $E$ [Pa]	Magnetic field		Thickness $h$ [mm]
	$B^{(1)}$ [T]	$B^{(2)}$ [T]	
$1.10 \times 10^9$	0.281	2.90	15.8
$1.10 \times 10^{10}$	0.375	3.87	8.89
$1.10 \times 10^{11}$	0.500	5.16	5.00
$1.10 \times 10^{12}$	0.667	6.88	2.81
$1.10 \times 10^{13}$	0.889	9.17	1.58

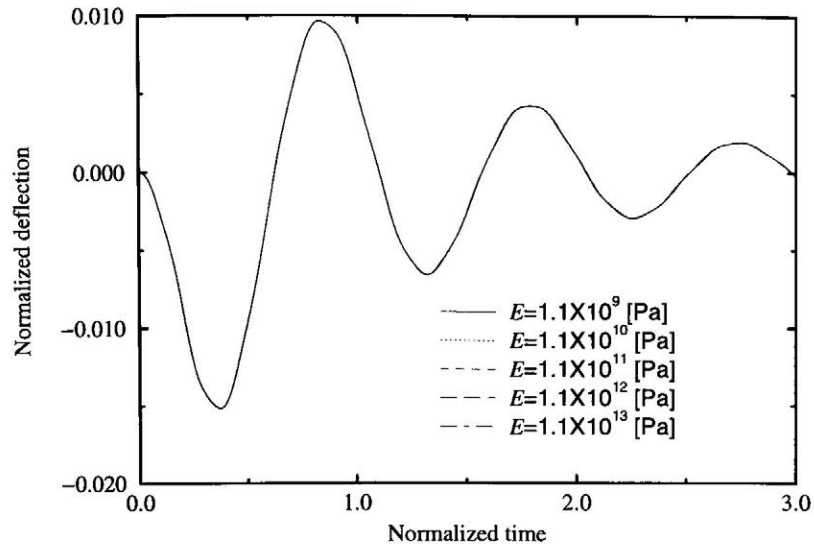


Fig. 2.4 Deflection of the plates with different magnetic field  $B^{(1)}$ , Young's modulus and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0733$ )

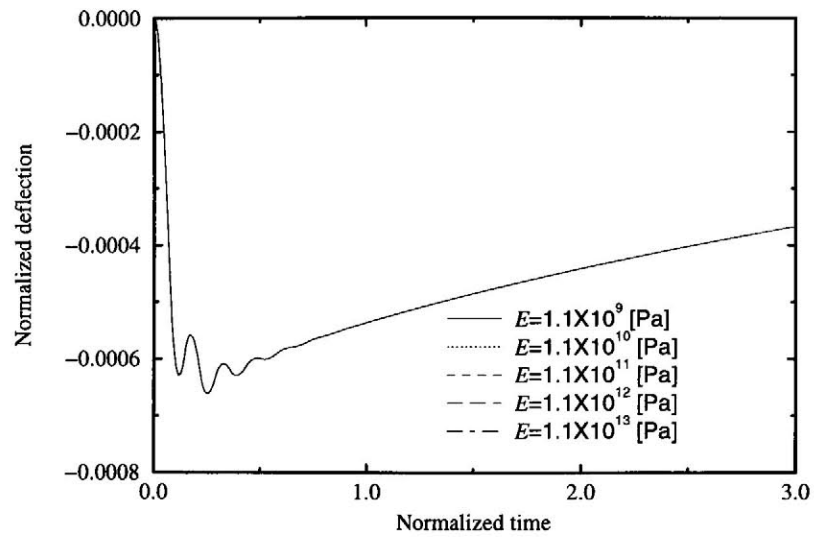


Fig. 2.5 Deflection of the plates with different magnetic field  $B^{(2)}$ , Young's modulus and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0733$ )

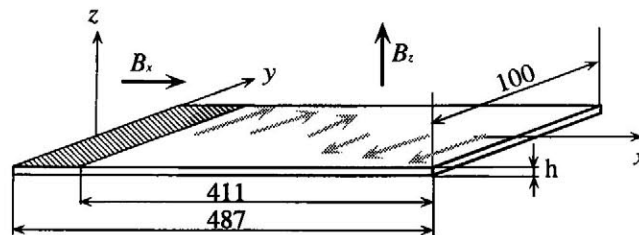


Fig. 2.6 Eddy current on the plate



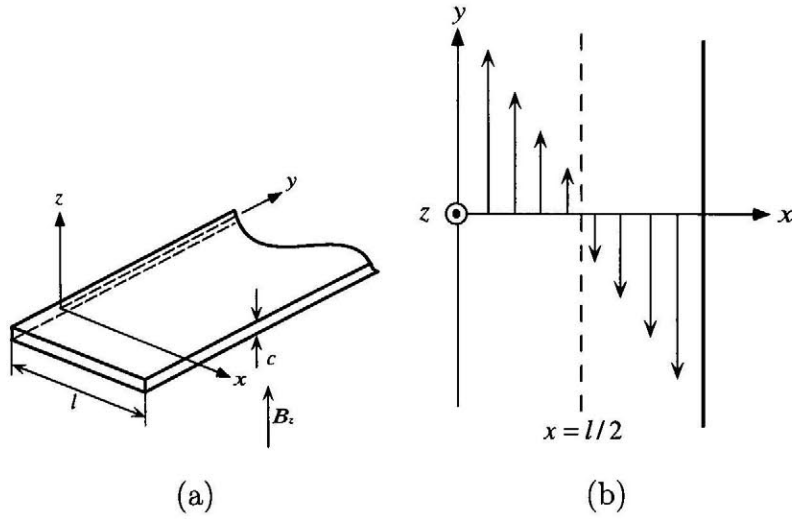


Fig. 2.7 Electric field and current on the plate

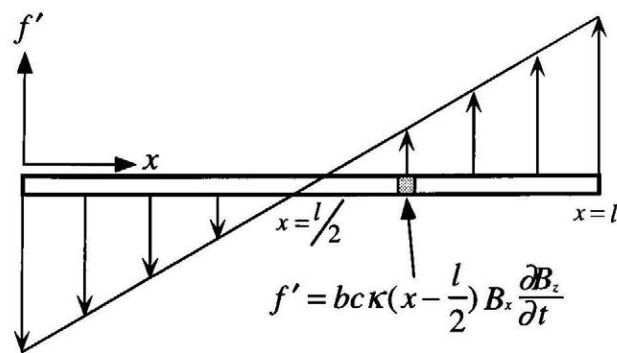


Fig. 2.8 Distribution force

## (c) 時定数比を用いた評価の問題点

板厚  $h = 5.0$  mm における連成強度パラメータの磁場に対する依存性は  $\gamma_s, \omega_s$  が変化するため Fig. 2.9 ようになる. 同図において, 連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$  となる磁場が 2 点, 点 A ( $B_x = 0.5$  T) と点 B ( $B_x = 5.16$  T) が存在することがわかる. この 2 点を連成モード合成法 (2.10) で解析した結果を Fig. 2.10, 2.11 に示す. Fig. 2.10 は点 A の磁場 ( $B_x = 0.5$  T) における平板の自由端の振動応答および構造モード 1, 渦電流モード 1 の変位成分を示しており, Fig. 2.11 には点 B の磁場 ( $B_x = 5.16$  T) における振動応答, 構造モード 1, 渦電流モード 1 の変位成分を示している. Fig. 2.10, 2.11 において, 時定数比  $R_T$  は磁場に依存しないため, 点 A, 点 B における  $R_T$  は同一となる. また, 点 A, 点 B における, 構造モード 1 の連成強度パラメータの値は同一である. よって, 点 A, 点 B の磁場においては, 連成強度パラメータおよび時定数比は同一であるが振動特性は違うものとなっている. したがって, 連成強度パラメータと時定数比では, この 2 つの磁気減衰振動特性を区別することができない. そこで, この問題を解決する方法として, 次節で連成時定数比を用いた特性評価および条件の決定方法について検討する.

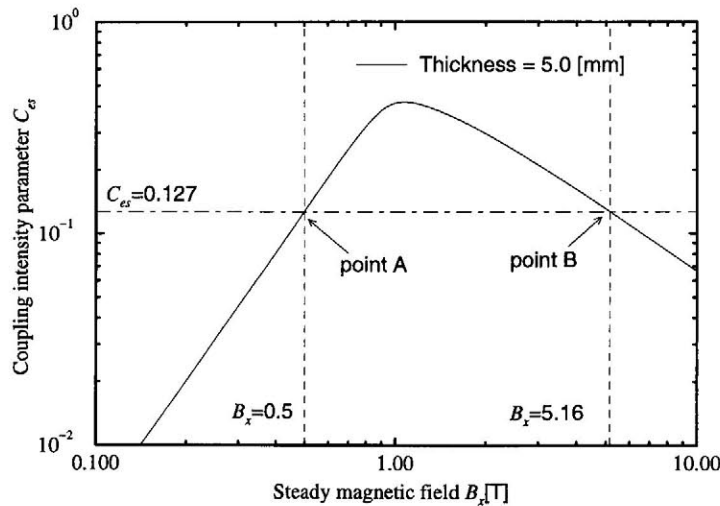
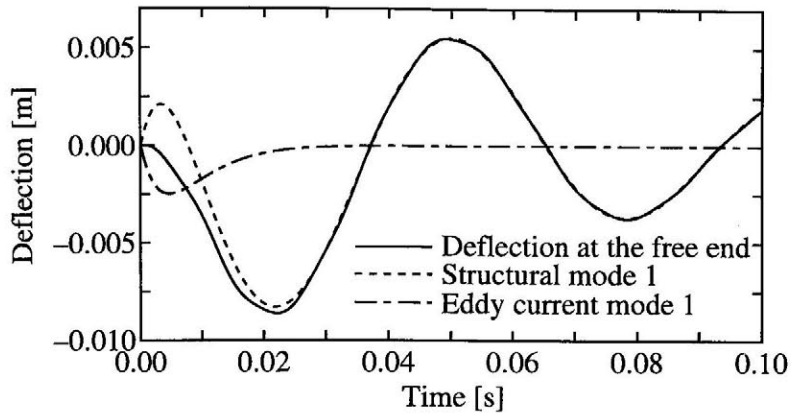
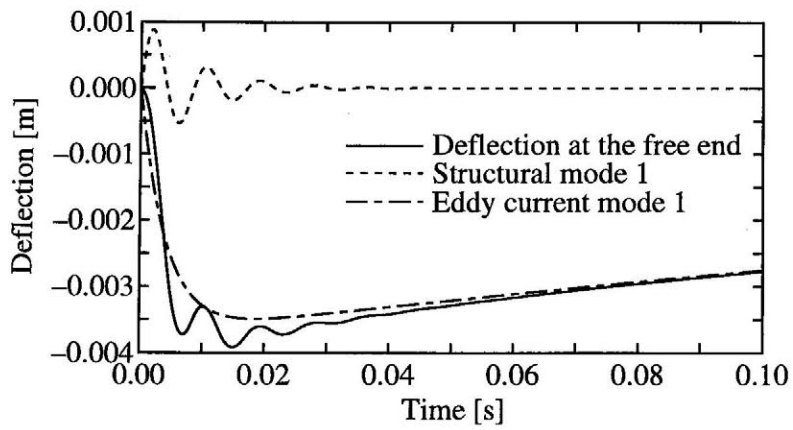


Fig. 2.9 Change of coupling intensity parameter with steady magnetic field  $B_x$

Fig. 2.10 Deflection at the free end ( $B_x = 0.5$  T)Fig. 2.11 Deflection at the free end ( $B_x = 5.16$  T)

### 2.3.3 連成強度パラメータおよび連成時定数比を一定とした解析

2.3.2節では、連成強度パラメータと時定数比が一定となる条件を導き、直接時間積分法を用いて解析を行った。

そこで、本節では、連成強度パラメータと連成時定数比を一定とした解析を行い、連成強度パラメータ、および連成時定数比の磁気減衰振動現象の評価パラメータとしての妥当性を検証する。

#### (a) 問題設定

Fig. 2.3 に示す問題において、板厚  $h = 5.0$  mm とし、CASE I として外部定常磁場が 0.5 T の場合、CASE II として外部定常磁場が 5.175 T の場合を基準問題とする。この 2つのケースにおける連成強度パラメータおよび連成時定数比の値を Table 2.3 に示す。CASE I は Fig. 2.9 の点 A、CASE II は Fig. 2.9 の点 B に対応している。

連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定となる条件の導出には、2.2.3節 (b) で述べた方法を用いる。磁場を  $B$ 、ヤング率を  $E$ 、密度を  $\rho$ 、導電率を  $\kappa$ 、板厚を  $h$  とすると、 $[B, E, h]$ 、 $[B, \rho, h]$ 、 $[B, \kappa, h]$  の  $B, h$  を含む 3つの組合せで条件を導出し、直接時間積分法を用いて解析を行う。

#### (b) 解析結果

磁場  $B$ 、ヤング率  $E$ 、板厚  $h$  を変化させた場合 ヤング率を  $E = 1.10 \times 10^9 \sim 1.10 \times 10^{13}$  Pa の 5通りに設定し、2.2.3節 (b) で述べた方法により得られた、連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ 、連成時定数比值  $R_{ct} = 0.0889$  となる磁場  $B$ 、板厚  $h$  の組合せを Table 2.4 に示す。この表に示す条件で解析を行ない、得られた平板の自由端での振動応答を Fig. 2.12 に示す。同図より、それぞれの解析条件における振動応答はよく一致していることがわかる。

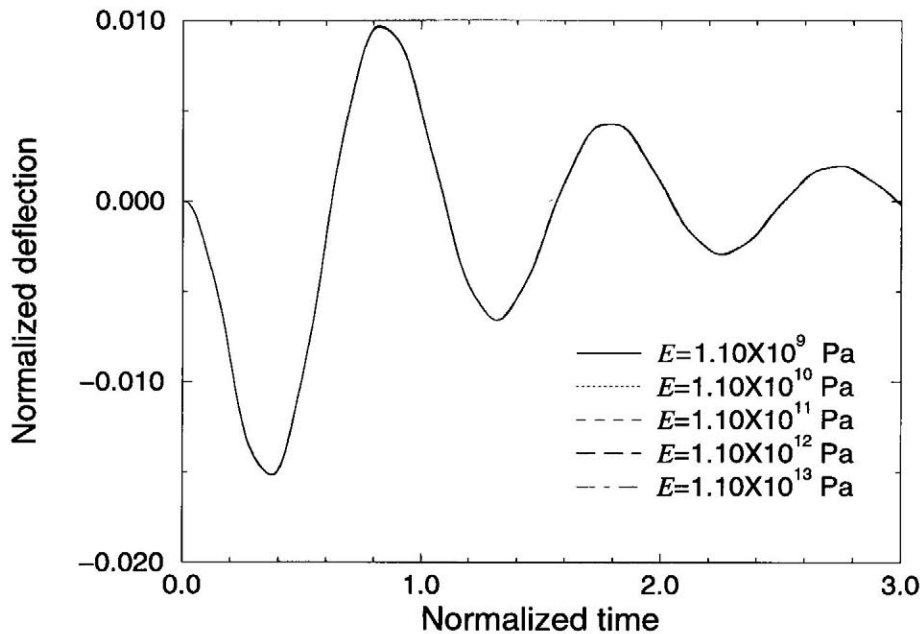
同様に、連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ 、連成時定数比值  $R_{ct} = 43.4$  となるような、ヤング

Table 2.3 Magnetic field, material property and thickness of the reference problem

	CASE I	CASE II
Magnetic field $B_x$ [T]	0.5	5.16
Young's modulus $E$ [Pa]	$1.10 \times 10^{11}$	
Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$8.91 \times 10^3$	
Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	$5.81 \times 10^7$	
Thickness $h$ [mm]	5.0	
Coupling intensity parameter $C_{es}^0$	0.127	
Ratio of coupled time constants of eddy current and structure $R_{ct}^0$	0.0889	43.5

Table 2.4 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness

Young's modulus $E$ [Pa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$1.10 \times 10^9$	0.281	15.8
$1.10 \times 10^{10}$	0.375	8.89
$1.10 \times 10^{11}$	0.500	5.00
$1.10 \times 10^{12}$	0.667	2.81
$1.10 \times 10^{13}$	0.889	1.58

Fig. 2.12 Deflection of the plates with different magnetic field, Young's modulus and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$ )

率  $E$  , 磁場  $B$  , 板厚  $h$  の組合せを Table 2.5 に示す. この表の条件により解析を行った結果を Fig. 2.13 に示しており, 同図から, それぞれの条件における振動応答はよく一致していることがわかる.

このように, ヤング率, 磁場, 板厚を変化させた場合においても, 連成強度パラメータ, および連成時定数比がそれぞれの条件において同じであるならば, 磁気減衰振動特性は同じものとなる. また, 連成強度パラメータと時定数比を用いた評価においては, CASE I と CASE II を区別することはできないが, 連成強度パラメータと連成時定数比を用いた評価においては, CASE I と CASE II を区別することができる. したがって, 磁気減衰振動現象は, 連成強度パラメータと連成時定数比を用いて, 一意に評価することができる.

Table 2.5 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 43.5$  with different magnetic field, Young's modulus and thickness

Young's modulus $E$ [Pa]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$1.10 \times 10^9$	2.90	15.8
$1.10 \times 10^{10}$	3.87	8.89
$1.10 \times 10^{11}$	5.16	5.00
$1.10 \times 10^{12}$	6.88	2.81
$1.10 \times 10^{13}$	9.17	1.58

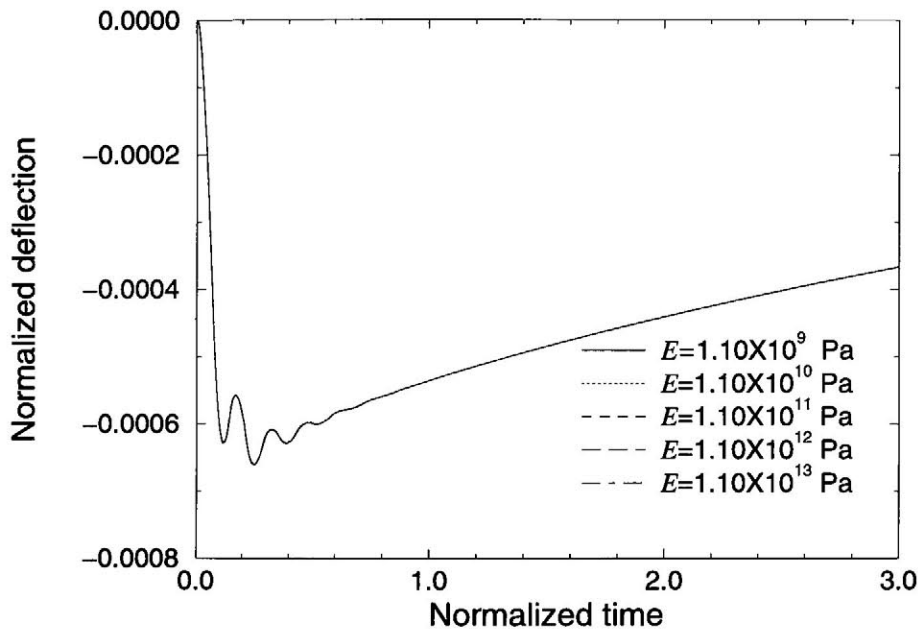


Fig. 2.13 Deflection of the plates with different magnetic field, Young's modulus and thickness ( $C_{es} = 0.1270$  and  $R_{ct} = 43.5$ )

磁場  $B$ , 密度  $\rho$ , 板厚  $h$  を変化させた場合 密度を  $\rho = 8.91 \times 10^1 \sim 8.91 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$  の 5 通りに設定し, 2.2.3 節 (b) で述べた方法により得られた, 連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ , 連成時定数比值  $R_{ct} = 0.0889$  となる磁場  $B$ , 板厚  $h$  の組合せを Table 2.6 に示す. この表に示す条件での, 平板の自由端における振動応答を Fig. 2.14 に示す. 同図から, それぞれの解析条件における振動応答はよく一致していることがわかる.

Table 2.6 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$  with different magnetic field, density and thickness

Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$8.91 \times 10^1$	0.0890	1.58
$8.91 \times 10^2$	0.211	2.81
$8.91 \times 10^3$	0.500	5.00
$8.91 \times 10^4$	1.19	8.89
$8.91 \times 10^5$	2.81	15.8

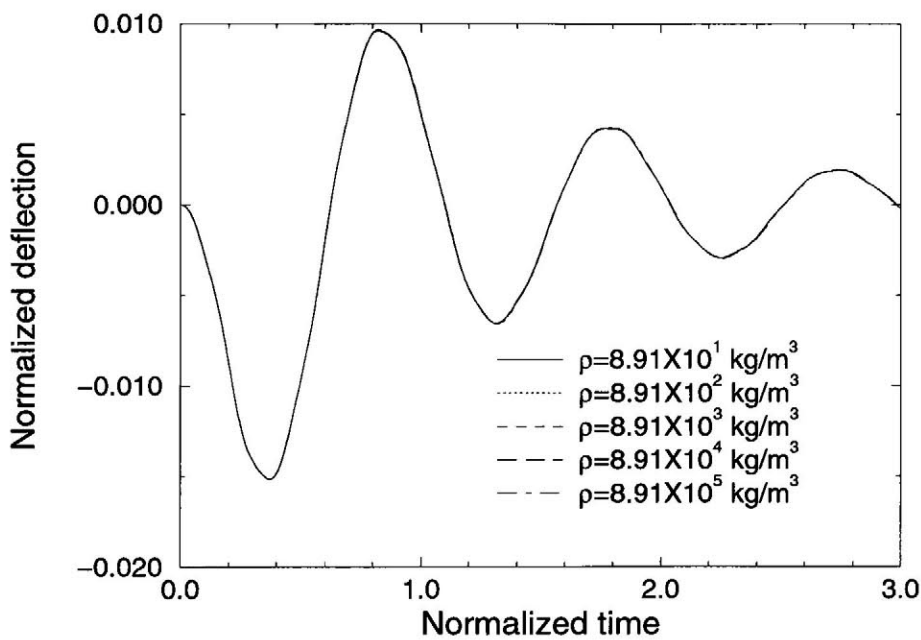
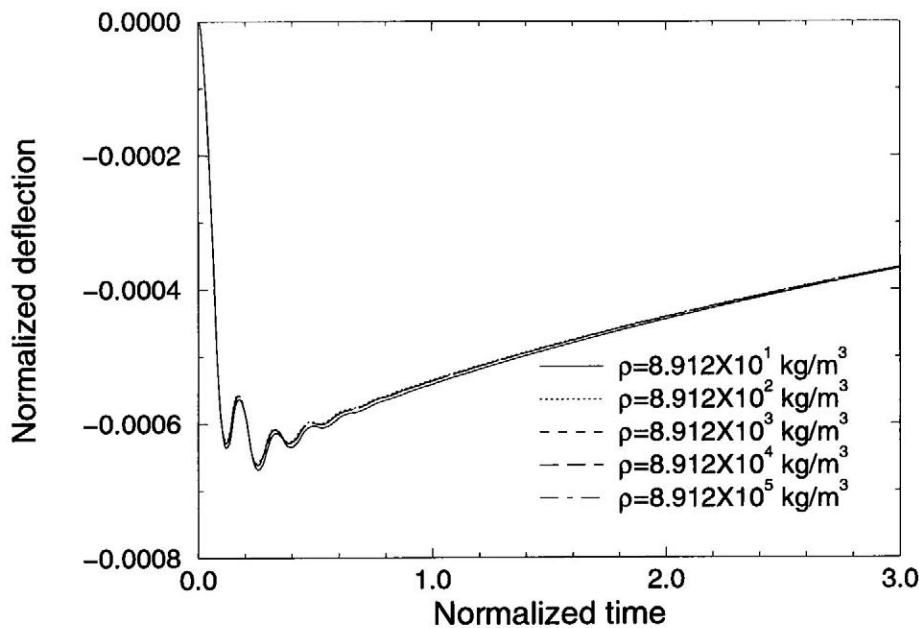


Fig. 2.14 Deflection of the plates with different magnetic field, density and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$ )

同様に、連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ 、連成時定数比值  $R_{ct} = 43.5$  となるような、密度  $\rho$ 、磁場  $B$ 、板厚  $h$  の組合せを Table 2.7 に示す。この表の条件により解析を行った結果を Fig. 2.15 に示しており、同図から、それぞれの条件における振動応答は、よく一致していることがわかる。

Table 2.7 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 43.5$  with different magnetic field, density and thickness

Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$8.91 \times 10^1$	0.917	1.58
$8.91 \times 10^2$	2.17	2.81
$8.91 \times 10^3$	5.16	5.00
$8.91 \times 10^4$	12.2	8.89
$8.91 \times 10^5$	29.0	15.8

Fig. 2.15 Deflection of the plates with different magnetic field, density and thickness ( $C_{es} = 0.1270$  and  $R_{ct} = 43.496$ )

磁場  $B$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$  を変化させた場合 導電率を  $\kappa = 5.81 \times 10^5 \sim 5.81 \times 10^9$  S/m の 5 通りに設定し, 2.2.3 節 (b) で述べた方法により得られた, 連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ , 連成時定数比值  $R_{ct} = 0.0889$  となる磁場  $B$ , 板厚  $h$  の組合せを Table 2.8 に示す. この表に示す条件での, 平板の自由端における振動応答を Fig. 2.16 に示す. 同図から, それぞれの解析条件における振動応答はよく一致していることがわかる.



Table 2.8 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness

Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$5.81 \times 10^5$	15.8	50.0
$5.81 \times 10^6$	2.81	15.8
$5.81 \times 10^7$	0.500	5.00
$5.81 \times 10^8$	0.0889	1.58
$5.81 \times 10^9$	0.0158	0.500

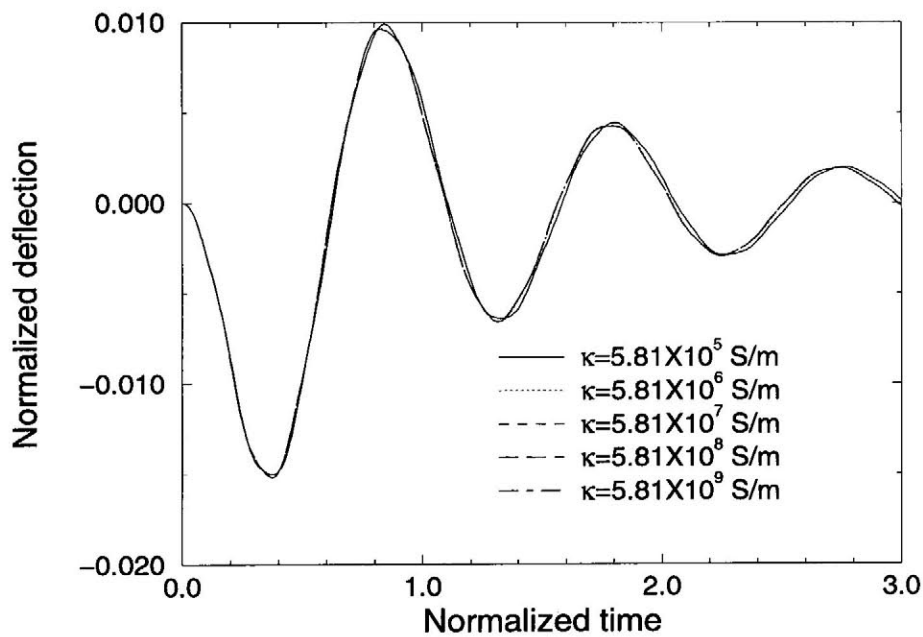
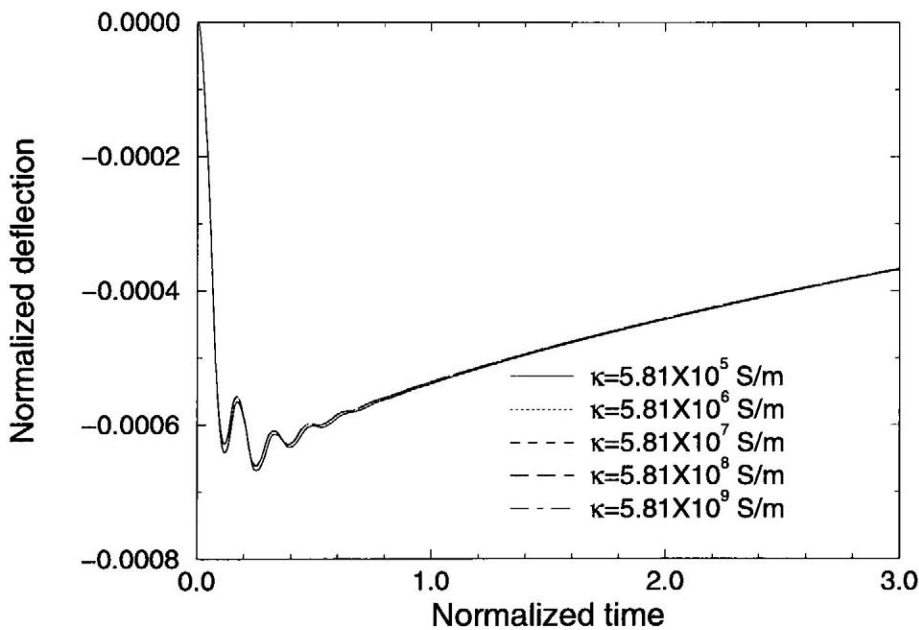


Fig. 2.16 Deflection of the plates with different magnetic field, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.0889$ )

同様に、連成強度パラメータ値  $C_{es} = 0.127$ ，連成時定数比值  $R_{ct} = 43.5$  となるような、導電率  $\kappa$ ，磁場  $B$ ，板厚  $h$  の組合せを Table 2.9 に示しており、この条件での解析結果を Fig. 2.17 に示している。同図から、それぞれの条件における振動応答は、よく一致していることがわかる。

Table 2.9 Analytical conditions for specimens of  $C_{es} = 0.1270$  and  $R_{ct} = 43.5$  with different magnetic field, electric conductivity and thickness

Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B$ [T]	Thickness $h$ [mm]
$5.81 \times 10^5$	$1.63 \times 10^2$	50.0
$5.81 \times 10^6$	29.0	15.8
$5.81 \times 10^7$	5.16	5.00
$5.81 \times 10^8$	0.917	1.58
$5.81 \times 10^9$	0.163	0.500

Fig. 2.17 Deflection of the plates with different magnetic field, electric conductivity and thickness ( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 43.5$ )

## 2.4 評価パラメータの力学的意味に関する検討

### 2.4.1 連成強度パラメータについて

第2章3節では、連成強度パラメータ、および連成時定数比を一定とした解析を行い、これらのパラメータの磁気減衰現象の評価パラメータとしての妥当性の検証を行った。ここでは、連成強度パラメータおよび、連成時定数比の力学的な意味について、1自由度連成モデルを用いて、解析的に検討する。

第2章において述べたように、1自由度連成モデルは、変位  $u$  および 電流ポテンシャル  $T$  を未

知変数として

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + C_s T + ku &= f^{ex} \\ U\dot{T} + C_e \dot{u} + RT &= \dot{B}^{ex} \end{aligned} \quad (2.41)$$

と定義される。ここで、 $m, k, f^{ex}, C_s T$  はそれぞれ、質量、剛性、外荷重、渦電流により生じる電磁力を表し、 $U, R, B^{ex}, C_e \dot{u}$  はそれぞれ、インダクタンス、レジスタンス、外部変動磁場、変形速度により生じる速度起電力を表す。この (2.41) 式において、 $T$  を消去することにより、 $u$  に関する微分方程式

$$mU\ddot{u} + Rm\dot{u} + (Uk - C_s C_e)\dot{u} + Rku = -C_s \dot{B}^{ex} + Uf^{ex} + Rf^{ex} \quad (2.42)$$

が得られる。(2.42) 式において、外荷重  $f^{ex}$  を無視し、外部変動磁場  $B^{ex}$  を

$$B^{ex} = \alpha e^{\beta t} \quad (2.43)$$

とおくと (2.43) 式は、

$$mU\ddot{u} + Rm\dot{u} + (Uk - C_s C_e)\dot{u} + Rku = -C_s \alpha \beta e^{\beta t} \quad (2.44)$$

ただし

$$\alpha, \beta : \text{constant}$$

となる。(2.44) 式は、磁気減衰振動を、1 自由度モデルで表したものである。(2.44) 式の右辺を 0 とした方程式、すなわち、斉次方程式の一般解は

$$u(t)_h = A_1 e^{-\gamma_e t} + A_2 e^{(-\gamma_s + \omega_s i)t} + A_3 e^{(-\gamma_s - \omega_s i)t} \quad (2.45)$$

となる。ただし、 $-\gamma_e, -\gamma_s \pm \omega_s i$  は、それぞれ、(2.5) 式に示す 3 次の特性方程式より求まる、渦電流の固有値、構造の固有値である。ここで、オイラーの公式より、

$$\begin{aligned} A_2 e^{(-\gamma_s + \omega_s i)t} + A_3 e^{(-\gamma_s - \omega_s i)t} &= e^{-\gamma_s t} [(A_2 + iA_3) \cos \omega_s t + (A_2 - iA_3) \sin \omega_s t] \\ &= e^{-\gamma_s t} [A_2 \cos \omega_s t + A_3 \sin \omega_s t] \end{aligned}$$

とおくと、(2.45) 式は

$$u(t)_h = A_1 e^{-\gamma_e t} + e^{-\gamma_s t} \{A_2 \cos \omega_s t + A_3 \sin \omega_s t\} \quad (2.46)$$

となる。一方、非斉次方程式である (2.44) 式の特解は

$$u(t)_p = \xi e^{\beta t} \quad (2.47)$$

ただし

$$\xi = \frac{-C_s \alpha \beta}{mU\beta^3 + mR\beta^2 + (kU - C_s C_e)\beta + kR}$$

となる。(2.44)式的一般解は、(2.44)式の斉次方程式の解である(2.46)式と、(2.44)式の特解である(2.47)式の和で表され

$$u(t) = A_1 e^{-\gamma_e t} + e^{-\gamma_s t} (A_2 \cos \omega_s t + A_3 \sin \omega_s t) + \xi e^{\beta t} \quad (2.48)$$

となる。ここで、 $A_1, A_2, A_3$  は初期条件により決定される定数である。この式において、 $\gamma_e$  は、連成モード合成法より得られる渦電流の固有値に対応しているため、第1項目は渦電流モードの変位成分に対応している。 $-\gamma_s \pm \omega_s i$  は、連成モード合成法より得られる構造の複素固有値に対応しているため、第2項目は、磁気減衰効果を含んだ構造の振動を表している。第3項目は、外部変動磁場と外部定常磁場によって生じる変位を表している。

連成強度パラメータ、および連成時定数比の定義は

$$C_{es} = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}} \quad R_{ct} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_s}{\gamma_e}$$

であることより、 $\frac{\gamma_s}{\omega_s}, \frac{\gamma_e}{\omega_s}$  は  $C_{es}, R_{ct}$  を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_s}{\omega_s} &= \sqrt{\frac{C_{es}^2}{1 - C_{es}^2}} \\ \frac{\gamma_e}{\omega_s} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_{ct}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

となる。また、任意の定数  $a$  を用いて  $\beta = a\omega_s$  であるとする

$$\frac{\beta}{\omega_s} = a \quad (2.50)$$

となる。(2.49)式と(2.50)式を(2.48)式に代入すると、

$$u(t) = A_1 e^{-\frac{\omega_s}{2\pi} \frac{1}{R_{ct}} t} + e^{-\sqrt{\frac{C_{es}^2}{1 - C_{es}^2} \omega_s t} (A_2 \cos \omega_s t + A_3 \sin \omega_s t) + \xi e^{\beta t} \quad (2.51)$$

となる。この式が、磁気減衰振動における変位の解である。以下では、(2.51)式において、第3項目は、すぐに減衰するとして、磁場中におかれる構造物の自由振動を表す第1項目、および第2項目について考える。

連成強度パラメータは、(2.51)式において、第2項にのみ存在する。この第2項目は、磁気減衰効果を含んだ変位の減衰振動を表しているため、連成強度パラメータは磁気減衰の強さを表すパラメータであるといえる。

## 2.4.2 連成時定数比について

連成時定数比は、(2.51)式において、第1項に関するパラメータである。この第1項目は、電磁力によって生じる減衰する変位を表しているため、連成時定数比は、この変位の減衰の大きさを表し

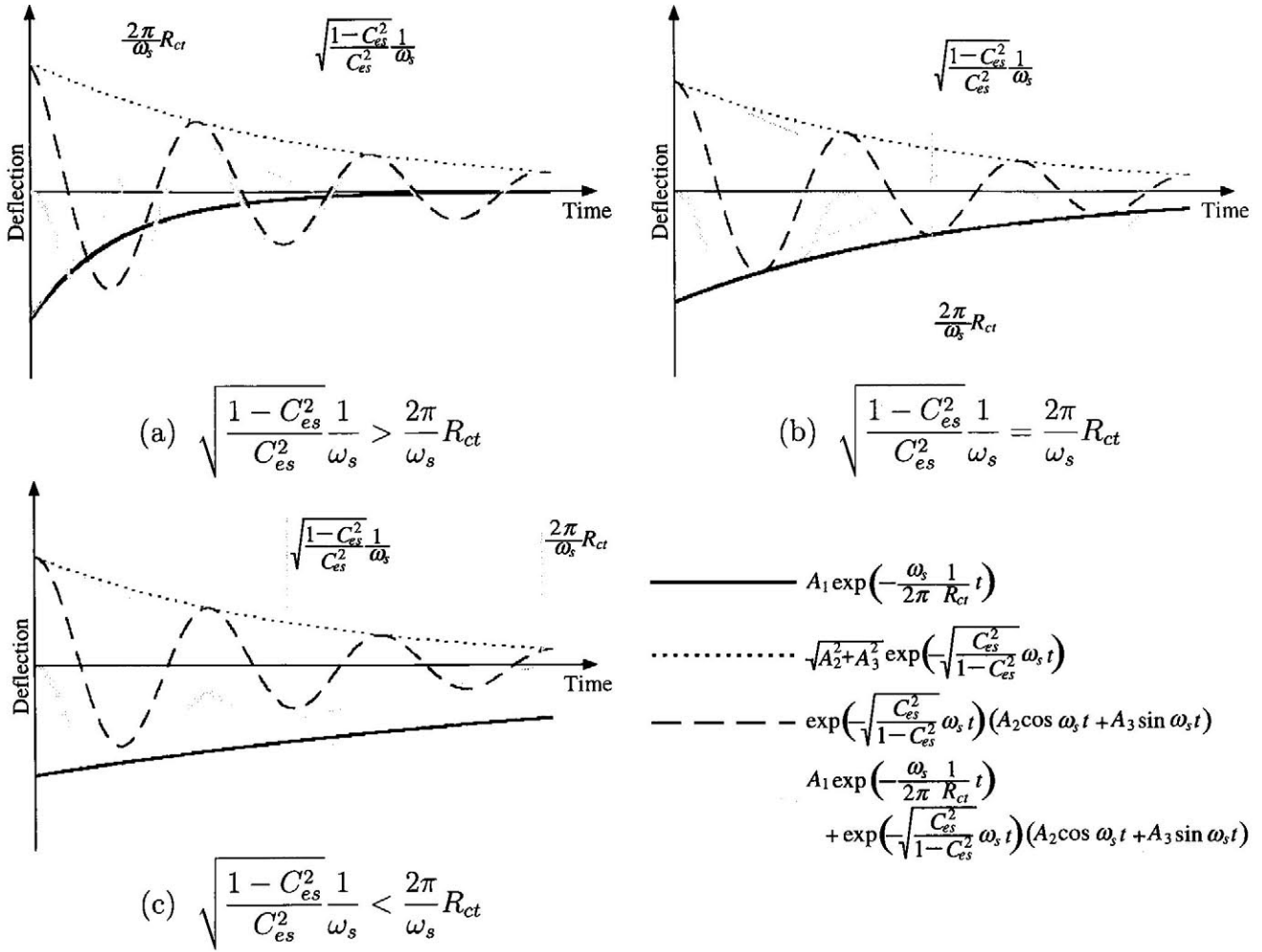
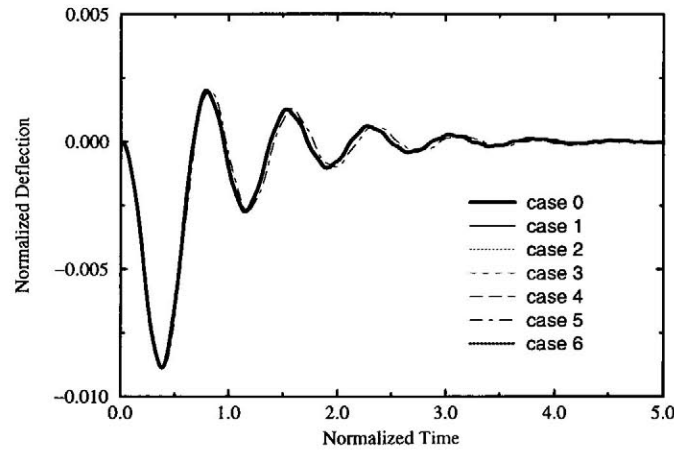


