異質二層材料の境界面に生じる熱応力

—球　の　場　合—

（昭和46年10月20日　原稿受理）

機械工学教室　宮部喜代二
〃　勝原哲治
〃　光永公一
〃（大学院）　松尾栄人
九州歯科大学　細川貞雄
〃　加来哲

Thermal Stress at the Boundary Surface of Sphere composed with different Materials

By Kiyoji MIYABE
Tetsuji KATSUHARA
Koichi MITSUNAGA
Eito MATSUO
Sadao HOSOKAWA
and Tetsu KAKU

For a sphere which has been composed with two different materials (inner sphere and outer shell), an analytical solution and its calculated results of thermal stress at the boundary surface will be considered with transient heat conduction.

At the boundary surface, the calculated results for radial stress have the smaller values than the results for tangential stress. Then, it may be only needed to consider the latter stress at the surface. For two different materials, Fe-Cu, Cu-Fe, human tooth, and gold crown tooth are used to calculate.

1. はしがき

二層を構成する異質材料が，温度変化をともなう場合，それぞれの材料の物性値の相異，温度分布などによって熱応力を生じることは十分推定できる。本報告は，二層の異質材の球体モデルを考え，非定常熱伝導の場合の熱応力を考察し，その計算結果を示したものである。

対象として球体モデルを用いたのは，つぎのような問題が提起されたことにある。すなわち，人間歯の正常の場合と急冷急熱の場合とで，組織断面の観察による相異が認められ，その相異の理由が，非定常熱伝導による熱応力と考えるか否か，ということである。したがって，モデルとして球体を用い考察に着手したわけであるが，問題は人間歯に限定する必要はなく，一般に，異質二層材料の場合にも，当然考察すべき点が大いにあると考えられるので，まず，理論解析式を求め，ついで，Cu-Fe 組合せの場合について，さらに，人間歯および金冠歯の場合について，いずれも球体モデルとしての二層境界面に対する計算結果と考察を試みたわけである。

また，前述したように，試料が急冷急熱された場合，その内部任意点の温度が時間的にどのよう

に変化するかを知るため，ふつうによく知られている非定常熱伝導の基礎微分方程式に対して，周辺流体温度が時間的に変化する境界条件を導入して解析し，その数値解とモデル実験との比較検討を行ない，上記非定常熱伝導の場合の異質二層材料の熱応力を考察するための参考資料とした。

2. 記　　号

t: 試料内任意点の温度，t_i: 試料の初期温度 ($\tau \leqq 0$)，t_0: 周辺流体温度，$\theta = t_0 - t$，$H = t_0 - t_i$，T: 無次元温度 ($=(t_0-t)/(t_0-t_i)$)，a: 内球半径，b: 外球かく半径，L: 無次元半径比 ($=b/a$)，r: 球体内任意点 半径，R: 無次元半径比 ($=r/a$)，κ: 温度伝導率，μ: 温度伝導率比 ($=\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}$)，$\lambda$: 熱伝導率，$\delta$: 熱伝導率比 ($=\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$)，$\tau$: 時間，$Fr$: フーリエ数 ($=\kappa_1\tau/a^2$)，$p$: 圧力，$P$: 無次元圧力 $(1-\nu)p/\gamma E\Theta$)，γ: 熱膨脹係数，ω: 熱膨脹係数比 ($=\gamma_1/\gamma_2$)，σ: 応力，s: 無次元応力 ($=(1-\nu)\sigma/\gamma E\Theta$)，$E$: 縦弾性係数，$\varepsilon$: 縦弾性係数比 ($=E_1/E_2$)，$\nu$: ポアソン比，$\alpha$: 根，$\beta$: 無次元根 ($=a\alpha$)。

添字1および2は，それぞれ内球および外球かくを，r および t はそれぞれ半径方向および切線方向を示す。

3. 熱応力に関する基礎解析

異質材料よりなる内部球，外部球かくの非定常熱伝導の基礎式および境界，初期条件は，(1)～(3) 式で示される。

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \kappa_1\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right) : 0<r<a \qquad (1.\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} = \kappa_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\theta_2}{\partial r}\right) : a<r<b \qquad (1.\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned} &\tau = 0;\ 0<r<a,\ \theta_1 = 0 \\ &\tau = 0;\ a<r<b,\ \theta_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &r = b;\ \theta_2 = \Theta,\ r = a;\ \lambda_1\frac{\partial\theta_1}{\partial r} = \lambda_2\frac{\partial\theta_2}{\partial r} \\ &r = a;\ \theta_1 = \theta_2,\ r = 0;\ \theta_1 = \mathrm{finite} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

