日本ファジィ学会誌 Vol.7, No.1, pp.113-130 (1995)

論文

多重多段ファジィ推論における あいまいさの広がりに関する考察
── 三角型メンバーシップ関数を用いたファジィ推論 ──†

前田 博[*1] 井室 元良[*2] 村上 周太[*1]

多段ファジィ推論に関して，推論段数を重ねると結論があいまいになって行くという問題点，いわゆるあいまいさの爆発が指摘されてきた．しかし，その実態について明確に記述した研究はまだ見られていない．本論文では，多重多段ファジィ推論の環境を4種類設定し，さらに，ファジィルールのファジィ関係変換規則として，代表的な Rs，Rg，Ra，Rc を取り上げ，これらの組み合わせについて，あいまいさの広がり方を理論的に考察した．その結果，あいまいさが広がる条件，逆にあいまいさが抑制できる条件について知見を得ることができた．

キーワード：多段ファジィ推論，多重ファジィ推論，あいまいさの爆発，あいまいさの広がり

1．はじめに

ファジィ推論法は，ファジィ理論を応用した問題解決において最も利用される有効な技法の一つと言っても良く，現在まで直接法，間接法を含めて多くの推論法が提案[1)2)3)]されてきた．しかし，その応用形態は，1段の多重ファジィ推論が大部分であり，高度な知識システムにおいて必要となる多重多段ファジィ推論は見られない．その大きな理由として，他分野の研究者から常に短所として指摘される「多段ファジィ推論のあいまいさの爆発」[4)]について，明確な見通しが得られていないことがあげられる．

ファジィ推論法はZadeh[5)]の推論の合成規則によるものを出発点として，これまで多くの研究が蓄積されてきた．これに関しては詳しく触れる余裕がないのでDubios and Prade[6)]のサーベイ論文を参照して頂くとして，ここではその中でファジィ推論法に対する評価の視点を概観してみたい．

Zadehのファジィ推論法は“if x is A then y is B”なるファジィルールを変換したファジィ関係 $R(x,y)$ と A' なる観測事実から結論 B' を

$$\mu B'(y)=\sup_x \min(\mu A'(x),\ R(x,y))$$

なるsup-min合成規則で導くものである．これは一般化modus ponensと呼ばれている．その後，合成規則の拡張と多値論理の含意関数 I を用いて，

$$\mu B'(y)=\sup_x m(\mu A'(x), I(\mu A(x), \mu B(y)))$$

と一般化され，合成規則と含意関数を組み合わせることで，多くのファジィ推論法を生み出してきた．これらの妥当性に関する評価は多元的になされてきており，合意された統一的評価基準を得るまでには至っていない．

まず，含意関数が満たすべき基本的な規範を設定し，その規範に基づく評価にBaldwin et al.[7)]，塚本[8)]，Fukami et al.[9)]がある．modus ponens，すなわち，“$A'=A$”の時 “$B'=B$”を満たすような未知のsup-m 合成を見出すという視点にDubois and Prade[10),11)]，さらに m の満たすべき

† A Study on the Spread of Fuzziness in Multi-fold Multi-stage Approximate Reasoning
— Approximate Reasoning with Triangular Type Membership Function —
Hiroshi MAEDA, Motoyoshi IMURO and Syuta MURAKAMI

*1 九州工業大学工学部情報工学教室
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology
*2 ㈱安川電機
YASUKAWA Electric Corporation

規範の提案とそれに基づく評価に Trillias et al.[12]，modus ponens の成立性と言語ヘッジの前件から後件への常識的移行，すなわち A'=very A なら B'=very B を要請，に基づく評価に水本[13)~15)]がある．さらに直接法対間接法という視点からの評価に Tong[16],向殿[17]やファジィルールの意味解釈に基づく評価に Dubois and Prade[18]などがある．これらの評価は1重1段のファジィ推論法に対するものであり，多重1段，多重多段ファジィ推論法の評価となるとわずかな研究しか見られない．

多重1段に関しては，並列推論の可能性という視点からの評価 Dubois and Prade[19]，内挿の直感的妥当性，すなわち，例えば，

"if x is A_1 then y is B_1",
"if x is A_2 then y is B_2",

なるファジィルールがあるとき，

"A'=between A_1 and A_2" に対して，
"B'=between B_1 and B_2" を要請，

に基づく評価に水本[20]，多重ルールの統合の仕方および多重ファジィ推論版 modus ponens，すなわち，

"if x is A_i then y is B_i" $\quad i=1,2,\cdots n$

なる多重ファジィルールに対して，"$A'=A_i$"なら"$B'=B_i$" を要請，に基づく評価に Turksen et al.[21]がある．多重多段ファジィ推論となると，1重多段に対して三段論法の成立性，すなわち，

"if x is A then y is B",
"if y is B then z is C",

なる2段ファジィルールに対して，"$A'=A$"の時"$C'=C$" を要請，に基づく評価 Dubois and Prade[10),11)]，水本[20]があるのみである．

「あいまいさの広がり」という視点は，特に多重多段ファジィ推論に強く関係している．しかし，あいまいさが推論段数を重ねるに連れて広がっていくことの是否は，にわかに断じきれない．塚本の基準によれば，結論部に前件部のあいまいさが自然に伝播されることは当然とされる．これを多段ファジィ推論に当てはめれば，推論段数を重ねるに連れてあいまいさが広がることは自然なことといえるかもしれない．一方，ファジィ推論を人間のファジィ情報処理機構の一つのモデルと見る立場に立てば，人間があいまいな推論を多段に重ねてもうまく何らかの結論を引き出すように，あいまいさの広がりを適度に制御できるファジィ推論法があってもよい．いずれにしても現時点では，この問題は多段ファジィ推論を必要とするような知識システムを構築する立場にある人の判断に任せざるを得ないと考える．その際，システム構築者にたいして，多くの多重多段ファジィ推論法と「あいまいさの広がり」に関する情報を提供できることは非常に価値あることと思われる．

以上の立場から，本論文では多重多段ファジィ推論におけるあいまいさの広がりを理論的に考察する．そこから，多重多段ファジィ推論を用いた知識システムにおける if-then 型ファジィルール(以後単にルールと書く)の構成の仕方，具体的には前件部，後件部のメンバーシップ関数の設定の仕方や種々のファジィ関係変換規則があいまいさの広がりにどのような影響を与えるかについて，知見を得ることが目的である．

問題への接近法として，いきなり一般的な多重多段ファジィ推論を考察するのは，あまりにも複雑すぎて手に負えないので，まず，単純化した多重多段ファジィ推論環境を幾つか設定し，個々の環境でのあいまいさの広がりについて考察する．ついで，個々の考察結果を総合して全体としての知見を探ることとした．

ここで，あいまいさが広がるとは推論段数を重ねることによって結論のファジィ集合が大きくなること，すなわちあいまいさの指標である specificity[22),23)]が小さくなる事を意味する．

2．多重多段ファジィ推論の設定

多重ファジィ推論は，全体集合 U_1, U_2上でそれぞれ定義されるファジィ集合 A_{1j}, A^*_{2j}の間の n_1 個のルール

$$A_{11} \rightarrow A^*_{21}$$
$$A_{12} \rightarrow A^*_{22}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{1n_1} \rightarrow A^*_{2n_1}$$

と，U_1上のある事実 A'_1から U_2上の結論 A'_2を推論するものである．さらに A'_2が次段の U_2, U_3上のファジィ集合 A_{2j}, A^*_{3j}の間の n_2個のルール

$$A_{21} \rightarrow A^*_{31}$$
$$A_{22} \rightarrow A^*_{32}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{2n_2} \rightarrow A^*_{3n_2}$$

の事実となり，結論 A'_3が導かれ，以下これを繰り返して U_m上の結論 A'_mを導く過程を，多重多段ファジィ推論と言う．

2.1 用語の定義

［ベース集合］

ルールの前件，後件のファジィ集合が定義される全体集合 U_i, $i=1,2,\cdots m$ は，適当な変数変換によって全て実数区間$[0,1]$に正規化できるものとする．この区間$[0,1]$をベース集合という．

［サポート］

ベース集合上のファジィ集合 A の強 α カット集合$\{x\in[0,1]\,|\,\mu A(x)>0\}$を A のサポートといい，$supp[A]$と書く．

［コア］

ファジィ集合 A に対して，集合

$$\{x\in[0,1]\,|\,\mu A(x)=1\}$$

をコアといい，$Co[A]$と書く．

［凸ファジィ集合］

ベース集合上の任意の2点，x,y に対して，

$$\mu A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\min(\mu A(x),\ \mu B(y)),$$
$$0\leq\lambda\leq 1$$

