

# Observer を用いた場合の制御系の decoupling について

(昭和47年4月28日 原稿受理)

電子工学教室大学院 山 本 正 治  
電子工学教室 上 田 隆 三  
電子工学教室 隈 本 寛

On decoupling of linear multivariable control  
system with observer.

by Masaharu YAMAMOTO  
Ryuzo UEDA  
Yutaka KUMAMOTO

For multivariable systems, it is of interest to know whether or not it is possible to have inputs control outputs independently, i. e., a single input influences a single output. This is the problem of decoupling. There is the system which can be decoupled by state variable feedback but cannot be done by output feedback. In order to decouple such a system, observer is used in this paper.

## 1. ま え が き

多変数制御系において、入力や出力の数が多い場合、1つの入力によって、幾つかの出力が変化して、制御しにくい。そこで、入力と出力の数が同じ場合、1つの入力で1つの出力のみを動かし、他の出力には影響しないようにすると、入力と出力に1対1の対応が付き、制御が容易になる。このような目的から、Morgan, JR<sup>1)</sup>, Falb<sup>2)</sup>, Wolovich<sup>2)</sup>, Gilbert<sup>3)</sup> らは、系を feedback することによって、入力、出力に1対1の対応をつけることを考えている。これを noninteraction とか decoupling とか呼んでいる。しかし、decoupling は入力、出力の数と同じであれば全て可能であるとは限らず、状態変数 feedback すれば可能であるが、出力 feedback では可能でない系もある。そこで、出力 feedback では decoupling できないが、状態変数 feedback では可能である系において、Luenberger<sup>4)</sup> の observer<sup>4) 5) 6)</sup> を用いて、状態変数を出力より復元し、

これを、feedback して、decoupling することを考察し報告する。

## 2. Decoupling について

次のような時不変線形系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $x(t)$  は  $n$  次状態ベクトル

$u(t)$  は  $m$  次制御(入力)ベクトル

$y(t)$  は  $m$  次出力ベクトル

$A, B, C$  は各々、 $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$  行列である。但し、 $m < n$ 。

系(1)に次のような線形状態 feedback を与える。

$$u(t) = Fx(t) + G\omega(t) \quad (2)$$

ここで、 $\omega$  は新しい  $m$  次制御ベクトルで、 $F, G$  は各々、 $m \times n$ ,  $m \times m$  行列で、 $G$  は正則である。

(1), (2) より

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+BF)x(t) + BG\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} (3)$$

となり, この系において,  $\omega_i(t)$  が  $y_i(t)$  のみを制御することを考える. ( $i=1, 2, \dots, m$ )

$d_i$  を次のように定義する.

$$d_i = \min\{j: C_i A^j B \neq 0, j=0, 1, \dots, n-1\}$$

又は,  $C_i A^j B = 0 (j=0, 1, \dots, n-1)$  ならば,

$$d_i = n-1 \quad \text{とする.}$$

ここで,  $C_i$  は行列  $C$  の  $i$  番目の行ベクトルを表わす.

これより, 次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} C_i(A+BF)^k &= C_i A^k, \quad k=0, 1, \dots, d_i \\ C_i(A+BF)^k &= C_i A^{d_i} (A+BF)^{k-d_i} \\ & \quad k=d_i+1, \dots, n \end{aligned} \right\} (4)$$

(3), (4) より

$$\left. \begin{aligned} y_i &= C_i x = C_i (A+BF)^0 x \\ \dot{y}_i &= C_i A x = C_i (A+BF) x \\ & \vdots \end{aligned} \right\}$$

$$L^i(F, G) = \begin{bmatrix} C_i[(A+BF)^{n-1} - P_{n-1}(F)(A+BF)^{n-2} - \dots - P_{d_i+1}(F)(A+BF)^{d_i}]BG \\ C_i[(A+BF)^{n-2} - P_{n-1}(F)(A+BF)^{n-3} - \dots - P_{d_i+2}(F)(A+BF)^{d_i}]BG \\ \vdots \\ C_i[(A+BF)^{d_i}]BG \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\Omega_i$  をその  $i$  番目の行が  $\Omega$  の  $i$  番目の行に等しく, 他は 0 である行列とする. その時,

$$t_r(L^i(F, G)\Omega) = t_r(L^i(F, G)\Omega^i) \neq 0 \quad (10)$$

が,  $i=1, 2, \dots, m$  に対して, 成立するならば, (7) は  $\omega_i$  のみしか現われず,  $F, G$  は系を decoupling していることを示している.