解:

$$\theta_1 = \Theta\left\{1 + \frac{2b}{r}\sum\frac{e^{-\kappa_1\alpha_n{}^2\tau}}{\alpha_n f'(\alpha_n)}\sin(\alpha_n\cdot r)\right. \qquad (4)$$

$$\theta_2 = \Theta\left[1 + \frac{2b}{r}\sum\frac{e^{-\kappa_1\alpha_n{}^2\tau}}{\alpha_n f'(\alpha_n)}\left\{\left(\frac{\delta}{\mu}\cos\alpha_n a + \frac{1-\delta}{\mu\alpha_n a}\sin\alpha_n a\right)\right.\right.$$
$$\left.\cdot\sin\alpha_n(r-a) + \sin\alpha_n a\cos\mu\alpha_n(r-a)\right] \qquad (5)$$

ただし α_n は

$$f(\alpha_n) = \left(\frac{\delta}{\mu}\cos\alpha_n a + \frac{1-\delta}{\mu\alpha_n a}\sin\alpha_n a\right)\sin\alpha_n(b-a) + \sin\alpha_n a\cdot\cos\alpha_n(b-a) = 0$$

の正根。

無次元化のため $b/a = L$，$\alpha_n a = \beta_n$，$\kappa_1\tau/a^2 = Fr$，$r/a = R$，$\theta/\Theta = T$ とおく。

$$T_1 = 1 + \frac{2L}{R}\sum\frac{e^{-\beta_r{}^{F_{n_2}}}}{\beta_n F'(\beta_n)}\sin\beta_n R \qquad (6)$$

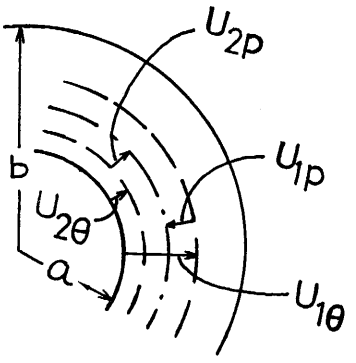
$$T_2 = 1 + \frac{2L}{R}\sum\frac{e^{-\beta_n{}^2F_r}}{\beta_n F'(\beta_n)}\sin\beta_n\cos\mu\beta_n(R-1)$$
$$+\left(\frac{\delta}{\mu}\cos\beta_n + \frac{1-\delta}{\mu\beta_n}\sin\beta_n\right)\sin\mu\beta_n(R-1)$$
$$(7)$$

ただし β_n は

$$F(\beta_n) = \sin\beta_n\cos\mu\beta_n(L-1) + \left(\frac{\delta}{\mu}\cos\beta_n\right.$$
$$\left. + \frac{1-\delta}{\mu\beta_n}\sin\beta_n\right)\sin\mu\beta_n(L-1) = 0$$

の正根。

つぎに，これらの温度分布をもつとき，球に生じる応力を，二層境界面の相対変位が0であるとして，重畳原理を適用して求める。内球および外球かくそれぞれの境界面 ($r=a$) における変位を u_1, u_2 とすると，これらの変位は，温度 (添字 θ) および圧力 (添字 p) による変位の和で示されるので，相対変位=0 であることから



第 1 図

$$u_1 = u_2$$

すなわち,

$$u_{1\theta} + u_{1p} = u_{2\theta} + u_{2p}$$

$$u_{1\theta} = \frac{3\gamma^{1}}{a^2}\int_0^a \theta_1 r^2 dr,\ u_2{}^{\theta} = \frac{3a\gamma_2}{b^3-a^3}\int_b^a \theta_2 r^2 dr$$

$$u_{1p} = \frac{1}{E_1}(1-2\nu_1)p,$$

$$u_{2p} = \frac{a^4}{E_2(b^3-a^3)}\left\{(1-2\nu_2) + \frac{1+\nu_2}{2}\frac{b^3}{a^3}\right\}p$$

これらより，境界面にはたらく圧力 p は

$$p = 3\frac{\frac{\gamma_1}{a^2}\int_0^a \theta_1 r^2 dr - \frac{a\gamma_2}{b^3-a^3}\int_a^b \theta_2 r^2 dr}{\frac{a^4}{E_2(b^3-a^3)}\left\{(1-2\nu_2) + \frac{1+\nu_2}{2}\frac{b^3}{a^3}\right\} + \Big\}\frac{a}{E_1}(1-2\nu_1)} \tag{8}$$

