連想メモリの一般的定式化の試み

正 員 横井 博一† 正 員 斎藤 正男††

An Attempt to Formulate Associative Memory in General

Hirokazu YOKOI† and Masao SAITO††, Members

†九州工業大学工学部電気工学科，北九州市
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu-shi, 804 Japan

††東京大学医学部医用電子研究施設，東京都
Faculty of Medicine, The University of Tokyo, Tokyo, 113 Japan

あらまし 連想メモリを部分一致型，類似度型，分散型の3種類に分類し，それぞれについて行列と行列の積あるいは行列とベクトルの積の形に定式化した．更に，それら3種類の連想メモリを統一的に記述でき，かつそれらの中間に属するような方式のものをも含むより一般的な表現が三つの行列の積の形で与えられることを示した．

1. まえがき

従来のメモリでは，アドレスという制御情報によって目的とする情報の書込み，または読取りを行ってきた．これに対して連想メモリでは，入力情報と一定の関係をもつ記憶内容を見いだし，それを読取る．

一番最初に発表された連想メモリは，1956年のSlbdeらによるクライオトロン カタログ・メモリであり，以来数多くの論文が発表されているが，大規模なものは実用化されていない．しかし，近年の半導体技術の進歩により，かなり廉価に大規模な連想メモリが実現できる可能性が出てきた．そのため，連想メモリはデータベース・マシンなどの連想プロセッサの中心的構成要素として，ふたたび注目されつつある[(1)]．

一方，脳の記憶のモデルとして，分散型の連想メモリの研究がバイオサイバネティクスの分野で盛んになってきた．これは更に高度な連想メモリといえるもので，情報がメモリ全体に分散して記憶されており，入力情報から直接他の記憶情報を連想するという形で読出しを行ったり，多重に記憶することができるなど，人間の脳における記憶方式に類似した多くの特徴をもっている[(2)〜(4)]．

本論文では，内容検索メモリ（Content addressable memory）から分散型の連想メモリまでを対象に，3種類のタイプに分類し，それぞれについて定式化を試み，これに基づいて連想メモリ一般を統一的に記述できる表現を示す．

2. 部分一致型

これはある特定部分に関して入力と一致する記憶事項を出力とするもので，出力は一般に複数個である．内容検索メモリはこの型に属する．

さて，入力およびk個の記憶事項をn次元ベクトルで表現し，それぞれ$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}^{(p)}$（$p=1, \cdots, k$）と記す．

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}^{(p)}=(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)})^T \tag{2}$$

次に，これらのベクトルに関して，ある特定の要素だけを残し，その他の要素をすべて0とするマスキング操作を行列Mで表す．Mは対角成分が0または1の対角行列である．また，二つのベクトルが一致した時1を対応させ，それ以外の時は0を対応させる関数をαとする．入力$\boldsymbol{y}$とp番目の記憶事項$\boldsymbol{x}^{(p)}$がある特定部分に関して一致しているかどうかは次式の$a^{(p)}$が1であるかどうかで判定できる．

$$a^{(p)}=\alpha(M\boldsymbol{y}, M\boldsymbol{x}^{(p)}) \tag{3}$$

ここで，すべてのpに関して式(3)をつくり，これらを対角成分とする対角行列をAとする．更に，k個の記憶事項を列とする行列Xをつくる．

$$A=\begin{pmatrix} a^{(1)} & & & 0 \\ & a^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a^{(k)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathrm{X}=(\boldsymbol{x}^{(1)}\ \boldsymbol{x}^{(2)} \cdots \boldsymbol{x}^{(k)}) \tag{5}$$

出力は次の行列Zで表される．

$$Z=\mathrm{X}A \tag{6}$$

ZはXの列のうち入力と部分的に一致するもののみを残し，その他の列を0とした行列である．

入力と部分的に一致する記憶事項が一つしかない場合には出力はベクトルで表すことができ，これを$\boldsymbol{z}$とすると次式で与えられる．

$$\boldsymbol{z}=\mathrm{X}\boldsymbol{a} \tag{7}$$

但し，$\boldsymbol{a}$は次のようなベクトルである．

$$\boldsymbol{a}=(a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(k)})^T \tag{8}$$

