625　精度保証付き数値計算に基づく制御系解析

Control System Analysis based on Numerical Computation with Guaranteed Accuracy

○　矢野　健太郎（九州工業大学）　　古賀　雅伸（九州工業大学）

Kentaro Yano, Kyushu Institute of Technology, Kawazu 680-4, Iizuka-shi, Fukuoka
Masanobu Koga, Kyushu Institute of Technology

This paper proposes analysis methods of control system based on numerical computation with guaranteed accuracy. By using the proposed methods, it is possible to guarantee numerical quality about analysis of control system. This paper especially proposes analysis methods with guaranteed accuracy of stability, controllability, and observability of control system.

Key Words: Control System Analysis, Numerical Computation with Guaranteed Accuracy

1. はじめに

現在，コンピュータは様々な分野で利用されているが，計算を高速に行うため，実数を浮動小数点数に近似し計算を行うという工夫がなされた．そのため，コンピュータを用いた数値計算では，丸め誤差などにより数学的に厳密な解を求めることはできない．多くの数学者や研究者は，この誤差に気付いていたものの，最近までその誤差が一体どれくらいなのかは正しく見積られることは少なかった．

しかし近年，コンピュータを用いた数値計算の際に発生する誤差を計算し，計算結果がどのくらい正しいかを検算するという**精度保証付き数値計算**[1)]が登場した．厳密に解を計算したいという要求がある分野では，この計算手法を応用することが期待されている．

近年，有理数を用いた精度保証付き数値計算を制御系解析に適応する方法が提案されてきている[2)]．
しかし有理数を用いた方法では以下に示す問題点がある．

- 無理数が扱えない
- 演算が有理数に関して閉じている必要があるため，行えない演算がある
- 有理数による演算は爆発が起こる可能性があるために，計算速度とメモリ量に問題がある

これに対して，我々の研究グループでは浮動小数点数に基づく精度保証付き数値計算を制御系設計に適用してきた[3)]．そこで本研究の目的は，制御系解析に関する計算に浮動小数点数に基づく精度保証付き数値計算を応用し，数値的品質保証という観点から制御系解析を行うことである．本研究では，制御系解析の計算，特に安定性の解析，可制御性，可観測性における計算結果の品質保証を行う手法を提案する．

2. 精度保証付き数値計算

2.1. 精度保証付き数値計算の原理　　ここで，問題の解を精度保証付きで求めるための原理と手法をごく一般的な形において説明する[4)]

いま，問題が

$f(x)=0$ をみたす x を求めよ

という形で与えられているとする．このとき数値計算によって得られた上の問題に対する近似解は，近似の精度がよければその近傍に真の解を持つことが期待される．そこで近似解を含む集合に対し，この集合（候補者集合）が真の解を含んでいるかどうかを調べる方法を考えることにする．この方法が得られれば，たとえば，

1. 何らかの手段を用いて，真の解を含むことが期待される候補者集合を決定する
2. 候補者集合が本当に真の解を含むかどうか検証する
3. 真の解を含まなければ，別の候補者集合を立てて，前段に戻る

といった手段で真の解を含む集合の特定を試みることができる．いったん特定できれば，その集合の大きさが近似解の精度を与えることになる．

ある集合が前項の問題 $f(x)=0$ の解を含んでいるかどうか調べるための数学的な道具として最もポピュラーなものは，それと等価な不動点方程式 $x=F(x)$ の解の存在についての定理，すなわち不動点定理である．一口に不動点定理といっても様々なものがあるので一般的な表現として以下に示す．

ある条件を満たす集合 U に対して，$F(U)$ を

$$F(U)=\{v\,|\,v=F(u),u\in U\}$$

と考えることにする．このとき集合 U が

$$F(U)\in U$$

もしくはこれに類似の条件を満たせば U の中に（特に，$F(U)$ の中に）不動点方 程式 $x=F(x)$ の真の解が存在する．

[No. 07-255]　第 50 回自動制御連合講演会（2007.11.24, 25 横浜市）

2.2. CPU の丸めモード変更による高速区間作成　一般的に上記のような流れで精度保証付き数値計算は行われるが，ここでは候補者集合を求めるために使われる方法について説明する [1].

我々がコンピュータで計算を行う場合，従来は**最近点への丸め**(実数 r に最も近い浮動小数点数に丸める)という CPU の丸めモードが用いられる．この他にも丸めモードには，**下向きの丸め**(実数 r 以下の浮動小数点数の中で最も大きい数に丸める)，**上向きの丸め**(実数 r 以上の浮動小数点数の中で最も小さい数に丸める)などがある．浮動小数点数を用いた数値計算では，真の解そのものを求めることは一般的に不可能である．そこで精度保証付き数値計算では，Fig.1 に示すように CPU の丸めモードを変更し，真の解の下限と上限を計算することで浮動小数点数を両端とする区間の中に真の解を包み込むという丸めモードを制御することによって精度保証計算を行う手法をとる．これにより，真の解の存在しうる区間を求めることができる．精度保証付き数値計算は，区間を用いて計算を行うことで，問題の真の解を区間の中に包み込むというシンプルな考え方で行われる．