Fig. 2.18 Characteristics of magnetically damped vibration

ている。渦電流モードの変位成分は渦電流と外部磁場による電磁力によって生じる変位成分に対応するため、連成時定数比はこの変位成分の減衰の速さを表す。そして、連成強度パラメータと連成時定数比を用いて、(2.51) 式の第 2 項目の減衰時定数は  $\sqrt{\frac{1-C_{es}^2}{C_{es}^2}} \frac{1}{\omega_s}$  となり、第 1 項目の減衰時定数は  $\frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  となる。連成強度パラメータと連成時定数比で表されるこの 2 つの減衰時定数により磁気減衰振動特性は Fig. 2.18 に示すように、(a)  $\sqrt{\frac{1-C_{es}^2}{C_{es}^2}} \frac{1}{\omega_s} > \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  のとき、(b)  $\sqrt{\frac{1-C_{es}^2}{C_{es}^2}} \frac{1}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  のとき、(c)  $\sqrt{\frac{1-C_{es}^2}{C_{es}^2}} \frac{1}{\omega_s} < \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  のときといった 3 ケースに分類できることがわかる。2.3.3 節で示した CASE I, CASE II の振動応答を Fig. 2.18 に基づいて分類すると、CASE I の振動応答は Fig. 2.18(a) の状態に対応し、一方 CASE II の振動応答は Fig. 2.18(c) の状態に対応する。

Table 2.10 Analytical condition of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.5$ 

	Young's modulus $E$ [GPa]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B_x$ [T]	Thickness $h$ [mm]
Case 0	$1.10 \times 10^2$	$8.91 \times 10^3$	$5.81 \times 10^7$	1.31	8.42
Case 1	1.10	—	—	0.738	26.6
Case 2	$1.10 \times 10^4$	—	—	2.33	2.66
Case 3	—	$8.91 \times 10^1$	—	0.233	2.66
Case 4	—	$8.91 \times 10^5$	—	7.38	26.6
Case 5	—	—	$5.81 \times 10^5$	41.5	84.2
Case 6	—	—	$5.81 \times 10^9$	0.0415	0.842

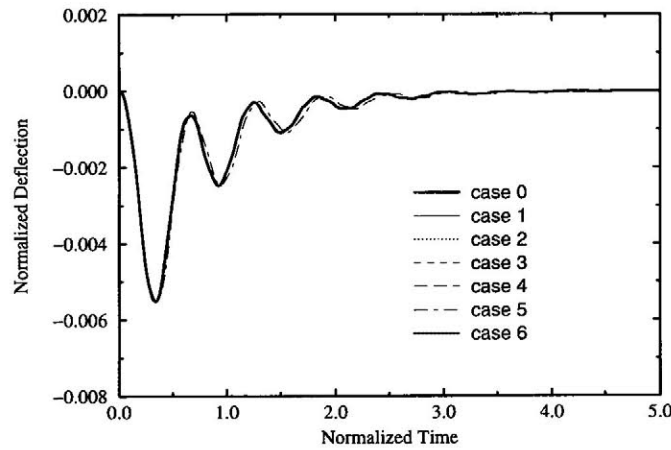
Fig. 2.19 Normalized deflection at the free end( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 0.500$ )(a)  $\frac{1}{C_{es}\omega_s} > \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  の解析結果

本節で示した磁気減衰振動の分類が妥当であることを有限要素解析によって検証する。 $\frac{1}{C_{es}\omega_s} > \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  を満足する連成強度パラメータおよび連成時定数比の組合せ  $C_{es} = 0.127$ ,  $R_{ct} = 0.500$  となる解析条件を設定し解析を行なう。連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定となる条件の決定方法を用いて、 $C_{es} = 0.127$ ,  $R_{ct} = 0.500$  となる解析条件の導出結果を Table 2.10 に示す。なお、解析条件の決定にあたっては、ヤング率を  $1.10 \times 10$ ,  $1.10 \times 10^2$ ,  $1.10 \times 10^4$  GPa とした場合、密度を  $8.91 \times 10^1$ ,  $8.91 \times 10^3$ ,  $8.91 \times 10^5$  kg/m<sup>3</sup> とした場合、導電率を  $5.81 \times 10^5$ ,  $5.81 \times 10^7$ ,  $5.81 \times 10^9$  S/m とした場合の 3 ケースとした。

Table 2.10 の解析条件で得られた、平板の自由端における振動応答を Fig. 2.19 に示す。同図において、時間軸は平板の固有周期、変位軸は初期電磁力による変位でそれぞれ規格化している。この解析結果より、それぞれ振動応答は良く一致していることがわかる。また、Fig. 2.18(a) で示す磁気減衰振動特性に対応していることがわかる。

Table 2.11 Analytical condition of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 1.25$ 

	Young's modulus $E$ [GPa]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B_x$ [T]	Thickness $h$ [mm]
Case 0	$1.10 \times 10^2$	$8.91 \times 10^3$	$5.81 \times 10^7$	2.19	9.07
Case 1	1.10	—	—	1.23	28.7
Case 2	$1.10 \times 10^4$	—	—	3.89	2.87
Case 3	—	$8.91 \times 10^1$	—	0.389	2.87
Case 4	—	$8.91 \times 10^5$	—	12.3	28.7
Case 5	—	—	$5.81 \times 10^5$	69.2	90.7
Case 6	—	—	$5.81 \times 10^9$	0.0692	0.907

Fig. 2.20 Normalized deflection at the free end( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 1.25$ )(b)  $\frac{1}{C_{es}\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  の解析結果

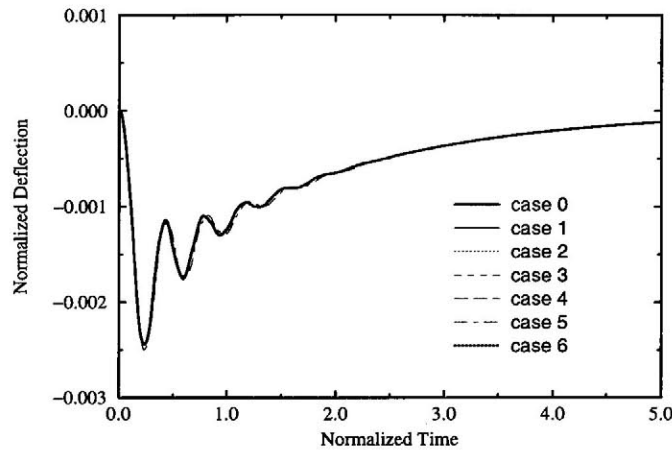
$\frac{1}{C_{es}\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  を満たす連成強度パラメータおよび連成時定数比の組合せ  $C_{es} = 0.127$ ,  $R_{ct} = 1.25$  となる解析条件を設定し解析を行なう。連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定となる条件の決定方法で得られた解析条件を Table 2.11 に示す。なお、解析条件の決定にあたっては、ヤング率を  $1.10 \times 10$ ,  $1.10 \times 10^2$ ,  $1.10 \times 10^4$  GPa とした場合、密度を  $8.91 \times 10^1$ ,  $8.91 \times 10^3$ ,  $8.91 \times 10^5$  kg/m<sup>3</sup> とした場合、導電率を  $5.81 \times 10^5$ ,  $5.81 \times 10^7$ ,  $5.81 \times 10^9$  S/m とした場合の 3 ケースとした。

Table 2.11 の解析条件で得られた、平板の自由端における振動応答を Fig. 2.20 に示す。同図よりそれぞれ解析結果は良く一致しており、磁気減衰振動特性は Fig. 2.18(b) に示した特性に対応していることがわかる。



Table 2.12 Analytical condition of  $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 5.00$ 

	Young's modulus $E$ [GPa]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]	Magnetic field $B_x$ [T]	Thickness $h$ [mm]
Case 0	$1.10 \times 10^2$	$8.91 \times 10^3$	$5.81 \times 10^7$	3.52	7.95
Case 1	1.10	—	—	1.98	25.1
Case 2	$1.10 \times 10^4$	—	—	6.26	2.51
Case 3	—	$8.91 \times 10^1$	—	0.626	2.51
Case 4	—	$8.91 \times 10^5$	—	19.8	25.1
Case 5	—	—	$5.81 \times 10^5$	$1.11 \times 10^2$	79.5
Case 6	—	—	$5.81 \times 10^9$	0.111	0.795

Fig. 2.21 Normalized deflection at the free end( $C_{es} = 0.127$  and  $R_{ct} = 5.00$ )(c)  $\frac{1}{C_{es}\omega_s} < \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  の解析結果

$\frac{1}{C_{es}\omega_s} < \frac{2\pi}{\omega_s} R_{ct}$  を満たす連成強度パラメータおよび連成時定数比の組合せ  $C_{es} = 0.127$ ,  $R_{ct} = 5.00$  となる解析条件を設定し解析を行なう。連成強度パラメータおよび連成時定数比が一定となる条件の決定方法で得られた解析条件を Table 2.12 に示す。なお、解析条件の決定にあたっては、ヤング率を  $1.10 \times 10$ ,  $1.10 \times 10^2$ ,  $1.10 \times 10^4$  GPa とした場合、密度を  $8.91 \times 10^1$ ,  $8.91 \times 10^3$ ,  $8.91 \times 10^5$  kg/m<sup>3</sup> とした場合、導電率を  $5.81 \times 10^5$ ,  $5.81 \times 10^7$ ,  $5.81 \times 10^9$  S/m とした場合の 3 ケースとした。

Table 2.12 の解析条件で得られた、平板の自由端における振動応答を Fig. 2.21 に示す。同図よりそれぞれ解析結果は良く一致しており、磁気減衰振動特性は Fig. 2.18(c) に示した特性に対応していることがわかる。

### 2.4.3 連成強度パラメータ値による振動特性の変化

磁気減衰振動特性が連成強度パラメータ値にどれほど敏感か連成有限要素解析に基づいて検討する。連成強度パラメータを 0.100, 0.120, 0.140,... と 0.020 刻みで変化させて解析を行い、振動特性が連成強度パラメータ値にどれほど敏感かを検討する。なお、連成時定数比は 0.100 とする。Fig. 2.22 に示す平板において、各連成強度パラメータ値における外部定常磁場、板厚の値を Table 2.13 に示す。平板の材料定数はヤング率は  $1.10 \times 10^{11}$  Pa, 密度は  $8.91 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 導電率は  $5.81 \times 10^7$  S/m とする。ここでは Fig. 2.22 に示すように、初期変位を 1 mm 与えて振動させるが、これは、各連成強度パラメータ値において、外部定常磁場の値が違うため、外部定常磁場と外部変動磁場で初期電磁力を与えて振動させると、変位のピーク値が変化する。これでは振動特性が連成強度パラメータ値にどれほど敏感かを判定しにくいいため、初期変位を与えて解析する。

Fig. 2.23 に 連成強度パラメータ値が 0.100, 0.120, 0.140 の結果を示す。Fig. 2.23(a) より、連成強度パラメータが 20.0 % 増加することで、第 1 番目の極値が 7.14 % 減少し、第 2 番目の極値は 13.1 % 減少している。Fig. 2.23(b) より、連成強度パラメータが 40 % 増加することで、第 1 番目の極値が 13.5 % 減少し、第 2 番目の極値は 24.5 % 減少している。よって、連成強度パラメータが 10 % 増加すると、第 1 番目の極値は 3.57 %, 第 2 番目の極値は 6.55 % 減少するといえる。Fig. 2.24 に Table 2.13 に示す条件による解析結果を示しており、Fig. 2.24 からわかるように、連成強度

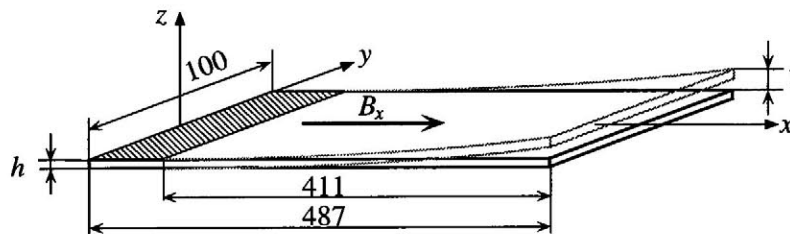


Fig. 2.22 Cantilever plate with the initial deflection in a magnetic field

Table 2.13 Thickness  $h$  and magnetic field  $B_x$  for each coupling intensity parameter

$C_{es}$	$h$ [mm]	$B_x$ [T]
0.100	5.35	0.474
0.120	5.27	0.512
0.140	5.19	0.544
0.160	5.12	0.573
0.180	5.04	0.599
0.200	4.97	0.622

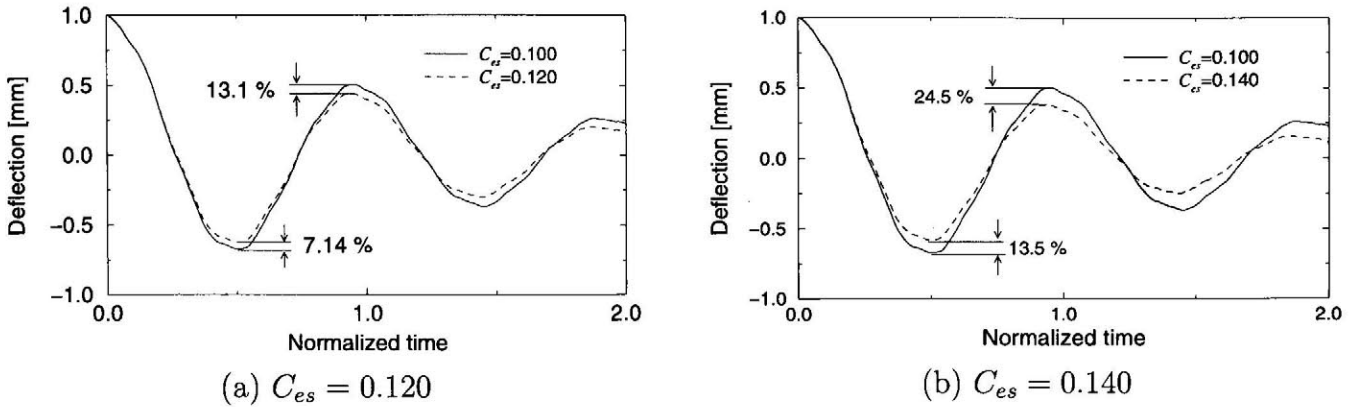


Fig. 2.23 Deflection at the free end

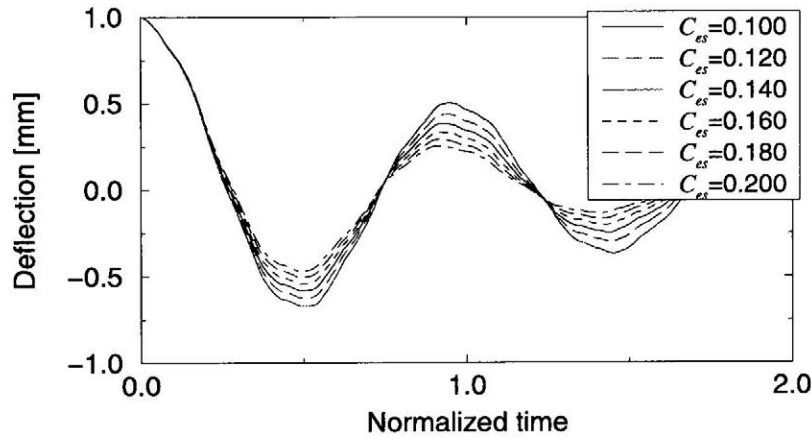


Fig. 2.24 Deflection at the free end for each coupling intensity parameter

パラメータ値を 20.0 % 刻みで増加させると、振動振幅が明らかに小さくなっている。よって、振動特性は連成強度パラメータ値に敏感であるといえる。

次に 1 自由度連成モデルにより振動特性の敏感性を検討する。1 自由度連成モデルの解は

$$u(t) = A_1 e^{-\frac{\omega_s}{2\pi} \frac{1}{R_{ct}} t} + e^{-\sqrt{\frac{C_{es}^2}{1-C_{es}^2}} \omega_s t} (A_2 \cos \omega_s t + A_3 \sin \omega_s t) \quad (2.52)$$

となる。ただし、 $A_1, A_2, A_3$  は初期条件によって決まる定数である。この (2.52) 式の  $e^{-\sqrt{\frac{C_{es}^2}{1-C_{es}^2}} \omega_s t}$  を調べることにより、第 2 番目の極値の減少量を評価することができ、連成強度パラメータ値が 0.100 から 0.120 に増加した時の、第 2 番目の極値の減少量を評価すると、12.0 % となる (連成強度パラメータ値が 0.100 と 0.110 の場合は 6.20 % となる)。連成有限要素解析では 13.1 % となったが、(2.52) 式に初期条件を与えて解き、減少量を評価すれば、連成有限要素解析で得られた値に近づくと考えられる。続いて、第 2 番目の極値の減少量を近似的に評価する。計算を簡単にするた

めに  $\frac{C_{es}^2}{1-C_{es}^2} \approx C_{es}$  とすると,

$$e^{-2\pi\sqrt{\frac{C_{es}^2}{1-C_{es}^2}}} \approx e^{-2\pi C_{es}} \quad (2.53)$$

となる. そこで  $\Delta C_{es}$  を連成強度パラメータの増加分とし,  $e^{-2\pi(C_{es}+\Delta C_{es})}$  をテーラ展開すると

$$e^{-2\pi(C_{es}+\Delta C_{es})} = e^{-2\pi C_{es}} - 2\pi\Delta C_{es}e^{-2\pi C_{es}} + (\text{高次項}) \quad (2.54)$$

となる. よって減少量は

$$\frac{e^{-2\pi(C_{es}+\Delta C_{es})} - e^{-2\pi C_{es}}}{e^{-2\pi C_{es}}} = -2\pi\Delta C_{es} \quad (2.55)$$

より,  $-2\pi\Delta C_{es}$  となる. (2.55) 式より 連成強度パラメータが 0.10 から 20% 増加 ( $\Delta C_{es} = 0.02$ ) した時の減少量を求めると 12.6% となり, 有限要素解析結果と良く一致している.

## 2.5 おわりに

磁気減衰振動特性の特性評価パラメータとして、連成強度パラメータ、連成時定数比を提案し、その妥当性を検証した。その結果をまとめると

- 磁気減衰振動問題の新たな評価パラメータとして、連成効果が含まれた、渦電流の時定数、構造の時定数より連成時定数比を定義した。
- 連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定となる条件は、1自由度連成モデルを用いることにより導出できることを示した。
- 連成強度パラメータ、および時定数比が一定という条件では、磁気減衰振動特性を一意に表すことができないことを有限要素解析より示した。そこで、連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定である条件を設定し、有限要素解析を行なった結果、磁気減衰振動特性は一致し、かつ、その特性を一意に表すことができることを示した。よって、連成強度パラメータ、連成時定数比により強磁場中に設置される機器の磁気減衰振動特性を定量的に評価することができる。
- 1自由度連成モデルより、連成強度パラメータは、磁気減衰の強さを表すパラメータであることを示した。また、連成時定数比は、構造モードの変位成分に対して、渦電流モードの変位成分が、早く減衰するか、もしくは、遅く減衰するかを表すパラメータであることを示した。
- 連成強度パラメータおよび連成時定数比を用いて、磁気減衰振動特性の分類を行なった。そして、有限要素解析より、この分類の妥当性を示した。

である。

## 参考文献

- (2.1) T. Q. Hua, M. J. Knott, L. R. Turner and R. B. Wehrle, “Experimental modelling of eddy current and deflection for tokamak limiters”, *Fusion Technology*, **10**, 1047–1052, 1986.
- (2.2) J. Bialek, D. Weissenburqer, M. Ulrickson, J. Cecchi, “Modeling the coupling of magnetodynamics and elastomechanics in structural analysis”, *Proc. 10th Symposium on Fusion Engineering*, 51–55, 1983.
- (2.3) T. Takagi and J. Tani, “Evaluation of critical magnetic viscous damping ratios for plate vibrations with different boundary conditions”, *Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials*, **5**, 101–104, 1994, Elsevier.
- (2.4) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, “Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall”, *Fusion Engineering Design*, **27**, 473–480, 1995.
- (2.5) 堀江知義, 二保知也, 伊達幸利, “磁気減衰振動現象の評価パラメータ (第1報, 薄板の磁気減衰挙動の測定)”, 日本機械学会論文集 (C), **65**–630, 471–477, 1999.
- (2.6) 二保知也, 堀江知義, 田中義和, “磁気減衰振動現象の評価パラメータ (第2報, 連成強度パラメータによる磁気減衰振動特性評価)”, 日本機械学会論文集 (C), **65**–635, 2463–2650, 1999.
- (2.7) 斎藤 忍, 染谷 常雄, “軸受の減衰を考慮した回転軸の危険速度に関する研究”, 日本機械学会論文集, **43**–376, 4474–4484, .1977.
- (2.8) 堀江知義, 二保知也, 河野智城, “連成固有値に基づく平板たわみ問題の磁気減衰挙動評価”, 日本 AEM 学会誌, **4**–2, 40–45, 1996.
- (2.9) L. R. Turner and T. Q. Hua, “Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields”, *COMPEL*, **9**–3, 205–216, 1990.
- (2.10) 堀江知義, 二保知也, “磁気減衰振動問題における連成モード合成法”, 日本機械学会論文集 (C), **63**–609, 1455–1461, 1997.

## 第 3 章

# 磁気減衰振動の簡易解析

### 3.1 はじめに

核融合炉などの強磁場中に設置される機器には、電磁場と構造物が互いに影響を及ぼす電磁構造連成現象が生じる。この現象は一般に構造物の振動を抑えるように作用するため磁気減衰振動現象とも呼ばれる。したがって、この磁気減衰効果を考慮することにより、強磁場中に置かれる機器を合理的に設計することが可能になると考えられる。また、強磁場中に設置される機器の設計を高効率に行なうためには有限要素法などを用いた数値解析による設計の検討が必要となるが、有限要素法では有限要素モデルを作成するための多大な労力と長い解析時間を必要とするため磁気減衰効果を効率良く評価できない。よって、設計途中の段階では、簡易解析方法を用い幅広くパラメータを変化させることで磁気減衰効果を把握し、設計の最終段階で有限要素法を用いれば効率良く設計を行える。

磁気減衰効果の評価パラメータとしては、T.Takagi らにより Critical magnetic viscous damping ratio が定義され、このパラメータの材料定数、板厚に対する依存性の調査およびこのパラメータを用いた磁気減衰振動の簡易解析方法が提案されている<sup>(3.1)(3.2)</sup>。この T. Takagi らの簡易解析方法は、有限要素法において非対角成分を無視した簡易有限要素解析であり、応力の時刻歴応答、渦電流の分布などを簡易的に得ることができるが、有限要素法を基礎としているため、磁気減衰振動応答を得るのに時間がかかる。また、Y.Yoshida らにより、Magnetic damping parameter が定義され、このパラメータを用いた磁気減衰振動のスケーリング則が提案されている<sup>(3.3)</sup>。著者らは連成強度パラメータを定義し、その磁場、板厚、材料定数に対する依存性を導出している<sup>(3.4)</sup>。さらに、連成強度パラメータが磁気減衰振動特性の評価パラメータとして妥当であることを実験および連成有限要素解析により検証し<sup>(3.5)</sup>、このパラメータを用いた縮小モデル実験の条件決定方法を提案している<sup>(3.6)</sup>。

本章では、シェル構造物に生じる磁気減衰振動の 2 つの簡易解析方法を提案する。1 つめの方法



は、運動方程式に基づく方法である。この方法では、非連成有限要素解析結果を連成強度パラメータを用いて修正し、磁気減衰振動応答を得る。この簡易解析方法を、平板および円筒シェルの磁気減衰振動問題に適用し、その有効性を検討する。しかし、この方法は、連成による角振動数の変化を考慮していないため、連成有限要素解析との差が大きいと考えられる。そこで、もう1つの簡易解析方法として、磁気減衰振動問題の1自由度連成モデルすなわち3階微分方程式に基づく方法を提案し、同様にその有効性を検討する。

## 3.2 簡易解析の提案

ここでは、基本的な問題として初期変位が与えられる磁気減衰振動の簡易解析方法について述べる。これらの簡易解析方法は衝撃荷重が与えられる問題に対しても応用可能である。

### 3.2.1 磁気減衰振動の微分方程式

1自由度連成モデルより磁気減衰振動現象を変位  $u$  で表した方程式は

$$mU\ddot{u} + mR\dot{u} + (kU - C_s C_e)\dot{u} + Rku = -C_s \dot{B}^{ex} + U f^{ex} + R f^{ex} \quad (3.1)$$

となる。ここで、 $m, k, C_s, f^{ex}$  は質量、剛性、電磁力に関する項、外荷重であり、 $U, C_e, R, \dot{B}^{ex}$  はインダクタンス、速度起電力に関する項、レジスタンス、外部変動磁場の時間1階微分を表す。(3.1)式の特微方程式より、連成固有値

$$\gamma_e = -\frac{R}{3U} + \left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_s \pm \omega_s i &= -\frac{R}{3U} - \frac{\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ &\quad \pm \frac{-\left\{ b - \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ b + \sqrt{b^2 + a^3} \right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3} i \end{aligned} \quad (3.3)$$

が得られる。ただし、 $a, b$  は磁場  $B$ , ヤング率  $E$ , 密度  $\rho$ , 導電率  $\kappa$ , 板厚  $h$  の関数である。連成固有値  $\gamma_s \pm \omega_s i$  を連成強度パラメータの定義式に代入することにより、連成強度パラメータの  $B, E, \rho, \kappa, h$  に関する依存性は

$$C_{es} = \frac{\text{Re } \alpha}{|\alpha|} = C_{es}(B, h, E, \rho, \kappa, P_s, P_e, P_c) \quad (3.4)$$

と表すことができる。ここで、 $P_s, P_e, P_c$  は形状に関する比例定数であり、電磁構造連成系の有限要素式から求まる連成固有値を用いて決定される<sup>(3.7)</sup>。

### 3.2.2 運動方程式に基づく方法 (Method 1)

この方法は一般の減衰振動の微分方程式である2階微分方程式に基づいた方法である。一般の減衰振動問題

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.5)$$

において初期変位を  $U_0$  とすると, (3.5) 式の解は減衰比  $\zeta$  と固有角振動数  $\omega_0$  を用いて

$$u_g = \sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}} U_0 \exp(-\zeta\omega_0 t) \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t - \beta) \quad (3.6)$$

ただし

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.7)$$

となる。減衰比  $\zeta$  は減衰係数  $c$  と臨界減衰係数  $2\sqrt{mk}$  の比で定義されるが, (3.5) 式の固有値  $\alpha'$  を用いて  $\text{Re}(\alpha')/|\alpha'|$  のように表すこともできる。すなわち, 連成強度パラメータ  $C_{es}$  と減衰比  $\zeta$  の定義は同じ形である。そこで

$$C_{es} \simeq \zeta \quad (3.8)$$

と仮定する。  $\zeta$  は2階の微分方程式 ((3.5) 式) に,  $C_{es}$  は3階の微分方程式 ((3.1) 式) に基づいているため  $C_{es} \simeq \zeta$  とした。非連成有限要素解析結果は (3.6) 式において  $\zeta = 0$  とした場合に対応する。そこで, (3.6) 式において  $\zeta = 0$  とした振動応答と  $C_{es} \simeq \zeta$  とした振動応答を比較すると, Fig. 3.1 に示すように, 非連成有限要素解析結果に対して, 変位は  $\sqrt{\frac{1}{1-C_{es}^2}} \exp(-C_{es}\omega_0 t)$  倍し, 時間は  $\sqrt{1-C_{es}^2}$  倍し  $\beta$  を引くことにより簡易的に磁気減衰振動応答が得られる。

連成強度パラメータ  $C_{es}$  は (3.4) 式のように磁場, 材料定数, 板厚の関数として表されるため, この方法により磁気減衰振動のパラメータスタディを行える。複数の振動モードを必要とする問題においては各振動モードの振動応答をこの方法で修正し, 合成することで磁気減衰振動が得られる。

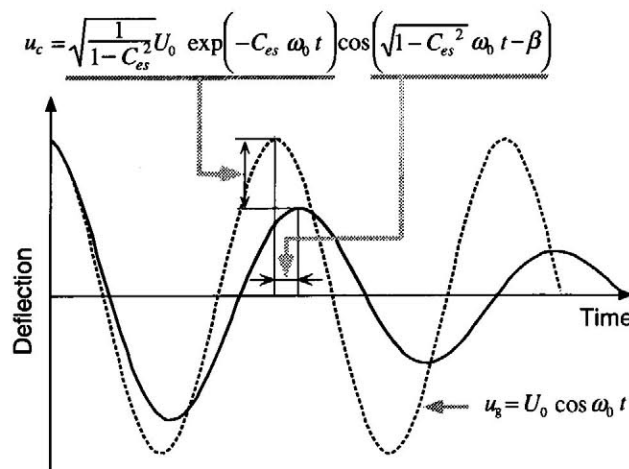


Fig. 3.1 Modification of the finite element uncoupled result using the coupling intensity parameter

### 3.2.3 3階微分方程式に基づく方法 (Method 2)

この方法は磁気減衰振動の微分方程式である3階微分方程式に基づいた方法である。磁気減衰振動を変位  $u$  で表した (3.1) 式の一般解は、連成固有値  $\gamma_e$  ((3.2) 式),  $\gamma_s \pm \omega_s i$  ((3.3) 式) を用いて、

$$u = D_1 e^{\gamma_e t} + e^{\gamma_s t} \{D_2 \cos \omega_s t + D_3 \sin \omega_s t\} \quad (3.9)$$

となる。ただし、 $D_1, D_2, D_3$  は初期条件により決定される定数である。初期変位  $U_0$  を与える磁気減衰振動問題では、時刻  $t = 0$  における初期条件は

$$u(0) = U_0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \ddot{u}(0) = -\frac{k}{m} U_0 \quad (3.10)$$

となる。(3.9) 式を上式に代入すると、

$$D_1 = U_0(1 - A) \quad (3.11)$$

$$D_2 = AU_0 \quad (3.12)$$

$$D_3 = -\frac{U_0}{\omega_s} \{\gamma_e - (\gamma_e - \gamma_s) A\} \quad (3.13)$$

ただし、

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad A = \frac{\omega_0^2 + \gamma_e^2 - 2\gamma_e \gamma_s}{\gamma_e^2 - 2\gamma_e \gamma_s + \gamma_s^2 + \omega_s^2} \quad (3.14)$$

が得られる。よって、初期変位  $U_0$  による磁気減衰振動応答は、Fig. 3.2 に示すように、連成固有値  $\gamma_e, \gamma_s \pm \omega_s i$  と平板の固有角振動数  $\omega_0$  を (3.11)~(3.13) 式に代入し、さらに、これらを (3.9) 式に代入することにより得られる。

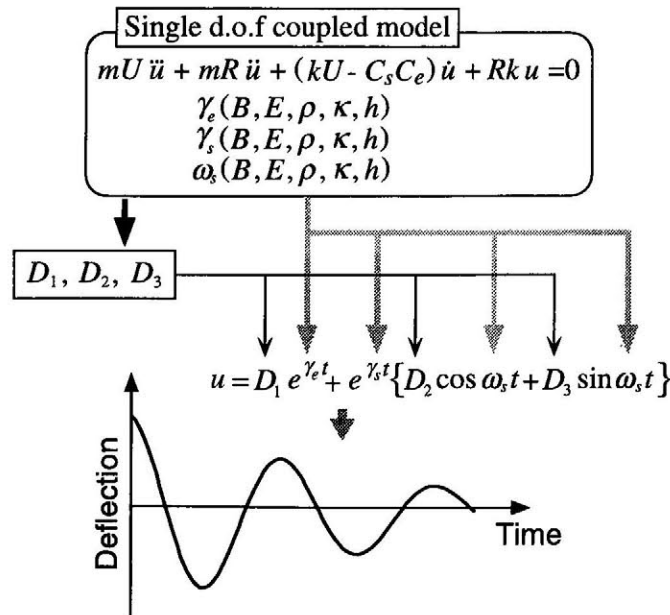


Fig. 3.2 Method using the solution and coupled eigenvalues of the single-degree-of-freedom coupled model

この方法は 3 階微分方程式の解に基づいており、そして、method 1 のように非連成有限要素解析結果を修正することを必要としないため、method 1 よりも高精度かつ高速に磁気減衰振動を得ることができる。また、連成固有値は (3.2),(3.3) 式のように磁場、材料定数、板厚の関数となるため、method 1 と同様に、この方法はパラメータスタディにも適している。さらに、初期変位  $U_0$  を各モードに分離し、各モード毎に本方法で解析し合成すれば、複数の構造モードを必要とする問題にも適用できる。

### 3.3 平板の簡易磁気減衰振動解析

#### 3.3.1 解析問題

Fig. 3.3 に示す、一様磁場中に置かれた平板の磁気減衰振動問題で本簡易解析方法の妥当性を検証する。材料は銅とし、平板の自由端側に初期変位を 10 mm 与えて振動させる。この時、変形速度  $\dot{u}_z$  と磁場  $B_x$  により速度起電力が発生し、この速度起電力によって生じた渦電流と磁場  $B_x$  が磁気減衰として働く電磁力を発生させ、平板の振動は減衰する。

#### 3.3.2 解析結果

##### (a) 外部磁場を変化させた場合

外部定常磁場を  $B_x = 0.2, 0.5, 0.7$  T として解析を行った。それぞれの磁場における平板の自由端変位を Fig. 3.4 に、また、 $C_{es}$ 、 $\sqrt{1 - C_{es}^2 \omega_0}$ 、 $\omega_s$  の値および  $\sqrt{1 - C_{es}^2 \omega_0}$  と  $\omega_s$  の差を Table 3.1

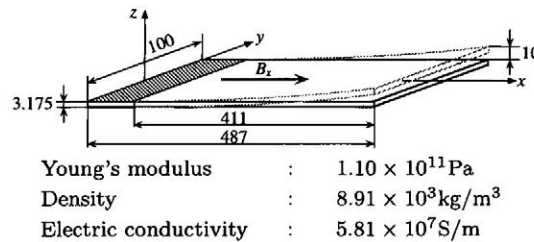


Fig. 3.3 Cantilever plate with the initial deflection in a magnetic field

Table 3.1 The coupling intensity parameter and angular frequencies for different magnetic field

Magnetic field $B_x$ [T]	$C_{es}$	$\sqrt{1 - C_{es}^2 \omega_0}$ [rad/s]	$\omega_s$ [rad/s]	Difference between $\sqrt{1 - C_{es}^2 \omega_0}$ and $\omega_s$ [%]
0.2	0.0374	67.0	67.4	0.704
0.5	0.241	65.0	68.7	5.03
0.7	0.498	58.1	67.8	14.3

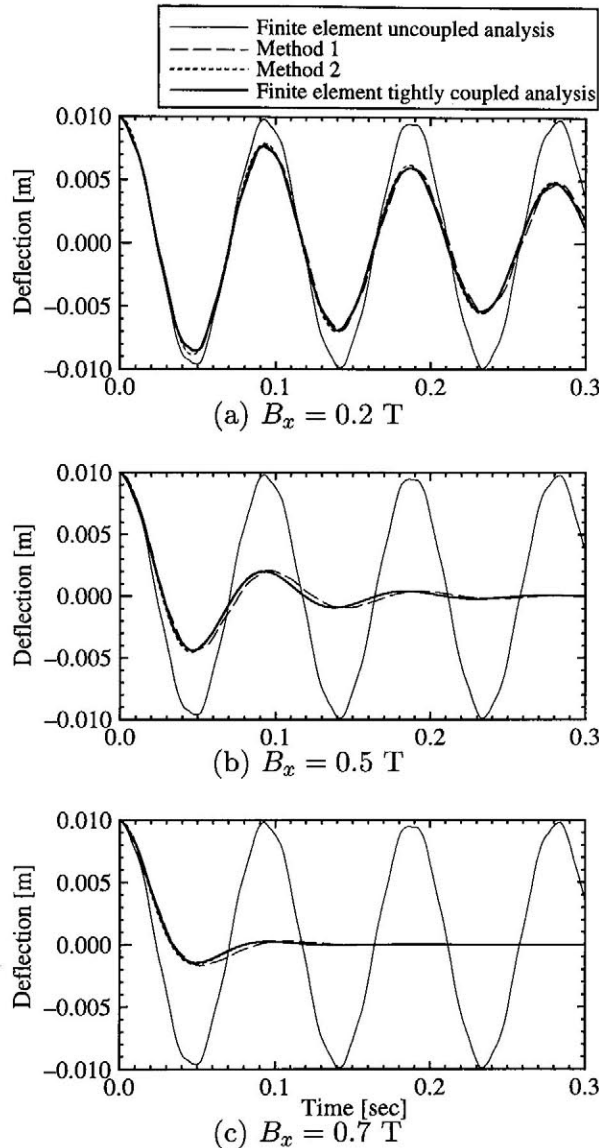


Fig. 3.4 Deflection of the copper plate by simplified analysis methods with different magnetic fields

に示す. method 1 の場合においては,  $B_x = 0.2$  T の時には連成有限要素解析結果と良く一致しているが,  $B_x = 0.5, 0.7$  T の時には, Table 3.1 に示すように  $B_x = 0.2$  T の場合と比べ  $\sqrt{1 - C_{es}^2} \omega_0$  と  $\omega_s$  の差が大きいため連成有限要素解析結果から遅れている. method 2 の場合においては, どの磁場においても, method 1 で見られた振動応答の遅れがない. これは, 構造物と電磁場の連成効果を表す連成固有値を用いているためである.

#### (b) 材料を変えた場合

材料をアルミニウム, 316 ステンレス鋼として解析を行った. 材料定数を Table 3.2 に示す. なお磁場は  $B_x = 0.5$  T とした.

Fig. 3.5 に振動応答, Table 3.3 に  $C_{es}$ ,  $\sqrt{1 - C_{es}^2} \omega_0$ ,  $\omega_s$  の値および角振動数の差を示す. 316 ステンレス鋼においては, Table 3.3 より角振動数の差が 0.003 % と, 十分小さいため, 連成有限要素解析結果と良く一致している. アルミニウムにおいては, 角振動数の差が 6.17 % と無視できない程度に大きい. したがって, 連成有限要素解析結果に対して若干遅れが生じている. これはアルミニウムとステンレス鋼の導電率の違いに起因している. なお, アルミニウムおよび Fig. 3.4(b) の銅における振動応答が似た結果になっているのは, いずれも導電率が良く, 磁気減衰効果が良く似た材料であるためである. method 2 の場合においては, どちらの材料においても連成有限要素解析結果とよく一致している. これは, 連成固有値を用いているためであり, 磁気減衰効果の大きい (導電率の良い) 材料においても高精度に振動応答が得られる.