3. 類似度型

これは入力と記憶事項との類似度を求め，類似度があるしきい値以上となる記憶事項あるいは類似度が最大となる記憶事項などを出力させるものである．

さて，二つのベクトルが与えられた時，それらの類似度を対応させる関数をσとする．$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{x}^{(p)}$との類似度に量子化関数を作用させたものを$s^{(p)}$とすると，$s^{(p)}$は次式で与えられる．

$$s^{(p)}=\Phi\{\sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}^{(p)})\} \tag{9}$$

ここで，Φは量子化関数で，具体的には次のような関数が考えられる．

$$\psi(\xi)=\begin{cases}1 & \xi=\text{最大値}\\ 0 & \xi\neq\text{最大値}\end{cases} \tag{10}$$

$$1(\xi-\theta)=\begin{cases}1 & \xi\geqq\theta\\ 0 & \xi<\theta\end{cases} \tag{11}$$

$s^{(p)}$は$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{x}^{(p)}$の類似度がしきい値θ以上となる場合あるいは最大となる場合などに1となり，その他の場合は0である．

すべてのpに関して式(9)をつくり，これらを対角成分とする対角行列をSとすると，出力は次の行列Zで表される．

$$Z=XS \tag{12}$$

但し，

$$S=\begin{pmatrix} s^{(1)} & & & \\ & s^{(2)} & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{(k)}\end{pmatrix} \tag{13}$$

出力が一つの記憶事項だけであるような場合には，部分一致型の場合と同様，出力はベクトルとなり，これを$\boldsymbol{z}$とすると，$\boldsymbol{z}$は次式のようになる．

$$\boldsymbol{z}=X\boldsymbol{s} \tag{14}$$

但し，$\boldsymbol{s}$は次のようなベクトルである．

$$\boldsymbol{s}=(s^{(1)},\ s^{(2)},\cdots,\ s^{(k)})^T \tag{15}$$

4. 分散型

これは記憶事項を分散的に記憶させるもので，一般に相互想起型と自己想起型とに大別することができる．相互想起型は，2種のパターンを対にして一つの記憶事項とし，そのうちの一方を入力として与えることにより，それと対にしたもう一方のパターンを想起させる形式の連想方式である．これに対して自己想起型は，同じパターンを対にして一つの記憶事項とし，不完全な部分パターンやノイズの含まれたパターンを入力しても，それに対応するほぼ完全な全体のパターンを想起する形式の連想方式である．ここでは，分散型連想メモリの中でも代表的な相関行列型連想メモリを元に，より一般的な定式化を試みる．

まず，対にして記憶する二つのパターンをn次元ベクトル$\boldsymbol{x}_1^{(p)}$，$\boldsymbol{x}_2^{(p)}$とし，次のように表す．

$$\boldsymbol{x}_1^{(p)}=(x_{11}^{(p)},\ x_{12}^{(p)},\cdots,\ x_{1n}^{(p)})^T \tag{16}$$

$$\boldsymbol{x}_2^{(p)}=(x_{21}^{(p)},\ x_{22}^{(p)},\cdots,\ x_{2n}^{(p)})^T \tag{17}$$

$$(p=1,\ 2,\cdots,\ k)$$

相互想起型の相関行列型連想メモリの場合，出力$\boldsymbol{z}$は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{z}=C\boldsymbol{y} \tag{18}$$