3. 精度保証付き数値計算に基づく制御系解析

3.1. 安定性解析　精度保証付き数値計算に基づく安定性解析の概要を Fig.2 に示す．通常の数値計算ではシステムの極(システム行列 A の固有値)を求め，その値の実部が負、つまり複素数平面上で左半平面にあれば安定，右半平面にあれば不安定と判定する．

精度保証付き数値計算でシステムの極を求めた場合，Fig.2 に示すようにシステムの極の真の値を含む集合が求まる．そして，この集合が左半平面のみにある場合はシステムの極の真の値が左半平面に存在するため，そのシステムは安定となる．同様に，集合が右半平面のみに存在する場合は不安定となる．しかし，集合が左半平面と右半平面にまたがって存在する場合には真の値が左半平面にあるか，右半平面にあるかを特定できない．そこで，このときそのシステムは「**安定とは言えない**」と呼ぶことにする．なお，従来の計算法ではこのようなシステムは不安定であるにもかかわらず計算途中の誤差の影響によって安定であると判定されていた可能性がある．つまり，精度保証付き数値計算を適用することにより安定性解析における数値的品質を保証することが可能となる．

また，「安定とは言えない」極が求まった際には多倍長演算を行うことで演算精度を上げ，集合の大きさを小さくすることができる．そうすることで集合が左右どちらかの領域のみに存在することが分かれば，より厳密な判定を行うことも可能となる．

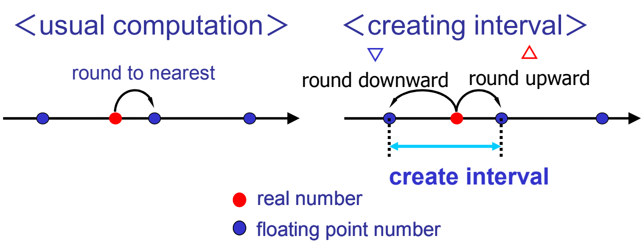

Fig. 1 Difference between conventional computation and numerical computation with guaranteed accuracy

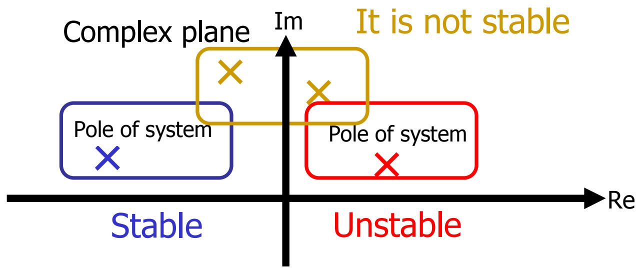

Fig. 2 Analysis of stability based on numerical computation with guaranteed accuracy

3.2. 可制御性解析　システムが可制御であるための必要十分条件は，次の可制御行列

$$U_c = \left[B,\ AB,\ A^2B, \cdots,\ A^{n-1}B\right]$$

の階数(rank)がシステムの次数 n と等しいことである [5].

この rank の計算には，特異値が用いられる．可制御性行列 U_c の特異値を求め，その個数を数えることによって rank を求めることができる．また，行列 A の特異値は AA^T の非零固有値の平方根から求めることができる．

そこで，精度保証付き数値計算を可制御性の解析に適用すると，可制御性行列 U_c の特異値を $U_cU_c^T$ の固有値の平方根から求め，その結果の n 個の集合が複素数平面の右半平面のみに存在すれば，そのシステムは可制御となる．また，左半平面のみに存在する集合が存在する場合は不可制御となる．安定性解析と同様に集合が左半平面と右半平面にまたがる場合には，多倍長演算を行うことで集合を小さくし，厳密な判定を行うことができる．

3.3. 可観測性解析　システムが可観測であるための必要十分条件は，次の可観測行列

$$U_o = \left[C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T\right]$$

の階数(rank)がシステムの次数 n と等しいことである [6].

可制御性の判定と同じことが可観測性の判定にも言える．

4. まとめ

本研究では，精度保証付き数値計算に基づいて制御系解析に関する計算問題，特に安定性，可制御性，可観測性の数値的品質保証を行った．

文　献

[1] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, (2000)

[2] M. Kanno and M. C. Smith, Validated numerical computation of the L_∞-norm for linear dynamical systems, Journal of Symbolic Computation, No.6, Vol. 41, (2006), 696－707

[3] 矢野健太郎, 古賀雅伸, 精度保証付き数値計算に基づく LQ 制御問題, 第 36 回制御理論シンポジウム, (2007), 271-274

[4] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算 チュートリアル:応用数理最前線, 日本評論社, (1998)

[5] 白石昌武, 入門現代制御理論, 日刊工業新聞社, (2002)