Table 3.2 Material properties for the analysis

Material	Young's modulus [Pa]	Density [kg/m <sup>3</sup> ]	Electric conductivity [S/m]
Type 316 SS	$1.80 \times 10^{11}$	$7.90 \times 10^3$	$1.38 \times 10^6$
Al	$6.90 \times 10^{10}$	$2.71 \times 10^3$	$3.30 \times 10^7$

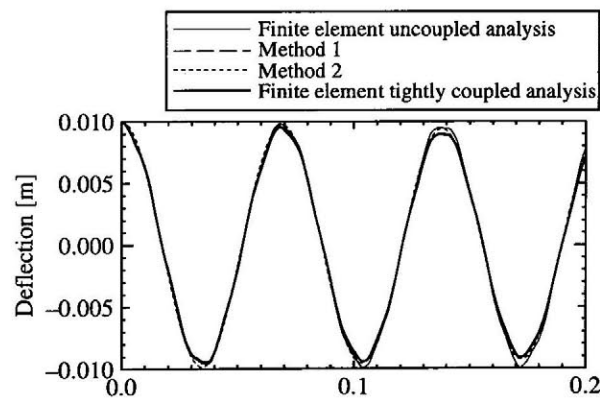
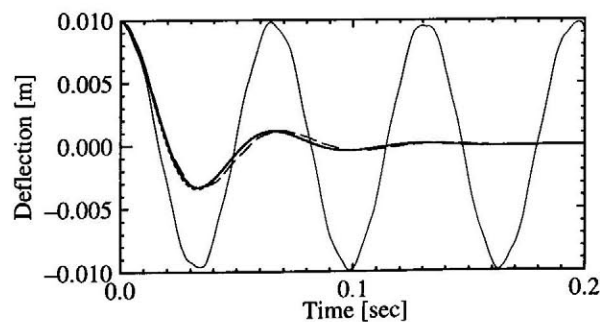
(a) Type 316 SS ( $B_x = 0.5$  T)(b) Al ( $B_x = 0.5$  T)

Fig. 3.5 Deflection of the plates with different materials

Table 3.3 The coupling intensity parameter and angular frequencies for different materials

Material	$C_{es}$	$\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ [rad/s]	$\omega_s$ [rad/s]	Difference between $\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ and $\omega_s$ [%]
Type 316 SS	0.00474	91.1	91.1	0.003
Al	0.320	91.3	97.3	6.18

### 3.3.3 簡易解析方法の有用性

磁気減衰振動を把握するためには、形状と磁場と材料定数を組合せて膨大な解析ケースを設定する必要がある。すべての解析ケースに対し連成有限要素解析を用いれば、磁気減衰振動の把握に長時間が必要となる。T.Takagi らより提案された簡易解析方法<sup>(3.1)</sup>では、Fig. 3.6 に示すように、磁気減衰振動を得る時、常に有限要素解析を必要とするが、ここで提案した簡易解析方法では、それぞれの形状に対して一度、連成有限要素解析を行い比例定数  $P_s$ ,  $P_e$ ,  $P_c$  を決定する。その後で、運動方程式に基づく方法では、各材料、板厚ごとに非連成有限要素解析を行う必要があるが、磁場を変化させた場合は、連成強度パラメータでその結果を修正するだけで磁気減衰振動応答が得られる。なお、連成強度パラメータは磁気減衰振動の定量的なパラメータであるため、各形状に関して連成強度パラメータをデータベース化しておけば、連成有限要素解析を行なう必要がなくなるため、運動方程式に基づく方法は、連成強度パラメータのデータベースがあればさらに有用な簡易解析方法となる。3階微分方程式に基づく方法においては連成固有値の磁場、材料定数、板厚に関する依存性のみを用いてすべてのケースの磁気減衰振動応答を得ることができる。

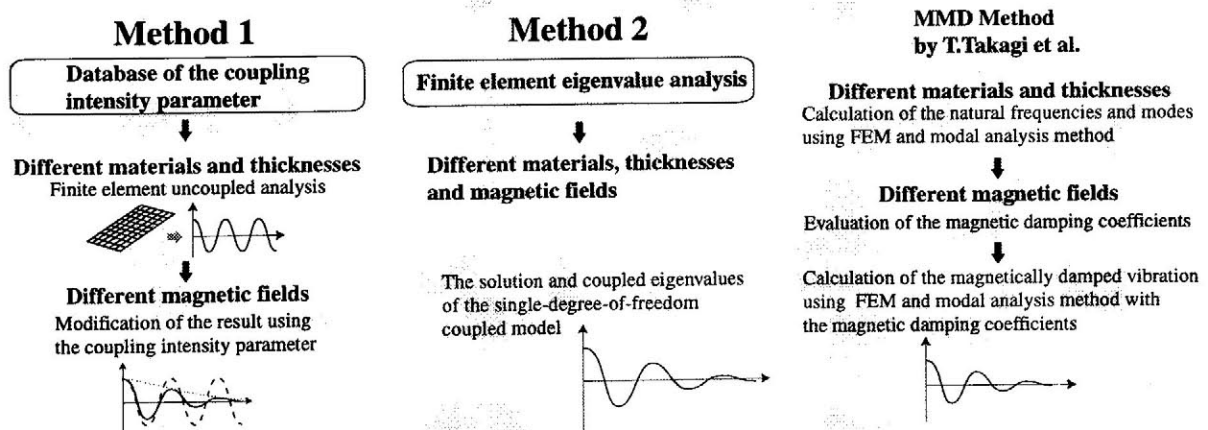


Fig. 3.6 Flow of simplified analysis methods



### 3.4 円筒シェルの簡易磁気減衰振動解析

#### 3.4.1 均一な初期変位を付加した場合

##### (a) 解析問題

Fig. 3.7 に示す半径 1 m, 長さ 2 m, 板厚 10 mm の円筒の磁気減衰振動問題を解析した. 材料はステンレス鋼とし, 下辺を完全に固定し, Fig. 3.7 に示すように, ライン AB に初期変位 (1.3 mm) を与えて振動させる. 複連結問題であるため, 円筒の片側にはヤング率, 密度, 導電率が十分小さい蓋をして, 単連結問題として解析を行なう. 外部定常磁場は  $B_x = 0.5, 1.5$  T とし, 直接時間積分法による連成有限要素解析結果と比較する. 簡易解析方法では, Fig. 3.8 に示す振動モード 3, 6 のそれぞれに簡易解析方法を適用し, それらを合成する.

##### (b) 解析結果

磁場  $B_x = 0.5, 1.5$  T における振動モード 3, 6 の  $C_{es}$ , および角振動数の変化を Table 3.4 に, A 点における振動応答を Fig. 3.9 に示す. method 1 においては,  $B_x = 0.5$  T の場合は連成有限要素解析結果とよく一致しているが,  $B_x = 1.5$  T の場合は, Table 3.4 より, それぞれの振動モードにおいて角振動数の変化が  $B_x = 0.5$  T の場合と比べ大きいため振動応答が若干遅れている.

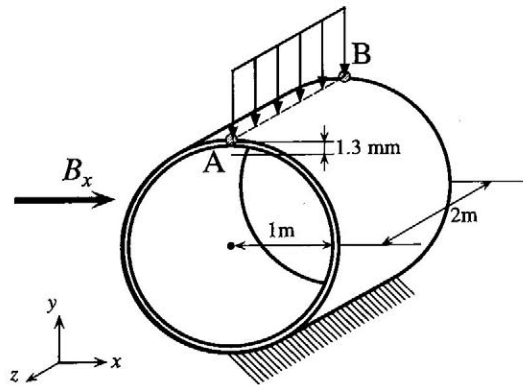


Fig. 3.7 Schematic view of a thin cylinder made of Type 316 SS

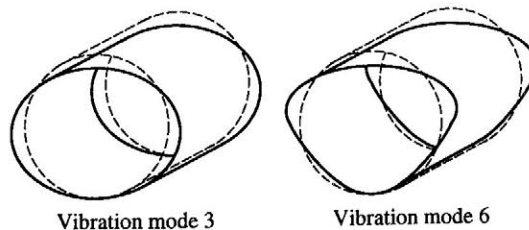


Fig. 3.8 Natural vibration modes of the cylinder

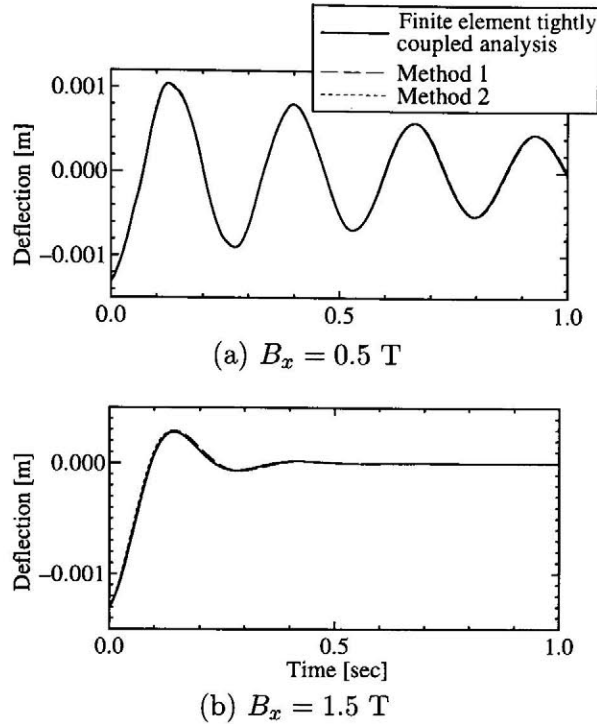


Fig. 3.9 Deflection at point A of the cylinder

Table 3.4 The coupling intensity parameter and angular frequency of each structural mode

Magnetic field $B_x$ [T]	$C_{es}$	$\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ [rad/s]	$\omega_s$ [rad/s]	Difference between $\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ and $\omega_s$ [%]	
Mode 3	0.5	0.0443	23.6	23.7	0.399
	1.5	0.413	21.5	22.8	5.76
Mode 6	0.5	0.0451	85.4	86.4	1.22
	1.5	0.446	76.5	94.0	18.6

method 2 の場合は、どちらの磁場においても連成有限要素解析とよく一致している。このように、平板の場合と同様に、これらの方法は円筒シェル形状にも適用可能である。

### 3.4.2 不均一な初期変位を付加した場合

#### (a) 解析問題

円筒の形状、材料定数および幾何学的境界条件は Fig. 3.7 と同じとして、Fig. 3.10 に示すように、点 A に初期変位を与えて振動させる問題の解析を行った。外部定常磁場は Fig. 3.10 に示すように、円筒とななめ方向に

- $|\mathbf{B}| = 0.5 \text{ T} (B_x = 0.354, B_y = 0.354)$

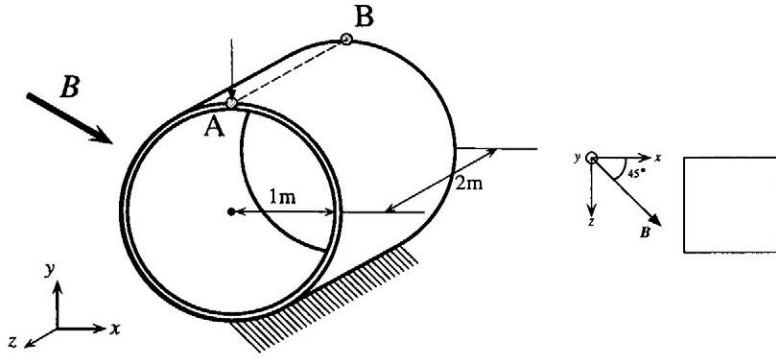


Fig. 3.10 Schematic view of a thin cylinder made of Type 316 SS with initial deflection at point A

- $|\mathbf{B}| = 0.7 \text{ T} (B_x = 0.495, B_y = 0.495)$
- $|\mathbf{B}| = 1.0 \text{ T} (B_x = 0.707, B_y = 0.707)$

の3ケースを設定した。簡易解析においては、Fig. 3.11 に示す振動モード 2, 3, 6, 7 を用いる。

#### (b) 解析結果

Fig. 3.12 に、直接時間積分法による連成有限要素解析より得られた、各磁場における点 A の振動応答を示す。Fig. 3.13 には、振動モード 2, 3, 6, 7, を用いた簡易解析結果を示す。Fig. 3.13 より  $|\mathbf{B}| = 0.5 \text{ T}$  の時は、連成有限要素解析結果と簡易解析結果は良く一致しているが、 $|\mathbf{B}| = 0.7, 1.0 \text{ T}$  の時は、簡易解析で得られた変位に若干の差が見られる。この原因は、振動モード 2, 3, 6, 7 だけで簡易解析を行い、そして、Tabel 3.5 に示すように、 $|\mathbf{B}| = 0.5 \text{ T}$  の時に比べ  $|\mathbf{B}| = 0.7, 1.0 \text{ T}$  の時の振動モードにおいて角振動数の変化が大きいためである。しかし、この若干の差は簡易解析においては十分許容できる範囲であるといえ、ここで提案した簡易解析方法により、磁気減衰振動応答を簡易的に予測し、設計作業の高速化を計ることができるようになると考えられる。

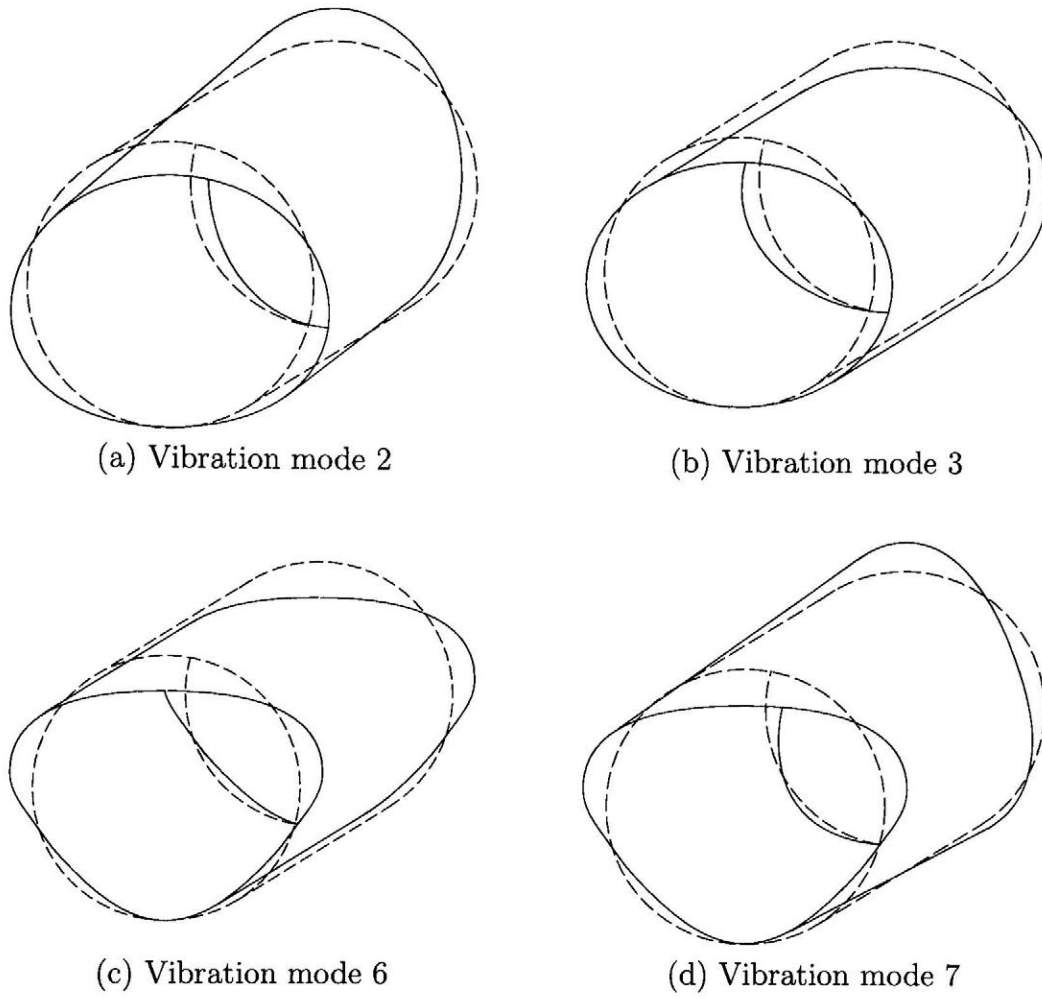


Fig. 3.11 Vibration modes of the cylinder

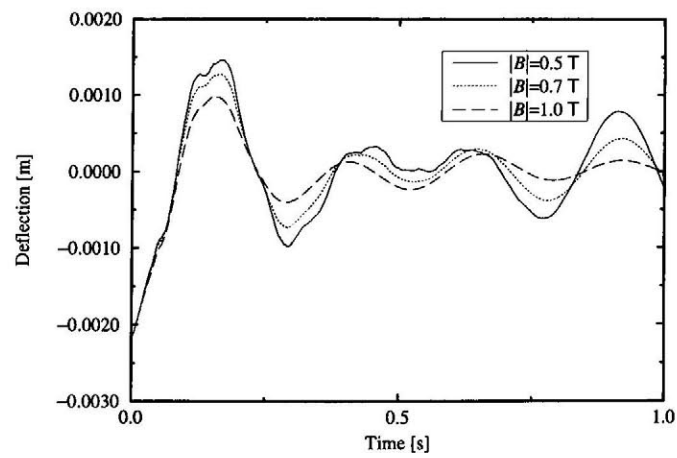


Fig. 3.12 Deflection at point A with different magnetic fields by direct time integration method

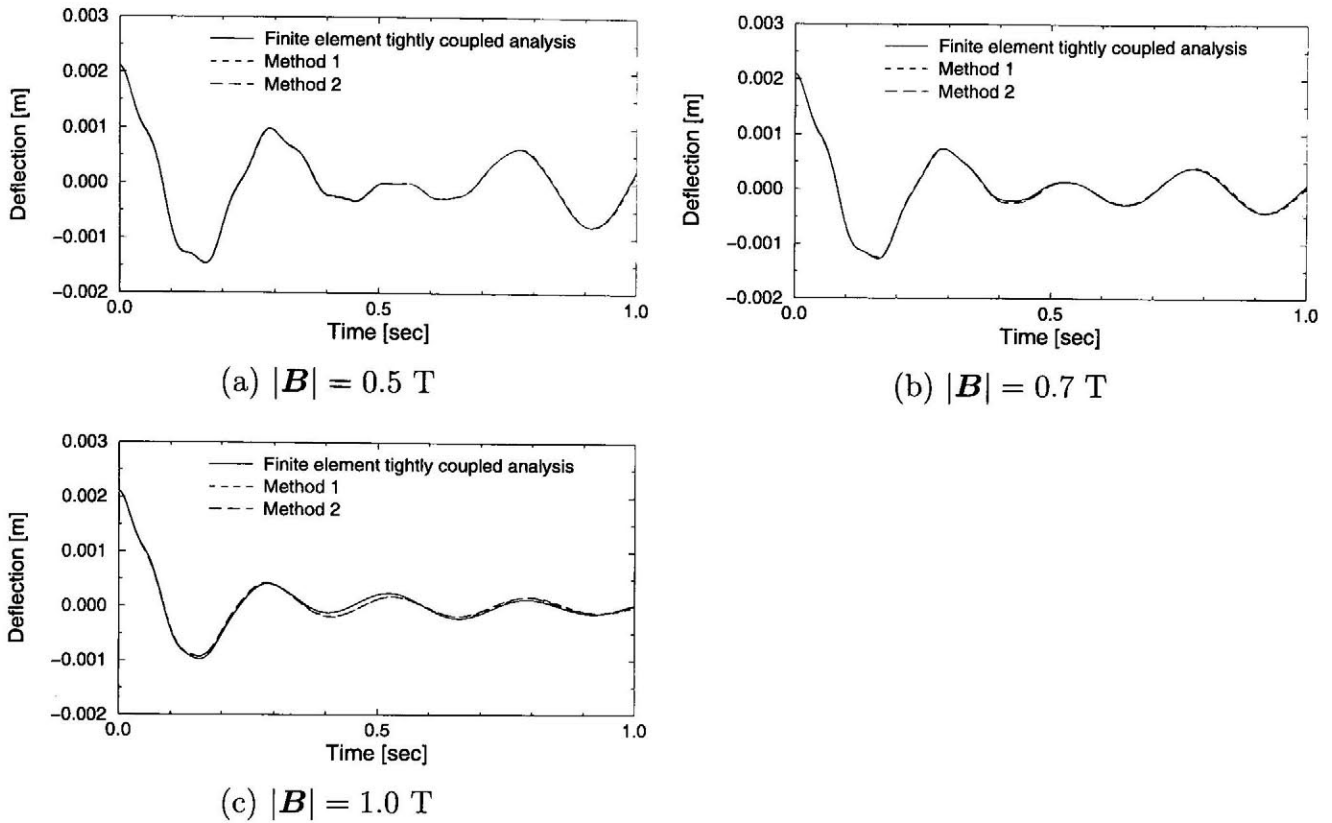


Fig. 3.13 Vibration at point A of the cylinder with different magnetic fields

Table 3.5 The coupling intensity parameter and angular frequencies of each structural mode 2, 3, 6, 7

Magnetic field $B_x$ [T]	$C_{es}$	$\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ [rad/s]	$\omega_s$ [rad/s]	Difference between $\sqrt{1-C_{es}^2}\omega_0$ and $\omega_s$ [%]	
Mode 2	0.5	0.064	17.8	17.9	0.373
	0.7	0.128	17.7	17.83	0.641
	1.0	0.286	17.1	17.34	1.319
Mode 3	0.5	0.022	23.6	23.7	0.193
	0.7	0.043	23.6	23.7	0.465
	1.0	0.087	23.5	23.8	1.119
Mode 6	0.5	0.023	85.4	85.8	0.473
	0.7	0.046	85.4	85.9	0.692
	1.0	0.097	85.0	85.1	0.037
Mode 7	0.5	0.033	88.3	89.1	0.883
	0.7	0.064	88.2	89.9	1.915
	1.0	0.129	87.6	91.9	4.714

## 3.5 おわりに

磁気減衰振動応答を求める2つの簡易解析方法を提案し、これらの手法で得られた振動応答と連成有限要素解析結果を比較し、その有用性を検討した。その結果をまとめると

- 運動方程式に基づく方法を提案した。この方法は磁気減衰振動の定量的な評価パラメータである連成強度パラメータを用いた方法であり、連成強度パラメータのデータベースと組み合わせて使用する際に有用な方法である。この方法を平板のたわみ磁気減衰振動問題、および、複数の振動モードが必要となる円筒シェルの磁気減衰振動問題に適用し、得られた振動応答を連成有限要素解析結果と比較した。その結果磁気減衰が強くなると振動応答に若干遅れが見られたが、磁気減衰振動を近似的に得ることができる。
- 3階微分方程式に基づく方法を提案した。運動方程式に基づく方法と同様に、平板および円筒シェルの磁気減衰振動問題にこの方法を適用し、得られた振動応答を連成有限要素解析結果と比較した。その結果、この方法は、連成固有値と3階微分方程式の振動解を用いているため、運動方程式に基づく方法よりも高精度に磁気減衰振動応答を得ることができる。

である。どちらの簡易解析方法においても、実用上十分な精度で解析を行なえるため、これらの方法で磁気減衰振動応答のパラメータスタディを行うことは、磁気減衰効果を考慮した機器を効率良く設計する上で有効である。

## 参考文献

- (3.1) T. Takagi and J. Tani, "A new numerical analysis method of dynamic behavior of a thin plate under magnetic field considering magnetic viscous damping effect", *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, **4**, 35-42, 1993.
- (3.2) T. Takagi and J. Tani, "Evaluation of critical magnetic viscous damping ratios for plate vibrations with different boundary conditions", in *Simulation and Design of Applied Electromagnetic Systems*(ed. T. Honma), pp. 101-104, 1994, Elsevier, Amsterdam.
- (3.3) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, "Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall", *Fusion Eng. Des.*, **27**, 473-480, 1995.
- (3.4) T. Horie, T. Niho and T. Kawano, "Coupling intensity parameter and its dependence for magnetic damping problem", in *Electromagnetic Phenomena Applied to Technology*(eds. M. Enokizono, T. Todaka), pp. 61-68, 1996, JSAEM, Tokyo.
- (3.5) 二保知也, 堀江知義, 田中義和, "磁気減衰振動現象の評価パラメータ (第2報 連成強度パラメータによる磁気減衰振動特性評価)", 日本機械学会論文集 (C), **65**-635, 2643-2650, 1999.
- (3.6) T. Horie, T. Niho and Y. Tanaka, "Evaluation method of magnetic damping effect for fusion reactor first wall", *Fusion Eng. Des.*, **42**, 401-407, 1998.
- (3.7) 堀江知義, 二保知也, "磁気減衰振動問題における連成モード合成法", 日本機械学会論文集 (C), **63**-609, 1455-1461, 1997.

## 第 4 章

# 磁場中における共振特性

### 4.1 はじめに

核融合炉や磁気浮上列車においては、導電性の構造物が強磁場中に設置される。このような構造物においては、電磁場と構造物の相互作用による電磁構造連成現象が生じるが、この現象は一般に構造物の変形を抑えるように働くため磁気減衰現象と呼ばれる。このため、地震波による強制振動時の磁気減衰振動特性を明らかにすることは、耐震設計<sup>(4.1)</sup>を行う上で重要になると考えられる。

これまで、磁気減衰現象に関する研究として、平板のたわみ磁気減衰振動問題 “Cantilevered Beam in A Crossed Field”<sup>(4.2)</sup> と平板のねじり磁気減衰振動問題 “Magnetic Damping in Torsional Mode”<sup>(4.3)</sup> が、TEAM(Testing Electromagnetic Analysis Method)で設定され、解析方法の提案・検証が行われてきた。磁気減衰現象の評価パラメータに関する研究としては、Takagi らは渦電流のジュール熱損失に基づいた Critical magnetic viscous damping ratio を定義し、磁場、材料定数、板厚に対する依存性の調査<sup>(4.4)</sup>、簡易解析への応用を行っている。Yoshida らは、無次元化された磁気減衰振動の微分方程式に現われる無次元パラメータを Magnetic damping parameter と定義し、縮小モデル実験の条件決定に適用している<sup>(4.5)</sup>。Horie らは、連成の強さを表すパラメータとして、連成固有値に基づいた連成強度パラメータを定義し、磁場、材料定数、板厚に対する依存性の式を導出している<sup>(4.6)</sup>。しかし、耐震設計において重要である強制振動状態における磁気減衰振動特性に関する研究はほとんど行われていない。

一般の減衰振動においては、その振動特性は 2 階微分方程式に基づく。しかし、磁気減衰振動においては、振動特性は一般の減衰振動と異なり 3 階微分方程式で記述されるため強制振動特性が、一般の減衰振動と異なると考えられる。また、3 階微分方程式に基づくため、固有値は磁場によって変化するという特徴を持つために、機器の設計で重要である共振振動数が、特異な変化をすると考えられる。そこで、本章では、強磁場中に置かれる平板の強制振動特性に対して、有限要素解析および 1 自由度連成モデルを用いて検討する。



## 4.2 周期的外力による強制振動

### 4.2.1 磁気減衰時の共振特性

1自由度系の電磁構造連成問題における運動方程式は、変位  $u$  および電流ポテンシャル  $T$  を未知係数として、

$$m\ddot{u} + C_s T + ku = F^{ex} \quad (4.1)$$

とあらわされる。ここで、 $m$  は質量、 $k$  は剛性、 $F^{ex}$  は外荷重であり、 $C_s T$  は電磁力に対応する。一方、渦電流に関する支配方程式は、

$$U\dot{T} + C_e \dot{u} + RT = \dot{B}^{ex} \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $U$  はインダクタンス、 $R$  は抵抗、 $\dot{B}^{ex}$  は外部変動磁場の時間変化をあらわす。これら、(4.1)、(4.2) 式を組合せることによって、連成系の運動方程式として、

$$mU\ddot{u} + mR\ddot{u} + (kU - C_e C_s)\dot{u} + kRu = U\dot{F}^{ex} + RF^{ex} - C_s \dot{B}^{ex} \quad (4.3)$$

が得られる。

定常磁場中における強制振動状態では、外部変動磁場  $B^{ex}$  を無視し、また、外荷重を

$$F^{ex} = F_0 \sin \omega_f t \quad (4.4)$$

とすると、(4.3) 式の連成系の運動方程式は

$$mU\ddot{u} + mR\ddot{u} + (kU - C_e C_s)\dot{u} + kRu = U\omega_f F_0 \cos \omega_f t + RF_0 \sin \omega_f t \quad (4.5)$$

となる。この (4.5) 式より特性方程式は

$$\lambda^3 + \frac{R}{U}\lambda^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{C_e C_s}{mU}\right)\lambda + \frac{Rk}{Um} = 0 \quad (4.6)$$

となる。上式を解くことによって得られる固有値は

$$-\gamma_e = -\frac{1}{3}\frac{R}{U} + \left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} -\gamma_s \pm \omega_s i &= -\frac{1}{3}\frac{R}{U} - \frac{\left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\ &\quad \pm \frac{-\left\{b - \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{b + \sqrt{b^2 + a^3}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{3}i \end{aligned} \quad (4.8)$$

ただし、

$$a = -\frac{1}{9}\frac{R^2}{U^2} + \frac{1}{3}\frac{k}{m} - \frac{1}{3}\frac{C_e C_s}{mU} \quad b = -\frac{1}{27}\frac{R^3}{U^3} - \frac{1}{3}\frac{kR}{mU} - \frac{1}{6}\frac{RC_e C_s}{Um} \quad (4.9)$$

となり、3つの固有値が得られる。ここで、 $C_s = C_e = 0$ 、すなわち、非連成問題においては、(4.7)、(4.8)式の固有値は、それぞれ

$$\alpha_1 = -\frac{R}{U} = -\gamma_0 \quad (4.10)$$

$$\alpha_2, \alpha_3 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i = \pm \omega_0 i \quad (4.11)$$

となり、これらはそれぞれ非連成問題における渦電流の固有値、および、構造の固有値となる。したがって、(4.7)、(4.8)式はそれぞれ連成系の渦電流、および、構造の固有値を表している。

### (a) 特性方程式の判別式

ここでは、(4.6)式の判別式を導く。(4.6)式の判別式を導くために、ここでは、次の3次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (4.12)$$

について考える。(4.12)式の判別式  $d$  は

$$d = -4 \left( -\frac{a^2}{3} + b \right)^3 - 27 \left( \frac{2}{27} a^3 - \frac{ab}{3} + c \right)^2 \quad (4.13)$$

となる(4.7)。この判別式  $d$  を用いて、

$$\begin{aligned} d > 0 & \quad \text{ならば、解は3つの実根} \\ d = 0 & \quad \text{ならば、解は、単根と2重根、もしくは3重根} \\ d < 0 & \quad \text{ならば、解は1つの実根と1つの共役複素根} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。よって、磁気減衰振動における3次方程式の判別式  $d$  は

$$d = -4 \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{R}{U} \right)^2 + \frac{k}{m} - \frac{C_e C_s}{mU} \right]^3 - 27 \left[ \frac{2}{27} \left( \frac{R}{U} \right)^3 - \frac{1}{3U} \left( \frac{k}{m} - \frac{C_e C_s}{mU} \right) + \frac{R}{U} \frac{k}{m} \right]^2 \quad (4.15)$$

となる。

### (b) $d < 0$ における特解

定常磁場中における強制振動状態の運動方程式である(4.5)式の一般解は、(4.5)式の斉次方程式の解と特解の和

$$u = C_1 e^{-\gamma_e t} + e^{-\gamma_s t} (C_2 \sin \omega_s t + C_3 \cos \omega_s t) + A \sin(\omega_f t + \phi) \quad (4.16)$$

ただし、

$$A = \sqrt{\frac{\gamma_0^2 + \omega_f^2}{(\gamma_e^2 + \omega_f^2) \{ (\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2 \omega_s^2 \}}} \frac{F_0}{m} \quad (4.17)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\{ (\gamma_s^2 + \omega_s^2 - \omega_f^2) (\gamma_e - \gamma_0) - 2\gamma_s (\gamma_e \gamma_0 + \omega_f^2) \} \omega_f}{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 - \omega_f^2) (\gamma_e \gamma_0 + \omega_f^2) + 2\gamma_s \omega_f^2 (\gamma_e - \gamma_0)} \quad (4.18)$$

となる. ここで,  $C_1, C_2, C_3$  は初期条件によって決定される定数,  $\omega_0$  と  $\gamma_0$  はそれぞれ磁場が印加されていない状態における平板の固有角振動数と渦電流の減衰率である. この (4.16) 式から, 定常磁場中における強制振動状態の運動方程式の一般解は, 非振動解と振動解で構成されることがわかる. また, 時間が十分経過した時における振動応答は, (4.16) 式の第 1, 2 項目が減衰するために, (4.16) 式の第 3 項目, すなわち特解となる.

次に共振振動数について述べる. (4.17) 式の振幅  $A$  の平方根内を,

$$f(\omega_f) = \frac{\gamma_0^2 + \omega_f^2}{(\gamma_e^2 + \omega_f^2) \{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2\omega_s^2\}} \quad (4.19)$$

とし,  $\gamma_0 \approx \gamma_e$  と仮定すると,

$$f(\omega_f) = \frac{1}{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2\omega_s^2} \quad (4.20)$$

となる. この (4.20) 式の分母が小さくなると振幅  $A$  が大きくなるため

$$g(\omega_f) = \frac{1}{f(\omega_f)} = (\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2\omega_s^2 \quad (4.21)$$

として  $g(\omega_f)$  の極小値を求める. (4.21) 式の 1 階微分がゼロ, すなわち,

$$\dot{g}(\omega_f) = 4\omega_f(\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2) - 8\omega_s^2\omega_f = 0 \quad (4.22)$$

より  $\omega_f > 0$  である  $\omega_f$  は

$$\omega_f = \sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2} \quad (\omega_s > \gamma_s) \quad (4.23)$$

となる. したがって, (4.21) 式は (4.23) 式が与える  $\omega_f$  のときに極値をとることがわかる. また, (4.21) 式を 2 階微分した式に (4.23) 式を代入すると,

$$\ddot{g}(\omega_f) = 8(\omega_s^2 - \gamma_s^2) > 0 \quad (4.24)$$

となるため, (4.21) 式は極値が 1 つで  $\ddot{g}(\omega_f) > 0$  であることがわかる. このため, (4.21) 式は (4.23) 式のとき最小値, すなわち (4.20) 式が最大値となり振幅  $A$  も最大値となる. したがって, (4.23) 式が磁気減衰振動問題の周期的外力による強制振動状態の共振振動数となる. なお, 評価式 (4.17) 式の値を得るためには, 連成固有値  $\gamma_e, -\gamma_s \pm \omega_s i$  の値を決定する必要があるが, 連成固有値の磁場, 材料定数に関する依存性<sup>(4.6)</sup> を用いれば, (4.17) 式の磁場, 材料定数に関する依存性を得ることができる.

### (c) $d \geq 0$ における特解

この時 特性方程式の解は, 3 つの実根であり, ここでは, 3 つの実根を  $-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3$  とおく. この時 (4.5) 式の特解  $x$  は

$$x = A \sin(\omega_f t + \phi) \quad (4.25)$$

ここで, 振幅  $A$ , 位相角  $\phi$ , は  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  を用いて

$$A = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{\omega_f^2 + \gamma_0^2}{(\gamma_1^2 + \omega_f^2)(\gamma_2^2 + \omega_f^2)(\gamma_3^2 + \omega_f^2)}} \quad (4.26)$$

Table 4.1 Material properties

Material	Young's modulus $E$ [Pa]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Electric conductivity $\kappa$ [S/m]
Copper	$1.10 \times 10^{11}$	$8.91 \times 10^3$	$5.81 \times 10^7$
Aluminum	$6.90 \times 10^{10}$	$2.71 \times 10^3$	$3.30 \times 10^7$
316SS	$1.80 \times 10^{11}$	$7.90 \times 10^3$	$1.38 \times 10^6$

$$\tan^{-1} \phi = \frac{\omega_f (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \omega_f^2 - \gamma_2 \omega_f^2 - \gamma_3 \omega_f^2) - \gamma_0 (\gamma_1 \gamma_2 \omega_f + \gamma_2 \gamma_3 \omega_f + \gamma_3 \gamma_1 \omega_f - \omega_f^3)}{\omega_f (\gamma_1 \gamma_2 \omega_f + \gamma_2 \gamma_3 \omega_f + \gamma_3 \gamma_1 \omega_f - \omega_f^3) + \gamma_0 (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \omega_f^2 - \gamma_2 \omega_f^2 - \gamma_3 \omega_f^2)} \quad (4.27)$$

となる。

#### 4.2.2 有限要素解析による妥当性の検証

##### (a) 解析問題

解析問題は、Fig. 4.1 に示す 一様な定常磁場中に設置された TEAM ベンチマーク問題 # 12 と同じ形状の平板とする。Fig. 4.1 に示すように、自由端側を加振させ、加振力の角振動数  $\omega_f$  を変化させて有限要素法で解析する。外部定常磁場は  $B_x = 0.5$  T とし、板厚は 3.175 mm と 5.0 mm の 2 通りとする。平板の材料は、Table 4.1 に示すように銅、アルミニウム、316SS の 3 種類とする。

##### (b) 解析結果

有限要素解析より得られた、各板厚における、固有角振動数  $\omega_0$ 、磁場中における角振動数  $\omega_s$ 、 $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$ 、連成強度パラメータ  $C_{es}$ 、 $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}/\omega_0$ 、加振振動数  $\omega_f$  が  $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$  における  $A/u_0$  の値を Table 4.2, 4.3 に示す。銅を用いた場合の、平板の自由端における振動応答、共振曲線をそれぞれ Fig. 4.2(a,b), Fig. 4.2(c,d) に示す。Fig. 4.2(c,d) には、1 自由度連成モデルより得た評価式 (4.17) 式より得られた共振曲線も示しているが、評価式 (4.17) 式の値は連成固有値  $\gamma_e, -\gamma_s \pm \omega_s i$

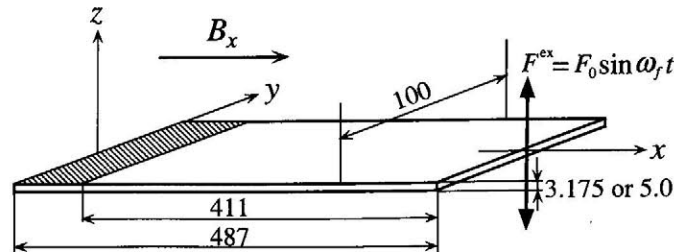


Fig. 4.1 A cantilevered plate with external harmonic force in steady magnetic field  $B_x$

Table 4.2 Various parameters with different materials (thickness = 3.175 mm)

Material	$\omega_0$ [1/s]	$\omega_s$ [1/s]	$\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$ [1/s]	$\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}/\omega_0$	$C_{es}$	$A/u_0$
Copper	67.0	68.7	66.6	0.993	0.241	2.12
Aluminum	96.3	96.4	91.1	0.947	0.320	1.64
316SS	91.1	91.1	91.1	1.00	0.0047	105

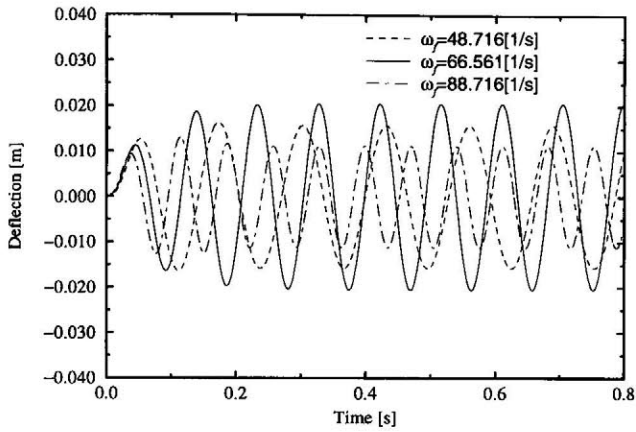
Table 4.3 Various parameters with different materials (thickness = 5.0 mm)

Material	$\omega_0$ [1/s]	$\omega_s$ [1/s]	$\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$ [1/s]	$\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}/\omega_0$	$C_{es}$	$A/u_0$
Copper	106	112	111	1.05	0.127	3.86
Aluminum	152	161	159	1.05	0.179	2.77
316SS	143	143	143	1.00	0.003	167

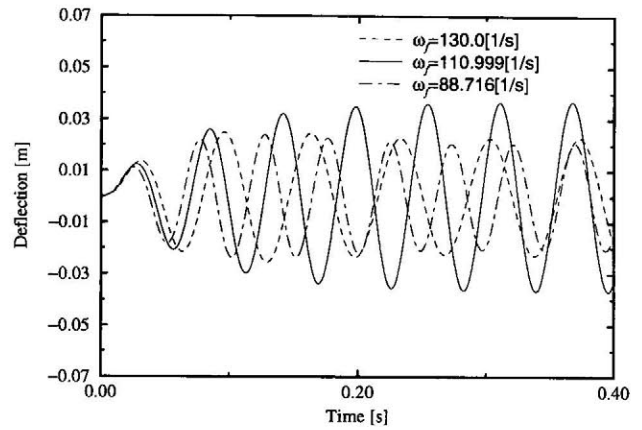
の磁場, 材料定数に関する依存性<sup>(4,6)</sup>を用いて決定している. Fig. 4.2(c,d) より有限要素解析結果と評価式は良く一致していることがわかる. Fig. 4.2 より, 加振振動数  $\omega_f$  が  $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$  の時, 振幅が最大となっていることがわかる. 板厚 3.175 mm においては, 共振振動数を固有振動数で規格化した値が  $\omega_f/\omega_0 = 0.993$  で共振状態となっている. 一方, 板厚 5.0 mm においては,  $\omega_f/\omega_0 = 1.05$  で共振状態となる.

アルミニウムを用いた場合の, 平板の自由端における振動応答, 共振曲線をそれぞれ Fig. 4.3(a,b), Fig. 4.3(c,d) に示す. Fig. 4.3(c,d) には, 1 自由度連成モデルより得た評価式 (4.17) 式より得られた共振曲線も示しているが, 有限要素解析結果と評価式は良く一致していることがわかる. 板厚 3.175 mm においては,  $\omega_f/\omega_0 = 0.947$  で共振状態となり, 板厚 5.0 mm においては,  $\omega_f/\omega_0 = 1.05$  で共振状態となっている.