これらを無次元化すると,

$$S_{1r} = 2\left(I_1 - \frac{1}{R^3}I_{1R}\right) - P_1 \tag{9}$$

$$S_{1t} = 2I_1 + \frac{1}{R^3}I_{1R} - T_1 - P_1 \tag{10}$$

$$S_{2r} = 2\left\{\frac{1}{L^3-1}\left(1-\frac{1}{R^3}\right)I_L - \frac{1}{R^3}I_R\right\} + \frac{1}{L^3-1}\left(1-\frac{L^3}{R^3}\right)P_2 \tag{11}$$

$$S_{2t} = \frac{1}{L^3-1}\left(2+\frac{1}{R^3}\right)I_L + \frac{1}{R^3}I_R - T_2 + \frac{1}{L^3-1}\left(1+\frac{L^3}{2R^3}\right)P_2 \tag{12}$$

$$P_2 = \frac{(1-\nu_2)\varepsilon}{(1-\nu_1)\omega}P_1 \tag{13}$$

$$P_1 = 3\left\{I_1 - \frac{1}{\omega(L^3-1)}I_L\right) \Big/ \left[\frac{\varepsilon}{L^3}1-2\nu_2 + \frac{1}{2}(1+\nu_2)L^3\right\} + (1-2\nu_1)\right] \tag{14}$$

ただし,

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 T_1 R^2 dR,\ I_{1R} = \int_0^R T_1 R^2 dR,\\ I_L &= \int_1^L T_2 R^2 dR,\ I_{2R} = \int_1^R T_2 R' dR \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

第 1 表　計算に用いた数値ほか

	材料 内	材料 外	a (mm)	b (mm)	θ (°C)
I—A	Cu	Fe	10	12	100
I—B	Fe	Cu	10	12	100
II—A	人間歯	人間歯	5.0	5.5	30
II—B	象牙質	エナメル質	3.0	3.3	30
III—A	象牙質	Au	5.0	5.5	30
III—B	象牙質	Au	3.0	3.3	30

第 2 表　物　性　値

	Cu	Fe	人間歯 象牙質	人間歯 エナメル質	Au
λ, kcal/mm s°C	8.8×10^{-5}	1.14×10^{-5}	1.22×10^{-7}	1.54×10^{-7}	7.1×10^{-5}
κ, mm²/s	100	17.5	0.23	0.22	121
E, kg/mm²	1.25×10^{4}	2.1×10^{4}	1.6×10^{3}	8.4×10^{3}	9.8×10^{3}
ν	0.33	0.3	0.2	0.2	0.33
γ, 1/°C	1.8×10^{-5}	1.2×10^{-5}	6×10^{-5}	1×10^{-5}	1.46×10^{-5}
σ_{max}, kg/mm²	23.0	32.0	30.2*	40.8*	12.0