を満たすファジィ集合 A は凸ファジィ集合と呼ばれる．特に，メンバーシップ値の値域$(0,1]$において，等号成立が $\lambda=0$ または $\lambda=1$ に限る時，強凸ファジィ集合と呼ぶ．

［正規ファジィ集合］

ファジィ集合 A について，$Co[A]\neq\phi$ の時，A は正規ファジィ集合と呼ばれる．

［無知］

ファジィ集合 A について，$Co[A]=[0,1]$の時，A を無知と呼ぶ．

［相当，包含］

ベース集合上の2つのファジィ集合 A,B が等しいとは，$\forall x\in[0,1]$に対して，$\mu A(x)=\mu B(x)$であることをいい，$A=B$ と表す．また，A が B を含むとは，$\mu A(x)\geq\mu B(x)$であることをいい，$A\supseteq B$ と表す．

2.2 前件，後件の設定

さて，実際の多重多段ファジィ推論では，ルールの前件，後件のファジィ集合は様々な形を取り得る．しかし，本論文でそれらの全ての場合を尽くすことは到底不可能なので，その中で基本的な4通りの設定を取り上げる．以下に全ての設定に共通する定義及び仮定を示す．

C 1) A'_iは $i-1$ 段目の結論のファジィ集合であり，同時に，i 段目のルールに対する事実のファジィ集合である．

C 2) A'_1は連続なメンバーシップ関数を持つ正規凸ファジィ集合である．

C 3) 各段のルール数は同数$(n_1=n_2=\cdots n_m=n)$である．

C 4) A_{ij}は i 段目のルールの，前件の j 分割目のファジィ集合であり，A^*_{i+1j}は i 段目のルールの，後件の j 分割目のファジィ集合である．

C 5) 全ての A_{ij}, A^*_{i+1j}は，正規強凸ファジィ集合であり，連続なメンバーシップ関数を持つものとする．さらに

$$Co[A_{ij}]=Co[A^*_{i+1j}]=c_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

を満たす．すなわち，ベース集合上で前件，後件のファジィ集合のコアはシングルトンで同じ位置にある．

C 6) ルールの前件，後件のファジィ集合が以下の条件を満たすとき，ベース集合は正規分割されているという．

C 6.1) $Co[A_{i1}]=Co[A^*_{i+11}]=0,$
$Co[A_{in}]=Co[A^*_{i+1n}]=1.$

C 6.2) $2\leq j\leq n-1$ に対して，

$$Supp[A_{ij}]=Supp[A^*_{i+1j}]=]c_{j-1},\ c_{j+1}[,$$

特に，c_j, $j=1,2,\cdots,n$ がベース集合を等分割する時，対称正規分割と呼ぶ.

ここで,C 5)のコアの仮定は,かなり制約的であるが，基本的な設定に対する考察としてはやむを得ないと考える.

次の 4 通りの設定は大別すると，設定 1，設定 2 が前件，後件のファジィ集合が同形の場合，設定 3，設定 4 が異なる場合となる.

[設定 1]前件，後件とも同形，正規分割

(s 1-1)　前件，後件のファジィ集合は同形である．すなわち，$\forall i$, $\forall j$, $y=x$ に対して，

$$\mu A_{ij}(x)=\mu A^*_{i+1j}(y)=\mu A_{i+1j}(x).$$

(s 1-2)　各段のルールは，前件，後件とも，正規分割されている.

設定 1 のメンバーシップ関数の例を図 1 に示す．前件，後件の正規分割は実際のファジィエキスパートシステムで最も良く使われるパターンである．そこで，正規分割された前件，後件を同形にしたこの設定は，最も基本的な多重多段ファジィ推論の特性を与えるものと思われる．図 1 は特に対称正規分割の場合を示しているが，図 2 (a)のような非対称な正規分割や，図 2 (b)のような三角型以外のメンバーシップ関数の場合も設定 1 は含んでいる.

[設定 2]前件，後件とも同形

(s 2-1)　(s 1-1)の同形条件を満たす.

(s 2-2)　$\forall i$ に対して，c 6.1)を満たす.

(s 2-3)　$Supp[A_{ij}]=Supp[A^*_{i+1j}]=]s_{Lj},\ s_{Rj}[$ とすると,

$\forall i,j=1,2,\cdots,n-1$ について

$]s_{Lj},\ s_{Rj}[\cap]s_{Lj+1},\ s_{Lj+1}[\neq\phi,$

$\forall i,j=1,2,\cdots,n-2$ について

$]s_{Lj},\ s_{Rj}[\cap]s_{Lj+2},\ s_{Rj+2}[=\phi.$

(s 2-4)　$\forall i$, $\forall j$ について

$c_{j+1}>x\in[s_{Lj+1},\ s_{Rj}].$

設定 2 のメンバーシップ関数の例を図 3 に示す．一つ置いて隣り合うファジィ集合が離れている場合で，このパターンも実際にはしばしば用いられる．本設定も，図 2 (a)，(b)のような意味の変形を含んでいる．本設定を更に変形すると，一つ置いて隣り合うファジィ集合が重なりあう設定も当然考えられる．しかし，そのような設定は，実際にはほとんど見られないので，本論文では割愛した.

[設定 3]後件が前件を含む

(s 3-1)　各段のルールの後件は正規分割されてい

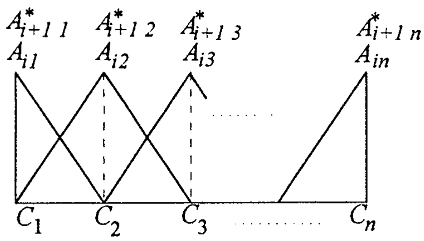
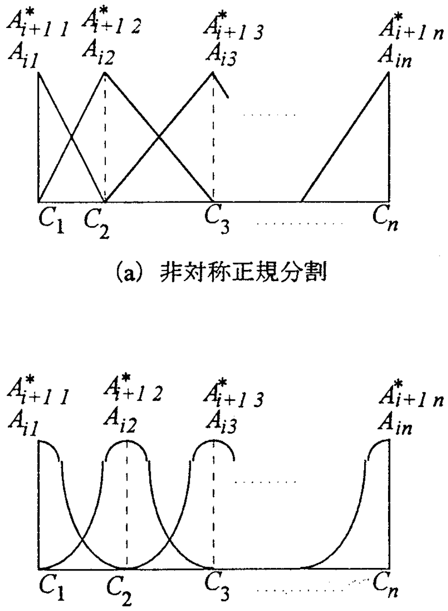


図 1　[設定1]前後件同形，正規分割



(a) 非対称正規分割

(b) 非三角形型

図 2　[設定1]のバリエーション

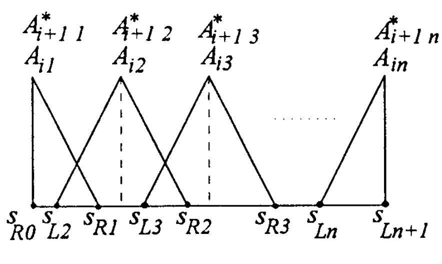


図 3　[設定2]前後件同形

る．

(s 3-2) 各段のルールの前件は，C 6.1)を満たす．

(s 3-3) 包含条件を満たす．$\forall i, \forall j, x=y$ に対して，

$$\mu A_{ij}(x) \leq \mu A^*_{i+1j}(y).$$

(s 3-4) $\forall i,\ \forall j$ について

$$Supp[A_{ij}] \cap Supp[A_{ij+1}] \neq \phi.$$

[設定 4] 前件が後件を含む

(s 4-1) 各段のルールの前件は正規分割されている．

(s 4-2) 各段のルールの後件は，C 6.1)を満たす．

(s 4-3) 包含条件を満たす．$\forall i, \forall j$ に対して，

$$\mu A_{ij}(x) \geq \mu A_{i+1j}(y).$$

(s 4-4) $\forall i,\ \forall j$ について

$$Supp[A^*_{ij}] \cap Supp[A^*_{ij+1}] \neq \phi.$$

設定 3，設定 4 は，前件，後件の包含関係が，あいまいさの広がりに与える影響を考察するための設定である．実際にも，多重ルールの中で部分的にこのような設定が見られる．図 4，図 5 にそれぞれのメンバーシップ関数の例を示す．

以上の設定は，それぞれすべての段において同様に設定されているものとして考察を進める．しかし，実際の多重多段ファジィ推論では，例えば，ある段で設定 1 が，ある段では設定 3 がというように，複雑な環境となることが容易に予想されるが，それらに対しても個々の設定の考察を重ね合わせることで，ある程度の見通しが得られるものと思われる．