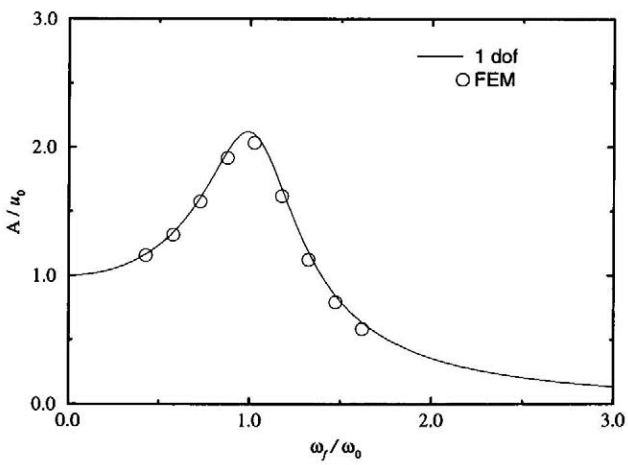
316SS を用いた場合の, 平板の自由端における振動応答, 共振曲線を Fig. 4.4 に示す. 解析時間内で定常状態とならなかったため, 有限要素解析による共振曲線は図にプロットしていない. これは, 減衰が小さい ( $C_{es} = 0.0030 \sim 0.0047$ ) ため, 共振状態においては, 振幅は常に増加していく. ただし, 解析時間を十分長くとれば, 定常状態になると考えられる. よって, 磁場中においては, Table 4.2,4.3 より, 平板の角振動数が変化するため, 共振角振動数が平板の固有角振動数とはならないといえる. また, 磁気減衰が強い, すなわち連成強度パラメータが大きいと, 振幅が小さくなる.



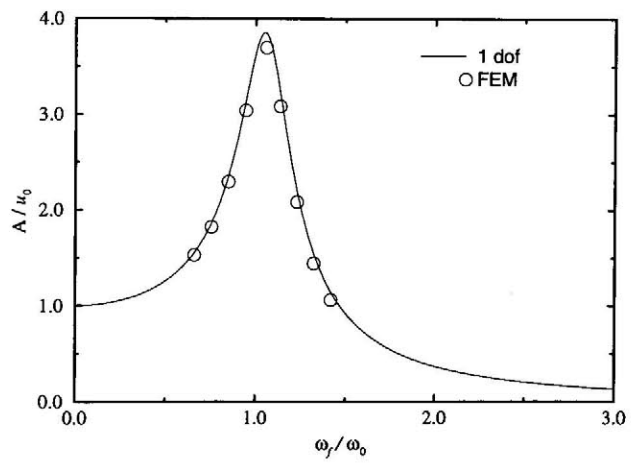
(a) Deflection (thickness = 3.175 mm)



(b) Deflection (thickness = 5.0 mm)

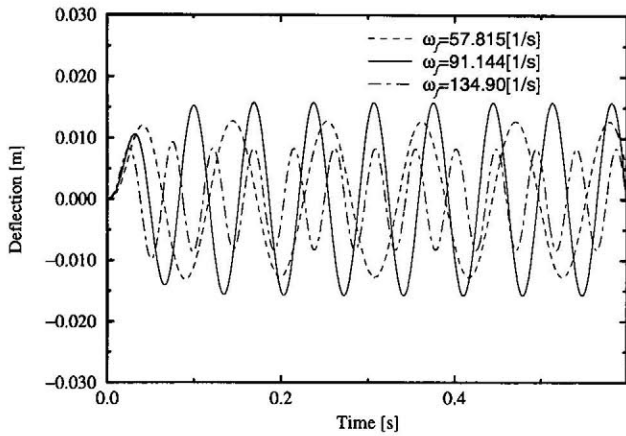


(c) Resonance curve (thickness = 3.175 mm)

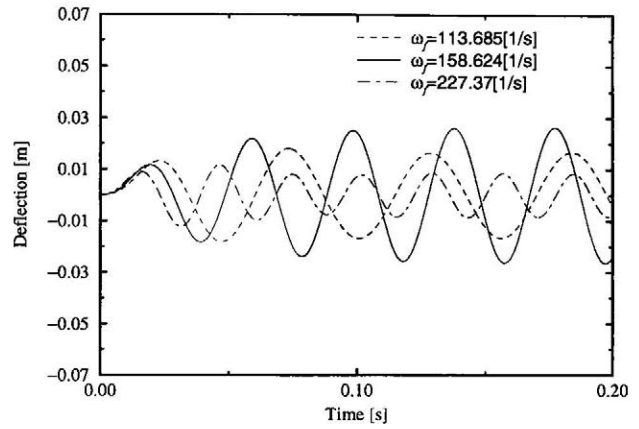


(d) Resonance curve (thickness = 5.0 mm)

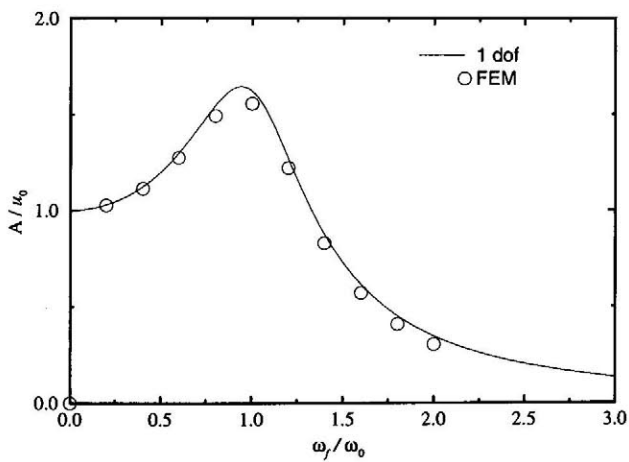
Fig. 4.2 Resonance curve and deflection at the free end under the harmonic force(copper)



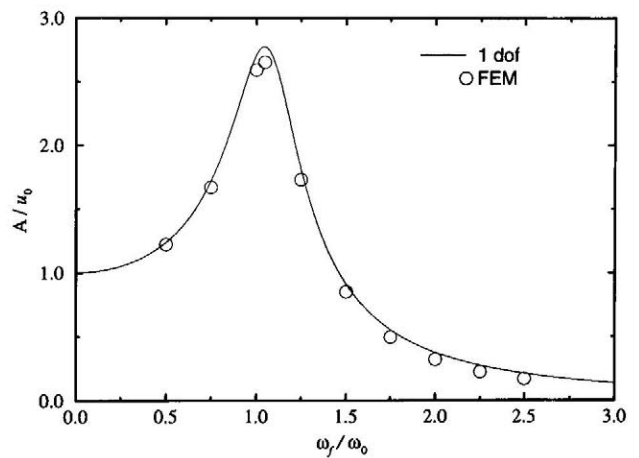
(a) Deflection (thickness = 3.175 mm)



(b) Deflection (thickness = 5.0 mm)

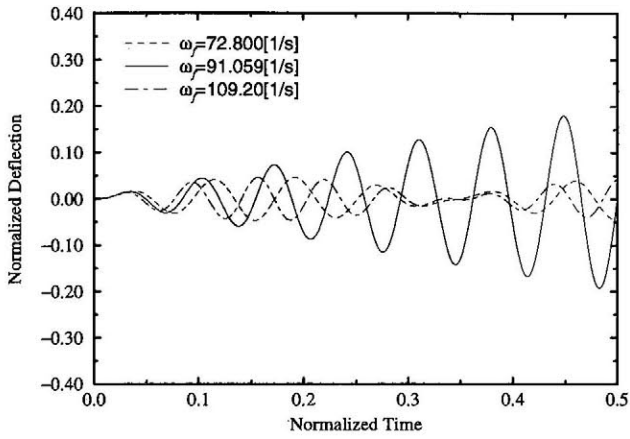


(c) Resonance curve (thickness = 3.175 mm)

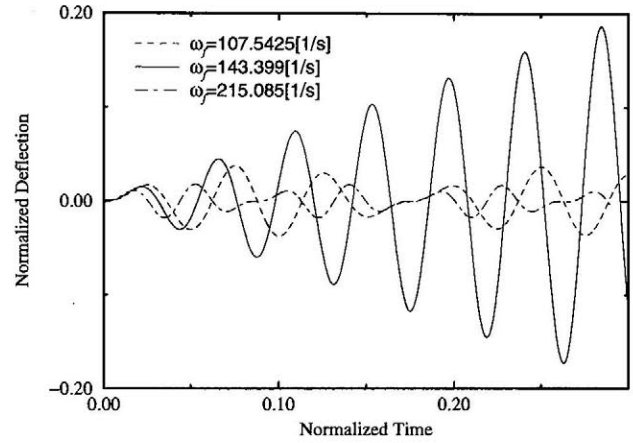


(d) Resonance curve (thickness = 5.0 mm)

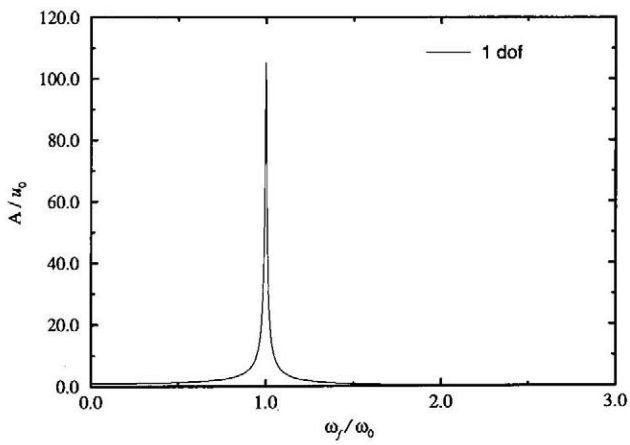
Fig. 4.3 Resonance curve and deflection at the free end under the harmonic force(aluminum)



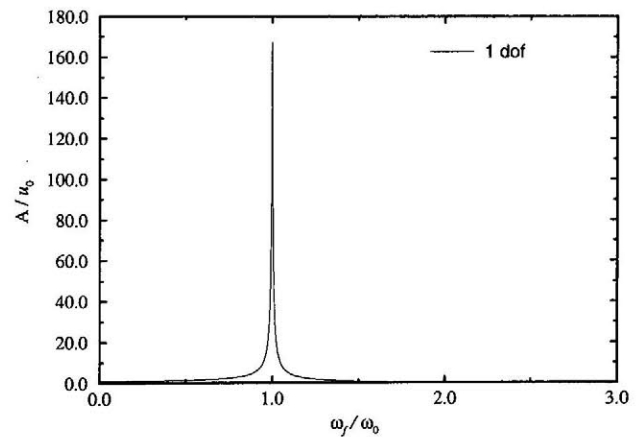
(a) Deflection (thickness = 3.175 mm)



(b) Deflection (thickness = 5.0 mm)



(c) Resonance curve (thickness = 3.175 mm)



(d) Resonance curve (thickness = 5.0 mm)

Fig. 4.4 Resonance curve and deflection at the free end under the harmonic force(316SS)



### 4.2.3 共振振動数の変化

ここでは、板長さ、板幅は Fig. 4.1 と同じとし、板厚、材料を変えて共振特性について検討する。板厚は 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 mm と変え、材料は銅、アルミニウム、316 SS の3種類とする。

1自由度連成モデルの評価式 (4.17) 式より得られた銅における磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係をそれぞれ Fig. 4.5 (a,b) に示す。Fig. 4.5(a) より、板厚が 1.0, 2.0, 3.0 mm においては、磁場が強くなるにしたがい共振振動数は減少し、0 となる。0 となった時には  $\gamma_s > \omega_s$  となっており、共振振動数は存在しない。一方、板厚が 4.0, 5.0 mm においては、磁場が強くなるにしたがい、共振振動数が増加している。共振振動数は  $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$  によって計算されるが、Fig. 4.6 に板厚 2.0 mm と 4.0 mm における  $\gamma_s, \omega_s$  と磁場の関係を示しており、板厚 2.0 mm と薄い場合には減衰率  $\gamma_s$  が磁場が強くなるにしたがい、 $\omega_s$  よりも大きくなるため、共振振動数は減少する。板厚 4.0 mm においては、板厚が厚いため  $\omega_s$  が 2.0 mm の時に比べて大きくなり、 $\gamma_s$  と  $\omega_s$  が逆転することがなくなり、かつ共振振動数は  $\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$  で計算されるため、共振振動数の変化は 2.0 mm の場合と異なり、常に減少することがなくなる。振動振幅は Fig. 4.5(b) より、どの板厚においても磁場が強くなるにしたがい減少していくことがわかる。よって、板厚が厚い場合には、一般の減衰振動とは異なり、固有振動数よりも大きい振動数で共振状態となるが、共振状態における振幅は小さいといえる。

Fig. 4.7(a,b) はアルミニウムにおける磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係であり、銅の場合と同様に、板厚が厚い場合には、固有振動数よりも大きい振動数で共振状態となるが、共振状態における振幅は大きくない。銅と同じ傾向になったのは、渦電流にもっとも影響を与える導電率の値が、ほぼ同じ値であったためである。

Fig. 4.8(a,b) には 316 ステンレス鋼における磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係を示している。共振振動数は、磁場が増加するとともに減少しているが、振幅比の値は、銅およびアルミニウムに比べ大きい。これは、316 ステンレス鋼の導電率は、銅およびアルミニウムのそれにくらべ 1 桁も小さいために磁気減衰効果が小さくなっているためである。よって、導電率の高い材料を用いれば、磁気減衰効果により強制振動時の振動振幅を抑えることができるといえる。

なお、以上においては、磁場が 1.5 T を越えると共振状態が存在しないため、磁場 1.5 T までについて検討を行っているが、Fig. 4.9 に、加振振動数比が 1.0 において磁場 (5.0 T から 10.0 T) と振動振幅比の関係を示している。なお、平板は銅性とした。同図には、連成有限要素解析結果と 1 自由度連成モデルの評価式から得られた結果を示しているが、その誤差は最大で 8 % であり、磁場 10.0 T といった強磁場においても本評価方法で強制振動特性を検討できる。

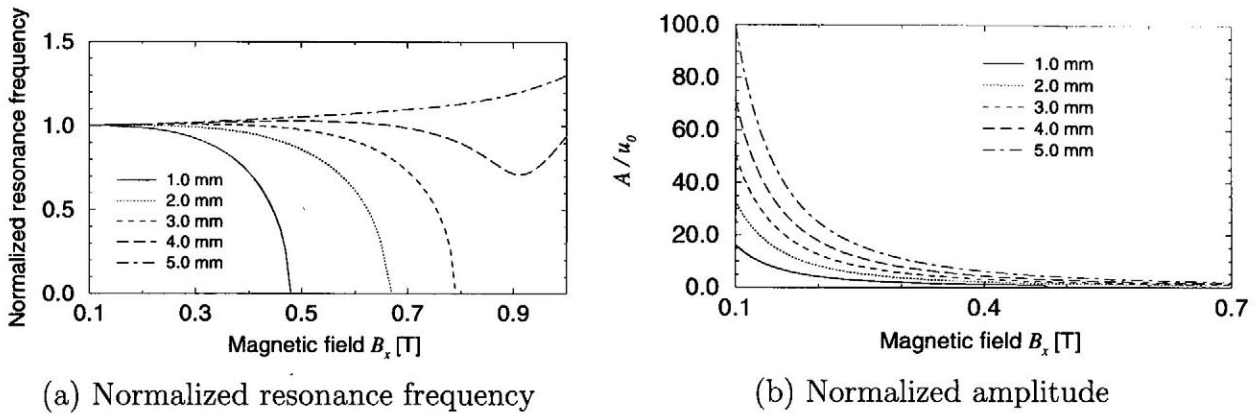


Fig. 4.5 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic force(copper)

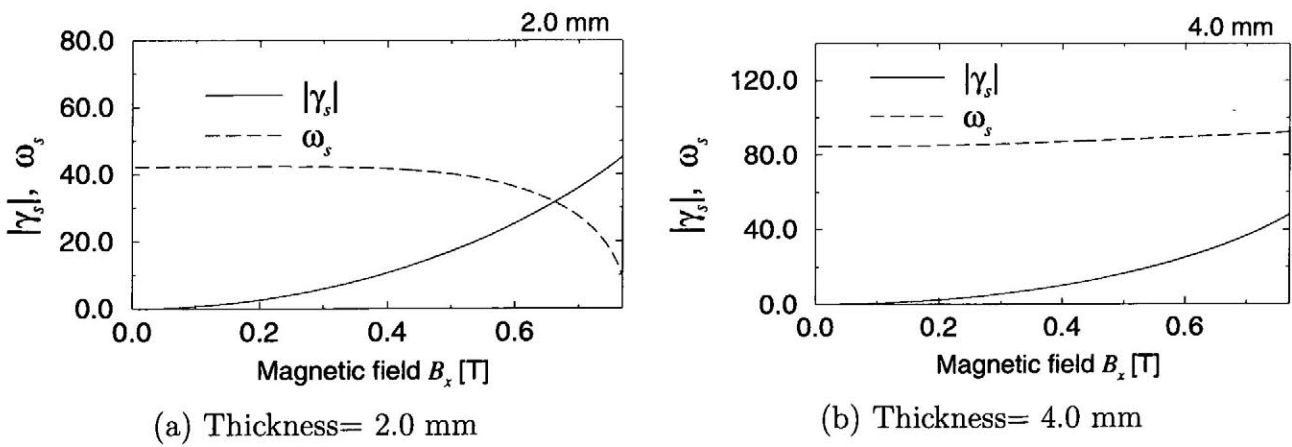
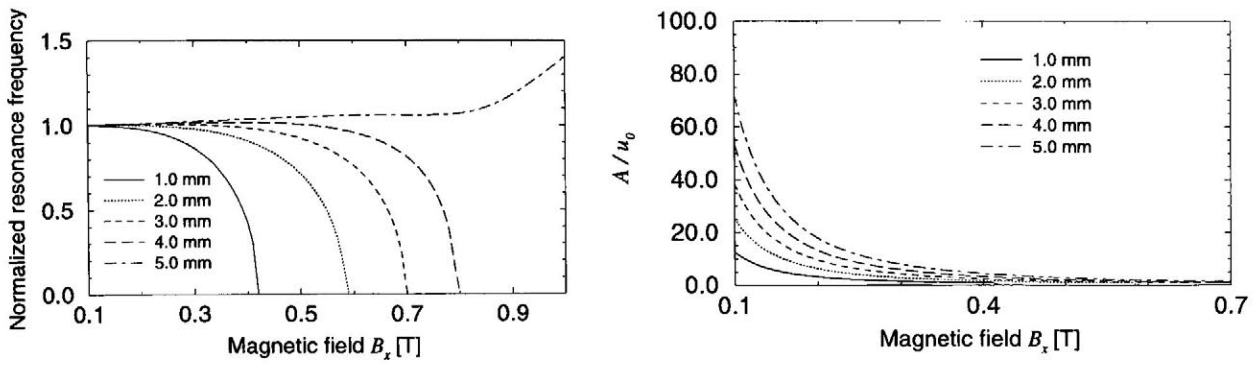


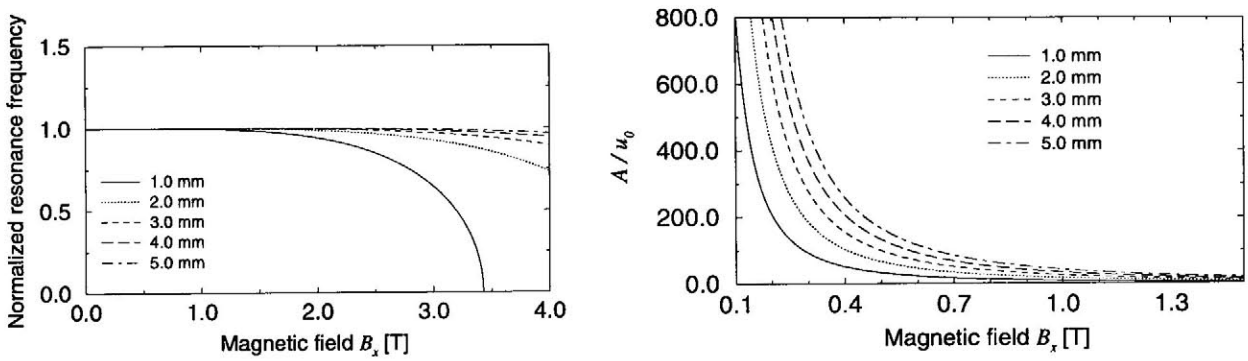
Fig. 4.6 Change of coupled eigenvalues with magnetic field for each plate thickness



(a) Normalized resonance frequency

(b) Normalized amplitude

Fig. 4.7 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic force(aluminum)



(a) Normalized resonance frequency

(b) Normalized amplitude

Fig. 4.8 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic force(316 SS)

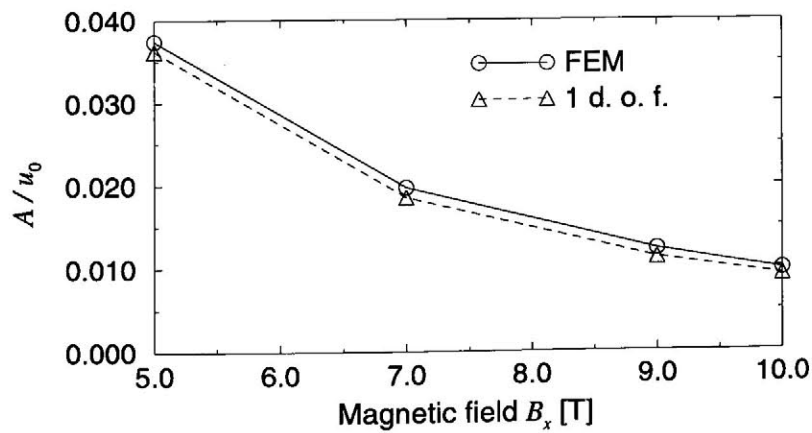


Fig. 4.9 Amplitude with high magnetic field

## 4.3 支持部周期的変位による強制振動

### 4.3.1 磁気減衰時の共振特性

一般の減衰振動問題と同様に、磁場中に置かれる機器の、支持部の周期的変位による強制振動状態における振動特性について述べる。質点と支持台を考えると、構造物および渦電流のそれぞれの運動方程式は、

$$m\ddot{u}_r + C_s T + k u_r = -m\ddot{u}_b \quad (4.28)$$

$$U\dot{T} + C_e \dot{u}_r + R T = \dot{B}^{ex} \quad (4.29)$$

ただし、

$$u_r = u - u_b \quad (4.30)$$

となる。ここで、 $u_b$  は支持台の変位、 $u_r$  は質点の相対変位である。これら (4.28) 式と (4.29) 式を組み合わせることによって、連成系の運動方程式は、

$$mU\ddot{u}_r + mR\ddot{u}_r + (kU - C_e C_s)\dot{u}_r + kR u_r = -mU\ddot{u}_b - mR\ddot{u}_b \quad (4.31)$$

となる。ここで、支持台の変位を

$$u_b = a \sin \omega_f t \quad (4.32)$$

とすると、

$$mU\ddot{u}_r + mR\ddot{u}_r + (kU - C_e C_s)\dot{u}_r + kR u_r = mU a \omega_f^3 \cos \omega_f t + mR a \omega_f^2 \sin \omega_f t \quad (4.33)$$

となり、この式は、(4.5) 式の  $F_0$  を  $m a \omega_f^2$  とした式と同じになる。

#### (a) $d < 0$ における特解

この時、運動方程式の特解  $x_r$  は

$$x_r = A_r \sin(\omega_f t + \phi) \quad (4.34)$$

となる。ここで、振幅  $A_r$ 、位相角  $\phi$  は連成固有値  $-\gamma_e, -\gamma_s \pm \omega_s i$  を用いて

$$A_r = a \omega_f^2 \sqrt{\frac{\gamma_0^2 + \omega_f^2}{(\gamma_e^2 + \omega_f^2) \left[ (\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2 \omega_s^2 \right]}} \quad (4.35)$$

$$\tan^{-1} \phi = \frac{\omega_f (\gamma_s^2 + \omega_s^2 - \omega_f^2) (\gamma_e - \gamma_0) - 2\omega_f \gamma_s (\gamma_0 \gamma_e + \omega_f^2)}{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 - \omega_f^2) (\omega_f^2 + \gamma_e \gamma_0) + 2\omega_f^2 \gamma_s (\gamma_e - \gamma_0)} \quad (4.36)$$

となる。ただし、 $\gamma_0 = \frac{R}{U}$  である。この振幅  $A_r$  の磁場などに関する依存性を調べることで、強制振動特性を把握できる。また、 $\gamma_s, \omega_s$  は磁場に依存するために、磁場中に置かれる機器の共振特性は、

一般の減衰振動問題と異なる可能性がある。また、 $\gamma_e \approx \gamma_0$  と仮定した場合には、(4.35) 式より、共振振動数は

$$\omega_f = \frac{\omega_s^2 + \gamma_s^2}{\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}} \quad (4.37)$$

となる。なお、評価式 (4.35) 式の値を得るためには、連成固有値  $\gamma_e$ ,  $-\gamma_s \pm \omega_s i$  の値を決定する必要があるが、連成固有値の磁場、材料定数に関する依存性<sup>(4.6)</sup> を用いれば、(4.35) 式の磁場、材料定数に関する依存性を得ることができる。

### (b) $d \geq 0$ における特解

この時特性方程式の解は、3つの実根であり、ここでは、実根を  $-\gamma_1$ ,  $-\gamma_2$ ,  $-\gamma_3$  とすると、特解  $x_r$  は

$$x_r = A_r \sin(\omega_f t + \phi) \quad (4.38)$$

であり、ここで、 $A_r$ ,  $\phi$ , は連成固有値  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  を用いて

$$A_r = a\omega_f^2 \sqrt{\frac{\omega_f^2 + \gamma_0^2}{(\gamma_1^2 + \omega_f^2)(\gamma_2^2 + \omega_f^2)(\gamma_3^2 + \omega_f^2)}} \quad (4.39)$$

$$\tan^{-1} \phi = \frac{\omega_f (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \omega_f^2 - \gamma_2 \omega_f^2 - \gamma_3 \omega_f^2) - \gamma_0 (\gamma_1 \gamma_2 \omega_f + \gamma_2 \gamma_3 \omega_f + \gamma_3 \gamma_1 \omega_f - \omega_f^3)}{\omega_f (\gamma_1 \gamma_2 \omega_f + \gamma_2 \gamma_3 \omega_f + \gamma_3 \gamma_1 \omega_f - \omega_f^3) + \gamma_0 (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_1 \omega_f^2 - \gamma_2 \omega_f^2 - \gamma_3 \omega_f^2)} \quad (4.40)$$

となる。この振幅  $A_r$  の磁場などに対する依存性を調べることで、強制振動特性を把握できる。

## 4.3.2 有限要素解析による妥当性の検証

### (a) 解析問題

解析問題は、Fig. 4.10 に示す一様な定常磁場中に設置された、支持部が周期的に変位する平板である。Fig. 4.10 に示すように、支持部の角振動数  $\omega_f$  を変化させて有限要素法で解析する。なお、平板の形状 (板長さ 90 mm, 幅 80 mm, 板厚 0.2 mm) は実験で使用する試験片と同じである。

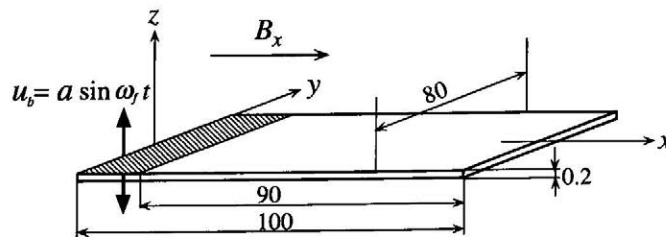


Fig. 4.10 A cantilevered plate with the harmonic motion of the base in steady magnetic field  $B_x$

## (b) 解析結果

次節では、実験により、支持部の周期的変位による磁気減衰時の平板の強制振動特性について検討を行う。そこで、ここでは、実験で使用する試験片の1つ板長さ 90 mm, 幅 80 mm, 板厚 0.2 mm を解析モデルとして有限要素解析結果と1自由度連成モデルによる解を比較し、1自由度連成モデルによる評価式の妥当性を検証する。外部定常磁場は実験で使用する 0.2 T, 0.3 T とし、加振振動数は、加振振動数比 0.1 ~ 2.0 の間から、23 点を決定し解析する。有限要素解析により得られた、平板の自由端における振動応答を Fig. 4.11 に示す。Fig. 4.11 より、支持部の加振振動数が変わることにより、振動振幅が変化していることがわかる。そして、加振振動数比が 2.0 に近い領域では、どの磁場においても、振動振幅がほぼ同じ値に収束していくことがわかる。Fig. 4.12 に加振振動数に対する振動振幅、すなわち共振曲線を示す。Fig. 4.12 より、加振振動数比が 2.0 に近い領域では、どの磁場においても、振動振幅がほぼ同じ値に収束していくことがわかる。また、磁場が強くなることにより、振動振幅が減少していることがわかる。Fig. 4.12 に最小自乗近似を行い、有限要素解析結果から共振振動数を導出した結果および1自由度連成モデルの評価式から得られた共振振動数を Table 4.4 に示す。有限要素解析結果からの共振振動数の導出方法だが、支持部周期的変位による強制振動状態において、加振振動数  $\omega_f$  と振幅  $A_r$  の関係は、

$$A_r = \sqrt{\frac{\gamma_0^2 + \omega_f^2}{(\gamma_e^2 + \omega_f^2)\{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2\omega_s^2\}}} a\omega_f^2 \quad (4.41)$$

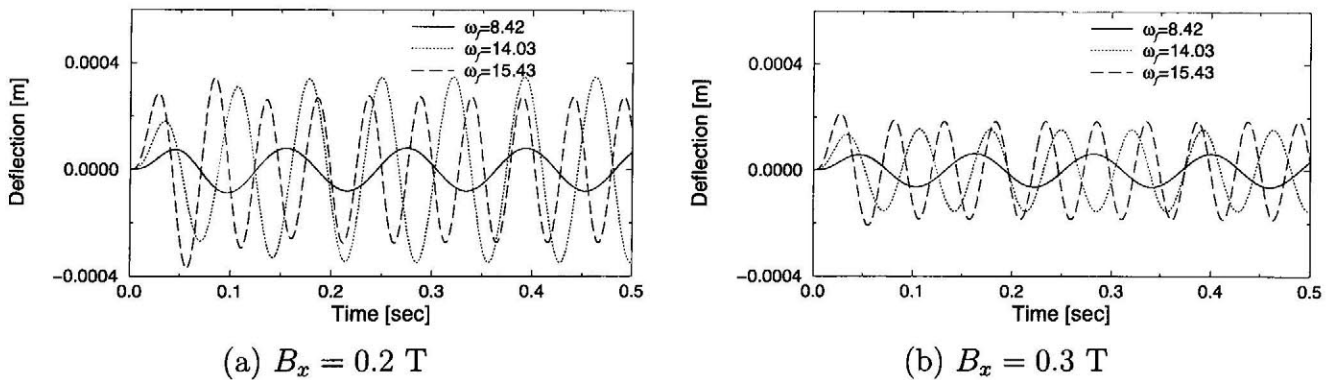


Fig. 4.11 Deflection at the free end of the plate

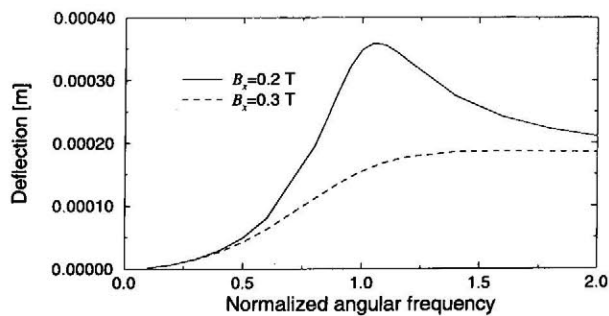


Fig. 4.12 Resonance curve under the harmonic motion of the base

Table 4.4 Comparison of normalized resonance frequency

$B_x$	FEM	1 d.o.f model
0.2	1.06	1.05
0.3	1.49	1.40

ただし

$a$  : 支持部の振幅

$\gamma_0$  : 非連成状態における渦電流の固有値

$\gamma_e$  : 連成状態における渦電流の固有値 (4.42)

$\gamma_s$  : 連成状態における構造の減衰率

$\omega_s$  : 連成状態における構造の角振動数

となる。そこで、加振振動数と振動振幅値の関係は (4.41) 式にしたがうとし、この式において  $\gamma_e \approx \gamma_0$  と仮定すると、

$$A_r = \sqrt{\frac{1}{(\gamma_s^2 + \omega_s^2 + \omega_f^2)^2 - 4\omega_f^2\omega_s^2}} a\omega_f^2 \quad (4.43)$$

となる。ここで、

$$Y = \frac{1}{A_r^2}, \quad X = \frac{1}{\omega_f^2} \quad (4.44)$$

と変数変換すると、

$$Y = \frac{1}{a^2} (\gamma_s^2 + 2\gamma_s^2\omega_s^2 + \omega_s^4) X^2 + \frac{1}{a^2} (2\gamma_s^2 - 2\omega_s^2) X + \frac{1}{a^2} \quad (4.45)$$

の  $X$  の 2 次関数となる。この式に基づき有限要素解析結果の最小自乗近似式を求め、得られた近似式より振幅が最大となる振動数を共振振動数とした。Table 4.4 に示すように有限要素解析結果と 1 自由度連成モデルより得られた共振振動数は良く一致しているといえる。よって、1 自由度連成モデルの評価式を用いることにより、磁場中に置かれる機器の強制振動特性を検討できることが示された。

### 4.3.3 実験による妥当性の検証

#### (a) 実験装置の概要

前節では、有限要素解析および 1 自由度連成モデルを用いて検討を行った。そこで、本節では、実験により検討を行う。

磁気減衰振動実験装置の概略図を Fig. 4.13 に示す。本実験装置は、実験対象の試験片および支持部、磁場を発生させるためのソレノイドコイルおよび直流定電圧・定電流電源、試験片を加振



させるためのマイクロ加振機，試験片のひずみを測定するためのひずみゲージおよび動ひずみ計，ひずみのデータを収録するための A/D 変換器およびパーソナルコンピュータから構成される。

磁気減衰振動実験では，ソレノイドコイルにより発生させた磁場中の試験片を，加振機により強制振動させて，この時のひずみを測定する．この測定結果から，振動の振幅と加振振動数を求め，振幅が最大となる加振振動数を共振振動数として得る．なお，一般の強制振動実験の場合には，加速度ピックアップを用いて加振部と評価点の加速度の位相差から共振特性をもとめるが，本実験では加速度ピックアップに対して試験片が小さく，また，その取り付け場所の確保が困難であり，さらに，本実験は磁場を印加した状態で測定するため磁場の影響を受ける加速度ピックアップを用いることができない．そこで，本実験では磁場の影響を受けにくいひずみゲージで測定を行なう．

**試験片および支持部** 試験片および支持部の概略図を Fig. 4.14 に示す．試験片としては板厚 0.2 mm の銅板を使用する．この銅板のヤング率は 110.65 GPa，ポアソン比は 0.31，密度は  $8.912 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，導電率は  $5.814 \times 10^7 \text{ S/m}$  である．なお，ヤング率およびポアソン比は引張り試験により求めた．

支持部はソレノイドコイル内の磁場への影響を考慮して非磁性体であるアルミニウムで製作した (Photo2.1)．また，試験片を磁場中で振動させることにより，連成現象によって試験片には渦電流が生じるが，これが支持部へ漏洩することを防ぐため，試験片と支持部の間にベークライト板を挟んで絶縁している．本実験では，この支持部全体を加振機により強制振動させて，試験片に生じるひずみを測定する．

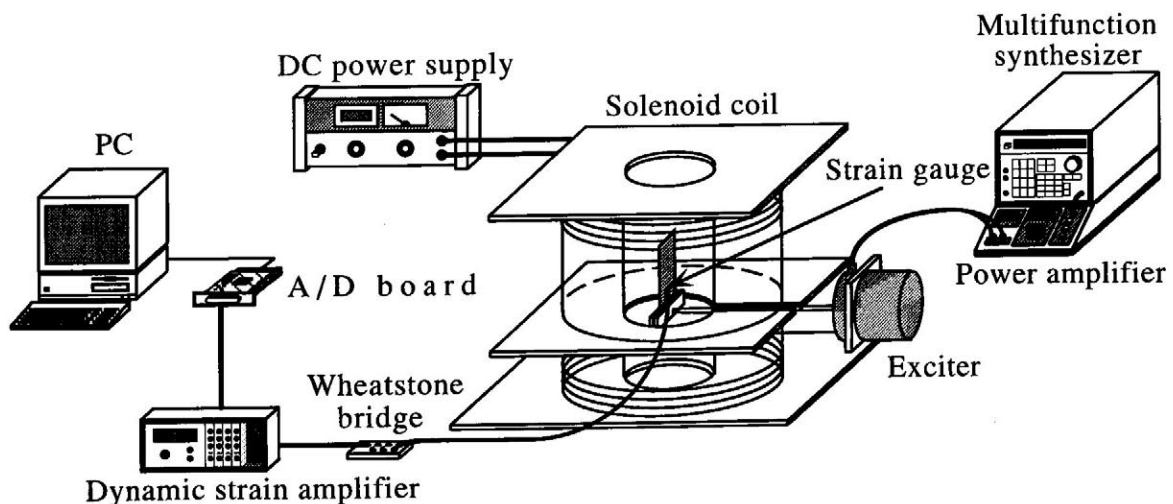


Fig. 4.13 Experimental apparatus



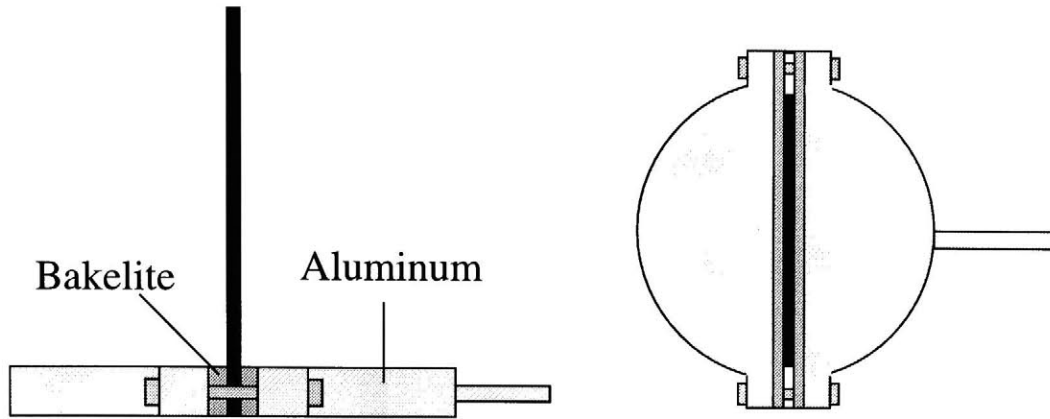


Fig. 4.14 Rigid support of the test piece

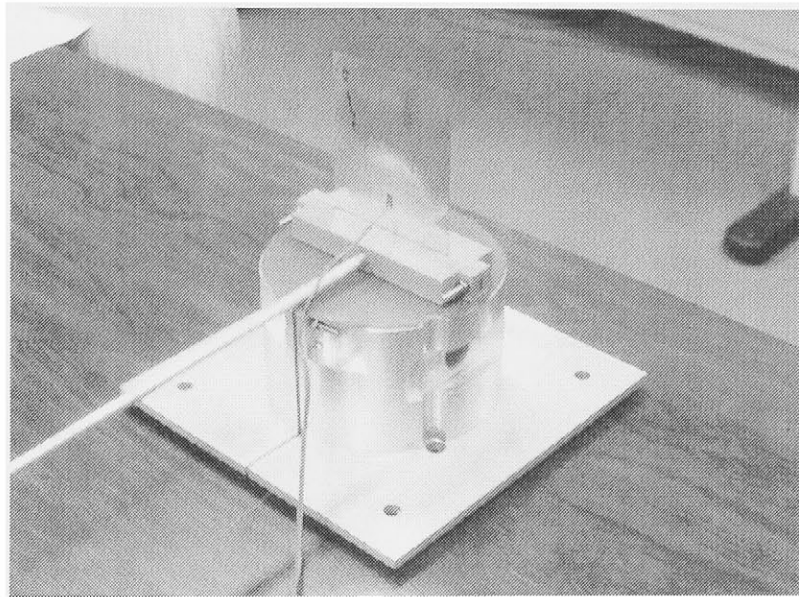


Photo 2.1 Rigid support made of aluminum

ソレノイドコイルと電源 本実験で使用するソレノイドコイルの概略図を Fig. 4.15(a)に示す. このソレノイドコイルは, 長さ 200 mm, 内径 100 mm, 外径 120 mm のアルミパイプに直径 1.35 mm の被覆導線 (銅線部の直径は 1.3 mm, 被覆部の厚さは 0.025 mm) を巻いて作成した. また, このソレノイドコイルは Fig. 4.15(b) に示すように全体で 5 層構造となっており, 各層に対して直流定電圧・定電流から電流を供給することにより磁場を発生させる. なお, このソレノイドコイルが発生できる最大磁場は 0.32 T である.

本実験では, ソレノイドコイル内に設置する試験片を, Photo 2.2 に示すように外部から加振機により強制振動させる. このため, ソレノイドコイルには Photo 2.3 に示すようにパイプの片側から 45 mm の位置に厚さ 8 mm のアルミ板を挟んで開口部を作成している. この開口部の大きさは, 長さが 15 mm, 幅が 8 mm である.