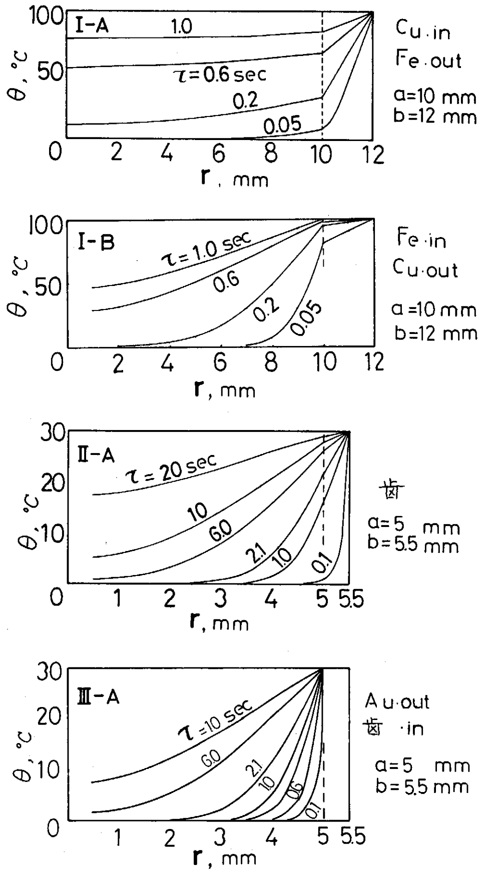
* 破砕抗力の値を示す。他は引張り強さの値を示す。

4. 計算結果

計算に用いた異質材の組合わせと寸法を第1表に，それぞれの物性値を第2表に示す。

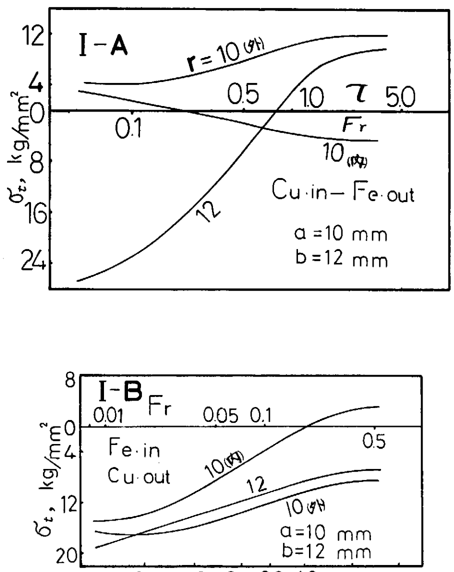
さきに，解析解の誘導を無次元式で示したが，無次元パラメータの種類が多いので，以下の線図では，第1表中の具体的数値に対応する計算結果を示す。

第2図は，第1表の I—A, B, II—A および III—A の条件を用いた場合の半径方向の温度分布を示すもので，パラメータは時間 τ_{sec} である。図中の点線は異質二層材料の境界面の位置を示す。同図 (b), (d) に示されるように，外球かくが薄くて温度伝導率の値が大きい場合，二層境界面の温度は，非定常熱伝導が始まるとともに，外表面温度Θとほとんど等しい値となることがわかる。したがって，後に述べるように，上記条件をもつ二層境界面における外球かくの応力変化が，外表面の熱衝撃に似た傾向となることが予想できる。



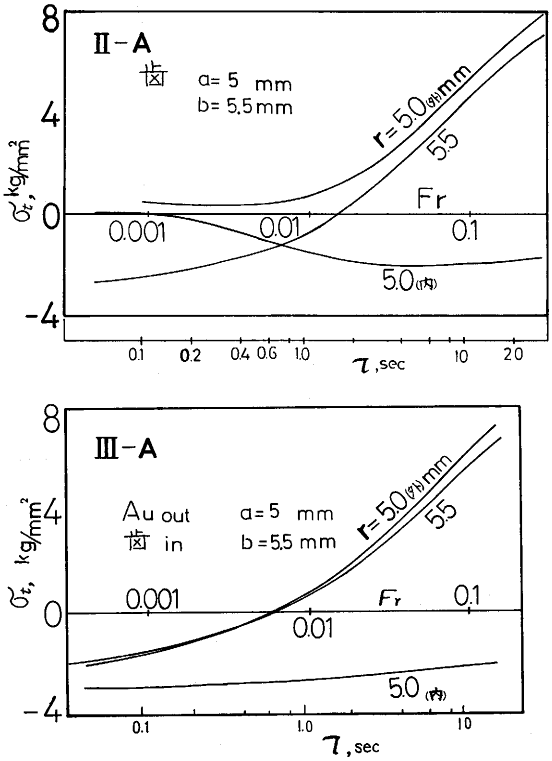
第2図 (θ〜r) の 関 係

計算結果から，半径方向の応力 σ_r は切線方向の応力 σ_t に比較してかなり小さいことがわかったので，以下の考察では σ_t のみを取上げて論じる。第3〜5図は，第1表に示す各材料の組合わせ条件を用いた場合の σ_t と時間τおよびフーリエ数 F_r との関係を示す。各図中の (i), (ii), (iii) の曲線は，それぞれ $r=a$ の内球表面，$r=a$ の外球かく内面および $r=b$ の外球かく外表面における σ_t〜τ の傾向を示す。第3図および第5図から明らかなように，各 σ_t 曲線は時間経過とともに，ある値に収束する傾向がある。第4図でこの傾向が確認できないのは，この程度の時間の計算結果ではまだ収束傾向が現われないものと考えられる。