ここで，Cは1対の記憶パターンの相互相関行列の和である．

$$C=\sum_{p=1}^{k}\boldsymbol{x}_1^{(p)}\boldsymbol{x}_2^{(p)T} \tag{19}$$

式(18)は行列X（式(5)）を用いて次のように表される．

$$\boldsymbol{z}=(X_1X_2^T)\boldsymbol{y} \tag{20}$$

この式は更に次のように変形できる．

$$\boldsymbol{z}=X_1(X_2^T\boldsymbol{y})$$

$$=X_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_2^{(1)T}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}_2^{(2)T}\boldsymbol{y}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_2^{(k)T}\boldsymbol{y}\end{pmatrix} \tag{21}$$

この型の連想メモリでは，入力$\boldsymbol{y}$が$\boldsymbol{x}_2^{(i)}$に完全に一致していなくても，$\boldsymbol{y}$が$\boldsymbol{x}_2^{(p)}$を除く他のすべての$\boldsymbol{x}^{(p)}$（$p=1,\ 2,\cdots,\ k\ ;\ p\neq i$）と直交しているなら，$\boldsymbol{y}$により想起される出力は$\boldsymbol{x}_1^{(i)}$に比例したベクトルになる．しかし一般には，このように直交する可能性は非常に少なく，出力には何らかのノイズが混入することになる．

但し，次に述べる一般逆行列を用いた連想メモリでは，ベクトル$\boldsymbol{x}_2^{(p)}$（$p=1,\ 2,\cdots,\ k$）が互いに線形独立でさえあれば，ノイズのない出力が可能である．すなわち，行列Cは次式で与えられる．

$$C=X_1X_2^+ \tag{22}$$

ここで，X_2^+はX_2の一般逆行列である．

$$X_2^+=(X_2^TX_2)^{-1}X_2^T \tag{23}$$

一般逆行列X_2^+の各行ベクトルを$\boldsymbol{x}_2^{(p)*}$（$p=1,\ 2,\cdots,\ k$）と表すと，これらは次式を満足する相反ベクトル（双直交系）となる．

$$\boldsymbol{x}_2^{(p)*}\boldsymbol{x}_2^{(q)}=\delta_{pq}\quad(p,\ q=1,\ 2,\cdots,\ k) \tag{24}$$

相反ベクトルを用いると，出力$\boldsymbol{z}$は次式のようになる．

$$\boldsymbol{z}=(X_1X_2^+)\boldsymbol{y}$$

$$=X_1(X_2^+\boldsymbol{y})$$

$$=X_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_2^{(1)*}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}_2^{(2)*}\boldsymbol{y}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_2^{(k)*}\boldsymbol{y}\end{pmatrix} \tag{25}$$

式(21)と式(25)における$\boldsymbol{x}_2^{(p)T}\boldsymbol{y}$および$\boldsymbol{x}_2^{(p)*}\boldsymbol{y}$は$\boldsymbol{x}_2^{(p)}$と$\boldsymbol{y}$の類似度の1種と考えられるので，これらを$\sigma(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_2^{(p)})$と拡張する．この時，相互想起型の相関行列型

連想メモリは次のように一般化される．

$$\boldsymbol{z} = X_1 \begin{pmatrix} \sigma(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}_2^{(1)}) \\ \sigma(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}_2^{(2)}) \\ \vdots \\ \sigma(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}_2^{(k)}) \end{pmatrix} \tag{26}$$

自己想起型の場合は，相互想起型で $X_1 = X_2$ とすればよい．

5. 一般的定式化

分散型においては，自己想起型は相互想起型の特殊な場合と考えられる．そこで，部分一致型と類似度型でも，より一般的である相互想起型に拡張する．

さて次に，部分一致型における $a^{(p)}$ を具体的に次のように表す．

$$a^{(p)} = \boldsymbol{1}\left(\frac{1}{\varepsilon + \|M\boldsymbol{y} - M\boldsymbol{x}_2^{(p)}\|} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{27}$$