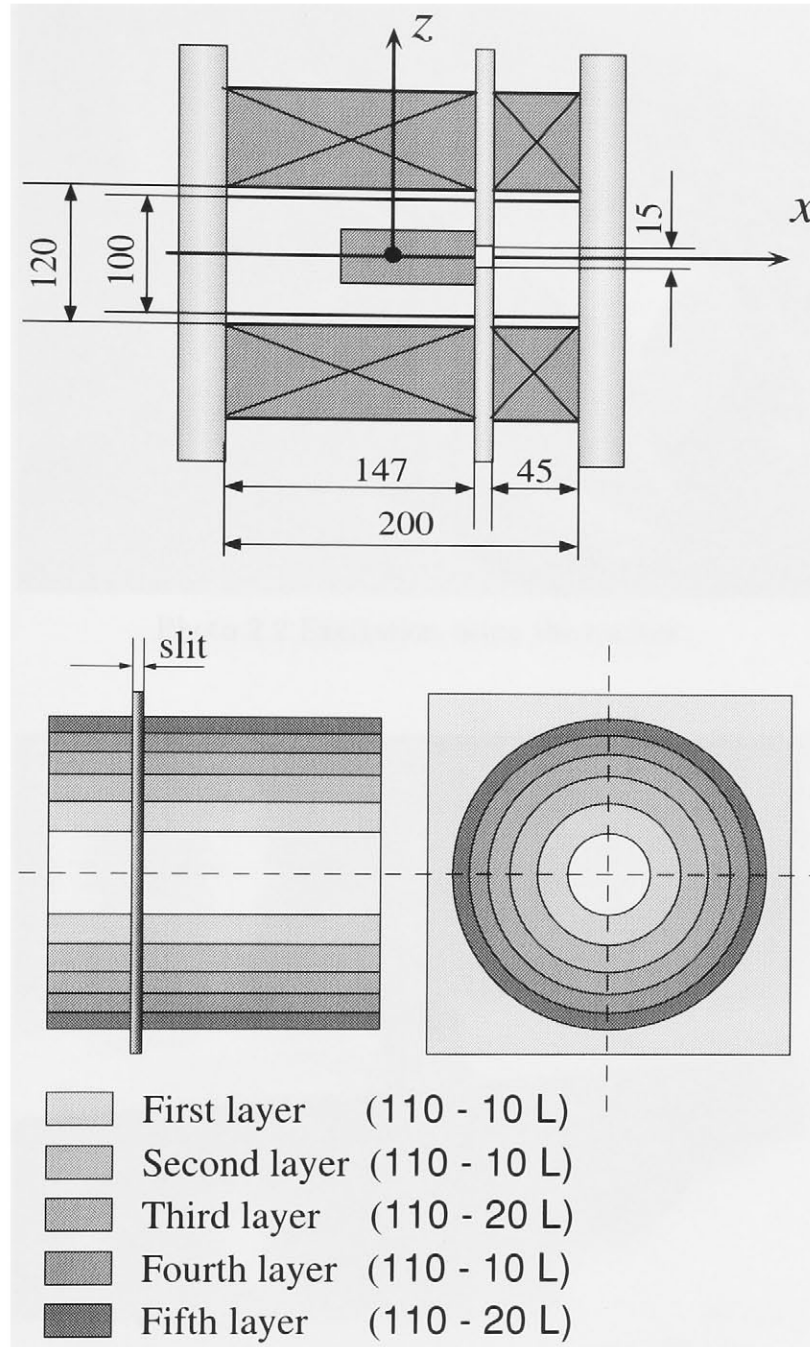


Fig. 4.15 Schematic diagram of the solenoid coil

**振動試験機** 本実験で使用する振動試験機について述べる。振動試験機は、Fig. 4.13 に示したように試験片支持部に強制振動を伝えるマイクロ加振器、加振器に与える振動波形を作り出すファンクションジェネレータ、ファンクションジェネレータの信号を増幅する電力増幅器から構成される。なお、マイクロ加振器は永久磁石方式により駆動される。

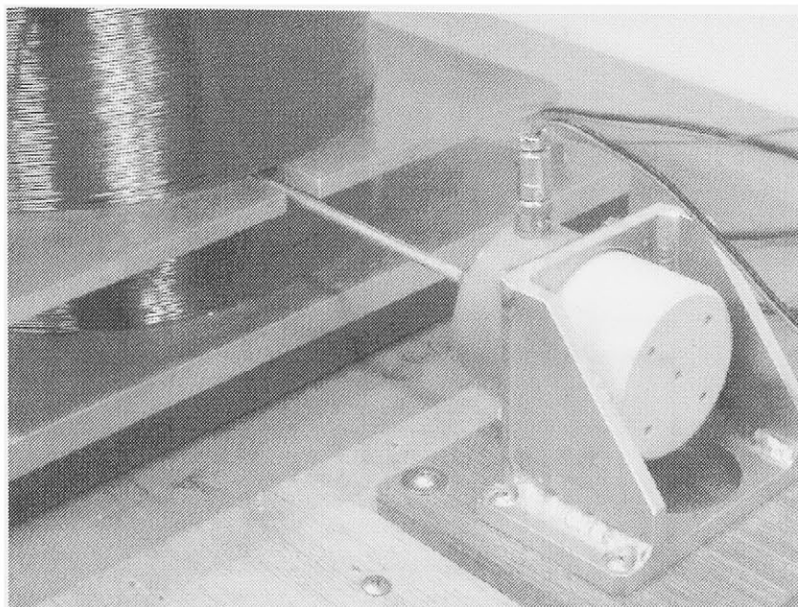


Photo 2.2 Excitation using the exciter

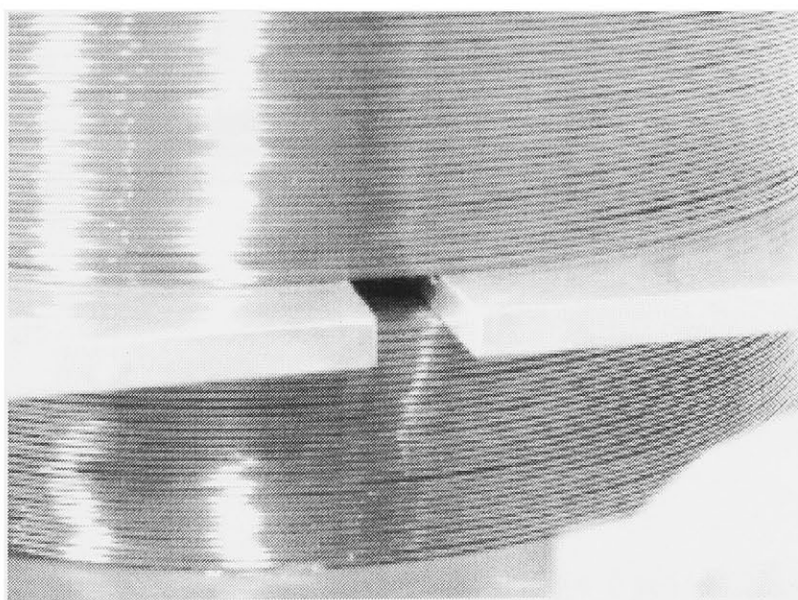


Photo 2.3 The opened orifice of the solenoid coil

## (b) 実験方法

一般に強制振動実験では加速度ピックアップを用いる。しかし、本実験では、加速度ピックアップに対して試験片が小さく、また、その設置場所の確保が困難であり、さらに、実験を磁場中で行うために磁場の影響を受ける加速度ピックアップを用いることができない。このため、一般の強制振動実験のように、カフィードバック制御により平板の自由端を加振する方法を使用することができない。このため、本研究では Fig. 4.16 に示す、支持部全体を加振する方法により実験を行う。なお、支持部を強制振動させるときには、振動部分と固定部分の間に摩擦が生じる。この影響を軽減

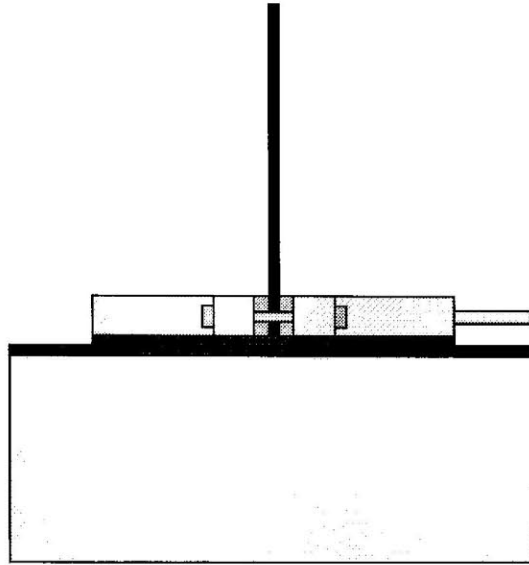


Fig. 4.16 Method to vibrate the test piece

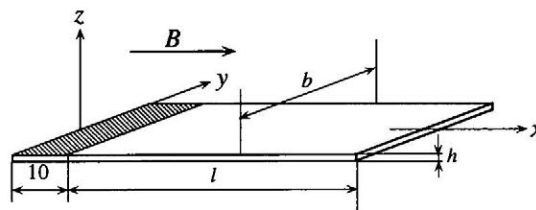


Fig. 4.17 Test piece

するために、本実験ではこれらの間に摩擦抵抗の小さいフッ素樹脂シートを挟んでいる。

### (c) 実験結果

磁場および平板の形状を変化させて磁気減衰強制振動実験を行ない、これらのパラメータに対する共振振動数の変化について検討する。

Fig. 4.17 に示す、自由端長さ  $l = 90$  mm、幅  $b = 60$  mm、厚さ  $h = 0.2$  mm の試験片を標準試験片として、長さ  $l$ 、幅  $b$  を変化させて実験を行う。また、磁束密度  $B$  は 0.05, 0.10, 0.20, 0.25, 0.30 T の 6 ケースを設定し、それぞれの磁束密度における共振振動数を測定する。

平板の長さを変化させる実験では、試験片の厚さ  $h$  を 0.2 mm、幅  $b$  を 60 mm に固定し、自由端長さ  $l$  を 70, 80, 90, 100, 110 mm と変えて、各磁束密度における共振振動数を測定する。同様に、幅を変える実験では、試験片の厚さ  $h$  を 0.2 mm、長さ  $l$  を 90 mm に固定し、幅  $b$  を 40, 50, 60, 70, 80 mm と変えて各磁束密度における共振振動数を測定する。

磁場と共振振動数の関係 標準試験片である長さ 90 mm, 幅 60 mm, 厚さ 0.2 mm の試験片で磁場を変化させて実験を行い, それぞれの磁場における共振振動数を測定した. 実験では, 加振振動数の範囲を 7.0 ~ 28.0 Hz とし, サンプル間隔の最小値は最大加振振動数 28.0 Hz の 1 周期を約 200 等分する 0.14 msec である. 測定結果を Fig. 4.18 に示す. 同図において, 縦軸は測定したひずみのピーク値を加振機の振動振幅で規格化した値であり横軸は加振振動数である. ただし, 加振振動数は, 加振機の振動部の振動応答を測定し, その応答に FFT 処理を行い求めた値である. また, 同図には, (4.35) 式に基づいて最小自乗近似より得られた共振曲線 (Fitting line) も示しているが, 測定結果と Fitting line は良く一致していることがわかる. Fig. 4.18 より, 磁場が強くなるとともに, 共振曲線のピーク値が減少, すなわち振動振幅が減少し, また, 加振振動数が大きくなるにつれピーク値は一定に近付くことがわかる. Table 4.5 には, 最小自乗近似より得られた共振振動数を示している. そして, 本実験体系と同じ条件で有限要素解析より得られた, 角振動数  $\omega_s$ , 減衰率  $\gamma_s$ , 連成固有値の絶対値  $\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$  および, これらの値を理論式

$$\omega_f = \frac{\omega_s^2 + \gamma_s^2}{\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}} \quad (4.46)$$

に代入して得られる支持部全体を加振した時の共振振動数とそれを非連成状態における角振動数で規格化した規格化共振振動数を Table 4.6 に示す. Fig. 4.19 は Table 4.5, 4.6 を図示したものであり, Fig. 4.19 より有限要素解析および本実験で得られた共振振動数は磁場が 0.2 T 以上の場合において最大誤差は約 0.7 % であり, 良く一致していることがわかる. また, 磁場が強くなるにしたがい共振振動数が上昇していることがわかる.

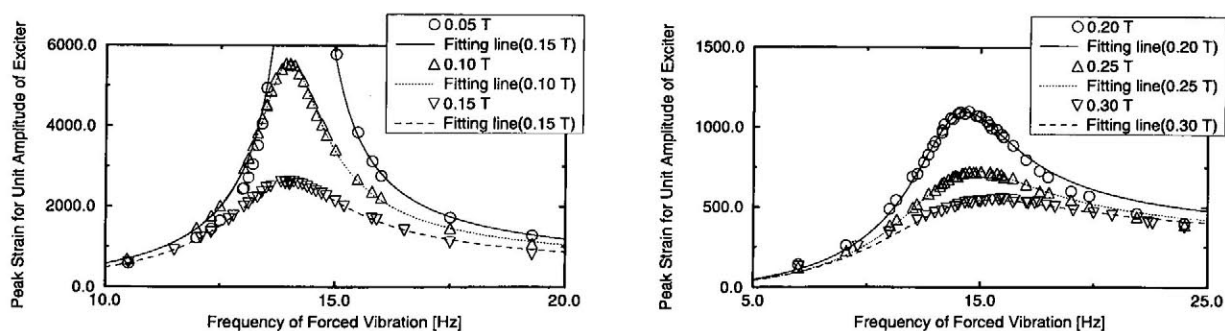


Fig. 4.18 Experimental results and resonance curves of the reference plate

Table 4.5 Change of resonance frequency for each magnetic field

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	13.94	14.07	13.99	14.00	14.34	14.78	15.47
Normalized resonance frequency	1.000	1.009	1.003	1.004	1.028	1.060	1.110



Table 4.6 Results of the coupled mode superposition method

Magnetic field [T]	0.000	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300
$\omega_s$ [1/s]	91.16	91.47	91.44	91.26	90.72	89.53	87.24
$\gamma_s$ [1/s]	0.001	0.824	3.291	7.406	13.22	20.73	30.05
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	91.16	91.47	91.50	91.56	91.68	91.90	92.27
Resonance frequency [Hz]	14.51	14.56	14.58	14.67	14.90	15.43	16.54
Normalized resonance frequency	1.000	1.003	1.005	1.011	1.027	1.064	1.140

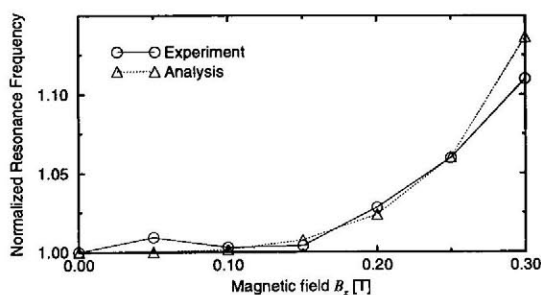
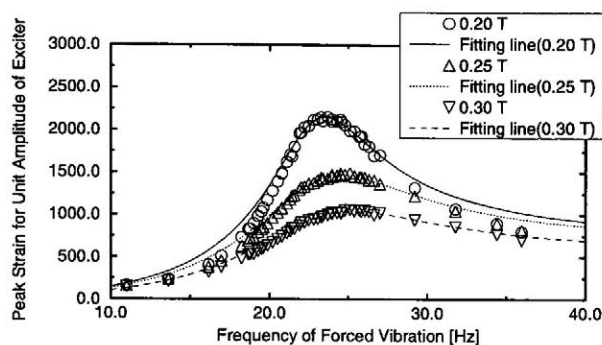
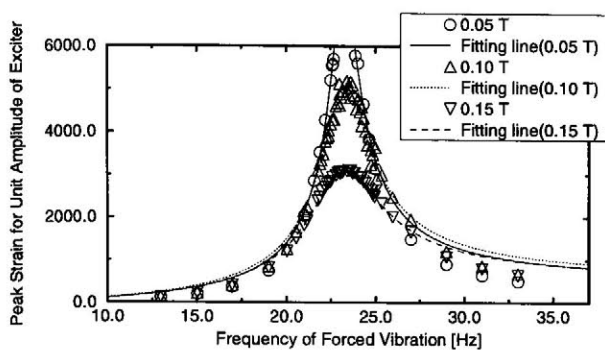
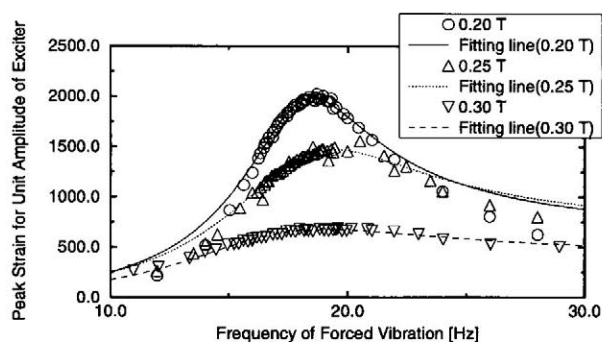
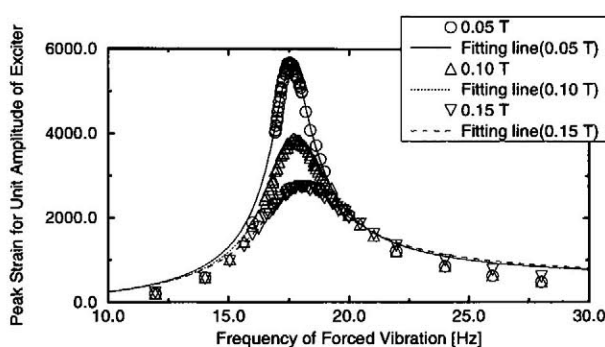


Fig. 4.19 Normalized resonance frequency for the reference plate

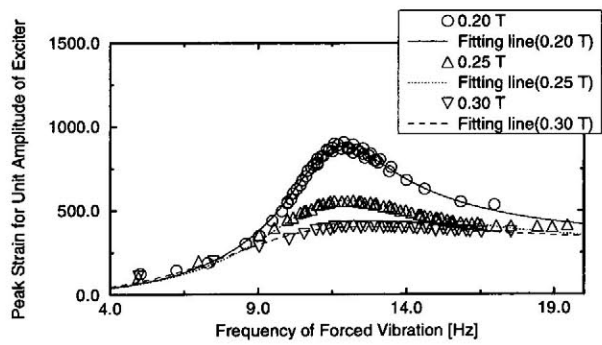
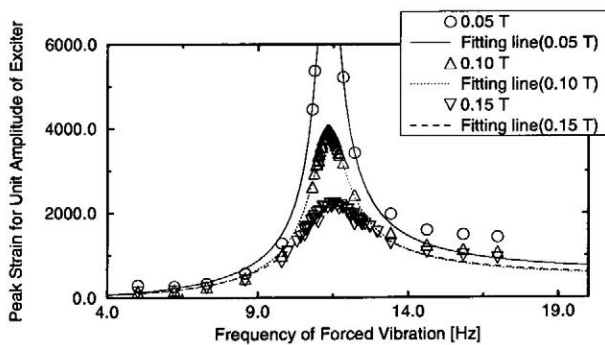
板の長さとの共振振動数の関係 標準試験片から平板の長さを 70, 80, 100, 110 mm と変化させて実験を行った。磁束密度は標準試験片と同じ 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 T の 6 ケースである。加振振動数の範囲は 7.0 ~ 36.0 Hz であり、サンプリング間隔の最小値は最大加振振動数 36.0 Hz の 1 周期を約 200 等分する 0.14 msec である。Fig. 4.20 に各板の長さの測定結果を示す。Fig. 4.20 において、縦軸は測定したひずみのピーク値を加振機の振動振幅で規格化した値、横軸は加振振動数である。Fig. 4.20 には最小自乗近似より得られた Fitting line も示しており、実験結果と Fitting line は良く一致している。それぞれの長さにおける最小自乗近似結果から共振振動数を導出した結果をそれぞれ Table 4.7, 4.9, 4.11, 4.13 に示す。また、本実験体系と同じ条件で有限要素解析より得られた、それぞれの長さの角振動数  $\omega_s$ 、減衰率  $\gamma_s$ 、連成固有値の絶対値  $\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$  および共振振動数をそれぞれ Table 4.8, 4.10, 4.12, 4.14 に示す。そして、Table 4.7 ~ 4.14 を図示したものを Fig. 4.21 および Fig. 4.22 に示す。Fig. 4.21 では縦軸を規格化共振振動数、横軸を磁場とし、Fig. 4.22 では縦軸を規格化共振振動数、横軸を長さとした。これら、Fig. 4.21, 4.22 より、磁場が 0.20 T 以下では、実験結果と解析結果の差が大きい。これは、共振振動数の変化が 1.10 % 以下と小さかったために、実験ではこの変化を測定できなかったためである。また、長さ 80 mm では、実験結果が解析結果よりも大きくなっているが、これは、共振振動数の導出には、加振機の振動振幅で規格化したひずみのピーク値を用いているが、その振動振幅は、幾つかの加振振動数で測定した振動



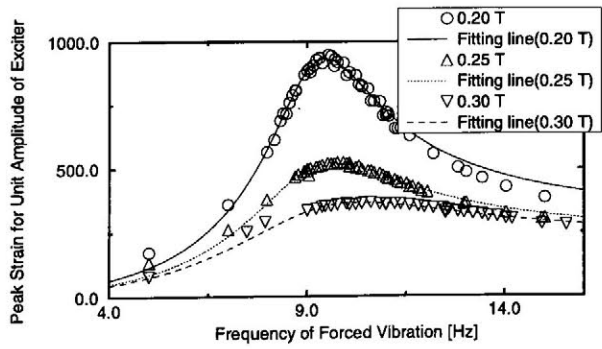
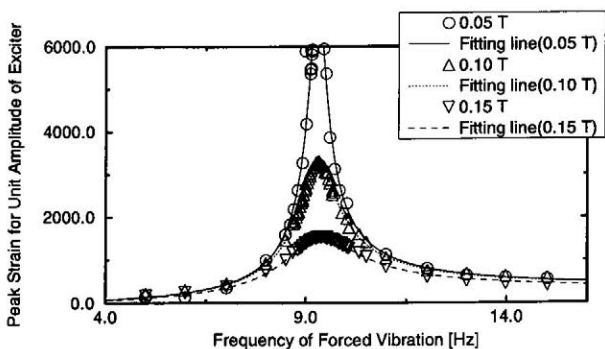
(a) Length = 70 mm



(b) Length = 80 mm



(d) Length = 100 mm



(e) Length = 110 mm

Fig. 4.20 Experimental results and resonance curves for different plate lengths

振幅を用いて内挿しているためである。しかし、その最大誤差は約 5 % であり、各長さの解析結果および実験結果はともに、磁場が強くなるにしたがい、共振振動数が上昇していくことがわかる。そして、本実験結果より、長さを変えることにより、共振振動数は最大で約 3% 変化し、Fig. 4.22(b) において、磁束密度が 0.3 T における共振振動数の変化をみると、同じ磁束密度であっても、平板の長さが長いほど、共振振動数の変化が大きい。これは、長さが長くなるほど磁気減衰効果が大きくなるためであると考えられる。

Table 4.7 Change of resonance frequency (length  $l = 70$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	23.35	23.26	23.32	23.30	23.53	24.50	25.37
Normalized resonance frequency	1.000	0.996	0.999	0.998	1.007	1.049	1.086

Table 4.8 Results of the coupled mode superposition method (length  $l = 70$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	151.7	151.7	151.7	151.5	150.9	149.4	146.6
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	1.191	4.761	10.71	19.12	29.98	43.40
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	151.7	151.7	151.8	151.9	152.1	152.4	152.9
Resonance frequency [Hz]	24.15	24.15	24.18	24.30	24.60	25.25	26.57
Normalized resonance frequency	1.000	1.000	1.001	1.006	1.019	1.046	1.101

Table 4.9 Change of resonance frequency (length  $l = 80$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	17.56	17.61	17.80	18.05	18.52	19.46	19.17
Normalized resonance frequency	1.000	1.003	1.014	1.028	1.055	1.108	1.092

Table 4.10 Results of the coupled mode superposition method (length  $l = 80$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	116.0	116.0	115.9	115.7	115.1	113.8	111.2
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	0.991	3.962	8.915	15.91	24.96	36.15
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	116.0	116.0	116.0	116.1	116.2	116.5	116.9
Resonance frequency [Hz]	18.46	18.46	18.48	18.59	18.86	19.46	20.69
Normalized resonance frequency	1.000	1.000	1.001	1.007	1.022	1.054	1.121



Table 4.11 Change of resonance frequency (length  $l = 100$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	11.30	11.32	11.36	11.53	11.88	11.96	12.61
Normalized resonance frequency	1.000	1.002	1.006	1.020	1.051	1.058	1.116

Table 4.12 Results of the coupled mode superposition method (length  $l = 100$  mm)

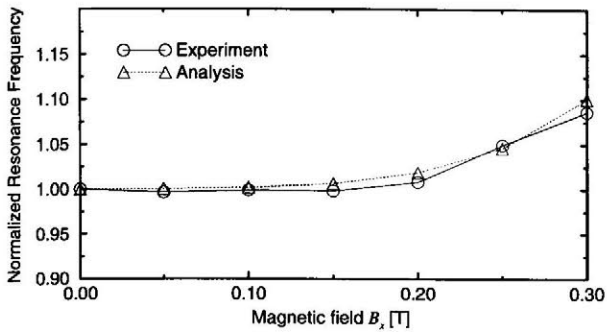
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	73.97	73.96	73.93	73.78	73.31	72.29	70.34
$\gamma_s$ [1/s]	0.001	0.682	2.726	6.132	10.94	17.17	24.88
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	73.97	73.97	73.99	74.03	74.13	74.30	74.60
Resonance frequency [Hz]	11.77	11.77	11.79	11.86	12.06	12.51	13.47
Normalized resonance frequency	1.000	1.000	1.002	1.008	1.025	1.063	1.144

Table 4.13 Change of resonance frequency (length  $l = 110$  mm)

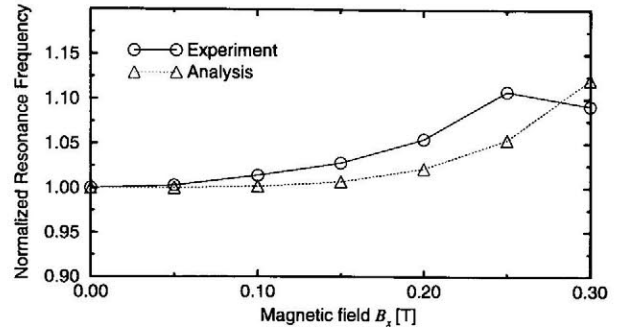
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	9.209	9.273	9.297	9.379	9.468	9.671	10.38
Normalized resonance frequency	1.000	1.007	1.010	1.019	1.028	1.050	1.127

Table 4.14 Results of the coupled mode superposition method (length  $l = 110$  mm)

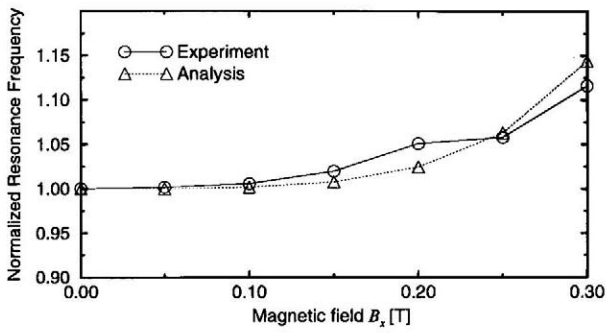
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	61.02	61.02	61.00	60.87	60.48	59.63	58.02
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	0.562	2.246	5.052	9.013	14.14	20.48
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	61.02	61.03	61.04	61.07	61.15	61.29	61.52
Resonance frequency [Hz]	9.711	9.713	9.728	9.788	9.951	10.32	11.10
Normalized resonance frequency	1.000	1.000	1.002	1.008	1.025	1.063	1.143



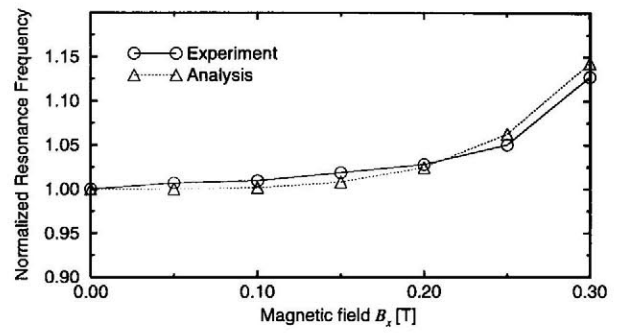
(a) 70 mm



(b) 80 mm

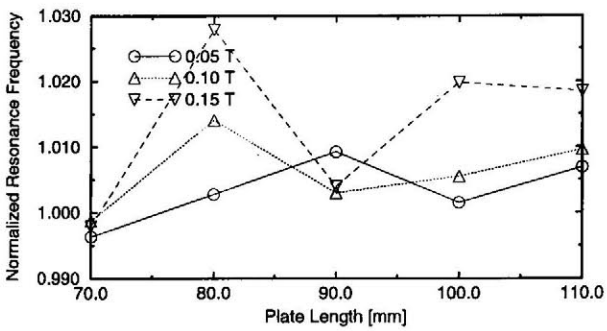


(c) 100 mm

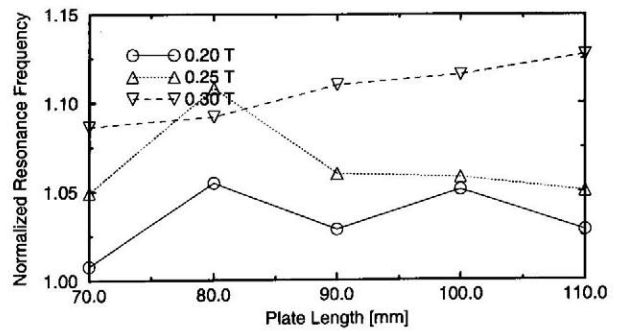


(d) 110 mm

Fig. 4.21 Dependence of resonance frequency with magnetic field



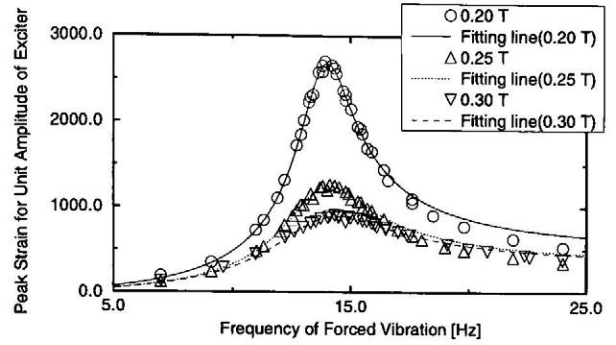
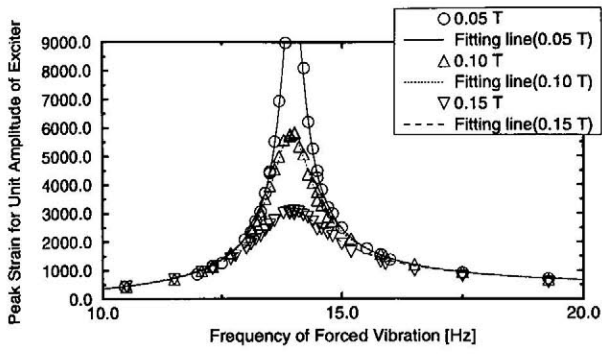
(a)  $B_x = 0.05, 0.10, 0.15$  T



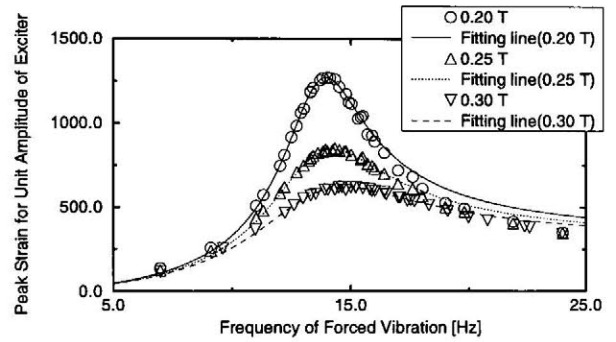
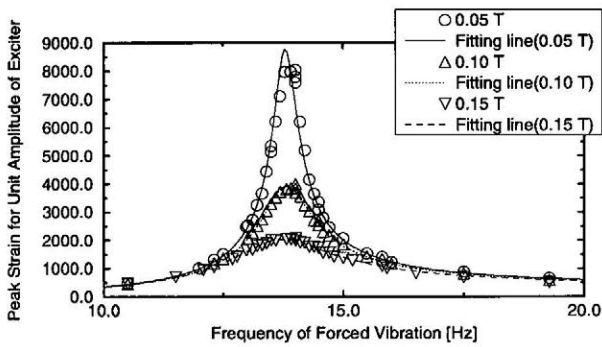
(b)  $B_x = 0.20, 0.25, 0.30$  T

Fig. 4.22 Resonance frequency with plate length

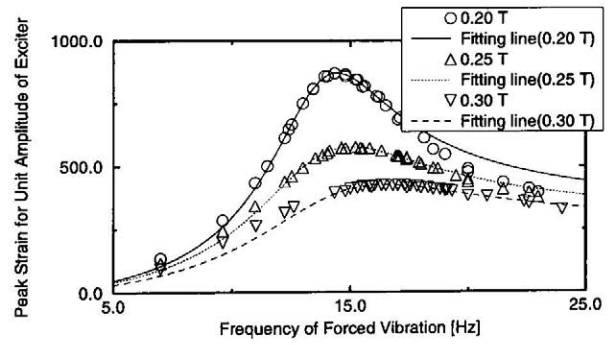
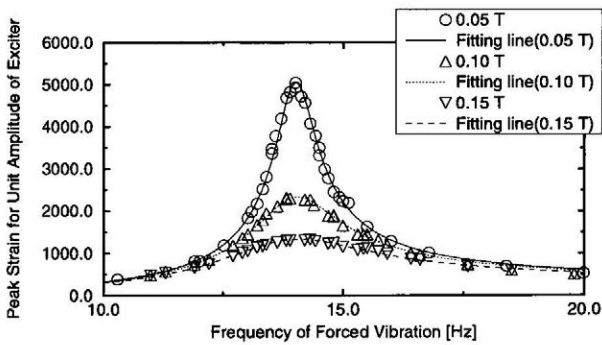
幅と共振振動数の関係 標準試験片から、幅を 40, 50, 70, 80 mm と変化させて実験を行った。磁束密度は標準試験片と同じ 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 T の 6 ケースである。加振振動数の範囲は 7.0 ~ 36.0 Hz であり、サンプリング間隔の最小値は最大加振振動数 36.0 Hz の 1 周期を約 200 等分する 0.14 msec である。Fig. 4.23 に測定結果を示す。Fig. 4.23 において、縦軸は測定したひずみのピーク値を加振機の振動振幅で規格化した値、横軸は加振振動数である。Fig. 4.23 には最小自乗近似より得られた Fitting line も示しており、測定結果と Fitting line は良く一致していることがわかる。また、同じ磁束密度であっても、板の幅が広いほど、ひずみのピーク値は小さくなっている、すなわち振動振幅が小さくなっていることがわかる。これは、幅が広くなることにより磁場に垂直な方向である幅方向に流れる電流成分が大きくなり、この電流の増加により磁気減衰効果が強くなるためであると考えられる。Table 4.15, 4.17, 4.19, 4.21 にそれぞれの幅における、最小自乗近似結果から導出した共振振動数を示す。Table 4.16, 4.18, 4.20, 4.22 には、それぞれの幅において本実験体系と同じ条件で有限要素解析より得られた、角振動数  $\omega_s$ 、減衰率  $\gamma_s$ 、連成固有値の絶対値  $\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$  および、共振振動数を示す。Table 4.15 ~ 4.22 を図示したものを Fig. 4.24 および Fig. 4.25 に示しており、有限要素解析結果と実験結果はよく一致している。なお、Fig. 4.24 の幅 80 mm において、磁場 0.3 T における、有限要素解析結果と実験結果の差は約 10 % となっているが、これは、Fig. 4.23(d) からわかるように、幅 80 mm、磁場 0.3 T においては、実験より得られるひずみのピーク値が小さくなり、最小自乗近似で精度よく近似できていないためである。Fig. 4.25 には幅と共振振動数の関係を示しており、磁場が強かつ幅が広いほど共振振動数の変化が大きく、共振振動数の変化は最大で約 32 % である。よって、長さを変えるよりも幅を広くした方が共振振動数の変化が大きい。



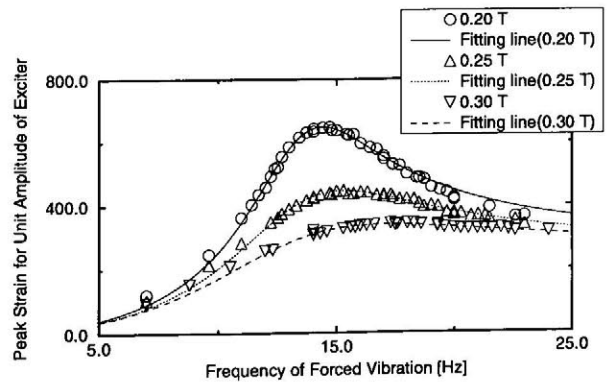
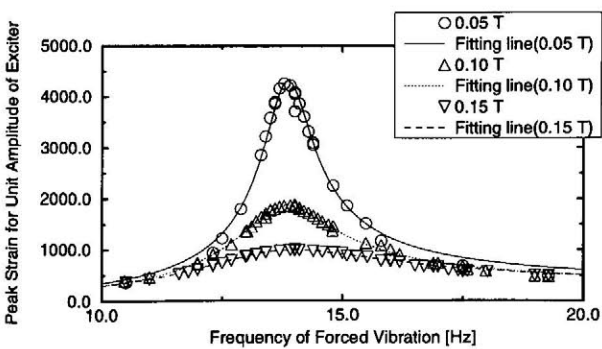
(a) Width = 40 mm



(b) Width = 50 mm



(c) Width = 70 mm



(d) Width = 80 mm

Fig. 4.23 Experimental results and resonance curves for different plate width

Table 4.15 Change of resonance frequency (width  $b = 40$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	13.93	13.96	13.94	13.96	13.99	14.07	14.41
Normalized resonance frequency	1.000	1.002	1.001	1.003	1.005	1.011	1.035

Table 4.16 Results of the coupled mode superposition method (width  $b = 40$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	90.70	90.77	90.76	90.71	90.57	90.25	89.65
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	0.440	1.759	3.955	7.047	11.02	15.90
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	90.70	90.77	90.78	90.80	90.84	90.92	91.05
Resonance frequency [Hz]	14.44	14.45	14.45	14.48	14.55	14.69	14.95
Normalized resonance frequency	1.000	1.001	1.001	1.003	1.008	1.017	1.036

Table 4.17 Change of resonance frequency (width  $b = 50$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	13.81	13.79	13.81	13.74	13.94	14.21	14.71
Normalized resonance frequency	1.000	0.999	1.001	0.995	1.010	1.029	1.066

Table 4.18 Results of the coupled mode superposition method (width  $b = 50$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	91.03	91.16	91.14	91.04	90.74	90.07	88.79
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	0.629	2.512	5.650	10.07	15.78	22.81
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	91.03	91.16	91.18	91.22	91.30	91.44	91.67
Resonance frequency [Hz]	14.49	14.51	14.52	14.57	14.71	15.01	15.59
Normalized resonance frequency	1.000	1.002	1.002	1.006	1.015	1.036	1.076

Table 4.19 Change of resonance frequency (width  $b = 70$  mm)

Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	14.01	14.00	14.04	14.07	14.42	15.02	16.43
Normalized resonance frequency	1.000	1.000	1.002	1.004	1.029	1.072	1.173

Table 4.20 Results of the coupled mode superposition method (width  $b = 70$  mm)

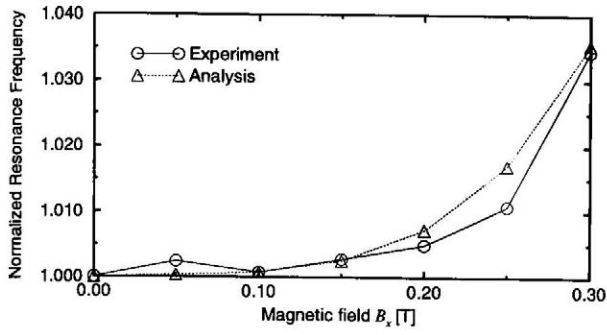
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	91.52	91.70	91.66	91.37	90.54	88.67	85.00
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	1.017	4.064	9.149	16.34	25.69	37.35
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	91.52	91.71	91.75	91.83	92.00	92.31	92.84
Resonance frequency [Hz]	14.57	14.60	14.63	14.76	15.13	15.98	17.97
Normalized resonance frequency	1.000	1.002	1.004	1.014	1.039	1.097	1.234

Table 4.21 Change of resonance frequency (width  $b = 80$  mm)