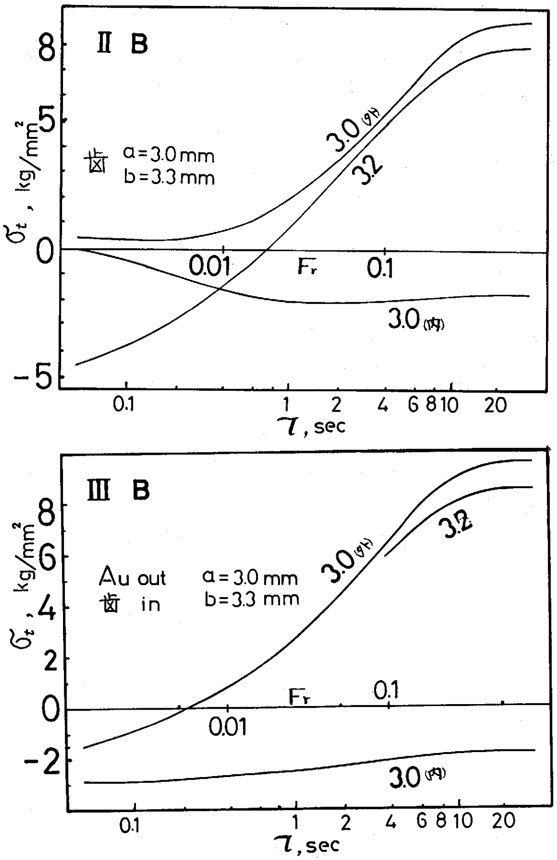


第3図 (σ_t〜τ) の関係．その1

第3表は，第3〜5図中の各 σ_t の最大変化量を最大振巾 $\varDelta\sigma_{tm}$ として，その略値をよみとって示してある。同表からわかるように，I—A(iii) は $\varDelta\sigma_{tm} \geqq 36\ \mathrm{kg/mm^2}$ であり，外球かく材料 Fe は $\sigma_{max}=32\ \mathrm{kg/mm^2}$ であるから $\varDelta\sigma_{tm}$ は引張り強さ



第4図 ($\sigma_t \sim \tau$) の関係. その2



第5図 ($\sigma_t \sim \tau$) の関係. その3

第3表　最大振巾応力 $\triangle\sigma_t$m の略値

		第3図		第4図		第5図	
第1表の分類 材料の組合わせ		I-A Cu-Fe	I-B Fe-Cu	II-A 歯	II-B 歯-Au	III-A 歯	III-B 歯-Au
$\triangle\sigma_t$m, kg/mm²	(i)		～20	～2		～2	
	(ii)	＞8	～6	＞8	＞10	～8	≧10
	(iii)	＞36	＞10	＞10	＞10	＞8	≧10

* (i), (ii), (iii) は第3～5図中で用いたと同じ内容を示す。

に匹適する値となっていることがわかる。歯の強度関係の値としては第2表中に示すように破砕抗力の値のみが示されているが，他の材料の例から推定して引張り強さは同表中の値の 1/3～1/5 とみられる。したがって，第3表中の II—A, II—B の (ii), (iii) の $\Delta\sigma_{tm}$ は強度上破壊あるいはクラックの入る可能性のある値とみて良いであろう。III—A, III—B の (iii) に示す $\Delta\sigma_{tm}$ は Au 材に対する値で $\Delta\sigma_{tm} \geqq \sigma_{max}$ とみられることからこの場合もクラックが入るに十分の条件であろう。

以上，非定常熱伝導により発生する熱応力 σ_t について考察したが，この基礎解析に用いた条件は，周囲流体温度一定，試片表面温度は $\tau \geqq 0$ で周囲流体温度と等しくなるなどである。しかしながら，序言において述べたように，試片が急冷急熱

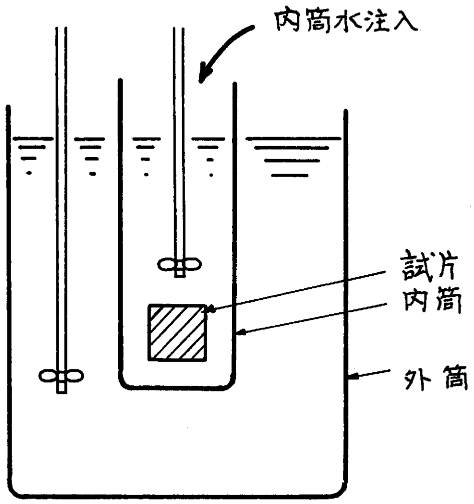
される場合，周囲流体温度は時間的に変化することが多い。このような現象の実例としては，食事などにともなう口腔内の歯牙の急冷急熱があり，また被切削材の断続切削もこの例に入るであろう。ただし後者の例は，周囲流体温度の時間的変化でなく，材料内任意点の温度が周期的に変化する場合で，解析の取扱いとしては前者とほぼ同様のものと考えられる。