2.3 ファジィ推論法の設定

次に，ファジィ推論法の設定を行う．推論法は直接法を用い，ルールをファジィ関係に変換する規則は以下に示す代表的な 4 つの方法を取り上げる．前件，後件のファジィ集合を B，C，それぞれのメンバーシップ関数を μB，μC とする．

$$Rs(x,y) = \begin{cases} 1 & (\mu B(x) \leq \mu C(y)) \\ 0 & (\mu B(x) > \mu C(y)) \end{cases}$$
(Gains-Rescher) (2.1)

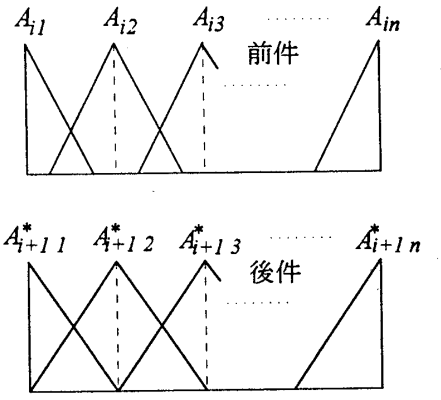


図 4 [設定3]後件⊃前件

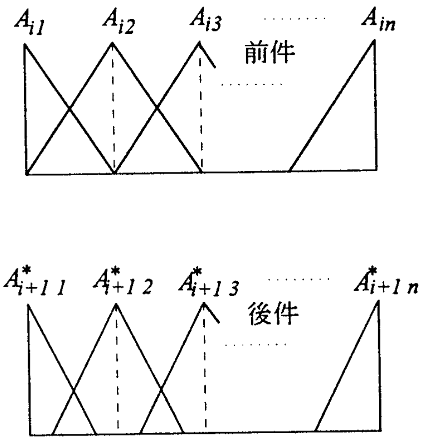


図 5 [設定4]前件⊃後件

$$Rg(x,y) = \begin{cases} 1 & (\mu B(x) \leq \mu C(y)) \\ \mu C(y) & (\mu B(x) > \mu C(y)) \end{cases}$$
(Gödel) (2.2)

$$Rc(x,y) = \min(\mu B(x),\ \mu C(y))$$
(Mamdani) (2.3)

$$Ra(x,y) = \min(1,\ 1 - \mu B(x) + \mu C(y))$$
(Lukasiewicz) (2.4)

1 段の n 重ファジィ推論におけるルールのファジィ関係は，Rc では n 個の関係の結びと解釈され，他の方法では n 個の関係の交わりと解釈される[1]．つまり，i 重目のルールから得られるファジィ関係を R_i，多重ファジィ関係を MR とすると Rc では，

$$MR = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \tag{2.5}$$

であり，Rs，Rg，Ra では，

$$MR=\bigcap_{i=1}^{n} R_i \tag{2.6}$$

である．また，推論の合成規則は最も一般的なsup-min合成とする．略記号について，本論文中でR^nはRをn回sup-min合成したものを表し，$\wedge$，$\vee$はそれぞれmin，maxを表す．また，1つのルールから得られるファジィ関係は例えばRs，多重ファジィ関係はMRsのように表す．

3．設定1,2における多重多段ファジィ推論

ここでは，まず各ファジィ関係の設定1，2における多重ファジィ関係を導き，ついでそれらを基に多重多段ファジィ推論のあいまいさの広がりに関する諸定理を与える．

3.1 ファジィ関係 Rg

[補題 3.1]

設定1における多重ファジィ関係MRgは，

$x\in[c_j,\ c_{j+1}]$，$j=1,2,\cdots,n-1$に対して，

$y\in[c_j,\ c_{j+1}]$の時，

$$MRg(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x=y,\\ \mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } x<y,\\ \mu A^*_{i+1j+1}(y) & \text{for } x>y,\end{cases}$$

$y\notin[c_j,\ c_{j+1}]$の時，

$$MRg(x,y)=0$$

と表される．

(証明)

ルール$A_{ij}\to A^*_{i+1j}$より得られるファジィ関係をRg_{ij}とする．$x\in[c_j,\ c_{j+1}]$に対してMRgを規定するファジィ関係は，Rg_{ij}とRg_{ij+1}である．その他のルールでは，前件，後件のメンバーシップ値が全て0になるので，ファジィ関係のメンバーシップ値は1となる．

$x\in[c_j,\ c_{j+1}]$に対して，設定1の定義から，

$y\in[c_j,\ c_{j+1}]$の時，

$x\geq y$に対して，$\mu A_{ij}\leq\mu A^*_{i+1j}(y)$，
$\mu A_{ij+1}\geq\mu A^*_{i+1j+1}(y)$，

$x<y$に対して，$\mu A_{ij}>\mu A^*_{i+1j}(y)$，
$\mu A_{ij+1}<\mu A^*_{i+1j+1}(y)$

である．従って，

$$Rg_{ij}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x\geq y,\\ \mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } x<y,\end{cases} \tag{3.1}$$

$$Rg_{ij+1}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x\leq y,\\ \mu A^*_{i+1j+1}(y) & \text{for } x>y\end{cases} \tag{3.2}$$

となる．さらに，

$y\notin[c_{j-1},\ c_{j+1}]$の時，$\mu A^*_{i+1j}(y)=0$なので，
$Rg_{ij}(x,y)=0$，

$y\notin[c_j,\ c_{j+2}]$の時，$\mu A^*_{i+1j+1}(y)=0$なので，
$Rg_{ij+1}(x,y)=0$，

となる．$MRg=Rg_{ij}\cap Rg_{ij+1}$から補題を得る．
(証明終)

[補題 3.2]

設定2における多重ファジィ関係MRgは，

$x\in[s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$，$j=1,2,\cdots,n-1$に対して，

$y\in[s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$の時，

$$MRg(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x=y\\ \mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } x<y, \text{ for}\\ \mu A^*_{i+1j+1}(y) & \text{for } x>y,\end{cases}$$

$y\notin[s_{Lj+1},s_{Rj}]$の時，

$$MRg(x,y)=0.$$

$x\in[s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$，$j=1,2,\cdots,n$
(但し$s_{R_0}=c_1$，$s_{Ln+1}=c_n$)に対して，

$y\in[s_{Lj},s_{Rj-1}]\cup[s_{Rj-1},s_{Lj+1}]\cup[s_{Lj+1},s_{Rj}]$の時，

$$MRg(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } \mu A_{ij}(x)\leq\mu A^*_{i+1j}(y),\\ \mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } \mu A_{ij}(x)>\mu A^*_{i+1j}(y),\end{cases}$$

$y\notin[s_{Lj},\ s_{Rj}]$の時，

$$MRg(x,y)=0$$

と表される．

(証明)

$x\in[s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$に対しては，[補題3.1]と同様なので省略する．$x\in[s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$に対して$MRg$を規定するファジィ関係は，$Rg_{ij}$のみである．他のルールでは，前件，後件のメンバーシップ値が全て0となるため，ファジィ関係のメンバーシップ値は全て1となる．

$y\in[s_{Lj},\ s_{Rj-1}]\cup[s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]\cup[s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$の時は補題は$Rg$の定義そのものなので明らかに成り立つ．

$y\notin[s_{Lj},\ s_{Rj}]$の時は，

$\mu A^*_{i+1j}(y)=0$ なので $MRg(x,y)=0$.

(証明終)

[補題 3.1][補題 3.2]から得られる多重ファジィ関係の例を図 6, 図 7 に示す. 前件, 後件を同形とすることで多重ファジィ関係の対角部(すなわち $x=y$)が 1 となる. このことは, ある事実に対する 1 段のファジィ推論結果が少なくとも事実より小さくならないことを保証するものである. 設定 2 の多重ファジィ関係は, 設定 1 よりも $x\in[s_{Lj-1}, s_{Rj+1}]$ の区間で 1 を取る領域が増大する. これは, [補題 3.2]の証明で示したように, その区間の多重ファジィ関係がただ一つのルールで規定される(設定 1 では二つのルールで規定された)ためである. このことから, 同じ事実に対して設定 2 の推論結果が設定 1 のそれよりも小さくならないことがわかる.

さて, あるファジィ関係 R を用いて, $m-1$ 段推論を重ねたときの結論 A'_m は,

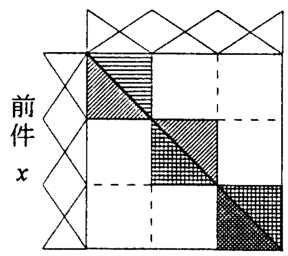


図 6 設定 1 における MRg

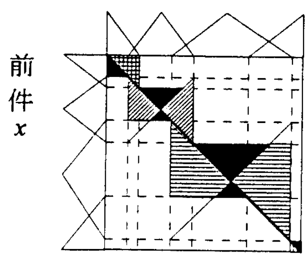


図 7 設定 2 における MRg

$$A'_m=A'_1\circ R^{m-1} \tag{3.2}$$

と表されることから, 次の補題が導かれる.