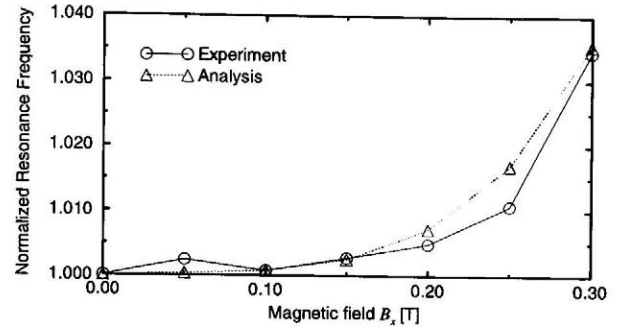
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
Resonance frequency [Hz]	13.89	13.86	13.84	14.03	14.41	15.28	17.16
Normalized resonance frequency	1.000	0.998	0.996	1.010	1.037	1.100	1.235

Table 4.22 Results of the coupled mode superposition method (width  $b = 80$  mm)

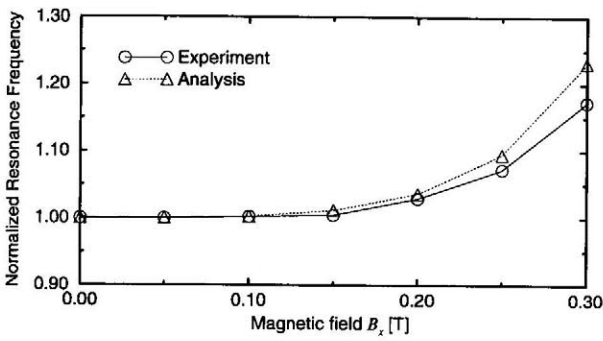
Magnetic field [T]	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\omega_s$ [1/s]	91.69	91.88	91.82	91.42	90.23	87.53	82.12
$\gamma_s$ [1/s]	0.000	1.203	4.809	10.83	19.37	30.51	44.54
$\sqrt{\gamma_s^2 + \omega_s^2}$	91.69	91.89	91.94	92.05	92.28	92.70	93.42
Resonance frequency [Hz]	14.59	14.63	14.67	14.86	15.38	16.67	20.13
Normalized resonance frequency	1.000	1.002	1.005	1.018	1.054	1.142	1.380



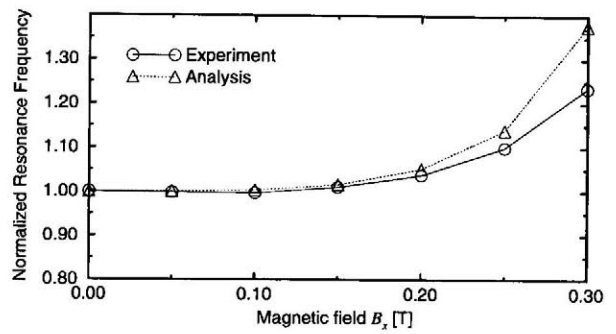
(a) 40 mm



(b) 50 mm

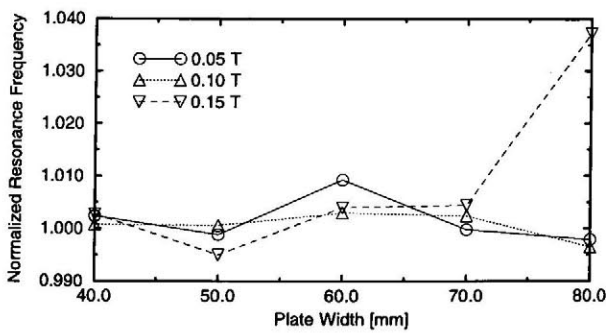


(c) 70 mm

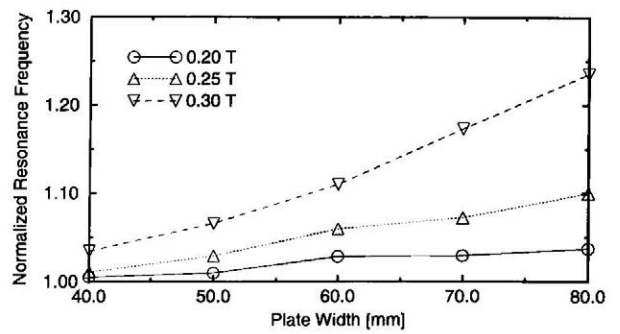


(d) 80 mm

Fig. 4.24 Resonance frequency with magnetic field for each plate width



(a)  $B_x = 0.05, 0.10, 0.15\text{T}$



(b)  $B_x = 0.20, 0.25, 0.30\text{T}$

Fig. 4.25 Resonance frequency with plate width

#### 4.3.4 共振振動数の変化

ここでは、材料定数、板厚を変えて、支持部周期的変位による磁気減衰強制振動特性について検討する。板長さ、板幅はそれぞれ 90 mm, 80 mm とし、板厚、材料を変えて 1 自由度連成モデルにより強制振動特性を検討する。板厚は 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 mm の 4 ケースとし、材料は銅、アルミニウム、316 ステンレス鋼の 3 ケースとする。

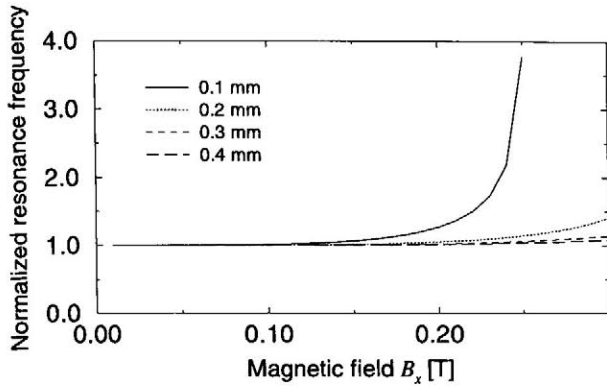
銅における磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係をそれぞれ Fig. 4.26 の (a,b) に示す。Fig. 4.26(a) より、どの板厚においても、磁場が強くなるにしたがい共振振動数が増加している。0.1 mm においては、0.25 T において  $\gamma_s > \omega_s$  となるために共振振動数が 0 となる。また、共振振動数は  $(\gamma_s^2 + \omega_s^2)/\sqrt{\omega_s^2 - \gamma_s^2}$  で計算されるため、磁場中に置かれる機器においても、一般の減衰振動と似て、磁気減衰効果が強くなる、すなわち磁場が強くなるにしたがい、共振振動数が上昇する。また、Fig. 4.26(b) より、振動振幅は磁場が強くなるにしたがい、減少していることがわかる。

Fig. 4.27(a,b) はアルミニウムにおける磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係であり、銅の場合と同様に、磁場が強くなるにしたがい共振振動数は増加し、振動振幅は減少することがわかる。銅と同じ傾向になったのは、渦電流にもっとも影響を与える導電率の値が、同じ位の値であったためである。

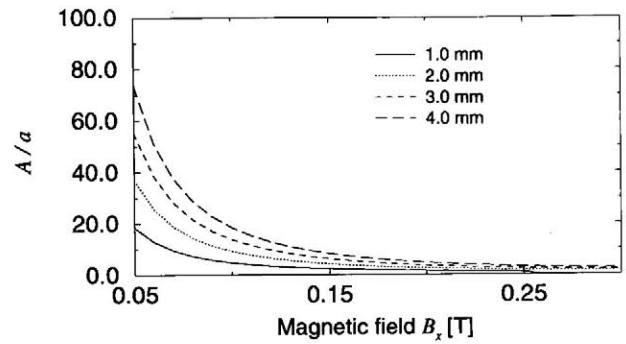
Fig. 4.28(a,b) には 316 ステンレス鋼における磁場と共振振動数比  $\omega_f/\omega_0$  および振幅比  $A/u_0$  の関係を示している。共振振動数は、磁場が増加してもそれほど変動しないが、振幅比の値は、銅およびアルミニウムにくらべ大きい。これは、316 ステンレス鋼の導電率は、銅およびアルミニウムのそれにくらべ 1 桁も小さく磁気減衰効果が小さくなっているためである。よって、外力による強制振動の場合と同様に導電率の高い材料を用いれば、磁気減衰効果により強制振動時の振動振幅を抑えることができるといえる。

なお、ここでは、磁場が 1.5 T を越えると共振状態が存在しないため、磁場 1.5 T までについて検討を行っているが、磁場 10 T といった強磁場においても前節で述べた 周期的外力で強制振動をさせた場合と同様に本評価方法で強制振動特性を検討できる。



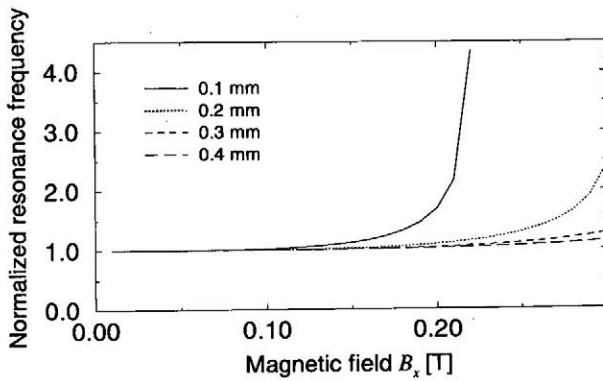


(a) Normalized resonance frequency

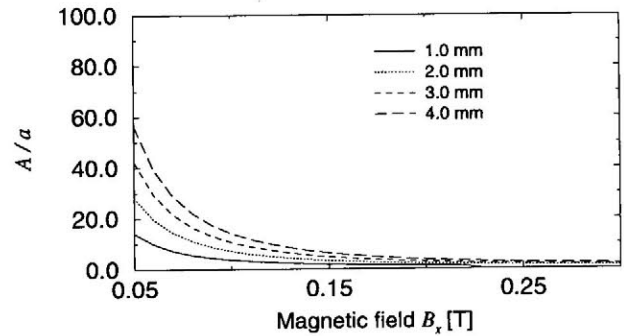


(b) Normalized amplitude

Fig. 4.26 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic motion of the base (copper)

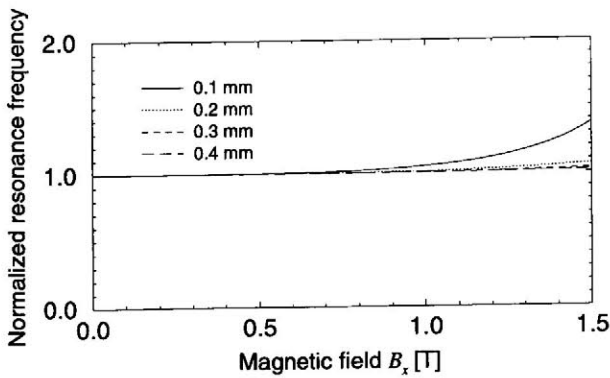


(a) Normalized resonance frequency

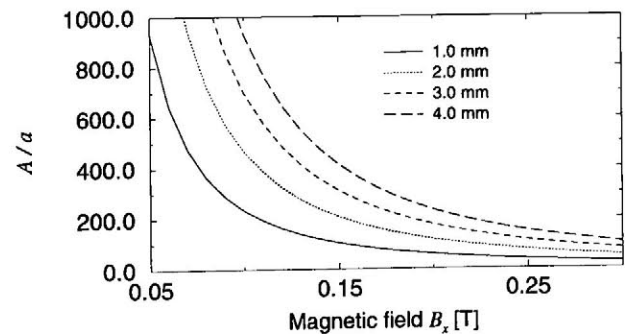


(b) Normalized amplitude

Fig. 4.27 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic motion of the base (aluminum)



(a) Normalized resonance frequency



(b) Normalized amplitude

Fig. 4.28 Change of resonance frequency and amplitude under the harmonic motion of the base (316 SS)

## 4.4 おわりに

磁場中に設置される機器の強制振動特性に関して、有限要素解析および1自由度連成モデルにより検討を行った。その結果、以下の結論が得られた。

- 外力による強制振動状態では、形状と磁場の組み合わせにより、共振振動数が固有振動数よりも大きくなることを有限要素解析により示し、磁気減衰を一般の減衰に置き換えて評価することはできないことを示した。また、有限要素解析より得られた共振振動数と1自由度連成モデルにおける共振振動数の評価式より得られた値を比較し、1自由度連成モデルの評価式が妥当であることを示した。
- 支持部の周期的変位による強制振動状態では、磁場が強くなり、磁気減衰効果が強くなることで、共振振動数が固有振動数よりも大きくなり、一般の減衰振動と類似の変化となることを示した。また、1自由度連成モデルより得られる評価式が妥当であることを示した。

なお、1自由度連成モデルより得られる共振振動数の評価式は、ヤング率、密度、導電率、板厚、磁場の関数であるため、この式により、磁場中に置かれる機器の共振特性を即座に知ることができ、核融合炉などの磁場中に置かれる機器を設計するときには有用であると考えられる。

## 参考文献

- (4.1) 矢川元基, 一宮正和, 原子炉構造設計, 1989, 培風館.
- (4.2) L. R. Turner and H. Q. Hua, "Results for cantilever beam moving in crossed magnetic field", *CONPEL*, **9-3**, 205-216, 1990.
- (4.3) T. Takagi, J. Tani, and S. Kawamura, "Numerical and experimental result of TEAM Problem #16 - Magnetic damping in torsional mode -", *Proc. of TEAM Workshop on Computation of Applied Electromagnetic in Mater.*, 34-38, 1993.
- (4.4) T. Takagi and J. Tani, "Dynamic behavior of a plate in magnetic field by full coupling and MMD methods", *IEEE Trans. on Magn.*, **30-5**, 3296-3299, 1994.
- (4.5) Y. Yoshida, K. Miya and K. Demachi, "Study of magnetic damping effect on dynamic deflection of fusion reactor first wall", *Fusion Eng. Des.*, **27**, 473-480, 1995.
- (4.6) 堀江知義, 二保知也, 河野智城, "連成固有値に基づく平板のたわみ問題の磁気減衰挙動評価", 日本 AEM 学会誌, **4-2**, 40-45, 1996.
- (4.7) 奥川光太郎, 基礎数学講座 1 代数学, 1956, 共立出版株式会社.

## 第 5 章

# 電磁構造連成解析に生じる数値的不安定

### 5.1 はじめに

核融合炉などの強磁場中に置かれる機器には電磁構造連成現象により磁気減衰効果が生じ、この連成効果により機器の振動が抑制される。よって、この磁気減衰効果を定量的に評価する方法を開発することは機器を設計する上で重要である。さらに、高速な連成解析方法を開発すれば、磁気減衰効果の評価方法とこの解析方法を併用して強磁場中に置かれる機器を効率良く設計することが可能になる。

この電磁構造連成問題の解析方法として、渦電流および構造物の有限要素式を同一時間ステップ内で同時に解く同時解析方法と、それらの有限要素式を交互に解く交互解析方法がある。同時解析方法では安定に振動応答を得ることができるが、変位と渦電流を未知量とする連立一次方程式を解くために解析モデルの自由度が増加するにしたがい計算時間が大幅に増加する。一方、交互解析方法においては、構造および渦電流の有限要素式を交互に解き、変位および渦電流を求めるため、同時解析方法に比べて計算コストが小さく、既存の汎用有限要素解析コードを利用することができる、という利点がある。しかし、解析条件によっては解析結果が異常な振動となる数値的不安定が発生する場合がある。したがって、強磁場中に置かれる機器の設計において、連成有限要素解析を用いて磁気減衰効果を評価するためには、交互解析方法の安定条件の導出および安定化が必要である。

数値的不安定性は、すでに離散ペクレ数 (Peclet number)<sup>(5.1)</sup> やクーラン数 (Courant number)<sup>(5.2)</sup> によって一般的にも論じられており、安定化方法も提案されている<sup>(5.3)</sup>。連成問題の中でもっとも重要な問題の 1 つである、流体構造連成問題においては、K.C.Park ら<sup>(5.4)(5.5)</sup>、O. C. Zienkiewics ら<sup>(5.6)(5.7)</sup> により検討が行われており、時間積分に時間有限要素を用いた時の無条件安定の条件を導出している。この連成問題においては、連成の強さが構造物の加速度 (変位の時間 2 階微分) に依存するが、電磁構造連成問題においては、構造物の変形速度 (変位の時間 1 階微分) に依存するという差異がある。一方、電磁構造連成問題においては、これまで種々の解析方法<sup>(5.8, 5.9)</sup> が提案され

ているが、それらのほとんどが渦電流と構造物を独立に交互に解析する。新倉らは、速度起電力の評価にラグランジュ座標系を用いることにより数値的不安定の発生が抑えられることを確認している<sup>(5.10)</sup>。しかし、交互解析方法における数値的不安定の発生条件やその安定化方法に関する研究は行われていない。

交互解析方法は、電磁構造連成問題を解析する上で魅力的な方法であることは間違いないが、上述のように磁場や時間刻み幅等の解析条件の組合せにより数値的不安定が発生する。そこで、本章では、以下の4つの連成解析方法

- 同時解析方法
- 速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法
- 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法
- 反復計算付き交互解析方法

の安定性を検討する。各連成解析方法の安定性を検討するにあたっては、時間積分法の漸化式を用いる。また、この漸化式を用いて振動モードと数値的不安定の関係についても検討する。

## 5.2 電磁構造連成問題の解析方法

### 5.2.1 電磁構造連成問題の有限要素式

#### 渦電流解析

本研究では、任意形状の薄肉シェル構造物を対象としているため、Fig.5.1 に示す曲面シェル座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を用いる。また、薄肉導体の渦電流解析に未知変数として、電流ベクトルポテンシャルの薄肉導体に垂直な成分 $T$ を用いる<sup>(5.11)</sup>。この時、電流密度 $\mathbf{j}$ は、薄肉導体の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて、

$$\mathbf{j} = \nabla T \times \mathbf{n} \quad (5.1)$$

で表される。電磁構造連成問題では、構造物の変形速度 $\dot{\mathbf{u}}$ による速度起電力を考慮するため、速度起電力を考慮したオームの法則は

$$\mathbf{J} = \kappa \{ \mathbf{E} + (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}) \} \quad (5.2)$$

となる。この速度起電力を考慮したオームの法則(5.2)式とファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

に(5.1)式を適用することにより、電磁構造連成問題における渦電流の支配方程式

$$\dot{B}_{\bar{z}}^{in} - \{ \nabla \times (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}) \}_{\bar{z}} - \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \right) = -\dot{B}_{\bar{z}}^{ex} \quad (5.4)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\kappa$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $B_z^{in}$ ,  $B_z^{ex}$  はそれぞれ、電界、磁束密度、導電率、変位、渦電流による磁束密度、外部から与えられる磁束密度であり、 $(\cdot)$  は時間微分を表す。

この渦電流の支配方程式 (5.4) 式を電流ポテンシャル  $T$  を未知量とする 8 節点アイソパラメトリックシェル要素

$$T = [N_1, N_2, \dots, N_8] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_8 \end{Bmatrix} = [N]^T \{T\}_e \quad (5.5)$$

を用いてガラーキン法で離散化し、有限要素式を導出すると

$$\mathbf{U}\dot{T} + \mathbf{R}T = -\dot{\mathbf{B}}^{ex} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}} \quad (5.6)$$

となる。(5.6) 式において、 $\mathbf{U}$  はインダクタンスマトリックス、 $\mathbf{R}$  はレジスタンスマトリックス、 $\dot{\mathbf{B}}^{ex}$  は外部変動磁場の時間 1 階微分のベクトルであり、右辺第 2 項  $\mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}$  が構造物の変形によって生じる速度起電力項であり、これが電磁構造連成問題における連成項である。

## 構造解析

曲面シェル構造物の有限要素法による応力解析には、8 節点アイソパラメトリック曲面シェル要素 (5.12) を用いる。この要素の形状関数は、8 節点アイソパラメトリック要素の形状関数  $N_i$  を用いて

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} \mathbf{v}_{3i} \quad (5.7)$$

と表せる。ここで  $\xi, \eta$  は面内方向の、 $\zeta$  は板厚方向の規格化座標、 $i$  は要素節点番号、 $\mathbf{v}_{3i}$  は Fig. 5.1 に示すような板厚方向ベクトルである。この要素の変位は

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{Bmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{\zeta}{2} [\mathbf{v}_{1i} \mid -\mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

と表せる。ここで、 $\mathbf{v}_{1i}$  と  $\mathbf{v}_{2i}$  は  $\mathbf{v}_{3i}$  に垂直な 2 直交軸の単位ベクトルであり、これらの軸まわりの回転角を  $\beta, \alpha$  とする。

電磁場が構造物に与える連成効果は、電磁力 (ローレンツ力)  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  である。この連成効果は、渦電流  $\mathbf{j}$  を電流ポテンシャル  $T$  を用いて表し、構造物の内挿関数  $[N]$  をかけて積分することにより求められる。これを

$$\begin{aligned} \int [N](\mathbf{j} \times \mathbf{B}) &= \int [N] \left\{ \left( -\frac{\partial T}{\partial x} B_z \right) \mathbf{e}_x + \left( -\frac{\partial T}{\partial y} B_z \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial T}{\partial x} B_x + \frac{\partial T}{\partial y} B_y \right) \mathbf{e}_z \right\} \\ &= [\mathbf{C}_s] \{T\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

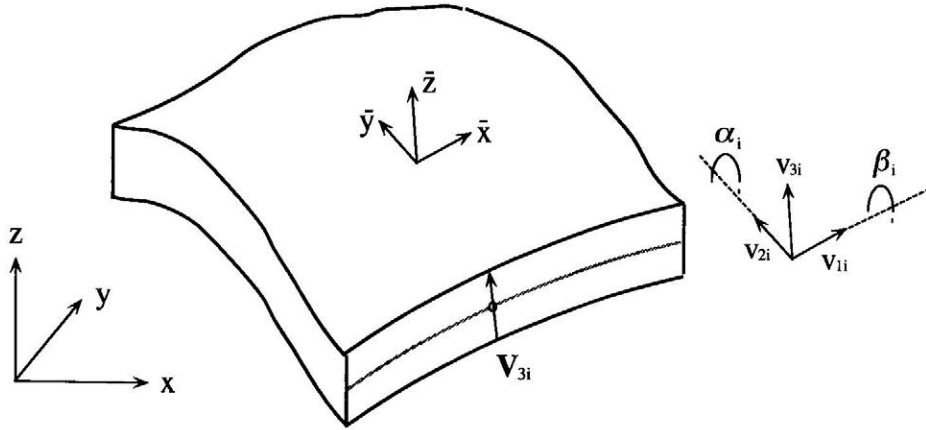


Fig. 5.1 Isoparametric shell element

のように電磁力に関するマトリックス  $\mathbf{C}_s$  によって表す. したがって, この電磁力を考慮すると, 電磁構造連成問題における構造物の有限要素式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^{ex} + \mathbf{C}_s\mathbf{T} \quad (5.10)$$

となる. ここで,  $\mathbf{M}$  は質量マトリックス,  $\mathbf{K}$  は剛性マトリックス,  $\mathbf{F}^{ex}$  は外力ベクトルである. この (5.10) 式の積分方法としては, 解析対象がシェル構造物であることを考慮し, 次数低減積分<sup>(5.13)</sup>を用いる.

## 5.2.2 連成解析方法

### (a) 同時解法

構造の有限要素式 (5.10) 式に Newmark's  $\beta$  法を適用し時間積分を行うとする. Newmark's  $\beta$  法では時刻  $t_{t+\Delta t}$  における加速度  $\ddot{\mathbf{u}}$ , 速度  $\dot{\mathbf{u}}$  を

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) \quad (5.11)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_t + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_t + \frac{\delta}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) \quad (5.12)$$

とおく. ここで,  $\beta, \delta$  は Newmark's  $\beta$  法におけるパラメータである. 一方, 時刻  $t_{t+\Delta t}$  において (5.10) 式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ex} + \mathbf{C}_s\mathbf{T}_{t+\Delta t} \quad (5.13)$$

であるから, (5.13) 式に (5.11), (5.12) 式を代入し,  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  に関して整理すると

$$\left[\mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\beta(\Delta t)^2}\right]\mathbf{u}_{t+\Delta t} = -\mathbf{M}\left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{u}_t\right] + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ex} + \mathbf{C}_s\mathbf{T}_{t+\Delta t} \quad (5.14)$$

となる.

渦電流の有限要素式 (5.6) 式には Crank-Nicolson 法を適用する。Crank-Nicolson 法では、時刻  $t_{t+\theta\Delta t}$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) における電流ポテンシャルの時間 1 階微分  $\dot{\mathbf{T}}_{t+\theta\Delta t}$ 、電流ポテンシャル  $\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t}$ 、外部変動磁場の時間 1 階微分  $\dot{\mathbf{B}}_{t+\theta\Delta t}$  を

$$\dot{\mathbf{T}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t} = (1 - \theta)\mathbf{T}_t + \theta\mathbf{T}_{t+\Delta t} \quad (5.16)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_{t+\theta\Delta t}^{ex} = (1 - \theta)\dot{\mathbf{B}}_{t+\Delta t}^{ex} + \theta\dot{\mathbf{B}}_t^{ex} \quad (5.17)$$

とする。ここで、 $\theta$  はパラメータであり、 $\theta = \frac{1}{2}$  は Crank-Nicolson 法、 $\theta = 1$  は後退差分法となる。一方、時刻  $t_{t+\theta\Delta t}$  において (5.6) 式は

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{T}}_{t+\theta\Delta t} + \mathbf{R}\mathbf{T}_{t+\theta\Delta t} = -\dot{\mathbf{B}}_{t+\theta\Delta t}^{ex} + \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} \quad (5.18)$$

であるから、(5.18) 式に (5.15),(5.16),(5.17) 式を代入し  $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$  に関して整理すると

$$(\mathbf{U} + \theta\Delta t\mathbf{R})\mathbf{T}_{t+\Delta t} = [\mathbf{U} - (1 - \theta)\Delta t\mathbf{R}]\mathbf{T}_t - \Delta t \left[ (1 - \theta)\dot{\mathbf{B}}_{t+\Delta t}^{ex} + \theta\dot{\mathbf{B}}_t^{ex} \right] + \Delta t\mathbf{C}_e\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} \quad (5.19)$$

となる。そして、 $\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$  の取り扱い方により、同時解析方法となるか、交互解析方法となるかが決まる。

$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$  を近似する時に時刻  $t + \Delta t$  における未知量を用いると同時解析方法となる。ここでは、 $\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$  を

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t}{\Delta t} \quad (5.20)$$

として、(5.20) 式を (5.19) 式に代入すると

$$-\mathbf{C}_e\mathbf{u}_{t+\Delta t} + (\mathbf{U} + \theta\Delta t\mathbf{R})\mathbf{T}_{t+\Delta t} = [\mathbf{U} - (1 - \theta)\Delta t\mathbf{R}]\mathbf{T}_t - \Delta t \left[ (1 - \theta)\dot{\mathbf{B}}_{t+\Delta t}^{ex} + \theta\dot{\mathbf{B}}_t^{ex} \right] - \mathbf{C}_e\mathbf{u}_t \quad (5.21)$$

となる。よって、(5.14) 式と (5.21) 式より

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\beta(\Delta t)^2} & -\mathbf{C}_s \\ -\mathbf{C}_e & (\mathbf{U} + \theta\Delta t\mathbf{R}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{T}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{M} \left[ \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{u}_t \right] + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{ex} \\ [\mathbf{U} - (1 - \theta)\Delta t\mathbf{R}]\mathbf{T}_t - \Delta t \left[ (1 - \theta)\dot{\mathbf{B}}_{t+\Delta t}^{ex} + \theta\dot{\mathbf{B}}_t^{ex} \right] - \mathbf{C}_e\mathbf{u}_t \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

という、未知量  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 、 $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$  に関する連立 1 次方程式が導かれる。したがって、(5.22) 式を解くことにより、Fig. 5.2 に示す計算ステップのように時刻  $t_{t+\Delta t}$  における変位  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 、電流ポテンシャル  $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$  が同時に求まる。

## (b) 交互解析方法

$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$  を近似する時に時刻  $t + \Delta t$  における未知量を用いない場合は交互解析方法となる。ここでは、 $\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t}$  を

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{\mathbf{u}}_t \quad (5.23)$$



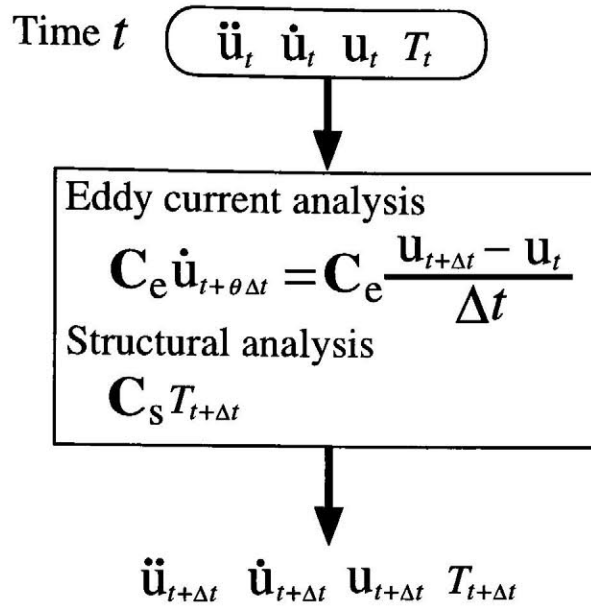


Fig. 5.2 Algorithm of simultaneous method

とおき, (5.23) 式を (5.19) 式に代入すると

$$(\mathbf{U} + \theta \Delta t \mathbf{R}) \mathbf{T}_{n+1} = [\mathbf{U} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{R}] \mathbf{T}_n - \Delta t \left[ (1 - \theta) \dot{\mathbf{B}}_{n+1}^{ex} + \theta \dot{\mathbf{B}}_n^{ex} \right] + \Delta t \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}_n \quad (5.24)$$

となる. よって交互解析方法の計算ステップは Fig. 5.3 に示すように, まず渦電流解析を行い, 時刻  $t + \Delta t$  の  $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$  を求め, 次に構造解析を行い時刻  $t_{t+\Delta t}$  における  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  が求まる. なお,  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta \Delta t}$  を

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\theta \Delta t} \rightarrow \dot{\mathbf{u}}_t + \theta \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (5.25)$$

と近似する方法を前進差分的に速度起電力を評価する交互解析方法 (Fig. 5.4), 時刻  $t + \Delta t$  内で反復演算を行う方法を反復付き交互解析方法 (Fig. 5.5) と呼ぶことにする. なお, この反復付き交互解析方法は, 高木らの用いている方法<sup>(5.14, 5.15)</sup>と同様のものである.

連成解析方法の演算回数を比較すると, 構造解析の自由度を  $neq$ , 渦電流解析の自由度を  $neqem$  とし, 連立1次方程式解法にガウスの消去法を用いたとすると各時間ステップにおいて後退代入に必要とする演算回数は, 交互解析方法では  $neq^2 + neqem^2$  となり, 同時解析方法では  $(neq + neqem)^2$  となる. したがって, 解析対称の有限要素離散化が精密なものになればなるほど, 交互解析方法は同時解析方法にくらべ, 短時間で解析を行うことができるようになる. また, 反復計算を交互解析方法に付加することで, 安定性は改善されるかもしれないが, 反復計算を付加した結果, 計算時間が増加してしまう. その増加量は, 構造解析の自由度を  $neq$ , 渦電流解析の自由度を  $neqem$  とし, 連立1次方程式にガウスの消去法を用いたとすると各時間ステップの後退代入に, 反復計算なし交互解析方法では約  $neq^2 + neqem^2$  の演算回数となるが, 反復付き交互解析方法では, 反復回数を  $n$  とすると約  $n \times (neq^2 + neqem^2)$  となり反復回数が増すほど, 解析時間が増加する

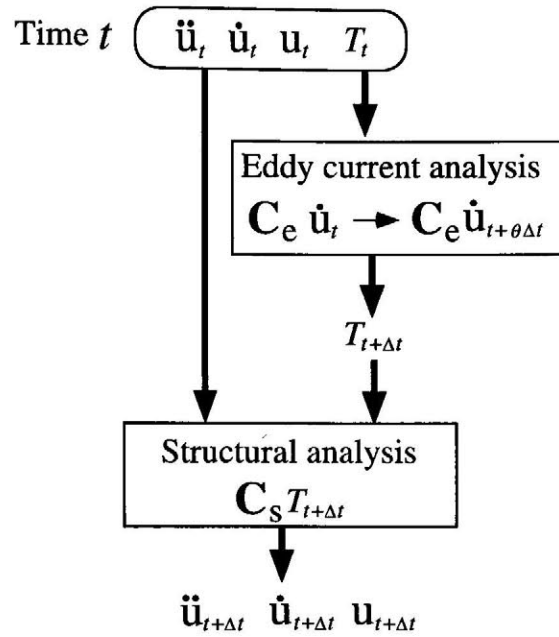


Fig. 5.3 Algorithm of staggered method with the electromotive force using the velocity of previous time step

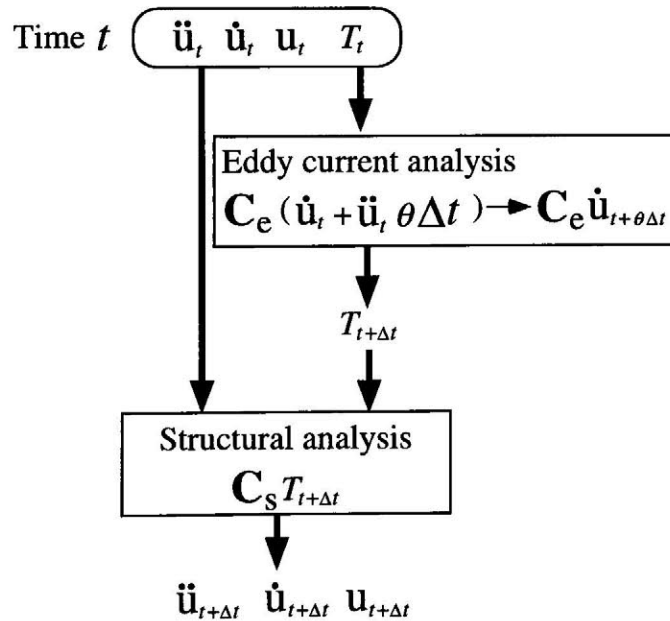


Fig. 5.4 Algorithm of staggered method with the electromotive force using forward difference

### 5.2.3 数値的不安定の発生例

Fig. 5.6 に示す, 一様な定常磁場  $B_x$  中に置かれた片端固定平板の曲げ変形問題 (TEAM ワークショップ・ベンチマーク問題 12<sup>(5.8)</sup> と同じ体系の問題) を解析する. この問題は, 面に垂直な変動磁場

$$B_z = 5.5 \times 10^{-2} \exp \frac{-t}{6.6 \times 10^{-3}} \text{ [T]} \quad (5.26)$$

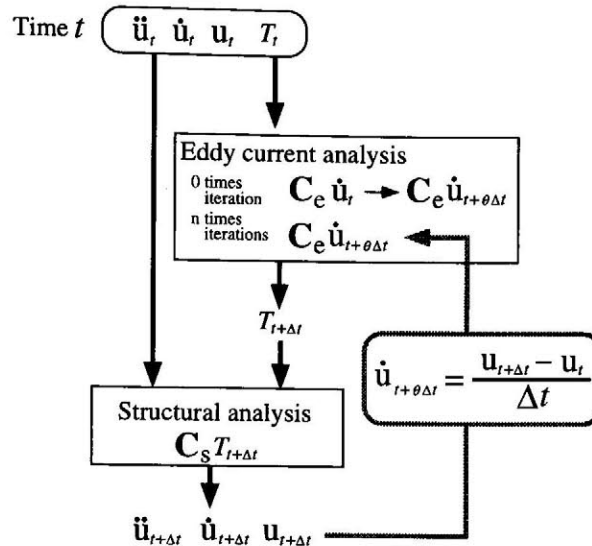
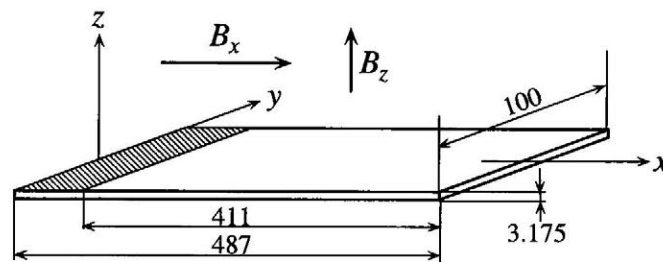


Fig. 5.5 Algorithm of staggered method with iterative calculation



Young's modulus: 110 GPa  
 mass density:  $8.912 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$   
 electric conductivity:  $5.814 \times 10^7 \text{ S/m}$

Fig. 5.6 Schematic diagram of a bending plate in steady magnetic field  $B_x$ 

により平板に渦電流が発生し、この渦電流と  $B_x$  による電磁力で、板が曲げ振動する問題である (Fig.5.6 の長さの単位は [mm])。ここでは、

- 同時解析方法
- 前進差分的に速度起電力を評価する交互解析方法
- 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法
- 反復計算付き交互解析方法

で解析し、数値的不安定の発生例を示す。

Fig. 5.6 に示した平板の自由端における振動応答解析結果を Fig. 5.8, 5.7, 5.9 に示す。Fig. 5.8 は、前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法による解析結果であり、Fig. 5.7, 5.9

はそれぞれ前進差分的に速度起電力を評価する交互解析方法, 反復計算付き交互解析方法で解析した結果である. これらの解析結果より, 解析の途中から異常な振動が現れ, 数値的不安定が発生していることがわかる. この数値的不安定の発生は, 外部磁場の強さや時間刻み幅の大きさに依存性を持っており, 解析結果からもわかるように, 同じ強さの外部磁場であっても, 時間刻み幅を変えることにより数値的不安定の発生を抑えることができる. 交互解析方法と同じ解析条件による同時解析方法の解析結果も Fig. 5.8, 5.7, 5.9 に示しているが, 同時解析方法においては, 数値的不安定が発生せず, 常に安定に解析出来ていることがわかる.

交互解析方法で数値的不安定が発生する原因は, 交互解析方法の計算ステップ上の問題点が挙げられる. 本来, 速度起電力は時刻  $t + \Delta t$  の速度を用いて評価すべき量であるが, 交互解析方法においては, 速度起電力を評価するために時刻  $t$  における速度  $\dot{u}_t$  および加速度  $\ddot{u}_t$  を用いる. このため, 渦電流解析と構造解析の間で時間ステップ幅分だけ連成効果の評価にズレが生じ, 数値的不安定が発生する.