5. 周囲流体温度が時間的変化をともなう場合の非定常熱伝導

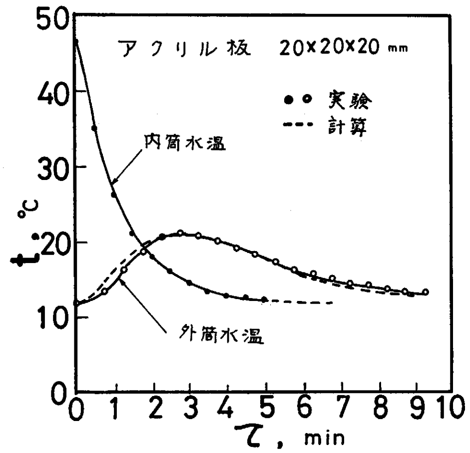
周囲流体温度が時間的に変化する場合の最もかんたんな例として，つぎの条件を用いた解析と実験を行なった。

第6図は二重の水槽からなる実験装置を示す。外槽は容量の大きな水槽で多少の熱量の出入があっても，その水温変化を無視できる。内槽は容積が小さく，その中には初め試片のみが吊されている。内槽中に水温 t_1 の温水を適当量瞬間的に投入させると，同槽中の水温は $t_1 \rightarrow t_0$ (t_0: 外槽中の水の温度）と変化し，それにともなって試片内部任意点の温度は時間とともに変化する。第7図はこのような条件のもとでの解析結果の数値解と実験結果とをプロットして示したもので，内槽中の水温 t_i の時間的変化は近似的に次式で示しうる。

$$T_i = (t_0 - t_1)/(t_0 - t_1) = \exp[-a \cdot \tau] \quad (16)$$



第6図 実験水槽略図

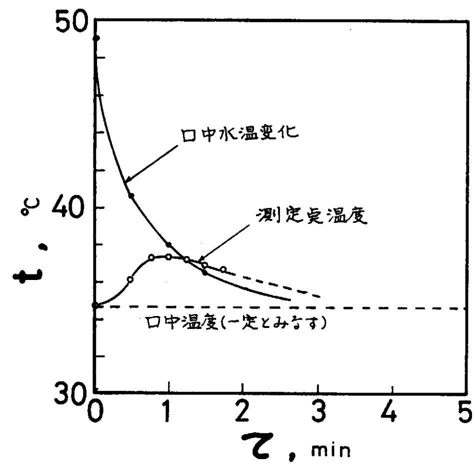


第7図 数値解と実験結果の比較および内筒水温の時間的変化

同式中の a は実験毎に定まる定数で，第7図中の数値解は，非定常熱伝導の基礎式をとく場合の境界条件の一つとして (16) 式を用いてえられた値である。図からわかるように数値解と実験結果とは，その傾向に良い一致を示している。

第8図は義歯と歯ぐきとの間に熱電対をはさみこんでおき，温水を口中に含んだ場合の測定点の温度が時間的に変化する傾向を示す実験例で，第7図と同様の傾向にあることがわかる。この実験の場合，第6図の外槽中の水に相当するのは人体の熱容量ということになる。

第7図および第8図からわかるように，試片内



第8図 口腔内実験結果の温度 t と時間 τ との関係

の温度は，$\tau=0$ で周囲流体温度と等しく，一定時間後に最大温度となり，$\tau=\infty$ で再び周囲流体温度に等しくなる。このような1サイクルでの温度変化は当然熱応力の値にも影響し，二層境界面においては膨脹と収縮という現象をともなうが，外球かくがうすく温度伝導率の大きい材料では，前述したように，ほとんど外球かく表面の傾向と同様になり熱衝撃的なものとなるので，強度的には前項の考察結果と同じ内容の結論がえられるとみても良い。周辺流体温度が時間的に変化する条件を導入した熱応力の解析も将来実施する計画ではあるが，現在えられている結果のみでも，表題の考察は十分果されていると考える。

6. 結　　言

非定常熱伝導の条件下における異質二層境界層の熱応力について，その基礎解析解とその数値計算例および，周囲流体温度が時間的に変化する場合の数値解と実験例について述べたが，えられた結論はつぎのとおりである。

(1)　内球および外球かくに使用される材料の組合わせと外球かくの厚さによっては，二層境界層に生じる切線方向の熱応力 σ_t が引張り強さに匹適する値場合があり，強度上問題となることを示した。

(2)　周囲流体温度が時間的に変化する場合も内球および外球かくが (1) で述べたと同様の条件の場合，同じく強度上問題となることがある。

終りに当り，この問題を示唆され，また数々の助言を頂いた九州歯科大学坪根政治教授に厚く謝意を表したい。