[補題 3.3]

$R^i=R^{i-1}$が成り立てば, $A'_{i+1}=A'_i$である.

(証明)

式(3.2)より明らかである.

(証明終)

[補題 3.4]

設定 1, 2 において, $r\geq 2$ に対して,

$$MRg^r(x,y)=MRg(x,y)$$

である.

(証明)

まず, 設定 1 について証明する.

$r=2$ とすると,

$$MRg^2(x,y)=\sup_p(MRg(x,p)\wedge MRg(p,y)). \tag{3.3}$$

(1-1) $x,y\in[c_j, c_{j+1}]$, $x\leq y$ の時,

[補題 3.1]より $MRg(p,y)$ は $p\in[0,1]$ に対して

$$MRg(p,y)=\begin{cases}\mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } p<y,\\ 1 & \text{for } p=y,\\ \mu A^*_{i+1j+1}(y) & \text{for } p<y,\\ 0 & \text{for } p\notin[c_j, c_{j+1}]\end{cases}$$

なる定数で表される. 式(3.3)から,

$p<y$ では,

$$MRg(x,p)\wedge MRg(p,y)\leq\mu A^*_{i+1j}(y)=MRg(x,y).$$

$p=y$ では,

$$MRg(x,p)\wedge MRg(p,y)=MRg(x,y)\wedge 1$$
$$=MRg(x,y).$$

$p>y$ では,

$MRg(x,p)$ は p について単調減少なので,

$$MRg(x,p)<MRg(x,y)$$

を満たす. よって,

$$MRg(x,p)\wedge MRg(p,y)<MRg(x,y).$$

$p\notin[c_j, c_{j+1}]$ では,

$$MRg(x,p)\wedge MRg(p,y)=0$$

以上から, p について sup を取ると,

$$MRg^2(x,y)=MRg(x,y).$$

を得る.

(1-2) $x,y \in [c_j,\ c_{j+1}]$，$x>y$ の時,

$p<y$ では,

$MRg(x,p)$ は p について単調増加なので,

$$MRg(x,p) < MRg(x,y) = \mu A^*_{i+1 j+1}(y)$$

を満たし,

$$MRg(x,p) \wedge MRg(p,y) < (MRg(x,y) \wedge MRg(p,y)).$$

$p=y$ では,

$$MRg(x,p) \wedge MRg(p,y) = MRg(x,y) \wedge 1 = MRg(x,y).$$

$p>y$ では,

$$MRg(x,p) \wedge MRg(p,y) \le \mu A^*_{i+1 j+1}(y) = MRg(x,y).$$

以上から，p について sup を取ると,

$$MRg^2(x,y) = MRg(x,y)$$

を得る.

(1-3) $x \in [c_j,\ c_{j+1}]$，$y \notin [c_j,\ c_{j+1}]$ の時,

式(3.3)の $MRg(x,p)$ が値を持つとき，$MRg(p,y)$ は 0，逆に $MRg(p,y)$ が値を持つとき，$MRg(x,p)$ が 0 となるので,

$$MRg^2(x,y) = MRg(x,y) = 0$$

以上から，補題は $r=2$ の時成り立つ.

次に $r=k$ の時補題が成り立つと仮定すると,

$$MRg^{k+1} = MRg^k \circ MRg = MRg \circ MRg = MRg$$

となり，$r=k+1$ の時も補題が成り立つ.

次に，設定 2 について証明する.

(2-1) $x,y \in [s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$ の時,

この区間では設定 1 の議論と同様なので省略する.

(2-2) $x,y \in [s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$ の時,

(a) $MRg(x,y)=1$ の場合,

[補題 3.2]より，$x=y$ に対して $MRg(x,y)=1$ なので，式(3.2)から容易に

$$MRg^2(x,y) = MRg(x,x) \wedge MRg(x,y) = MRg(x,y)$$

を得る.

(b) $MRg(x,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y)$ の場合,

$y>x$ に対して,

$$\mu A^*_{i+1 j}(y') = \mu A^*_{i+1 j}(y)$$

を満たす $y'<y$ ($y<x$ に対しては $y'>x$) が必ず存在する．$y' \le p \le y$ に対して,

$$MRg(x,p) \ge \mu A^*_{i+1 j}(y),$$
$$MRg(p,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y).$$

その他の p に対しては $MRg(x,p) < \mu A^*_{i+1 j}(y)$ なので,

$$MRg^2(x,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y) = MRg(x,y)$$

を得る.

(2-3) $x \in [s_{Rj-1}, s_{Lj+1}]$, $y \in [s_{Lj+1}, s_{Rj}] \cup [s_{Lj}, s_{Rj-1}]$ の時,

(a) $MRg(x,y)=1$ の場合は，(2-2)(a)と全く同様である.

(b) $MRg(x,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y)$ の場合,

$y>x$ に対して(2-2)(b)と同様な y' が存在する.

$y'<p<y$ に対して,

$$MRg(x,p) > \mu A^*_{i+1 j}(y),$$
$$MRg(p,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y).$$

$p=y$ に対して,

$$MRg(x,p) = \mu A^*_{i+1 j}(y),$$
$$MRg(p,y) = 1.$$

その他の p に対しては,

$MRg(x,p) < \mu A^*_{i+1 j}(y)$ なので,

$$MRg^2(x,y) = \mu A^*_{i+1 j}(y) = MRg(x,y)$$

を得る.

(2-4) $x \in [s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$，$y \notin [s_{Lj+1}, s_{Rj}]$，$[s_{Lj}, s_{Rj-1}]$ の時，設定 1 の(1-3)と全く同様である.

以上から，設定 2 に対しても $r=2$ の時補題が成り立つ．$r=k$ の時補題が成り立つと仮定すると，設定 1 と同様に $r=k+1$ についても補題が成り立つ.

(証明終)

以上の準備から，Rg を用いた多重多段ファジィ推論について次の定理を得る.

[定理 3.1]

ファジィ関係 Rg を用いて設定 1,2 で多重多段ファジィ推論を行うとき，$m \ge 3$ に対して,

$$A'_m = A'_2 \supseteq A'_1$$

である.

(証明)

[補題 3.4]より，$m \ge 3$ に対して,

$$MRg^{m-1} = MRg$$

がいえるので，[補題 3.3]より，

$$A'_m = A'_2$$

を得る．つぎに $A'_2 \supseteq A'_1$ を示す．

1) 設定1

$y \in [c_j, c_{j+1}]$, $j=1,2,\cdots,n-1$ に対して $MRg(x,y)$ が値を持つのは，[補題 3.1]より $x \in [c_j, c_{j+1}]$ の時のみで，それ以外は0である．従って，

$$\mu A'_2(y) = \sup_x (\mu A'_1(x) \wedge MRg(x,y))$$
$$= \left(\sup_{x<y}(\mu A'_1(x) \wedge \mu A^*_{2j}(y))\right) \vee (\mu A'_1(x) \wedge 1) \vee \left(\sup_{x>y}(\mu A'_1(x) \wedge \mu A^*_{2j+1}(y))\right)$$

と表される．A'_1 の凸性から，

$y < Co[A'_1]$ に対しては，

$$\sup_{x<y} \mu A'_1(x) \leq \mu A'_1(y)$$

なので，

$$\mu A'_2(y) = \mu A'_1(y) \vee \left(\sup_{x>y}(\mu A'_1(x) \wedge \mu A^*_{2j+1}(y))\right). \tag{3.4}$$

$y > Co[A'_1]$ に対しては，

$$\sup_{x>y} \mu A'_1(x) \leq \mu A'_1(y)$$

なので，

$$\mu A'_2(y) = \mu A'_1(y) \vee \left(\sup_{x<y}(\mu A'_1(x) \wedge \mu A^*_{2j}(y))\right). \tag{3.5}$$

$y \in Co[A'_1]$ に対しては，

$$\sup_{x<y} \mu A'_1(x) = \sup_{x>y} \mu A'_1(y) = \mu A'_1(x) = 1$$

なので，

$$\mu A'_2(y) = \mu A'_1(y) \vee \mu A^*_{2j}(y) \vee \mu A^*_{2j+1}(y)$$
$$= \mu A'_1(y).$$

いずれの場合も

$$\mu A'_2(y) \geq \mu A'_1(y)$$

すなわち，$A'_2 \supseteq A'_1$ が言える．

ここで，A'_1 が強凸ファジィ集合なら，式(3.4)，(3.5)の右辺第二項が $\mu A'_1(y)$ より大きくなる y が必ず存在するので，$A'_2 \supset A'_1$ となる．