### 3. decoupling 可能性の条件

状態 feedback によって, 系が decoupling されるか否かは, 次の定理によって示される.

定理 1. <sup>2)</sup>  $B^*$  を次で与えられる  $m \times m$  行列とする.

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} y^{(d_i)} &= C_i A^{d_i} x = C_i (A+BF)^{d_i} x \\ y^{(d_i+1)} &= C_i (A+BF)^{d_i+1} x \\ & \quad + C_i (A+BF)^{d_i} B G \omega \\ & \vdots \\ y^{(n)} &= C_i (A+BF)^n x \\ & \quad + C_i (A+BF)^{n-1} B G \omega + \dots \\ & \quad + C_i (A+BF)^{d_i} B G \omega^{(n-d_i-1)} \end{aligned} \right\} (5)$$

Cayley-Hamilton の定理より, 次式が成立つ.

$$(A+BF)^n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(F)(A+BF)^k \quad (6)$$

ここで,  $P_k(F)$  は  $F$  に関係したスカラー定数.

(5) と (6) より,

$$y_i^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(F) y_i^{(k)} = t_r(L_i(F, G)\Omega) \quad (7)$$

ここで,  $t_r(\cdot)$  は行列の trace を表わし,  $\Omega$  は次のような  $m \times n$  行列である.

$$\Omega = [\omega : \dot{\omega} : \dots : \omega^{(n-1)}] \quad (8)$$

$L^i(F, G)$  は  $n \times m$  行列.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}$$

もし,  $\det B^* \neq 0$  ならば, その時に限り, decoupling するような  $F, G$  が存在する.

この時,  $F, G$  は次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} F &= -B^{*-1} A^* \\ G &= B^{*-1} \end{aligned} \right\} (12)$$

ここで,

$$A^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

実際には,  $G = B^{*-1} A$  として, Gain を変えることもできる. 但し,  $A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ .

$F$  については,

$$F = B^{*-1} \left[ \sum_{k=0}^{\delta} M_k C A^k - A^* \right] \quad (14)$$

として、Pole を変えることもできる。

ここで、 $M_k$  は  $m \times m$  の対角行列。  $\delta = \max_i d_i$ 。  
この時、 $G = B^{*-1}$  とすると

$$y^* = \sum_{k=0}^{\delta} M_k y^{(k)} + \omega \quad (15)$$

又は、

$$y_i^{(d_i+1)} = m_0^i y_i + m_1^i y_i + \dots + m_{d_i}^i y_i^{(d_i)} + \omega_i \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$M_k$  を変えることにより、Pole が変化することがわかる。

#### 4. 出力 feedback による decoupling

出力 feedback は状態変数 feedback の特殊な場合である。即ち、

$$u = Hy + G\omega = HCx + G\omega$$

である。

$F$  が  $HC$  に置き換えているから、decoupling が出力 feedback でできるのは次の2つの条件を満足せねばならない<sup>2)</sup>。

- 1)  $B^*$  が正則である。
- 2)  $[Q^i(HC)]$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) の rank が1となるような  $m \times m$  行列  $H$  が存在する。

ここで  $[Q^i(HC)]$  は次のような  $n \times m$  行列。

$$[Q_i(HC)] = \begin{bmatrix} C_i(A+BHC)^{n-1}B \\ C_i(A+BHC)^{n-2}B \\ \vdots \\ C_i(A+BHC)B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

この条件は状態変数 feedback において、 $B^*$  が正則であれば、 $\text{rank}[Q^i(F)] = 1$  ( $i=1, \dots, m$ ) は満たされるから、 $B^*$  が正則であることで十分である。