ここで，ε は正の実数である．

式(27)の括弧の中の第1項は，$M\boldsymbol{y}$ と $M\boldsymbol{x}_2^{(p)}$ の類似度の1種とみなされるので，$a^{(p)}$ は式(9)の $s^{(p)}$ と同じ形式で表されることがわかる．よって，$a^{(p)}$ を含んだより一般的な $s^{(p)}$ を次のように定義する．

$$s^{(p)} = \Phi\{\sigma(M\boldsymbol{y},\ M\boldsymbol{x}_2^{(p)})\} \tag{28}$$

式(28)の $s^{(p)}$ が式(26)の $\sigma(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}_2^{(p)})$ をも含むことができるよう，任意の関数 Ψ を用いて $s^{(p)}$ を更に一般化する．

$$s^{(p)} = \Psi\{\sigma(M\boldsymbol{y},\ M\boldsymbol{x}_2^{(p)})\} \tag{29}$$

式(29)の $s^{(p)}$ を用いれば，部分一致型も類似度型も共に次式で表現できる．

$$Z = X_1 S \tag{30}$$

出力が一つのパターンのみの場合は，すべて次式で表される．

$$\boldsymbol{z} = X_1 \boldsymbol{s} \tag{31}$$

この式はまた次のようにも表すことができる．

$$\boldsymbol{z} = s^{(1)}\boldsymbol{x}_1^{(1)} + s^{(2)}\boldsymbol{x}_1^{(2)} + \cdots + s^{(k)}\boldsymbol{x}_1^{(k)} \tag{32}$$

部分一致型と類似度型では $s^{(p)}$ $(p = 1,\ 2,\cdots,\ k)$ のうち，どれか一つが1でその他は0になるので，$s^{(p)} = 1$ となる $\boldsymbol{x}_1^{(p)}$ が一つ選択されて出力されるが，分散型では入力と各記憶事項との類似度 $s^{(p)}$ を荷重とした記憶事項の荷重和が出力されることがわかる．

最後に，出力が一つのパターンになる場合も複数個のパターンになる場合も含めた一般化について考える．そこでまず，式(30)，式(31)を次のように変形する．

$$Z = X_1 S \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{z} = X_1 S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

これらの式は次のように一般化できる．

$$Z = X_1 SU \tag{35}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}\ s_{12} \cdots s_{1k} \\ s_{21}\ s_{22} \cdots s_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k1}\ s_{k2} \cdots s_{kk} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11}\ u_{12} \cdots u_{1l} \\ u_{21}\ u_{22} \cdots u_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{k1}\ u_{k2} \cdots u_{kl} \end{pmatrix}$$

但し，U の要素は1または0である．また s_{pp} $(p = 1,\ 2,\cdots,\ k)$ は $s^{(p)}$ である．式(35)は式(33)および式(34)を含むだけでなく，部分一致型，類似度型，分散型の中間に属するような方式あるいは，それらの折衷方式等を含む．

6. む す び

内容検索メモリから相関行列型連想メモリまでを，部分一致型，類似度型，分散型の3種類に分類し，各々について定式化を試みると同時に，それらの関連性および相違点について数式の上で明らかにした．更に，それら3種類の連想メモリを統一的に記述でき，しかもそれらの中間に属するような方式のものをも含む表現を示した．

今後は，ここでとりあげなかったホログラフィー型連想メモリや，高次相関を用いた連想メモリをも含めて，一般的な定式化が可能かどうか検討していきたい．また，ここで示した一般的な表現に基づいて，連想メモリの性能評価（特に出力の最適性）について，あるいは連想メモリの設計の方法論等について検討することも今後の課題である．

文　　献

(1) 奥川峻史：“連想メモリとその応用”，bit，15，4，pp.4-15（昭58-04）．

(2) K. Nakano：“Associatron：A model of associative memory”，IEEE Trans. Syst. Man & Cybern.，SMC-2，3，pp.380-388（July 1972）．

(3) T. Kohonen：“Correleation matrix memories”，IEEE Trans. Computers，C-21，4，pp.353-359（April 1972）．

(4) 福島邦彦：“神経回路と自己組織化”，pp.170-209，共立出版（昭54-03）．

（昭和61年7月28日受付，11月7日再受付）