以上から設定1についての定理[3.1]は成り立つ．

2) 設定2

$y \in [s_{Lj+1}, s_{Rj}]$, $j=1,2,\cdots,n-1$ に対しては，設定1と同様である．その他の y に対しては，図7から対角部が1であり，さらに1を取る領域が増大していることから，結論が事実より小さくならないことは明らかである．

(証明終)

本定理はファジィ関係 Rg を用いた設定1,2での多重多段ファジィ推論では，結論は1段しか広がらないことを示している．この例を図8に示す．ここでは A'_1 が強凸ファジィ集合なので，$y \in [c_1, c_2]$ に対して，$\mu A'_1(y)$ より大きい式(3.4)の右辺第2項が存在し，$y \in [c_2, c_3]$ に対して同様な式(3.5)の右辺第2項が存在する．

3.2 ファジィ関係 Rs

[補題 3.5]

設定1における多重ファジィ関係 MRs は

$$MRs(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x=y, \\ 0 & \text{for } x \neq y, \end{cases}$$

と表される．

(証明)

Rs の定義式(2.1)より，[補題 3.1]の $\mu A^*_{i+1j}(y)$，$\mu A^*_{i+1j+1}(y)$ を0と変更すれば，[補題 3.1]と同様

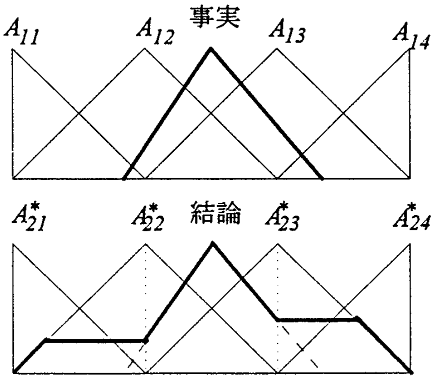


図 8 設定1における Rg による多重多段ファジィ推論

の議論で証明される.

(証明終)

[補題 3.6]

設定2における多重ファジィ関係 MRs は

$x \in [s_{Lj+1}, s_{Rj}]$, $j=1,2,\cdots,n-1$ に対して,

$$MRs(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x=y,\\ 0 & \text{for } x\neq y,\end{cases}$$

$x \in [s_{Rj-1}, s_{Lj+1}]$, $j=1,2,\cdots,n$

(但し $s_{R_0}=c_1$, $s_{Ln+1}=c_n$) に対して,

$y \in [s_{Lj+1}, s_{Rj-1}] \cup [s_{Rj-1}, s_{Lj+1}] \cup [s_{Lj+1}, s_{Rj}]$ の時

$$MRs(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } \mu A_{ij}(x) \leq \mu A^*_{i+1j}(y),\\ 0 & \text{for } \mu A_{ij}(x) > \mu A^*_{i+1j}(y),\end{cases}$$

$y \notin [s_{Lj}, s_{Rj}]$ の時,

$$MRs(x,y)=0$$

である.

(証明)

[補題 3.2]の $\mu A^*_{i+1j}(y)$, $\mu A^*_{i+1j+1}(y)$ を0と変更すれば, [補題 3.2]と同様の議論で証明される.

(証明終)

[補題 3.5]の多重ファジィ関係の例を図9に示す. [補題 3.6]の多重ファジィ関係は, 図7の MRg において, 1以外の値を全て0とすることで得られるので省略する. すなわち, MRs は MRg の後件のメンバーシップ値を0とした特別な場合となっているため, MRg と類似の性質を有すること, さらに, 同じ事実に対して MRg より推論結果が大きくならないことが容易に予想できる.

Rs を用いた多重多段ファジィ推論も Rg とほぼ同様の議論ができるので, 直接次の定理を導く.

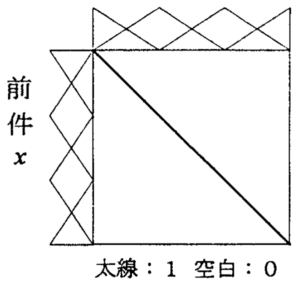


図9 設定1における MRs

[定理 3.2]

ファジィ関係 Rs を用いて多重多段ファジィ推論を行う時,

設定1に対して,

$$A'_m = A'_1 \quad \text{for } m \geq 2,$$

設定2に対して,

$$A'_m = A'_2 \supseteq A'_1 \quad \text{for } m \geq 3,$$

である.

(証明)

1) 設定1について

$m=2$ とする. [補題 3.5]より

$$\begin{aligned}\mu A'_2(y) &= \sup_x(\mu A'_1(x) \wedge MRs(x,y))\\ &= \mu A'_1(y) \wedge MRs(y,y)\\ &= \mu A'_1(y).\end{aligned}$$

よって, $m=2$ の時, 定理は成り立つ. $m=k$ の時, 成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\mu A'_{k+1}(y) &= \sup_x(\mu A'_k(x) \wedge MRs(x,y))\\ &= \mu A'_k(y) \wedge MRs(y,y)\\ &= \mu A'_k(y)\\ &= \mu A'_1(y).\end{aligned}$$

となって, $m=k+1$ の時も定理[3.2]は成り立つ.

2) 設定2について

[定理 3.1]及び[補題 3.4]と同様の議論で証明できる.

(証明終)

本定理は, Rs を用いた多重多段ファジィ推論が, 設定1に対しては1段目の事実が推論段数を重ねてもそのまま結論として保持されることを, 設定2に対しては Rg と同じく結論が1段のみ広がることを示している.

3.3 ファジィ関係 Ra

[補題 3.7]

設定1における多重ファジィ関係 MRa は, $x \in [c_j, c_{j+1}]$ に対して,

$$\begin{aligned}MRa(x,y) &= (1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y)) \wedge\\ &\quad (1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y))\end{aligned} \qquad (3.6)$$

であり，特に $y \in [c_j,\ c_{j+1}]$ の時

$$MRa(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } x=y\\ 1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } x<y\\ 1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y) & \text{for } x>y\end{cases} \tag{3.7}$$

と表される．

(証明)

$x \in [c_j,\ c_{j+1}]$ に対して MRa の値を規定するファジィ関係は Ra_{ij} と Ra_{ij+1} である．Ra の定義式(2.4)より

$$Ra_{ij}=1\wedge(1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y)),$$
$$Ra_{ij+1}=1\wedge(1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y)).$$

従って，

$$MRa=1\wedge(1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y))\wedge(1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y)).$$

設定1の定義より，$\mu A_{ij}(x)<\mu A^*_{i+1j}(y)$ なら $x>y$ となる．一方，$x>y$ に対しては

$$\mu A_{ij+1}(x)>\mu A^*_{i+1j}(y)$$

となるので，

$$1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y)>1 \text{ ならば，}$$
$$1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y)<1$$

となり，逆に

$$1-\mu A_{ij+1}(x)+\mu A^*_{i+1j+1}(y)>1 \text{ ならば，}$$
$$1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y)<1$$

となる．よって MRa は，式(3.6)で表される．以上の議論の経過から，$y \in [c_j,\ c_{j+1}]$ の時，式(3.7)となることは明らかである．

(証明終)

[補題 3.8]

設定2における多重ファジィ関係 MRa は，$x \in [s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$ に対して，式(3.6)が成り立ち，特に，$y \in [s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$ の時，式(3.7)となる．

$x \in [s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$ に対して，

$$MRa(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } \mu A_{ij}(x)\le\mu A^*_{i+1j}(y)\\ 1-\mu A_{ij}(x)+\mu A^*_{i+1j}(y) & \text{for } \mu A_{ij}(x)>\mu A^*_{i+1j}(y)\end{cases}$$

である．

(証明)

$x \in [s_{Lj+1},\ s_{Rj}]$ に対しては[補題 3.7]と同様であり，$x \in [s_{Rj-1},\ s_{Lj+1}]$ に対しては[補題 3.2]と同様の議論で証明される．

(証明終)

[補題 3.7]の多重ファジィ関係の例を図10に示す．[補題 3.8]の MRa は1となる領域が図7のパターンとなることに注意すれば図10から容易に得られるので省略する．MRa は対角部の近傍が連続で，MRg よりも大きい値を持つことから，同じ事実に対する推論結果が MRg よりも大きくなることが予想される．

Ra を用いた多重多段ファジィ推論について次の定理を得る．

[定理 3.3]

ファジィ関係 Ra を用いて設定1,2で多重多段ファジィ推論を行う時，推論段数を重ねるに連れて結論は大きくなる．すなわち，

$$A'_{m+1}\supset A'_m \text{ for } \forall_m.$$

(証明)