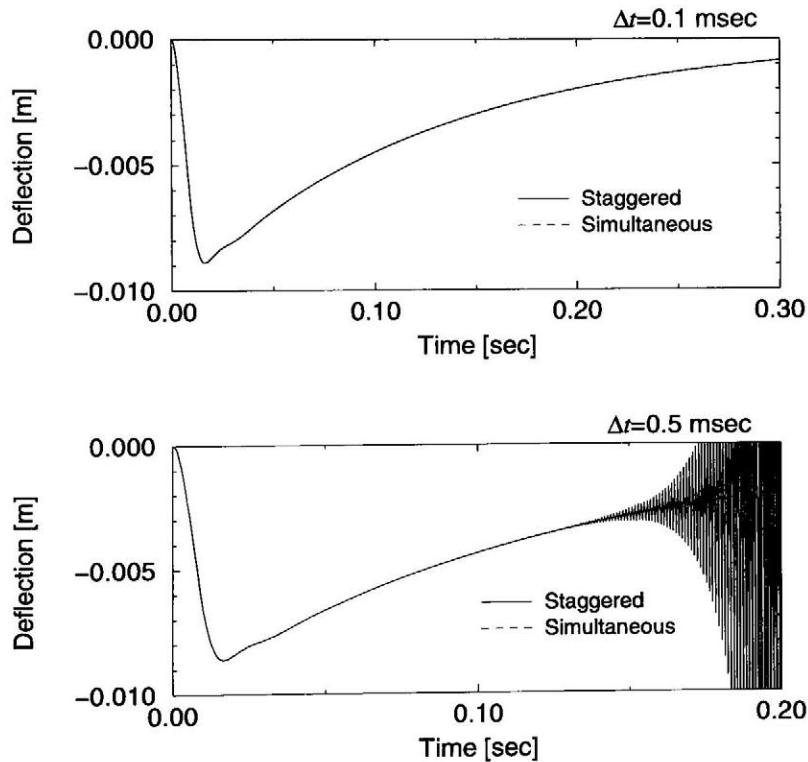


Fig. 5.7 Deflection of the plate by staggered method using forward difference ( $B_x = 2.0$  T)

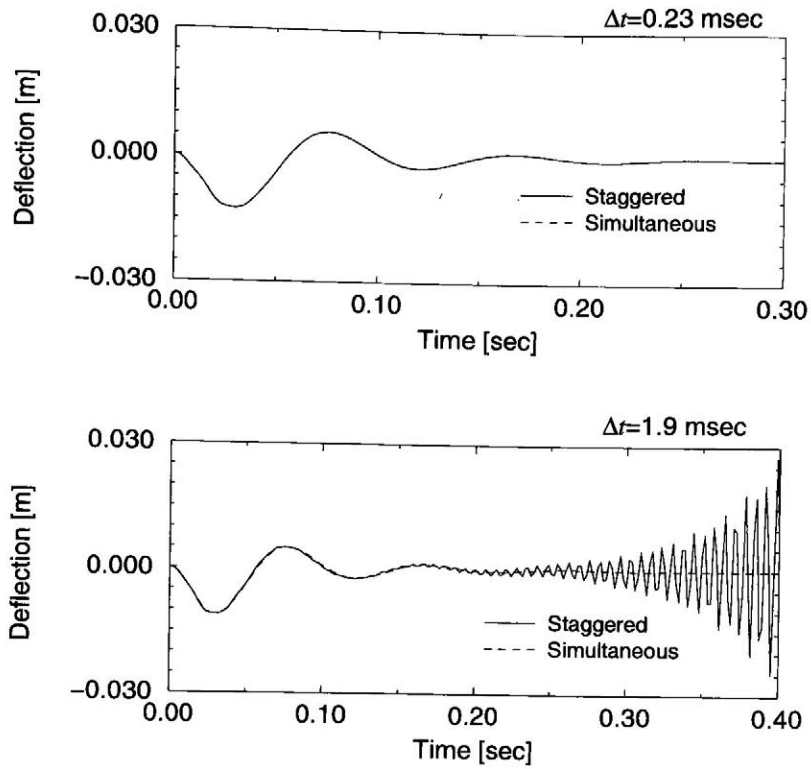


Fig. 5.8 Deflection of the plate by staggered method using the velocity of previous time step ( $B_x = 0.5 \text{ T}$ )

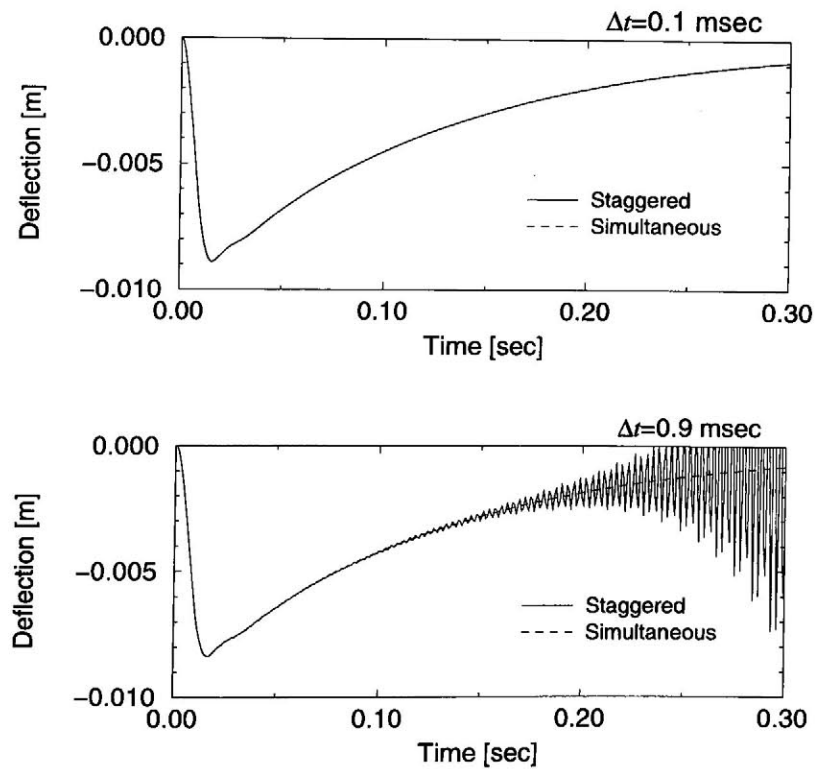


Fig. 5.9 Deflection of the plate by staggered method with 2 iterative calculations ( $B_x = 2.0 \text{ T}$ )

## 5.3 連成解析方法の安定性評価方法

### 5.3.1 時間積分の漸化式と安定性の判定方法

有限要素式を直接時間積分法により、時間積分することは、有限要素式をモード分離し、モード合成法により全ての振動モード、渦電流モードを含めて解析することと同じである。したがって、各々の振動モード、渦電流モードにおける数値的不安定性を検討すれば、電磁構造連成問題における連成解析方法の安定性を検討することができる。

電磁構造連成問題の有限要素式 (5.6), (5.10) 式をモード分離し、各々の振動モード、渦電流モードの式を導出すると、これらの式より Fig. 5.10 に示すように時刻  $t + \Delta t$  と時刻  $t$  に漸化式

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \\ u_{t+\Delta t} \\ T_{t+\Delta t} \end{Bmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_t \\ \dot{u}_t \\ u_t \\ T_t \end{Bmatrix}^T + \mathbf{l}_1 f_{t+\Delta t} + \mathbf{l}_2 \dot{B}_{t+\theta\Delta t} \quad (5.27)$$

ただし、

$$\begin{aligned} u &: \text{構造のモード振幅} \\ T &: \text{渦電流のモード振幅} \\ \mathbf{l}_1 f_{t+\Delta t} &: \text{外荷重} \\ \mathbf{l}_2 \dot{B}_{t+\theta\Delta t} &: \text{外部変動磁場} \end{aligned} \quad (5.28)$$

が得られる。この漸化式のマトリックス  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda$  を調べることにより時間積分の安定性を判定することができる。

- $|\lambda| \leq 1.0 \rightarrow$  安定
- $|\lambda| > 1.0 \rightarrow$  数値的不安定が発生

と判定できる。

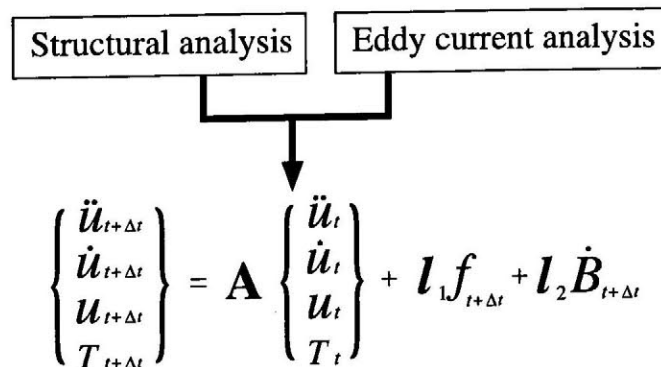


Fig. 5.10 Method to evaluate the stability of the coupled analysis methods

## 5.3.2 同時解析方法の特性方程式

渦電流解析の有限要素式をモード分離すると、時刻  $t + \theta\Delta t$  における1つの渦電流モードの式は

$$U\dot{T}_{t+\theta\Delta t} + RT_{t+\theta\Delta t} = C_e\dot{u}_{t+\theta\Delta t} + \dot{B}_{t+\theta\Delta t} \quad (5.29)$$

となる。上式の  $\dot{T}_{t+\theta\Delta t}$ ,  $T_{t+\theta\Delta t}$  をそれぞれ次のように近似する。

$$\dot{T}_{t+\theta\Delta t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (5.30)$$

$$T_{t+\theta\Delta t} = (1 - \theta)T_t + \theta T_{t+\Delta t} \quad (5.31)$$

そして、同時解析方法とするために  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  を

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \quad (5.32)$$

とする。ここで、 $\theta$  はパラメータであり、

$$\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Crank - Nicolson(クランク・ニコルソン)} \quad (5.33)$$

$$\theta = 1 \Rightarrow \text{Backward difference(後退差分)}$$

である。(5.30), (5.31), (5.32) 式を (5.29) 式に代入し、 $T_{t+\Delta t}$  に関して整理すると

$$T_{t+\Delta t} = \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} T_t + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} (u_{t+\Delta t} - u_t) + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \quad (5.34)$$

ただし

$$\phi = \frac{R}{U} \quad (5.35)$$

となる。

一方、構造解析の有限要素式をモード分離し、時刻  $t + \Delta t$  における1つの構造モードの式を導くと

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} + \omega^2 u_{t+\Delta t} = \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{C_s}{m} T_{t+\Delta t} \quad (5.36)$$

ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.37)$$

となる。構造解析には Newmark's  $\beta$  法を用いるため  $\dot{u}_{t+\Delta t}$ ,  $u_{t+\Delta t}$  はパラメータ  $\delta$ ,  $\beta$  を用いて

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (5.38)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_t + \beta \ddot{u}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (5.39)$$

となる。そして (5.34), (5.39) 式を (5.36) 式に代入し、 $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$ ,  $u_t$ ,  $T_t$  に関する式を導くと

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{t+\Delta t} = & \alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \ddot{u}_t \\ & + \frac{\alpha}{\Delta t} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \dot{u}_t - \frac{\alpha}{\Delta t^2} u_t \\ & + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} \frac{1 - \Delta t(1 - \theta)\phi}{1 + \Delta t\theta\phi} T_t \\ & + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.40)$$

ただし

$$\alpha = \left( \frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \beta - \frac{\beta}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} \right)^{-1} \quad (5.41)$$

となる. (5.40) 式を (5.38) 式に代入すると  $\dot{u}_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t$  に関する式

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t} = & \Delta t \left[ 1 - \delta + \delta \alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \ddot{u}_t \\ & + \left[ 1 + \delta \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \dot{u}_t \\ & - \frac{\delta \alpha}{\Delta t} u_t + \frac{\delta \alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} \frac{1 - \Delta t(1 - \theta) \phi}{1 + \Delta t \theta \phi} T_t \\ & + \frac{\delta \alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\delta \alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t \theta \phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta \Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.42)$$

が得られる. 同様に (5.40) 式を (5.39) 式に代入すると  $u_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t$  に関する式

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t} = & \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left[ 1 + \beta \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \ddot{u}_t \\ & + \Delta t \left[ 1 + \beta \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \dot{u}_t + (1 - \beta \alpha) u_t \\ & + \frac{\beta \alpha C_s}{\omega^2} \frac{1 - \Delta t(1 - \theta) \phi}{m} \frac{1 + \Delta t \theta \phi}{1 + \Delta t \theta \phi} T_t \\ & + \frac{\beta \alpha}{\omega^2} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\beta \alpha C_s}{\omega^2} \frac{\Delta t}{m} \frac{1 + \Delta t \theta \phi}{1 + \Delta t \theta \phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta \Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.43)$$

が得られる. 同様に (5.43) 式を (5.34) 式に代入すると  $T_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t$  に関する式

$$\begin{aligned} T_{t+\Delta t} = & \frac{\Delta t^2}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e}{U} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \left[ 1 + \beta \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \ddot{u}_t \\ & + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e}{U} \left[ 1 + \beta \alpha \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} - 1 \right) \right] \dot{u}_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e}{U} [-\beta \alpha] u_t \\ & + \frac{1 - \Delta t(1 - \theta) \phi}{1 + \Delta t \theta \phi} \left[ 1 + \frac{\beta \alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s}{mU} \right] T_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e \beta \alpha}{U} \frac{f_{t+\Delta t}}{\omega^2 m} + \frac{1}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e C_s \beta \alpha}{mU} \frac{\Delta t}{\omega^2} \frac{1 + \Delta t \theta \phi}{1 + \Delta t \theta \phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta \Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.44)$$

が得られる. 以上の (5.40), (5.42), (5.43), (5.44) 式が, 同時解析方法の数値的不安定性を検討する上で基本となる式である.

ここでは, 渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した時の特性方程式を導出する. (5.40), (5.42), (5.43), (5.44) 式において,  $\theta = \frac{1}{2}$  とすると時刻  $t + \Delta t$  と時刻  $t$  の漸化式が得られる. その漸化式



のマトリックス  $\mathbf{A}$  から固有値  $\lambda$  の特性方程式を導出すると

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha + \frac{\alpha C_e C_s}{\omega^2 m U} \frac{-1 - \frac{\Delta t \phi}{4}}{\left(1 + \frac{\Delta t \phi}{2}\right)^2} - \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha C_e C_s}{\omega^2 m U} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi\right)^2} + (2 - \alpha) \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha C_e C_s}{4\omega^2 m U} \frac{\Delta t \phi}{\left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi\right)^2} - \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

となる.

### 5.3.3 各交互解析方法の特性方程式

渦電流解析の有限要素式をモード分離し, 時刻  $t + \theta \Delta t$  における 1 つの渦電流モードの式を導くと

$$U \dot{T}_{t+\theta \Delta t} + R T_{t+\theta \Delta t} = C_e \dot{u}_{t+\theta \Delta t} \quad (5.46)$$

となる. 上式に表れる  $\dot{T}_{t+\theta \Delta t}$ ,  $T_{t+\theta \Delta t}$  をそれぞれ

$$\dot{T}_{t+\theta \Delta t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (5.47)$$

$$T_{t+\theta \Delta t} = (1 - \theta) T_t + \theta T_{t+\Delta t} \quad (5.48)$$

とする. ここで,  $\theta$  は Crank-Nicolson 法のパラメータである. 上式において

$$\phi = \frac{R}{U} \quad (5.49)$$

とし,  $T_{t+\Delta t}$  に関して整理すると

$$T_{t+\Delta t} = \frac{1 - \Delta t \phi (1 - \theta)}{1 + \Delta t \phi \theta} T_t + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{C_e}{U} \dot{u}_{t+\theta \Delta t} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t \phi \theta} \frac{\dot{B}_{t+\theta \Delta t}}{U} \quad (5.50)$$

となる.

一方, 構造解析の有限要素式をモード分離し, 時刻  $t + \Delta t$  における 1 つの構造モードの式を導くと

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} + \omega^2 u_{t+\Delta t} = \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{C_s}{m} T_{t+\Delta t} \quad (5.51)$$

ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.52)$$

となる. 構造解析には Newmark's  $\beta$  法を適用するため,  $\dot{u}_{t+\Delta t}$ ,  $u_{t+\Delta t}$  をパラメータ  $\delta$ ,  $\beta$  を用いて

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1 - \delta) \ddot{u}_t + \delta \ddot{u}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (5.53)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_t + \beta \ddot{u}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (5.54)$$

とする。(5.50), (5.54) 式を (5.51) 式に代入すると  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t, \dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  に関する式

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{t+\Delta t} = & -\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_t - \frac{\alpha}{\Delta t} \dot{u}_t - \frac{\alpha}{\Delta t^2} u_t + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} \frac{1 - \Delta t(1-\theta)\phi}{1 + \Delta t\theta\phi} T_t \\ & + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_e C_s}{mU} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\theta\phi} \dot{u}_{t+\theta\Delta t} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\theta\phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.55)$$

ただし

$$\alpha = \left( \frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \beta \right)^{-1} \quad (5.56)$$

が得られる。同様に (5.53) 式に (5.55) 式を代入すると,  $\dot{u}_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t, \dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  に関する式

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t} = & \Delta t \left[ (1 - \delta) - \delta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \right] \ddot{u}_t + [1 - \delta\alpha] \dot{u}_t - \frac{\delta\alpha}{\Delta t} u_t + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} \frac{1 - \Delta t(1-\theta)\phi}{1 + \Delta t\theta\phi} T_t \\ & + \frac{\delta\alpha}{\omega^2} \frac{C_e C_s}{mU} \frac{1}{1 + \Delta t\theta\phi} \dot{u}_{t+\theta\Delta t} + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\theta\phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.57)$$

が得られ, (5.54) 式に (5.55) 式を代入すると  $u_{t+\Delta t}$  と  $\ddot{u}_t, \dot{u}_t, u_t, T_t, \dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  に関する式

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t} = & \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta - \beta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \right] \ddot{u}_t + \Delta t [1 - \beta\alpha] \dot{u}_t + [1 - \beta\alpha] u_t + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} \frac{1 - \Delta t(1-\theta)\phi}{1 + \Delta t\theta\phi} T_t \\ & + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \Delta t \frac{C_e C_s}{mU} \frac{1}{1 + \Delta t\theta\phi} \dot{u}_{t+\theta\Delta t} + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\theta\phi} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.58)$$

が得られる。以上の (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式が, 交互解析方法における数値的不安定の発生条件を検討する上で基本となる式であり, 交互解析方法で重要な量である  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  は次節で  $\dot{u}_t, u_t$  を用いて書き直される。

#### (a) 前ステップの速度を用いて速度起電力を評価する場合

渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した場合 渦電流解析には Crank-Nicolson 法, 速度起電力を前ステップの速度を用いて評価する交互解析方法の特性方程式を導出する。すなわち,  $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{u}_t$  とする。以上の条件を, (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式に適用し漸化式を立て, 漸化式のマトリックス  $\mathbf{A}$  より固有値  $\lambda$  の特性方程式を導くと

$$\begin{aligned} \lambda^4 + & \left[ -2 + \alpha - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} - \alpha \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

となる。

渦電流解析に後退差分法を適用した場合 渦電流解析には後退差分法, 速度起電力を前ステップの速度を用いて評価する交互解析方法の特性方程式を導出する。すなわち,  $\theta = 1$ ,  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{u}_t$  とする。以上の条件を, (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式に適用し漸化式を立て, 固有値  $\lambda$  の特性方程式を

導くと

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \alpha \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1}{1 + \Delta t \phi} + \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

となる.

### (b) 速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法

渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した場合 渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用し, 前進差分的に速度起電力を評価する交互解析方法の特性方程式を導出する. すなわち,  $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{u}_t + \frac{1}{2}\ddot{u}_t\Delta t$  とする以上の条件を (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式に適用し漸化式を立て, 固有値  $\lambda$  の特性方程式を導くと

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} - \alpha \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} + \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t \phi} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

となる.

渦電流解析に後退差分法を適用した場合 渦電流解析に後退差分法を適用し, 前進差分的に速度起電力を評価する交互解析方法の特性方程式を導出する. すなわち  $\theta = 1$ ,  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{u}_t + \ddot{u}_t\Delta t$  とする以上の条件を (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式に適用し漸化式を立て, 特性方程式を導くと

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \frac{3\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \alpha \frac{1}{1 + \Delta t \phi} + \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

となる.

### (c) 反復計算付き交互解析方法

前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法に反復計算を付加した場合 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法に反復計算を付加した場合の特性方程式を導出する. すなわち (5.50), (5.55), (5.57), (5.58) 式において  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t} \rightarrow \dot{u}_t$  とする. 反復計算を 1 回行う場合には, 時刻  $t + \Delta t$  の速度を

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t}^{(0)} - u_t}{\Delta t} \quad (5.63)$$

とする。ただし、 $u_{t+\Delta t}^{(0)}$  の上付き添字 (0) は反復回数を表す。そこで、(5.63) 式を (5.50) 式に代入し、さらに  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  を  $\dot{u}_t$  とした (5.58) 式を  $u_{t+\Delta t}^{(0)}$  に代入すると反復 1 回後の  $T_{t+\Delta t}^{(1)}$  が

$$\begin{aligned} T_{t+\Delta t}^{(1)} = & \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta - \beta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \right] \ddot{u}_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \Delta t \left[ 1 - \beta\alpha + \frac{\beta\alpha C_e C_s}{\omega^2 m U} \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \right] \dot{u}_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} [-\beta\alpha] u_t + \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\beta\alpha C_e C_s}{\omega^2 m U} \right] T_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e \beta\alpha}{U \omega^2} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \left[ \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\beta\alpha C_e C_s}{\omega^2 m U} + 1 \right] \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.64)$$

となる。この (5.64) 式を

$$T_{t+\Delta t}^{(1)} = A_1^{(1)} \ddot{u}_t + A_2^{(1)} \dot{u}_t + A_3^{(1)} u_t + \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} A_4^{(1)} T_t + A_5^{(1)} \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} A_6^{(1)} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \quad (5.65)$$

と簡単化する。次に (5.65) 式を用いて Newmark's  $\beta$  法の式から  $\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(1)}$ ,  $\dot{u}_{t+\Delta t}^{(1)}$ ,  $u_{t+\Delta t}^{(1)}$  を導く。(5.65) 式、

(5.54) 式を (5.51) 式に代入すると  $\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(1)}$  と  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$ ,  $u_t$ ,  $T_t$  の関係式

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(1)} = & \left[ -\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_1^{(1)} \right] \ddot{u}_t + \left[ -\frac{\alpha}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_2^{(1)} \right] \dot{u}_t \\ & + \left[ -\frac{\alpha}{\Delta t^2} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_3^{(1)} \right] u_t + \left[ \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_4^{(1)} \right] T_t \\ & + \left[ \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_5^{(1)} \right] \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_6^{(1)} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.66)$$

が得られる。次に (5.66) 式を (5.53) 式に代入すると、 $\dot{u}_{t+\Delta t}^{(1)}$  と  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$ ,  $u_t$ ,  $T_t$  の関係式

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t}^{(1)} = & \Delta t \left[ 1 - \delta - \delta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_1^{(1)} \right] \ddot{u}_t + \left[ 1 - \delta\alpha + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} A_2^{(1)} \right] \dot{u}_t \\ & + \left[ -\frac{\delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} A_3^{(1)} \right] u_t + \left[ \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} A_4^{(1)} \right] T_t \\ & + \left[ \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} A_5^{(1)} \right] \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\delta\alpha}{\omega^2 \Delta t} \frac{C_s}{m} A_6^{(1)} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.67)$$

が得られる。同様に (5.66) 式を (5.54) 式に代入すると  $u_{t+\Delta t}^{(1)}$  と  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$ ,  $u_t$ ,  $T_t$  の関係式

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t}^{(1)} = & \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta - \beta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) + \frac{\beta\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_1^{(1)} \right] \ddot{u}_t + \left[ \Delta t - \beta\alpha\Delta t + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_2^{(1)} \right] \dot{u}_t \\ & + \left[ 1 - \beta\alpha + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_3^{(1)} \right] u_t + \left[ \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_4^{(1)} \right] T_t \\ & + \left[ \frac{\beta\alpha}{\omega^2} + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_5^{(1)} \right] \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_6^{(1)} \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.68)$$

が得られる。以上の (5.64), (5.66), (5.67), (5.68) 式において  $\theta = \frac{1}{2}$  とし、漸化式を導き、特性方程式を導出すると

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{3\alpha}{4\omega^2} \xi + \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \xi - \frac{\alpha^2}{8\omega^4} \xi^2 - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2} \eta \xi \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi + 2\eta - \alpha\eta + \frac{\alpha}{2\omega^2} \eta \xi - \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \eta \xi \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi + \frac{\alpha^2}{8\omega^4} \xi^2 - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2} \eta \xi \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

ただし

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \frac{C_e C_s}{mU}, \quad \eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\phi\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \quad (5.70)$$

となる。反復計算を 2 回行う場合には

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t}^{(1)} - u_t}{\Delta t} \quad (5.71)$$

とする。この (5.71) 式を (5.50) 式に代入し、さらに  $u_{t+\Delta t}^{(1)}$  に (5.68) 式を代入すると反復 2 回後の  $T_{t+\Delta t}^{(2)}$  は

$$\begin{aligned} T_{t+\Delta t}^{(2)} = & \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta - \beta\alpha \left( \frac{1}{2} - \beta \right) + \frac{\beta\alpha}{\omega^2 \Delta t^2} \frac{C_s}{m} A_1^{(1)} \right] \ddot{u}_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \left[ \Delta t - \beta\alpha\Delta t + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_e C_s}{mU} A_2^{(1)} \right] \dot{u}_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \left[ -\beta\alpha + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_3^{(1)} \right] u_n + \frac{1 - \Delta t\phi(1 - \theta)}{1 + \Delta t\phi\theta} \left[ 1 + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_e C_s}{mU} A_4^{(1)} \right] T_t \\ & + \frac{1}{1 + \Delta t\phi\theta} \frac{C_e}{U} \left[ \frac{\beta\alpha}{\omega^2} + \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_s}{m} A_5^{(1)} \right] \frac{f_{t+\Delta t}}{m} + \frac{\Delta t}{1 + \Delta t\phi\theta} \left[ \frac{1}{1 + \theta\phi\Delta t} \frac{\beta\alpha}{\omega^2} \frac{C_e C_s}{mU} A_6^{(1)} + 1 \right] \frac{\dot{B}_{t+\theta\Delta t}}{U} \end{aligned} \quad (5.72)$$

となる。反復計算を 1 回を行う場合と同様に Newmark's  $\beta$  法の式から  $\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(2)}$ ,  $\dot{u}_{t+\Delta t}^{(2)}$ ,  $u_{t+\Delta t}^{(2)}$ ,  $T_{t+\Delta t}^{(2)}$  と  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$ ,  $u_t$ ,  $T_t$  の関係式を導びき、漸化式を立て、その漸化式のマトリックス  $\mathbf{A}$  から固有値  $\lambda$  の特性方程式を導くと

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^3 \left( -2 + \alpha - \frac{3\alpha}{16\omega^4} \xi^2 + \frac{\alpha^3}{16\omega^4} \xi^2 - \frac{\alpha^3}{32\omega^6} \xi^3 - \frac{3\alpha}{4\omega^2} \xi + \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \xi - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi\eta - \frac{\alpha^2}{16\omega^4} \xi^2\eta \right) \\ & + \lambda^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{8\omega^4} \xi^2 + \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi + 2\eta - \alpha\eta + \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi\eta - \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \xi\eta + \frac{\alpha^2}{8\omega^4} \xi^2\eta - \frac{\alpha^3}{16\omega^4} \xi^2\eta \right) \\ & + \lambda \left( \frac{\alpha^2}{16\omega^4} \xi^2 + \frac{\alpha^3}{32\omega^6} \xi^3 + \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi\eta - \frac{\alpha^2}{16\omega^4} \xi^2\eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

ただし

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \frac{C_e C_s}{mU}, \quad \eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\phi\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \quad (5.74)$$

となる。

速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法に反復計算を付加した場合 前ステップの速度を用いて速度起電力を評価する交互解析方法に反復計算を付加した場合と同様の手順により、速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法に反復計算を付加した時の特性方程式を導出すると、反復 1 回の場合

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4\omega^4} \xi^2 - \frac{3\alpha}{4\omega^2} \xi + \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \xi - \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi\eta - \eta \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{4\omega^4} \xi^2 + \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi + \frac{\alpha}{2\omega^2} \xi\eta - \frac{\alpha^2}{4\omega^2} \xi\eta + 2\eta - \alpha\eta \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi - \frac{\alpha}{4\omega^2} \xi\eta - \eta \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

ただし

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \frac{C_e C_s}{mU}, \quad \eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\phi\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\phi\Delta t} \quad (5.76)$$

となる。反復を 2 回行う場合は

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{\alpha^3}{16\omega^6}\xi^3 - \frac{3\alpha^2}{16\omega^4}\xi^2 + \frac{\alpha^3}{16\omega^4}\xi^2 - \frac{3\alpha}{4\omega^2}\xi + \frac{\alpha^2}{4\omega^2}\xi - \frac{\alpha^2}{16\omega^4}\xi^2\eta - \frac{\alpha}{4\omega^2}\xi\eta - \eta \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha^3}{16\omega^6}\xi^3 + \frac{\alpha^2}{8\omega^4}\xi^2 + \frac{\alpha}{2\omega^2}\xi + \frac{\alpha^2}{8\omega^4}\xi^2\eta - \frac{\alpha^3}{16\omega^4}\xi^2\eta + \frac{\alpha}{2\omega^2}\xi\eta - \frac{\alpha^2}{4\omega^2}\xi\eta + 2\eta - \alpha\eta \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha^2}{16\omega^4}\xi^2 + \frac{\alpha}{4\omega^2}\xi - \frac{\alpha^2}{16\omega^4}\xi^2\eta - \frac{\alpha}{4\omega^2}\xi\eta - \eta \right] \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

となる。

## 5.4 連成解析方法の安定性の比較および検討

### 5.4.1 振動モード 1 の安定性

#### (a) 同時解析方法

解析問題を Fig. 5.6 に示す磁場中におかれた片端固定平板の曲げ変形問題とし、この問題に同時解析方法を適用したときの安定性について検討する。同時解析方法の特性方程式

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha + \frac{\alpha C_e C_s}{\omega^2 mU} \frac{-1 - \frac{\Delta t\phi}{4}}{\left(1 + \frac{\Delta t\phi}{2}\right)^2} - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha C_e C_s}{\omega^2 mU} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi\right)^2} + (2 - \alpha) \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha C_e C_s}{4\omega^2 mU} \frac{\Delta t\phi}{\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi\right)^2} - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \right] \lambda = 0 \end{aligned}$$

(5.45) 式を解くことにより、同時解析方法の安定性を判別できるが、解くためには特性方程式の係数  $\omega = \frac{k}{m}$ ,  $\phi = \frac{R}{U}$ ,  $\frac{C_e C_s}{mU}$  の値を決定する必要がある。これらの係数において、質量  $m$  は密度  $\rho$  と板厚  $h$  の間に  $m \propto \rho h$ , 曲げ剛性  $k$  はヤング率  $E$  と断面 2 次モーメントより  $k \propto Eh$ , 抵抗  $R$  は導電率  $\kappa$  と板厚  $h$  の間に  $\kappa \propto \frac{1}{\kappa h^2}$ , 連成効果の項  $C_e C_s$  は外部定常磁場との間に  $C_e C_s \propto B_x^2$  の関係が成立するため、 $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\frac{C_e C_s}{mU}$  はそれぞれ形状に関する比例定数  $P_s$ ,  $P_e$ ,  $P_c$  を用いて

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{Eh^2}{\rho} P_s, \quad \phi = \frac{R}{U} = \frac{1}{\kappa h} P_e, \quad \frac{C_e C_s}{mU} = \frac{B_x^2}{\rho h} P_c \quad (5.78)$$

なる 3 つの関係式が得られる (5.16)。ここで、形状に関する比例定数  $P_s$ ,  $P_e$ ,  $P_c$  は各振動モードによって決まる。よって、比例関係式 (5.78) 式を同時解析方法の特性方程式 (5.45) 式に代入することにより、固有値  $\lambda$  は磁場  $B$ , 時間刻み幅  $\Delta t$ ,  $E$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $h$  の関数となり、固有値  $\lambda$  が外部定常磁場や時間刻み幅を変化させることにより、どのように変化するかを調べることで、同時解析方法の安定性を検討することができる。

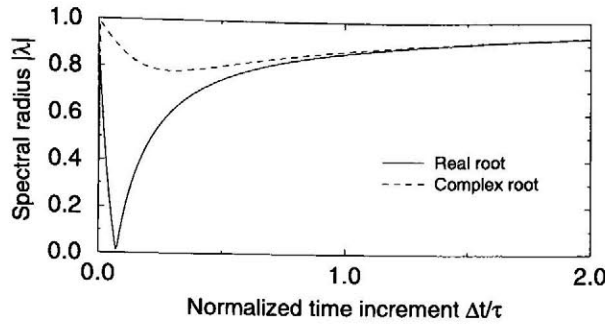


Fig. 5.11 Change of the spectral radius of the simultaneous method with normalized time increment under the condition of  $B_x = 0.5 \text{ T}$

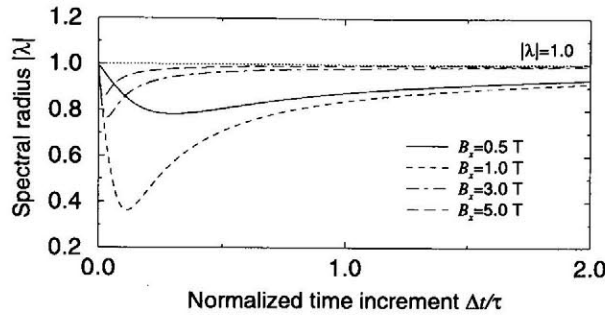


Fig. 5.12 Change of the spectral radius of the simultaneous method with normalized time increment for different magnetic fields

そこで、比例定数  $P_s$ ,  $P_e$ ,  $P_c$  は振動モード 1 の値として、これらの値を代入した (5.78) 式を同時解析方法の特性方程式に代入して解き、固有値の絶対値と外部定常磁場の関係を求めると Fig. 5.11 のようになる。Fig. 5.12 には、各磁場における複素根の変化を示す。Fig. 5.11, 5.12 より、同時解析方法においては、時間刻み幅を 0.2 sec (平板の振動モード 1 の固有周期は 0.093 sec) まで変化させても、固有値の絶対値は 1 を越えないことがわかる。そこで、(5.45) 式にもとづいて同時解析方法の安定性を検討する。(5.45) 式の係数において、 $B_x \rightarrow \infty$  とする、すなわち  $\frac{C_e C_s}{mU} \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{\alpha C_e C_s}{\omega^2 mU} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi\right)} &= \frac{1}{\frac{-\beta}{1}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \\ &= \frac{-1}{\beta \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi\right)} \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \beta} - \frac{1}{\frac{\beta}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.80)$$

となる. よって,  $\lambda^3$ の係数は

$$\begin{aligned}\lambda^3\text{の係数} &= -2 + \left(-1 - \frac{1}{4}\Delta t\phi\right) \frac{-4}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \\ &= \frac{-2 - \Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{4 + \Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{-1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \\ &= 1\end{aligned}\quad (5.81)$$

となり,  $\lambda^2$ の係数は

$$\begin{aligned}\lambda^2\text{の係数} &= 1 + \frac{-4}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{2 - \Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{-4}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} + \frac{2 - \Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \\ &= -1\end{aligned}\quad (5.82)$$

$\lambda$ の係数は

$$\begin{aligned}\lambda\text{の係数} &= \frac{-\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} - \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \\ &= -1\end{aligned}\quad (5.83)$$

となる. よって, 同時解析方法の特性方程式は  $B_x \rightarrow \infty$  において

$$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) = 0\quad (5.84)$$

となる. (5.84)式より, 磁場がどのような値となっても固有値の絶対値は 1 を越えないため, 同時解析方法はどのような磁場が与えられても安定に解析を行えるといえる.

次に時間刻み幅に対する安定性を検討する.  $\Delta t \rightarrow \infty$  とすると (5.45) 式の係数は

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \beta - \frac{\beta}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} \frac{C_e C_s}{mU}} \\ &= \frac{1}{\beta}\end{aligned}\quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t\phi}{1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi} &= \frac{\frac{1}{\Delta t\phi} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\Delta t\phi} + \frac{1}{2}} \\ &= -1\end{aligned}\quad (5.86)$$

$$\begin{aligned}\frac{-1 - \frac{1}{4}\Delta t\phi}{\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi\right)^2} &= \frac{-1 - \frac{1}{4}\Delta t\phi}{1 + \Delta t\phi + \frac{1}{4}\Delta t^2\phi^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{\Delta t\phi} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{\Delta t\phi} + 1 + \frac{1}{4}\Delta t\phi} \\ &= 0\end{aligned}\quad (5.87)$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi\right)^2} = 0\quad (5.88)$$

$$\frac{\Delta t\phi}{\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\phi\right)^2} = 0\quad (5.89)$$



となる。よって、 $\lambda^3$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda$  の係数はそれぞれ

$$\lambda^3 \text{の係数} = -2 + \frac{1}{\beta} + 1 = 3 \quad (5.90)$$

$$\lambda^2 \text{の係数} = -2 - \left(2 - \frac{1}{\beta}\right) = 3 \quad (5.91)$$

$$\lambda \text{の係数} = 1 \quad (5.92)$$

となる。よって、 $\Delta t \rightarrow \infty$  において特性方程式は

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)^3 = 0 \quad (5.93)$$

となり、どのような時間刻み幅においても固有値の絶対値は 1 を越えない。したがって、同時解析方法は、どのような時間刻み幅で解析を行っても、安定に解が得られる。また、(5.84), (5.93) 式からわかるように、これらの式には、振動モードによって変化する係数  $P_s$ ,  $P_e$ ,  $P_c$  を含んでいないため、どの振動モードにおいても、同時解析方法を用いれば数値的不安定が発生せずに安定に解析を行える。

## (b) 交互解析方法

**速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法** 速度起電力を前進差分的に評価、すなわち  $C_e \dot{u}_{t+\theta \Delta t} \leftarrow C_e \dot{u}_t + \theta \ddot{u}_t$  とし、構造解析には、Newmark's  $\beta$  法 ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$ )、渦電流解析に Crank-Nicolson 法 ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) を用いた交互解析方法の安定性について検討する。この交互解析方法の特性方程式は

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} - \alpha \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} + \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \right] \lambda = 0 \end{aligned}$$

である。同時解析方法の場合と同様に TEAM 12 と同じ体系である Fig. 5.6 の問題で安定性を検討する。同時解析方法と同様の手順で、係数を決定し特性方程式を解き、振動モード 1 における固有値の絶対値と外部定常磁場の関係を求めると Fig. 5.13 のようになる。Fig. 5.13 において縦軸は固有値の絶対値 (spectral radius)、横軸は時間刻み幅  $\Delta t$  を振動モード 1 の固有周期  $\tau$  で規格化した値である。Fig. 5.13 より実根が 1 を越える傾向が得られたので、種々の外部定常磁場における実根の変化を Fig. 5.14 に示す。Fig. 5.14 において、磁場が 1.0 T 以上になると線が折れ曲がっている。これは、Fig. 5.15 を用いて説明すると、時間刻み幅が  $5.8 \times 10^{-3}$  sec 以下では 1 つの実根と共役複素数、そして、 $5.8 \times 10^{-3} \sim 0.40 \times 10^{-1}$  sec の間では 3 つの実根となり、 $0.40 \times 10^{-1}$  sec 以上では、また 1 つの実根と共役複素数となる。この複雑な挙動の中で、Fig. 5.15 に示す矢印で、Fig. 5.14 を描いたために折れ線となっている。しかし、これは安定性を判定する上で重要な問題

ではない。Fig. 5.14 より、磁場が強くなるにしたがい、固有値の絶対値が 1 を越える  $\Delta t/\tau$  の値が小さくなることがわかる。すなわち、磁場が強くなるほど、安定に解析できる時間刻み幅  $\Delta t$  が小さくなっている。

そこで、ここで得られた安定の条件が妥当であることを検証する解析を行った。Fig. 5.14 から得た解析条件を Table 5.1 に示す。解析条件は、各磁場において安定限界となる時間刻み幅  $\Delta t_c$  から  $-6\%$  時間刻み幅を減少させた  $\Delta t_1$ 、 $+6\%$  増加させた  $\Delta t_2$  である。Table 5.1 の条件で解析し、得られた平板の自由端における振動応答を Fig. 5.16 に示しており、固有値の絶対値が 1 を越える時間刻み幅  $\Delta t_2$  で解析を行うと数値的不安定が生じており、ここで得られた安定条件の妥当性が検証される。

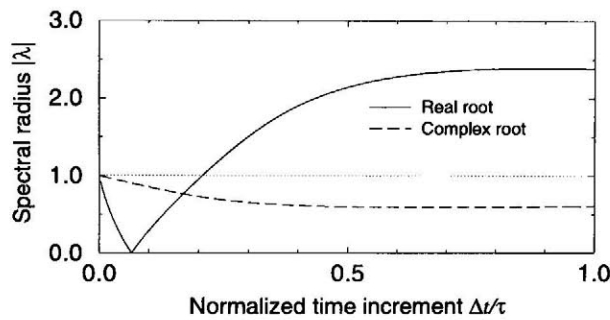


Fig. 5.13 Change of spectral radius of the staggered method with the electromotive force using forward difference under the condition of  $B_x = 0.5$  T

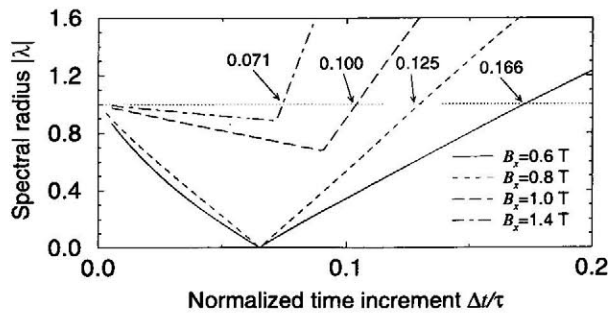


Fig. 5.14 Change of spectral radius of the staggered method with the electromotive force using forward difference for different magnetic fields

Table 5.1 The conditions to confirm the validity of critical time increment (the staggered method with the electromotive force using forward difference)

$B_x$ [T]	$\Delta t_c$ [msec]	$\Delta t_1$ [msec]	$\Delta t_2$ [msec]
1.0	9.380	8.817	9.943
2.0	4.690	4.409	4.971

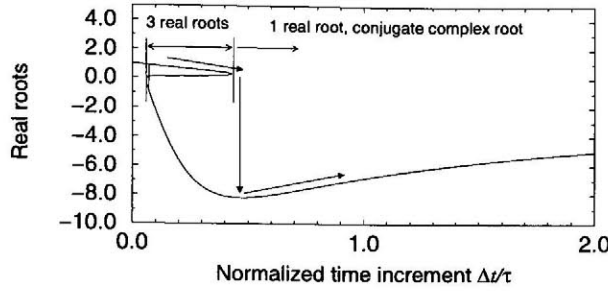


Fig. 5.15 Change of roots with normalized time increment

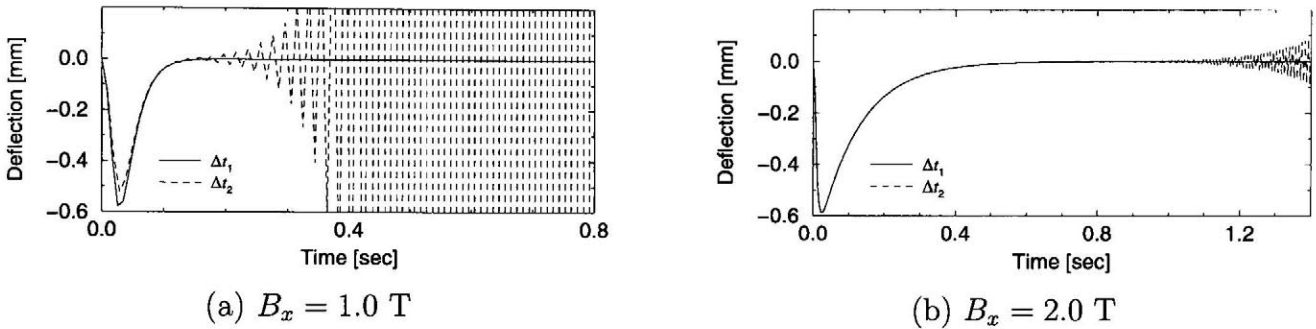


Fig. 5.16 Deflection at the free end of the plate using vibration mode 1

つづいて、渦電流解析に後退差分法を適用した時の安定性を検討する。この時、特性方程式は

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \alpha \frac{1}{1 + \Delta t \phi} + \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1}{1 + \Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda = 0 \end{aligned}$$

となる。この特性方程式を解き、固有値の絶対値と外部定常磁場の関係を求めると Fig. 5.17 のようになる。Fig. 5.17 において、縦軸は固有値の絶対値 (spectral radius), 横軸は時間刻み幅  $\Delta t$  を振動モード 1 の固有周期  $\tau$  で規格化した値である。Fig. 5.17 より実根が 1 を越える傾向が得られたので、種々の外部定常磁場に対する実根の変化を Fig. 5.18 に示す。Fig. 5.18 より渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した場合と同様に磁場が強くなるにしたがい、固有値の絶対値が 1 を越える  $\Delta t/\tau$  の値が小さくなることがわかる。すなわち、磁場が強くなるほど、安定に解析できる時間刻み幅  $\Delta t$  が小さくなっている。

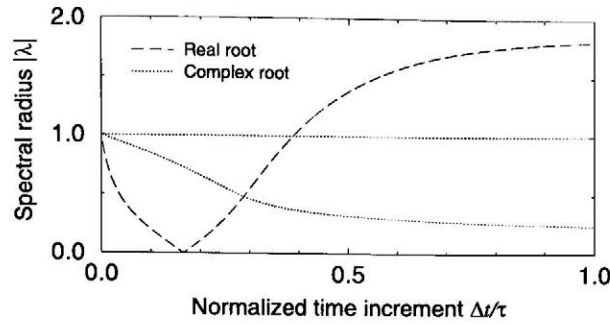


Fig. 5.17 Change of spectral radius using backward difference method for eddy current analysis ( $B_x = 0.5$  T)

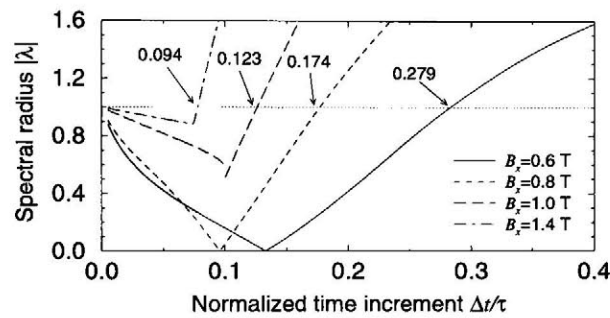


Fig. 5.18 Change of spectral radius using backward difference method for eddy current analysis for different magnetic fields

前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法 速度起電力の評価に前ステップの速度を用いて  $C_e \dot{u}_{t+\theta \Delta t} \leftarrow C_e \dot{u}_t$  とし、構造解析には、Newmark's  $\beta$  法 ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$ ), 渦電流解析に Crank-Nicolson 法 ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) を適用した交互解析方法の安定性を検討する。この時、特性方程式は

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} - \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + 2 \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} - \alpha \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ -\frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t \phi}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} + \frac{\alpha}{2\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t \phi} \frac{C_e C_s}{mU} \right] \lambda = 0 \end{aligned}$$

となる。同時解析方法の場合と同様に TEAM 12 で、この時間積分方法の安定性を検討する。この特性方程式より固有値の絶対値と外部定常磁場の関係を求めると Fig. 5.19 のようになる。Fig. 5.19 において縦軸は固有値の絶対値 (spectral radius), 横軸は時間刻み幅  $\Delta t$  を振動モード 1 の固有周期  $\tau$  で規格化した値である。Fig. 5.19 より複素根が 1 を越える傾向が得られたので、各外部定常磁場に対する実根の変化を Fig. 5.20 に示す。Fig. 5.20 より磁場が強くなるにしたがい、固有値の絶対値が 1 を越える  $\Delta t/\tau$  の値が小さくなり、安定に解析できる時間刻み幅は、磁場が強くなるにしたがい小さくなる。そこで、得られた安定条件が妥当であることを解析により検証する。解析問題は TEAM 12 と同じ体系の問題とする。Fig. 5.20 から得た解析条件を Table 5.2 に示す。安定限界となる時間刻み幅  $\Delta t_c$  から  $-5\%$  減少させた  $\Delta t_1$ ,  $+5\%$  増加させた  $\Delta t_2$  で解析し、得

られた平板の自由端における振動応答を Fig. 5.21 に示す. Fig. 5.21 より固有値の絶対値が 1 を越える時間刻み幅  $\Delta t_2$  の解析結果は数値的不安定が生じており, 安定条件の妥当性が検証される.