1) 設定1について

[補題 3.7]から，$x=y$ の時 $MRa(x,y)$ なので，

$$\mu A'_{i+1}(y)\ge\mu A'_i(y) \tag{3.8}$$

である．従って，$y \in Co[A'_i]$ に対しては

$$\mu A'_{i+1}(y)=\mu A'_i(y)=1 \tag{3.9}$$

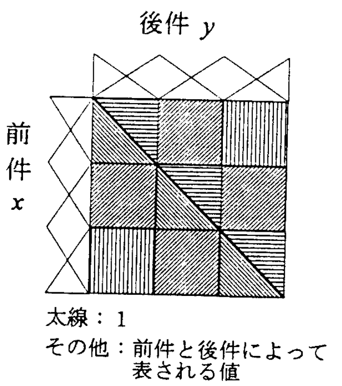


図10 設定1における MRa

次に，$\mu A'_i(x_0)<1$ かつ小さいΔxに対して，

$$\mu A'_i(x_0)<\mu A'_i(x_0+\Delta x)$$

なるx_0を考える．$MRa(x,y)$は$x=y$の近傍でxについて連続なので，

$$\mu A'_i(x_0)<MRa(x_0+\Delta x,\ x_0) \qquad (3.10)$$

なるΔxが必ず存在する．従って

$$(\mu A'_i(x_0)\wedge MRa(x_0,\ x_0))<\mu A'_i(x_0+\Delta x)\wedge MRa(x_0+\Delta x,x_0)$$

が成り立つ．

$$\mu A'_{i+1}(y)=\sup_x(\mu A'_i(x)\wedge MRa(x,y))$$

であるから，$y=x_0$に対してxを$x'=x_0+\Delta x$と選べば，

$$\mu A'_{i+1}(x_0)\geq(\mu A'_i(x')\wedge MRa(x',x_0)) > (\mu A'_i(x_0)\wedge MRa(x_0,x_0)),$$

すなわち，

$$\mu A'_{i+1}(x_0)>\mu A'_i(x_0)$$

となる．$\mu A'_i(x)$が無知でなければ，(3.10)を満たすx_0が必ず存在するので，

$$\mu A'_{i+1}(y)>\mu A'_i(y) \quad \text{for } \exists y$$

が言え，これから定理[3.3]が成り立つ．

2)設定2について

[定理3.1]の設定2の議論と同じであるので省略する．

(証明終)

本定理は，Raを用いた多重多段ファジィ推論では推論段数を重ねるごとに，結論が前の段の結論より大きくなることを示している．

すなわち，いわゆるあいまいさの爆発が生じることを示している．

3.4 ファジィ関係 Rc

Rcを用いた多重ファジィ関係は，定義式(2.3)から，容易に得ることができるので，ここでは直接関連する補題で定理を導く．この定理は，設定1から設定4の全てについて成り立つので，ここで一括して述べる．

[補題3.9]

ファジィ関係Rcを用いた1段の多重ファジィ推論の結論は，前件と事実の一致度H_{ij}を用いて，

$$\mu A'_{i+1}(y)=\bigvee_j(H_{ij}\wedge\mu A^*_{i+1j}(y)),$$

$$H_{ij}=\sup_x(\mu A'_i(x)\wedge\mu A_{ij}(x))$$

と表される．

(証明)

これは，マムダニのファジィ推論の頭切り法による表現であり，良く知られているので省略する．

(証明終)

[補題3.10]

ファジィ関係Rcを用いて設定1,2,3,4で多重多段ファジィ推論を行う時，

$$H_{i+1j}=H_{ij} \quad \text{for } \forall j$$

ならば，

$$A'_{i+2}=A'_{i+1}$$

である．

(証明)

定義より全ての設定において

$$\mu A^*_{i+1j}(y)=\mu A^*_{ij}(y) \quad \text{for } \forall i,\ \forall j$$

なので[補題3.9]より明らかである．

(証明終)

以上から次の定理が導かれる．

[定理3.4]

ファジィ関係Rcを用いて設定1,2,3,4で多重多段ファジィ推論を行う時，結論のファジィ集合が広がるのはn重ファジィ推論であれば，高々n段目までであり，

$$A'_m=A'_{n+1} \quad \text{for } m\geq n+2$$

である．

(証明)

[補題3.9]より

$$\begin{aligned}H_{i+1j}&=\sup_y\Big(\bigvee_k(H_{ik}\wedge\mu A^*_{i+1k}(y))\wedge\mu A_{i+1j}(y)\Big)\\&=\sup_y\Big(\bigvee_{k=j-1,j,j+1}(H_{ik}\wedge\mu A^*_{i+1k}(y))\wedge\mu A_{i+1j}(y)\Big)\\&=(H_{ij-1}\wedge{}_j\rho_{j-1})\vee(H_{ij+1}\wedge{}_j\rho_{j+1})\vee H_{ij}\end{aligned} \qquad (3.11)$$

と表される．ここで，${}_j\rho_{j-1}$は

$${}_j\rho_{j-1}=\sup_y(\mu A_{i+1j}(y)\wedge\mu A^*_{i+1j-1}(y))$$

であり，j分割目の前件と，$j-1$分割目の後件との一致度を表す．但し，${}_j\rho_j=1$(コアが共通のため)である．設定1, 2では，前件，後件が同形なので${}_j\rho_{j-1}$ $(={}_{j-1}\rho_j)$は前件または後件の隣り合うファジィ集合間の一致度に等しい．特に設定1では$\forall j$に対して，${}_j\rho_{j-1}=\rho$なる定数となる．

さて，結論の広がりが飽和する最大の段数を考えるために，1段目の最大の一致度をH_{1p}とし，それ以外の一致度は$\forall j$に対する${}_j\rho_{j-1}$，${}_j\rho_{j+1}$より小さいとする．この時，設定1,2,4では，

$$H_{1p}\geq{}_j\rho_{j-1},\ {}_j\rho_{j+1}\ \text{for}\ \forall j$$

を満たすが設定3では必ずしも満たさない．式(3.11)は，2段目では左右両隣($p=1$またはnの時は片側)の前件の一致度H_{2p-1}，H_{2p+1}が設定1,2,4ではそれぞれ，

$${}_{p-1}\rho_p,\quad {}_{p+1}\rho_p,$$

設定3ではそれぞれ，

$$(H_{1p}\wedge{}_{p-1}\rho_p),\ (H_{1p}\wedge{}_{p+1}\rho_p)$$

と更新され，前件のp分割目の一致度は，$H_{2p}=H_{1p}$と固定されることを意味している．さらに次段では新たに$p-2$，$p+2$分割目の一致度が更新され，p, $p-1$，$p+1$分割目の一致度が固定される．

すなわち，1段推論を重ねるごとに固定された一致度を持つ前件が少なくとも1個多くて2個増える．そこでi段目において固定された一致度を持つ前件の数をT_iとすると，

$$T_i+1\leq T_{i+1}\leq n$$

を満たす．$T_k=n$となる最大のkは，どの1段についても固定された一致度を持つ前件が1個増える場合($p=1$またはnの場合)で，$k=n$となる．この時，

$$H_{n+1j}=H_{nj},\ \forall j$$

となるので，[補題3.10]より定理を得る．
(証明終)

本定理は，Rcを用いた多重多段ファジィ推論において，結論の広がりが飽和する最大の段数nを与えるもので，1段目の最大の一致度がA_{11}またはA_{1n}上で生じる場合であり，これ以外ではnより小さい段数で広がりは飽和する．例えば，nが奇数で$(n+1)/2$分割目で最大一致度が生じれば，1段につき2個づつ一致度が固定され，結論の広がりは$(n+1)/2$段目で飽和する．nが偶数で最大一致度が$n/2$分割目で生じれば，広がりは$(n/2+1)$段目で飽和する．これに関して4重ファジィ推論の場合を図11に示す．結論は$3(=4/2+1)$段目で飽和している．

4．設定3における多重多段ファジィ推論

ここではRs,Rg,Raを一括して議論する．

[補題4.1]

設定3におけるRs,Rg,Raの多重ファジィ関係MRs,g,aは$x\neq Co[A_{ij}]$，$j=1,2,\cdots,n$に対し

$$MRs,g,a(x,y)=1,\ \text{for}\ x\leq y\leq y+\Delta y^+,\quad \text{for}\ y-\Delta y^-\leq y\leq x$$

となる正の実数値Δy^+，Δy^-が存在する．

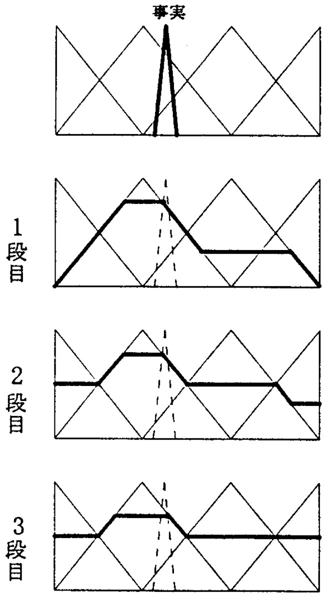


図11 設定1におけるRcによる4重多段ファジィ推論

（証明）

設定3の条件と式(2.1), (2.2), (2.4), (2.6)より明らか.

(証明終)

[補題4.1]の多重ファジィ関係の例を MRs を代表に図12に示す. ここで1を取る領域が対角部を含んでいることが重要であり, MRg, MRa も1を取る領域については MRs と同一である. さらに, 次の補題が成り立つ.

[補題4.2]

ファジィ関係 Rs, Rg, Ra を用いて設定3で多重多段ファジィ推論を行う時, A'_1が $x \in]c_j, c_{j+1}[$ でシングルトンであれば, $y \in [c_j, c_{j+1}]$ に対して結論は有限の推論段数 m^* で無知となる.

（証明）

A'_1が $x^* \in]c_j, c_{j+1}[$ でシングルトンの時, [補題4.1]より, 1段目の結論のコアは $[r_1, g_1]$ なる区間で与えられる. k 段目のこのような区間を $[r_k, g_k]$ とすれば, [補題4.1]より,

$$[r_k, g_k] \subset [r_{k+1}, g_{k+1}]$$

を満たす. この様子を図13(原点をAとする)で見れば,

$P_g = L_{aj}/L_{rj}$, $P_r = L_{aj}/L_{gj+1}$ とし,

$$g_k = (P_g)^k x^*,\ P_g > 1$$
$$r_k = (P_r)^k x^* - L_{aj}(P_r^k - 1),\ P_r > 1$$

と表される. 従ってコア区間の増加率は

$$g_{k+1}/g_k = P_g$$
$$(L_{aj} - r_{k+1})/(L_{aj} - r_k) = P_r$$

のように一定率となり, $y^* = x^*$ に対して区間 $[y^*, g_j]$, $[0, y^*]$ がそれぞれ無知となる有限値 m_1, m_2 が存在する. $m^* = m_1 \vee m_2$ と置けば補題を得る.

(証明終)

以上から次の定理が導かれる.

[定理4.1]

ファジィ関係 Rs, Rg, Ra を用いて設定3で多重多段ファジィ推論を行う時, A'_1が $x^* \in]c_j, c_{j+1}[$ でシングルトンであれば, 結論は有限の推論段数で無知となる.

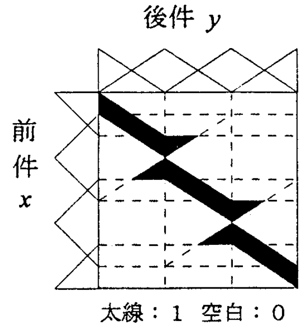


図12　設定3における MRs

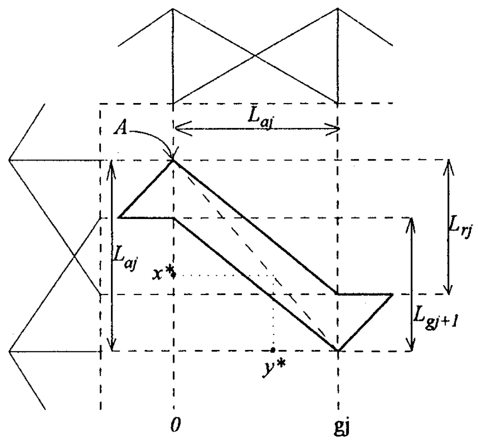


図13　設定3における MRs の拡大

（証明）

[補題4.2]より, 有限の推論段数 m^* で A'_{m^*} は $\forall y \in [c_j, c_{j+1}]$ に対して無知となる. この時図12より隣接する区間 $[c_{j-1}, c_j]$, $[c_{j+1}, c_{j+2}]$ 内の点 x, y に対して,

$$\mu A'_{m^*}(y) = 1,\ x = y$$

を満たすものが必ず存在することが分かる. 従って, 区間 $[c_{j-1}, c_j]$, $[c_{j+1}, c_{j+2}]$ においても[補題4.2]から有限の推論段数で結論は無知になる. 以上を再帰的に繰り返せば, ベース集合上で結論は有限の推論段数で無知となる.

(証明終)

[補題4.1]の Δy^+, Δy^- の値は, 前件のファジィ集合のサポートが後件のファジィ集合のサポートに近づくにつれ, 小さくなっていく. その結果, 結論が無知となる有限の推論段数は大きくなる.

さらに次の系が得られる．

[系 4.1]

ファジィ関係 Rs, Rg, Ra を用いて設定 3 で多重多段ファジィ推論を行う時，正規ファジィ集合の事実に対して結論は有限の推論段数で無知になる．

(証明)

[定理 4.1]より明らかである．

(証明終)

5．設定 4 における多重多段ファジィ推論

ここでは，Rc についてはすでに 3.4 で述べたので Rs, Rg, Ra について考察する．

5.1 ファジィ関係 Rs

[補題 5.1]

設定 4 における多重ファジィ関係 MRs は

$$MRs(x,y)=\begin{cases}1 & \text{for } \forall j,\ x=y=c_j,\\ 0 & \text{for the others}\end{cases}$$

と表される．

(証明)

設定 4 の条件と[補題 3.1]同様の議論で証明される．

(証明終)

設定 4 では後件部が前件部に含まれて小さくなっているため，各ルールの真の領域が狭くなり，逆に偽の領域が広がる．その結果，各ルールのファジィ関係を重ねると真となる領域が，前件，後件のコアの点のみとなり，他の領域ではルールの情報が全て消えてしまう．このような特徴を反映した次の定理を得る．

[定理 5.1]

ファジィ関係 Rs を用いて設定 4 で多重多段ファジィ推論を行う時，$m \geq 2$ に対する m 段目の結論は前件のコアにおける 1 段目の事実の値のみ持つ．すなわち

$$\mu A'_m(y)=\begin{cases}\mu A'_1(c_j) & \text{for } \forall j,\ y=c_j,\\ 0 & \text{for the others}\end{cases}$$

と表される．

(証明)

[補題 5.1]より明らかである．

(証明終)

本定理から A'_1 がルールの前件のコアの所で値を持たなければ，推論結果が 0 になってしまうことが分かる．従って，本設定が 1 段でも多重多段ファジィ推論のある段に存在すると，その段で情報が著しく減じてしまう．

5.2 ファジィ関係 Rg,Ra

Rg や Ra の多重ファジィ関係は，MRs と比して複雑なパターンとなることは容易に想像できる．しかし，設定 4 の特徴は[補題 5.1]や[定理 5.1]で明らかになったように，推論結果が事実の情報を削り落としてしまう所にある．この特徴は当然で MRg や MRa にも反映されるので，それらの減じられる情報について細かく議論しても，得られる果実は少ないと思われる．そこで，ここでは概略的な補題や定理の導出にとどめる．

[補題 5.2]

設定 4 における Rg, Ra による多重ファジィ関係は

$$MRg,\ a(x,y)\begin{cases}=1 & \text{for } \forall j,\ x=y=c_j\\ \neq 0 & \text{for } \exists x,\ \forall j,\ y\neq c_j\end{cases}$$

の性質を持つ．

(証明)

設定 4 の条件と[補題 3.1]と同様の議論で証明される．

(証明終)

[補題 5.2]の MRg の例を図 14 に示す．MRs と同じ理由から，MRg も前件，後件のコアの点のみ 1 を取り，他の領域は大部分が 0 となる．MRa は 0 となる領域は生じず，全てに 1 でない値を取り複雑なパターンを形成する．

[定理 5.2]

ファジィ関係 Rg, Ra を用いて設定 4 で多重多段ファジィ推論を行う時，どのような A'_1 に対し

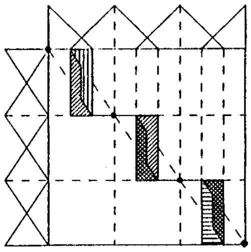


図14 設定4における MRg

ても任意の m 段目の結論が0となることはない．

A'_1 が正規ファジィ集合であっても，そのコアが前件，後件のコアを含まなければ結論は非正規ファジィ集合となる．

(証明)

[補題5.2]より明らかである．

(証明終)

6．結 論

本論文では，従来明確な見通しが得られていなかった多重多段ファジィ推論のあいまいさの広がりについて，4種類の推論環境と4種類のファジィ関係変換規則の組み合わせについて理論的に考察し，以下の結論を得た．