つづいて, 渦電流解析に後退差分法を適用した場合における, 固有値の絶対値と時間刻み幅の関係を Fig. 5.22, 5.23 に示す. これらの図より, 渦電流解析に Crank-Nicolson 法を用いた場合と同様に磁場が強くなるにしたがい, 固有値の絶対値が 1 を越える  $\Delta t/\tau$  の値が小さくなる, すなわち, 磁場が強くなるほど, 安定に解析できる時間刻み幅  $\Delta t$  が小さくなることがわかる.

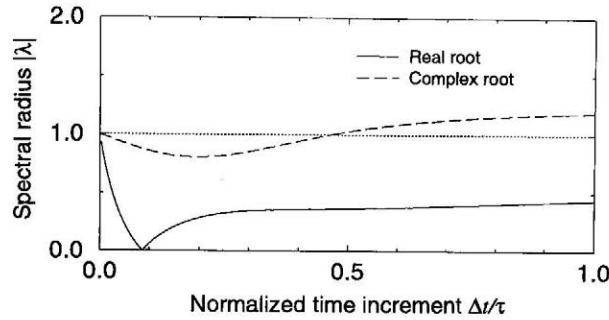


Fig. 5.19 Change of spectral radius of the staggered method with the electromotive force using the velocity of previous time step

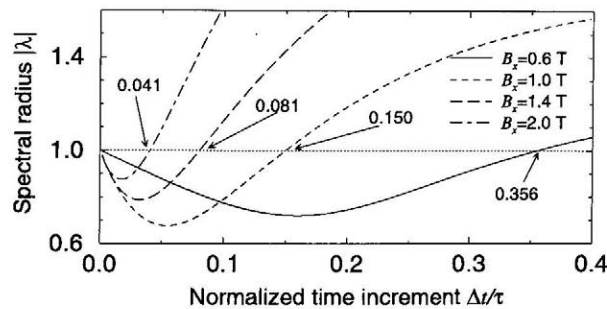


Fig. 5.20 Change of spectral radius of the staggered method with the electromotive force using the velocity of previous time step for different magnetic fields

Table 5.2 The conditions to confirm the validity of critical time increment (the staggered method with the electromotive force using the velocity of previous time step)

$B_x$ [T]	$\Delta t_c$ [msec]	$\Delta t_1$ [msec]	$\Delta t_2$ [msec]
1.0	14.1	13.395	14.805
2.0	3.80	3.61	3.99

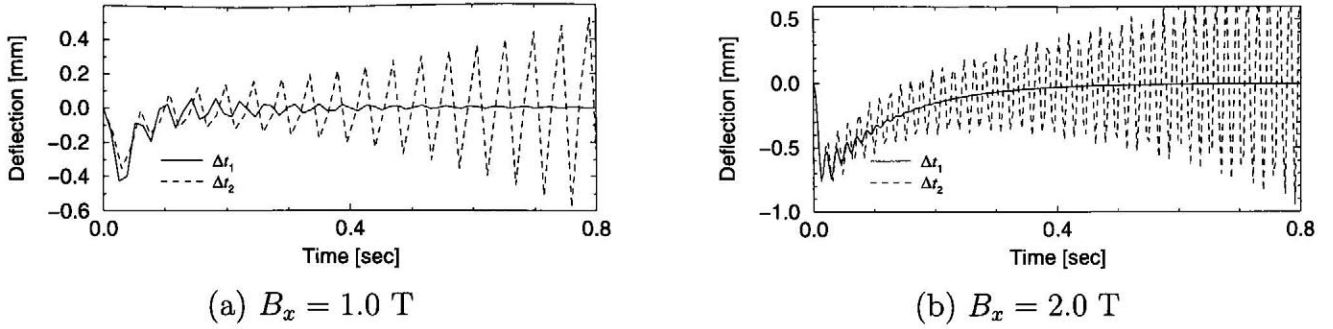


Fig. 5.21 Analytical results using vibration mode 1 by the staggered method using the velocity of previous time step

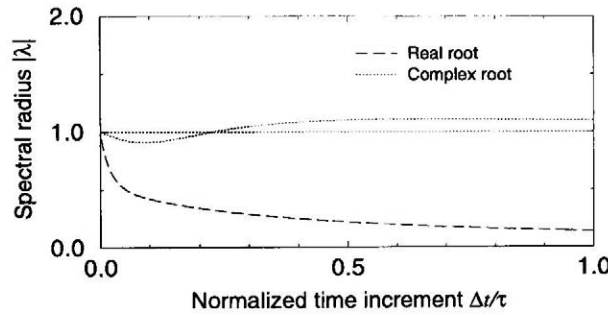


Fig. 5.22 Change of spectral radius using backward difference method for eddy current analysis ( $B_x = 0.5 \text{ T}$ )

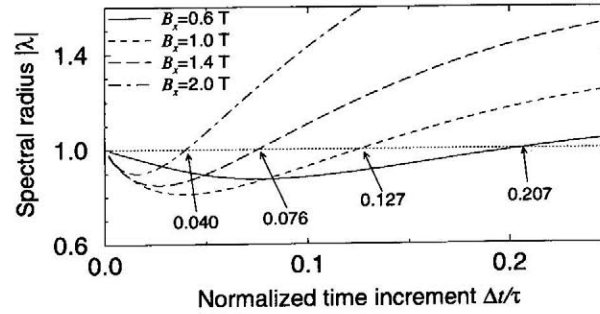


Fig. 5.23 Change of spectral radius using backward difference method for eddy current analysis for different magnetic fields

反復計算付き交互解析方法 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法に反復計算を付加した時の安定性を検討する. 反復計算を1回付加した時の特性方程式は

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left[ -2 + \alpha - \frac{3\alpha}{4\omega^2}\xi + \frac{\alpha^2}{4\omega^2}\xi - \frac{\alpha^2}{8\omega^4}\xi^2 - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2}\eta\xi \right] \lambda^3 \\ & + \left[ 1 + \frac{\alpha}{2\omega^2}\xi + 2\eta - \alpha\eta + \frac{\alpha}{2\omega^2}\eta\xi - \frac{\alpha^2}{4\omega^2}\eta\xi \right] \lambda^2 \\ & + \left[ \frac{\alpha}{4\omega^2}\xi + \frac{\alpha^2}{8\omega^4}\xi^2 - \eta - \frac{\alpha}{4\omega^2}\eta\xi \right] \lambda = 0 \end{aligned}$$

となる。そこで、同時解析方法の場合と同様に TEAM 12 と同じ体系の問題で、固有値の絶対値と外部定常磁場の関係を求めると Fig. 5.24 のようになる。Fig. 5.24 において、縦軸は固有値の絶対値 (spectral radius), 横軸は時間刻み幅  $\Delta t$  を振動モード 1 の固有周期  $\tau$  で規格化した値である。Fig. 5.24 より、磁場が強くなるにしたがい固有値の絶対値が 1 を越える  $\Delta t/\tau$  の値が小さくなるのがわかる。ここでは、1.5 T 以上の結果のみを示したが、1.0 T 以下においては、 $\Delta t/\tau$  を 0.3 としても、固有値の絶対値は 1 を越えることがなかった。同様に 反復計算を 2 回付加した場合は Fig. 5.25 となる。そこで、ここで得られた安定条件が妥当であることを解析により検証する。Fig. 5.24, 5.25 から得た解析条件をそれぞれ Table 5.3, 5.4 に示す。Table 5.3, 5.4 において  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  は、それぞれ安定限界となる時間刻み幅  $\Delta t_c$  から -5% 減少させた値, +5% 増加させた値である。Table 5.3, 5.4 に示す解析条件による解析結果をそれぞれ Fig. 5.26, 5.27 に示しているが、固有値の絶対値が 1 を越える時間刻み幅  $\Delta t_2$  の解析結果は数値的不安定が生じており、安定条件の妥当性が検証される。

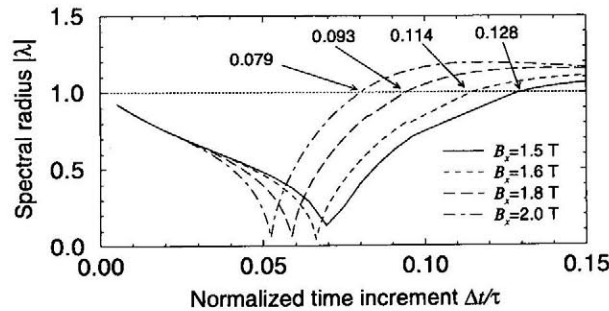


Fig. 5.24 Change of spectral radius of the staggered method using the velocity of previous time step with 1 iteration

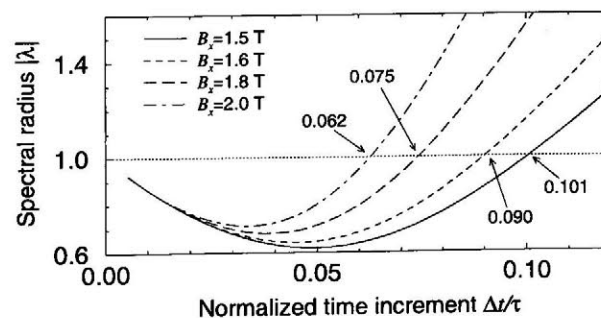


Fig. 5.25 Change of spectral radius of the staggered method using the velocity of previous time step with 2 iterations

Table 5.3 The conditions to confirm the validity of critical time increment (the staggered method using the velocity of previous time step with 1 iteration)

$B_x$ [T]	$\Delta t_c$ [msec]	$\Delta t_1$ [msec]	$\Delta t_2$ [msec]
1.5	12.09	11.486	12.694
2.0	7.480	7.106	7.854

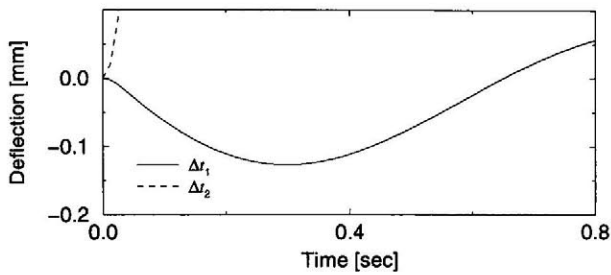
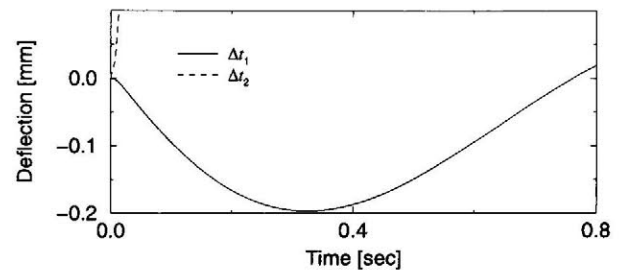
(a)  $B_x = 1.5$  T(b)  $B_x = 2.0$  T

Fig. 5.26 Analytical results using vibration mode 1 by the staggered method using the velocity of previous time step with 1 iteration

Table 5.4 The conditions to examine the validity of critical time increment (the staggered method using the velocity of previous time step with 2 iterations)

$B_x$ [T]	$\Delta t_c$ [msec]	$\Delta t_1$ [msec]	$\Delta t_2$ [msec]
1.5	9.430	8.959	9.902
2.0	5.900	5.605	6.195

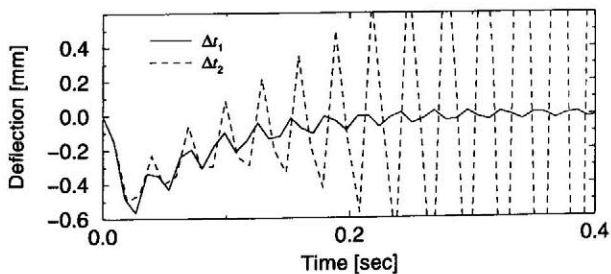
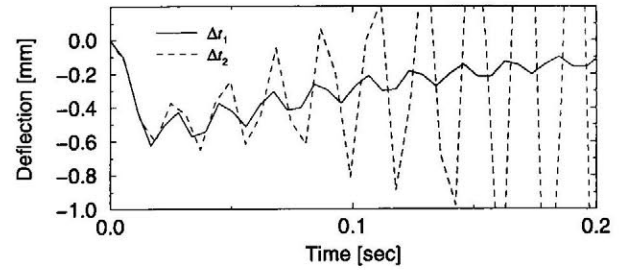
(a)  $B_x = 1.5$  T(b)  $B_x = 2.0$  T

Fig. 5.27 Analytical results using vibration mode 1 by the staggered method using the velocity of previous time step with 2 iterations



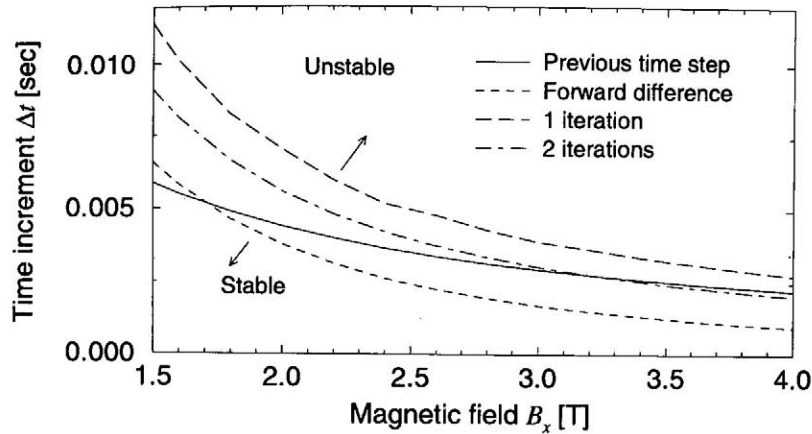


Fig. 5.28 Change of critical time increment for vibration mode 1

まとめ ここでは、振動モード 1 のみで解析を行った時の安定性をまとめる。Fig. 5.28 に振動モード 1 における安定に解析できる時間刻み幅と外部定常磁場の関係を示す。Fig. 5.28 において、横軸は外部定常磁場、縦軸は安定に解析できる時間刻み幅の最大値である。Fig. 5.28 より、どの交互解析方法においても、磁場が強くなるほど、安定に解析できる時間刻み幅が小さくなる。磁場が 1.5 T 以下の領域では、前ステップの速度を用いて速度起電力を評価する方法が、前進差分的に速度起電力を評価する方法にくらべ、安定であるが、磁場が強くなると前進差分的に速度起電力を評価する方法がもっとも時間刻み幅を大きくとれる。また、これら交互解析方法の中で反復計算を 1 回伴う交互解析方法がもっとも時間刻み幅を大きくとれる。次に、渦電流解析に用いる時間積分方法と安定性についてだが、Fig. 5.29 に渦電流解析に用いる時間積分方法によって、安定に解析できる時間刻み幅がどのように変わるかを示す。Fig. 5.29 より、磁場が 1.0 T 以下においては、速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法において渦電流解析に後退差分法を適用した方がもっとも時間刻み幅を大きくとることができる。また、磁場が 1.0 T 以上においては、速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法において渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した方がもっとも時間刻み幅を大きくとることができる。また、前ステップの速度で速度起電力を評価する方法に比べ、速度起電力を前進差分的に評価することにより、1.0 T 以上での安定性が改善されていることがわかる。

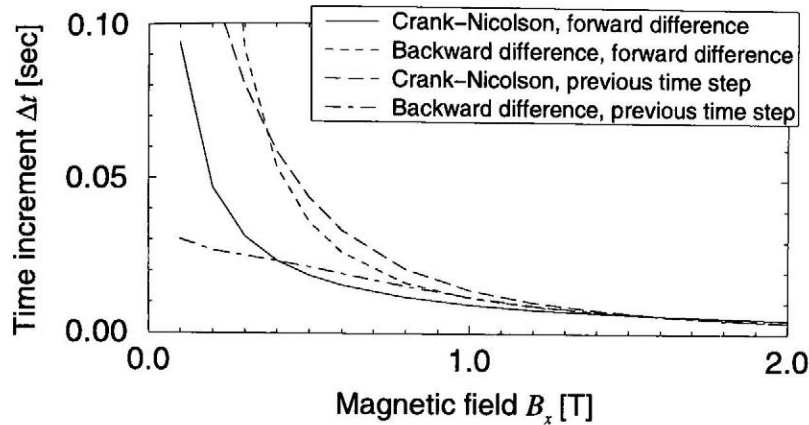
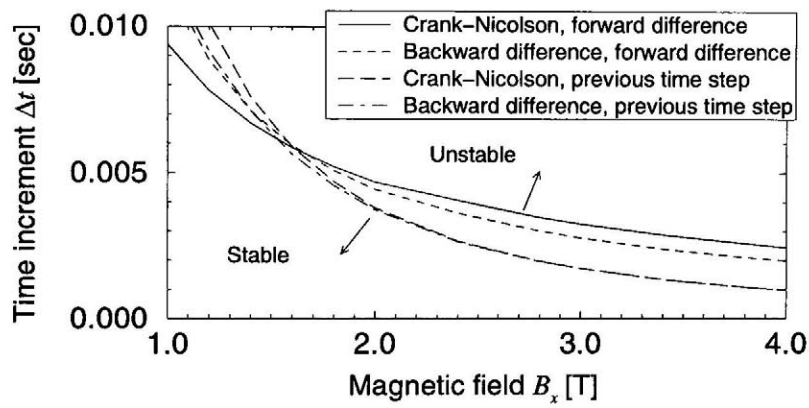
(a)  $B_x = 0.0 \sim 2.0$  T(b)  $B_x = 1.0 \sim 4.0$  T

Fig. 5.29 Comparison between Crank-Nicolson method and backward difference method

### 5.4.2 高次振動モードの安定性

前節では、振動モード 1 のみを対象にして交互解析方法の安定性を検討した。ここでは、高次振動モードである振動モード 6 までの安定性を検討する。Fig. 5.30 に振動モード 1～6 を示しており、振動モード 3, 5 がねじりの振動モードである。対象とする交互解析方法は、速度起電力は前進差分的に評価し、構造解析に Newmark's  $\beta$  法 ( $\beta = \frac{1}{4}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}$ )、渦電流解析に Crank-Nicolson 法を適用した方法の安定性を検討する。Fig. 5.31 に安定に解析できる時間刻み幅  $\Delta t$  を示す。横軸は外部定常磁場、縦軸は安定に解析できる時間刻み幅の最大値である。Fig. 5.31 より、数値的不安定の発生のしやすさは

- 振動モード 6 → 4 → 2 → 5 → 1 → 3

となる。通常の解析 (例えば非定常熱伝導解析などの非連成問題) では、数値的不安定は必ず高次モードから発生するが、電磁構造連成問題ではそのようにならない。これは、振動モード 3, 5 が連成しにくい振動モードであるためである。したがって、電磁構造連成問題では、最高次の振動モードの固有周期に合わせて時間刻み幅を決定しても数値的不安定が発生する。Fig. 5.32 に、振動モー

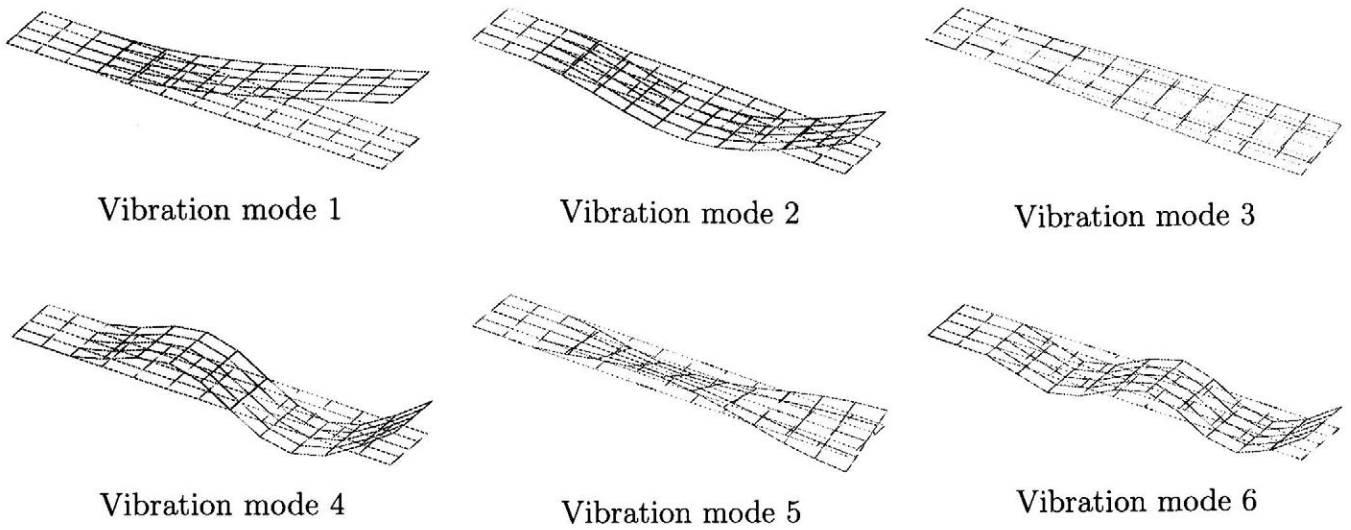
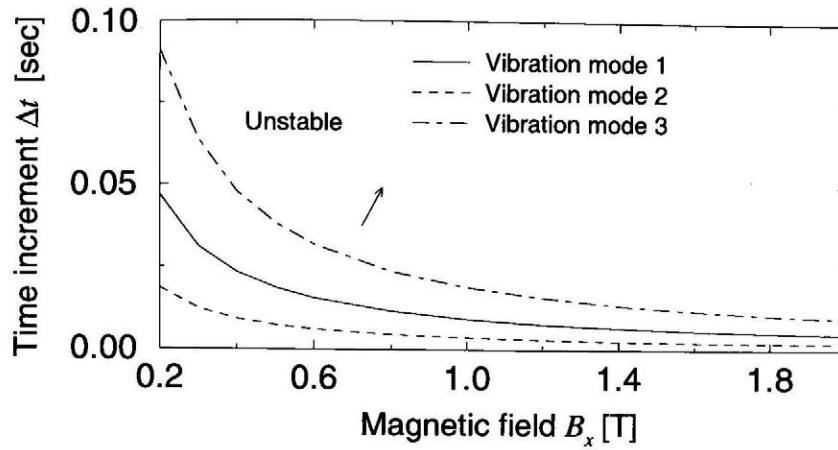
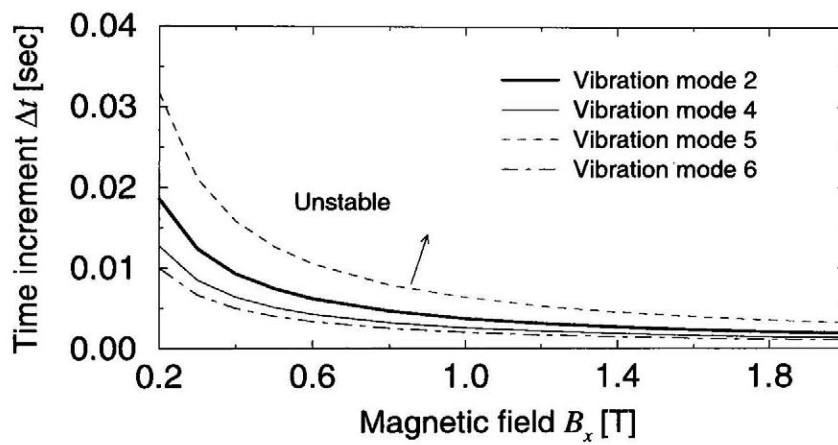


Fig. 5.30 Mode shape vectors of vibration modes 1 ~ 6

ド 4, 6 において, 前ステップの速度で速度起電力を評価する方法と安定性を比較した結果を示す. Fig. 5.32 より速度起電力を前進差分的に評価することにより, 安定に解析できる時間刻み幅が大きくなっており, 高次振動モードの安定性を改善していることがわかる.



(a) Vibration mode 1 ~ 3



(b) Vibration mode 4 ~ 6

Fig. 5.31 Critical time increment of each vibration mode for the staggered method with the electromagnetic force using forward difference

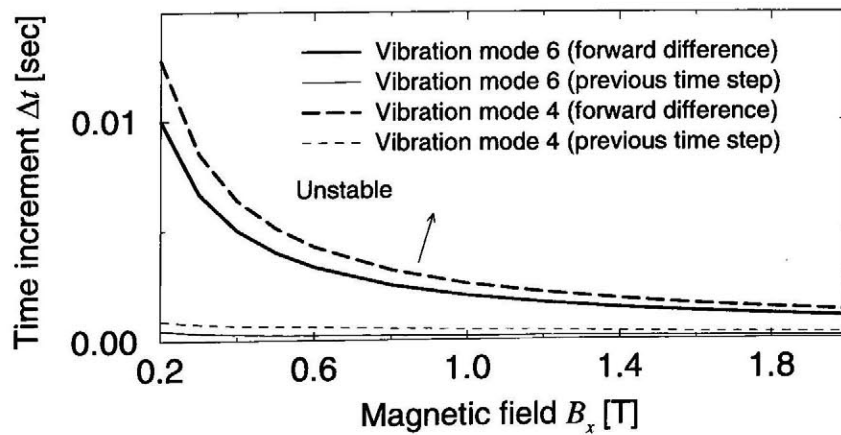


Fig. 5.32 Comparison of critical time increment for vibration modes 4, 6

## 5.5 おわりに

電磁構造連成問題における種々の連成解析方法で発生する数値的不安定性を検討した。その結果

- 連成解析方法における時間積分法の漸化式から得られる特性方程式により、連成解析方法の安定性を検討することができる。
- 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法は、種々の交互解析方法の中で最も数値的不安定が発生しやすい方法であることを示した。しかし、反復計算を付加することにより安定性が改善できるが、計算量が増加するという欠点がある。
- 速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法は、高次振動モードの安定性を改善する効果があることを示した。また、渦電流解析に、弱い磁場 (1.0 T 以下) では後退差分法を、強い磁場 (1.0 T 以上) では Crank-Nicolson 法を用いると最も時間刻み幅を大きく設定することができる。
- 同時解析方法では、磁場および時間刻み幅をどのような値にしても、数値的不安定が発生しない。

ことを示した。よって、本研究成果により、連成有限要素解析を用いて磁気減衰振動を評価する時、交互解析方法により安定に解析を実行することが可能となる。なお、本研究においては、交互連成解法の安定条件を導出したが、無条件安定となる交互解析方法の確立は今後の課題である。

## 参考文献

- (5.1) S. Niikura and A. Kameari, "Analysis of eddy current and force in conductors with motion", *IEEE Trans. on Mag.*, **28-2**, 1450–1453, 1992.
- (5.2) 高橋 亮一, 棚町 芳弘, 差分法, 1991, 培風館.
- (5.3) S.Y.Hahn, J.Bigeon and J.C.Sabonnadiere, "An 'Upwind' finite element method for electromagnetic field problems in moving media", *Int. J. Num. Meth. Engng*, **24**, 2071–2086, 1987.
- (5.4) K. C. Park, C. A. Felippa "Partitioned analysis of coupled systems", in *T. Belytschko, T. J. R. Hughes (Eds.), Computational methods for transient analysis, Mechanics and mathematical methods : a series of handbook: 1st series, Computational methods in mechanics*, North - Holland Pub, Amsterdam, (1983), 157–219.
- (5.5) K. C. Park, "Partitioned transient analysis procedures for coupled field problem : stability analysis", *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 370–376, 1980.
- (5.6) O. C. ツェンキーヴィッツ, マトリックス有限要素法 II, 1996, 科学技術出版社.
- (5.7) O. C. Zienkiewics, A. H. C. Cha, "Coupled problems and their numerical solutions", in *I. S. Doltsinis, Advances in Computational Non Linear Mechanics*, Springer-Verlag, (1988), 109–176.
- (5.8) L. R. Turner and T. Q. Hua, "Results for cantilever beam moving in a crossed magnetic field", *COMPEL*, **9**, 205–216, 1990.
- (5.9) T. Takagi, "Summary of the results for magnetic damping in torsional mode (TEAM Problem 16)", *COMPEL*, **14-2-3**, 77–89, 1995.
- (5.10) 新倉節夫, 亀有昭久, "非磁性シェル構造物の電磁構造連成解析", 日本機械学会論文集 (C), **61-585**, 1911–1916, 1995.
- (5.11) A. Kameari, "Transient eddy current analysis on thin conductors with arbitrary and shapes", *Journal of Computational Physics*, **42**, 124–140, 1981.
- (5.12) O. C. ツィエンキーヴィッツ, マトリックス有限要素法, 1990, 培風館.
- (5.13) O. C. Zienkiewicz, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **3**, 275–290, 1971.

- 
- (5.14) T. Takagi, J. Tani, S. Kawamura and S. Matsuda, "Numerical analysis of dynamic deflection of a thin plate with a coupling effect", *Rep. Inst. Fluid Sci., Tohoku Univ.*, **3**, 121-131, 1991.
- (5.15) 川村修平, 高木敏行, 谷順二, 大友規矩雄, 松田茂弘, "強磁場中における薄板の電磁弾性連成解析", 電気学会 静止器・回転機合同研究会資料, 資料番号 SA-91-38 RM-91-101, 11-21, 1991.
- (5.16) 堀江知義, 二保知也, 河野智城, "連成固有値に基づく平板のたわみ問題の磁気減衰挙動評価", 日本 AEM 学会誌, **4-2**, 40-45, 1996.

## 第 6 章

### 結論

本論文で述べた、磁気減衰振動特性を定量的に評価できる特性評価パラメータ、強制振動時における振動特性の評価方法および連成解析時の数値的不安定に関する研究で得た結果は、以下に示す通りである。

磁気減衰振動の新たな特性評価パラメータとして、連成時定数比を導入した。そして、連成強度パラメータと連成時定数比を用いて解析を行った。その結果をまとめると

- 連成強度パラメータ、および連成時定数比が一定である条件を設定し、有限要素解析を行った。その解析結果より、連成強度パラメータと連成時定数比が一定であれば、磁気減衰振動特性は一致し、かつ、その特性を一意に表すことができることを示した。
- 1 自由度連成モデルより、連成強度パラメータは、磁気減衰の強さを表すパラメータであることを示した。また、連成時定数比は、構造モードの変位成分に対して、渦電流モードの変位成分が早く減衰するか、もしくは遅く減衰するかを表すパラメータであることを示した。
- 連成強度パラメータおよび連成時定数比を用いて、磁気減衰振動特性の分類を行い、有限要素解析によりその妥当性を示した。

である。

磁気減衰振動を求める簡易解析方法を 2 種類提案した。1 つは運動方程式に基づく方法であり、この方法では連成強度パラメータを用いているため、連成強度パラメータのデータベースと組み合わせて使用することができる。もう 1 つは磁気減衰振動の 3 階微分方程式に基づく方法であり、この方法では連成固有値と 3 階微分方程式の振動解を用いている。これらの簡易解析方法を平板のたわみおよび円筒シェルの磁気減衰振動問題に適用し、

- 運動方程式に基づく方法では、磁気減衰が強くなると振動応答に若干遅れが見られたが、実用上十分な精度で磁気減衰振動を得ることができる。



- 3階微分方程式に基づく方法では、連成固有値を用いているため、磁気減衰が強い時にも連成有限要素解析結果と良く一致した。

ことを示した。よって、これらの簡易解析方法で磁気減衰振動応答のパラメータスタディを行うことは、磁気減衰効果を考慮した機器を効率良く設計する上で有用である。

磁場中の強制振動特性に関して連成有限要素解析および1自由度連成モデルにより検討を行った。その結果をまとめると

- 外力による強制振動状態においては、形状と磁場の組合せにより、共振振動数が固有振動数よりも大きくなることを示し、磁気減衰を一般の減衰に置き換えて評価することはできないことを示した。また、1自由度連成モデルより得られる共振振動数の評価式が妥当であることを示した。
- 支持部の周期的変位による強制振動状態においては、磁気減衰効果が強くなることで、共振振動数が固有振動数よりも大きくなり、一般の減衰振動と類似の特性となることを示した。また、1自由度連成モデルの評価式が妥当であることを示した。

である。なお、1自由度連成モデルより得られる共振振動数の評価式は、磁場、ヤング率、密度、導電率、板厚の関数であるため、核融合炉などの強磁場中に置かれる機器の共振特性を評価するとき有用であると考えられる。

電磁構造連成解析で生じる数値的不安定において、数値的な安定・不安定を判定するための特性方程式を導出した。さらに、種々の連成解析方法の安定性を平板のたわみ磁気減衰振動問題において検討した。その結果をまとめると

- 前ステップの速度で速度起電力を評価する交互解析方法は、種々の交互解析方法の中で最も数値的不安定が発生しやすい方法であることを示した。しかし、反復計算を付加することにより安定性が改善できるが、計算量が増加するという欠点がある。
- 速度起電力を前進差分的に評価する交互解析方法は、高次振動モードの安定性を改善する効果があることを示した。また、渦電流解析に、弱い磁場(1.0 T 以下)では後退差分法を、強い磁場(1.0 T 以上)では Crank-Nicolson 法を用いると最も時間刻み幅を大きく設定することができる。
- 同時解析方法では、磁場および時間刻み幅をどのような値にしても、数値的不安定が発生しないことを示した。

である。この判定方法を用いることにより、交互解析方法を用いて磁気減衰振動を解析する時に安定に解析を行なうことが可能となる。

以上の研究成果が、今後の研究活動および強磁場中に置かれる機器の設計において、少しでも貢献できれば幸いである。

## 謝辞

本研究を行なうにあたり直接御指導戴きました,九州工業大学情報工学部機械システム工学科堀江 知義 助教授に心からの感謝の意を表します. また,研究を進める過程で,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 中垣 通彦 教授には,貴重な御助言・励ましの御言葉を戴きました.ここに感謝致します.九州工業大学情報工学部機械システム工学科 田中 和博 教授,九州工業大学情報工学部制御システム工学科 平城 直治 教授には本論文をまとめるにあたり,貴重な御助言・アドバイスを戴きました.ここに心よりお礼申し上げます.そして,本研究を進展させ,本論文をまとめるに至るまで,実験方法や数値解析方法などで御討論戴き,また,あたたかい励ましの御言葉を戴きました,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 二保 知也 助手には,深く感謝致します.

磁気減衰振動の特性評価パラメータに関する研究,電磁構造連成解析における数値的不安定性に関する研究を行なうにあたり,モデル化や数値解析方法で御討論あるいは御協力戴きました,九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻 平成9年度修了 戸川 真 氏,吉永 昭宏 氏に,心から感謝致します.また,磁気減衰強制振動実験を行なうにあたり,実験装置の設計,部品の加工・組み立て,測定技術の確立等に至るまで御協力戴いた,九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻 平成11年度修了 田畑 洋一 氏,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成12年度卒業 古野 泰彦 氏,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成10年度卒業 姉川 卓 氏に,心から感謝致します.

本論文を作成するにあたり,数値解析等で御討論・御協力戴きました,九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻博士前期課程1年 大下 竜太郎 氏,九州工業大学情報工学部機械システム工学科研究生 吉田 享介 氏,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 平成12年度卒業 本郷 和義 氏に深く感謝致します.また,九州工業大学情報工学部機械システム工学科 堀江研究室および中垣研究室の修了生・卒業生・在校生の皆様には,多くの御助言やあたたかい励ましの御言葉を戴きました.心より感謝致します.

最後に,私の研究生活をあたたかく見守り,支えて戴きました両親に深く感謝致します.