1)ファジィ関係 Rs

1-1)設定1では，多重多段ファジィ推論による結論は推論段数を重ねても1段目の事実と同じである．すなわち，あいまいさは広がらない．

1-2)設定2では，多重多段ファジィ推論による結論は推論段数を重ねても2段目の事実と同じである．すなわち，あいまいさは1段のみ広がる．

1-3)設定3では，多重多段ファジィ推論による結論は有限の推論段数で無知となる．

1-4)設定4では，1段目の事実が1段目のルールの前件のファジィ集合のコアの部分で値を持たなければ，結論は0となる．すなわち，何も推論できない．

2)ファジィ関係 Rg

2-1)設定1,2とも，多重多段ファジィ推論による結論は推論段数を重ねても2段目の事実と同じである．すなわち，あいまいさは1段のみ広がる．

2-2)設定3では，Rs と同じく，有限の推論段数で結論は無知となる．

2-3)設定4では，1段目の事実が1段目のルールの前件のファジィ集合のコアの部分で値1を持たなければ，正規ファジィ集合の事実に対しても結論は非正規ファジィ集合となる．

3)ファジィ関係 Ra

3-1)設定1,2とも，多重多段ファジィ推論による結論は推論段数を重ねるに連れ大きくなる．

3-2)設定3では，Rs, Rg と同じく有限の推論段数で結論は無知になる．

3-3)設定4では，Rg と同様の事が言える．

4)ファジィ関係 Rc

設定1,2,3,4とも，結論のファジィ集合が広がるのは n 重ファジィ推論であれば，高々 n 段目までである．

5)ファジィ関係 Rs，Rg，Ra を用いた場合，

設定1,2,3では，1段目の事実が正規ファジィ集合であれば，任意の段での結論は正規ファジィ集合である．

要約すると多重多段ファジィ推論に関する以下のような知見が得られる．

1)ファジィ関係 Rs，Rg を用いた多重多段ファジィ推論はあいまいさの広がりを抑制できる．特に，前後件のルールのファジィ分割を同形にするとあいまいさは高々1段しか広がらない．

2)ファジィ関係 Ra を用いた多重多段ファジィ推論はあいまいさの爆発を引き起こす．

3)ファジィ関係 Rc を用いた多重多段ファジィ推論はあいまいさの爆発を起こす事はないが，結論は非正規となる．

4)ルールのファジィ分割について，前後件を同形にするとあいまいさの広がりを抑制でき，前件より後件を大きくするとあいまいさの広がりを促進させる．また，後件より前件を大きくすると，事実の情報が削り落とされ，正規な事実に対しても非正規な結論を導く．

今後の課題として，前後件のファジィ分割のより一般的な設定や，他の合成演算に対する考察が上げられる．

参考文献

1）水本：ファジィ推論(1)，日本ファジィ学会誌，Vol.4，No.2，pp.256-264(1992)

2）水本：ファジィ推論(2)，日本ファジィ学会誌，Vol.4，No.3，pp.433-444(1992)

3）塚本：ファジィ推論(3)，日本ファジィ学会誌，Vol.4，No.4，pp.4676-4684(1992)

4）小林：知識システム技術の現状と将来，計測と制御，Vol.27，No.10，pp.859-868(1988)

5）L. A. Zadeh：Outline of new approach to the analysis of complex system and decision process, IEEE Trans. System Man Cybernet., Vol.3, pp.28-44 (1973)

6）D. Dubois and H. Prade：Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1：Inference with possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 40，pp.143-202(1991)

7）J. F. Baldwin and B.W. Pilsworth：Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fazzy logic, Fuzzy Sets and Systems, Vol.3，pp.193-219(1980)

8）塚本：あいまい推論，計測と制御，Vol.22，No.1，pp.139-145(1983)

9）S. Fukami, M. Mizumoto and K. Tanaka：Some considerations on fuzzy conditional inference, Fuzzy Sets and Systems ，Vol.4，pp.243-273(1980)

10）D. Dubois and H. Prade：Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited , Internat. J. Cybernetics and Systems, Vol.15，pp.293-331(1984)

11）D. Dubois and H. Prade：The generalized modus ponens under sup-min composition-A theoretical study , in：M. M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler, J. B. Kiszka, Eds. Approximate Reasoning in Expert Systems, pp.217-232，North-Holland , Amsterdam (1985)

12）E. Trillas and L. Valverde：On mode and implication in approximate reasoning , in M. M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler, J. B. Kiszka, Eds., Approximate Reasoning in Expert Systems , pp.157-166，North-Holland , Amsterdam (1985)

13）M. Mizumoto：Fuzzy inference using max-∧ composition in the compositional rule of inference, in M. M. Gupta, E. Sanchez, Eds., Approximate Reasoning in Decision Analysis, pp.67-76, North Holland, Amsterdam (1982)

14）M. Mizumoto：Fuzzy conditional inference under max-⊙ composition, Inform. Sci., Vol.27, pp.183-209 (1982)

15）M. Mizumoto and H. J. Zimmermann：Comparison of fuzzy reasoning method, Fuzzy Sets and Systems , Vol.8，pp.253-283(1982)

16）R. M. Tong and J. Frstathiou：A critical assessment of truth function modification and its use in approximate reasoning, Fuzzy Sets and Systems, Vol.7，pp.103-108(1982)

17）向殿，野島：ファジィ推論における直接法と間接法に関する考察：日本ファジィ学会誌，Vol.4，No.2，pp.325-333(1992)

18）D. Dubious and H. Prade：A typology of fuzzy "if … then …" rules, Proc. of the 3rd IFSA Congress, Seattle, pp.782-785(1989)

19）D. Dubious, R. Martin-Clouaire and H. Prade：Practical computing in fuzzy logic, in M. M. Gupta, T. Yamakawa, Eds., Fuzzy Computing, pp.11-34，North Holland, Amsterdam (1988)

20）水本：多重ファジィ推論と多段ファジィ推論，第6回ファジィシステムシンポジウム論文集，pp.435-440(1992)

21）I. B. Turksen and Y. Tian：Combination of rules or their consequences in fuzzy expert systems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.58，pp.3-40(1993)

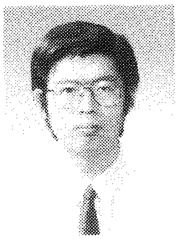
22）R. R. Yager：Mesuring tranquility and anxiety in decision making, Int. J. General Systems, Vol. 8，No.3，pp.139-146(1982)

23）井室，前田：多重多段ファジィ推論のあいまいさの広がりについて，第8回ファジィシステムシンポジュウム講演論文集，pp.221-224(1992)

(1993年6月24日　受　　付)
(1994年2月18日　再　受　付)
(1994年5月11日　再々受付)
(1994年9月7日　再々々受付)

[問い合わせ先]
〒804　北九州市戸畑区仙水町1-1
九州工業大学　工学部　情報工学教室
前田　博
㈪：093-871-1931(内)434
FAX：093-871-5835
E-mail：hmaeda@comp.kyutech.ac.jp

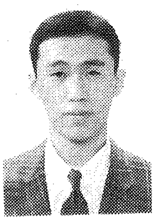
著者紹介



前田 博（まえだ ひろし）

九州工業大学工学部電気工学科情報工学教室

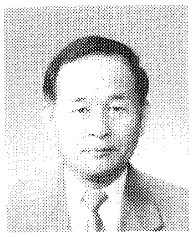
1973年，九州工業大学工学部制御工学科卒業．同年4月いすず自動車㈱入社．1977年九州工業大学工学部助手，1987年4月同助教授，1995年2月同教授現在に至る．工学博士．ファジィ意思決定理論と応用，ファジィデータベース検索，社会システムのモデリングなどの研究に従事．日本ファジィ学会，計測自動制御学会，日本OR学会などの会員．



井室 元良（いむろ もとよし）

㈱安川電機 システム技術センター計算機制御技術部情報技術課

1993年 九州工業大学大学院工学研究科博士前期課程電気工学専攻修了．同年4月 ㈱安川電機入社．現在に至る．工学修士．FAシステムのソフトウェア開発に従事．



村上 周太（むらかみ しゅうた）

九州工業大学工学部電気工学科情報工学教室

1969年 東京工業大学大学院理工学研究科博士課程制御工学専攻修了．同年4月 九州工業大学工学部制御工学科講師，1970年 同助教授，1984年工学部情報工学科教授，現在に至る．工学博士．ファジィ制御，ファジィモデリング，ファジィ意思決定などの研究に従事．日本ファジィ学会，計測自動制御学会，日本OR学会などの会員．