このように状態変数 feedback によれば decoupling できても、出力 feedback では可能でないことが生じることがある。

#### 5. observer について

一般の系では、状態変数を直接観測できるとは限らず、むしろ、幾つかの出力が観測できるにす

ぎない。しかし、系を制御する場合、出力だけでなく、状態変数を知っていた方が良い制御ができる。そのため、状態を推定することが問題になる。ここでは observer で状態変数を復元する方法を述べる。

#### 6. 全状態変数の復元

次式で与えられる完全可観測系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

もし、 $C$  が正則ならば、 $x(t)$  は  $x(t) = C^{-1}y(t)$  で求められるが、一般には、 $x(t)$  は  $n$  次、 $y(t)$  は  $m$  次で、 $n > m$  であるから、 $C$  は正則ではない。 $n > m$  の場合を考える。

定理 2.<sup>4)</sup> 系  $S_1$  を自由系  $\dot{x} = Ax$  とし、 $x$  によって系  $S_2: \dot{z} = Pz + Qx$  が駆動されているとする。 $A$  と  $P$  の固有値で共通なものがないならば、変換行列  $T$  が存在して、 $z(0) = Tx(0)$  ならば、 $z(t) = Tx(t)$  ( $t \geq 0$ ) である。より一般的には、 $z(t) = Tx(t) - e^{Pt}[z(0) - Tx(0)]$  である。

この定理より、 $e^{Pt} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となるように  $P$  を選べば、 $z = Tx$  となり、 $T$  が正則ならば、 $x$  は  $T^{-1}z$  で与えられ、系  $S_2$  は observer となる。系  $S_1$  が  $\dot{x} = Ax + Bu$  の場合、observer は、

$$\dot{z} = Pz + Qx + TBu \quad (20)$$

となる。observer の入力  $Qx$  には、実際は、 $S_1$  出力  $y$  が入るのであるから、 $Q_1 y = Q_1 Cx = Qx$  となり、 $Q = Q_1 C$  となる。故に、observer は、

$$\dot{z} = Pz + Q_1 y + TBu \quad (21)$$

となり、変換  $T$  は次式を満すものである。

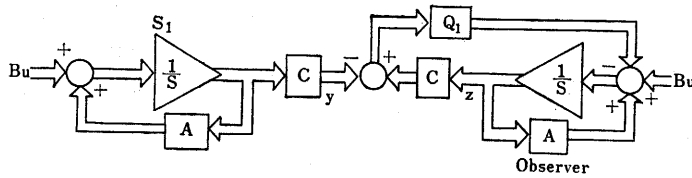
$$TA - PT = Q_1 C \quad (22)$$

ここで、 $T = I$  となるように  $P, Q_1$  を選ぶと、 $z = \hat{x}$  となり、 $z$  は  $x$  を復元する。

この時、(21)、(22) より、observer は次式になる。

$$\dot{z} = Az - Q_1(Cz - y) + Bu \quad (23)$$

これは、系  $S_1$  と全く同じ系である observer に  $(Cz - y)$  を feedback したものである。[Fig. 1]



[Fig. 1]

7. 既約した observer

系によっては、直接、状態変数が出力となっていたり、簡単な操作で状態変数の幾つかを復元できることがあります、この場合、前述の observer を用いると余分なものまで求めることになる。ここでは、 $n$  次系  $S_1$  で出力が1つの場合、 $(n-1)$  次の observer  $S_2$  を考えてみよう。

$S_1$  の出力と共に、 $S_2$  の  $(n-1)$  個の状態変数が1次独立ならば、簡単な行列演算で、 $S_1$  の状態変数を知ることができる。

定理 3.<sup>4)</sup>  $A, P$  を  $n \times n$  行列で、共通の固有値を持たないとする。 $c, b$  は

$$\dot{x} = Ax, y = c'x \text{ は完全可観測。}$$

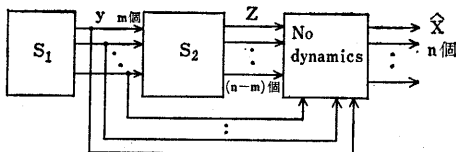
$\dot{z} = Pz + bv$  は完全可制御となる  $n \times 1$  行列とする。 $T$  を  $TA - PT = bc'$  の1意的な解とすると  $T$  は正則である。

定理 4.<sup>4)</sup>  $S_1: \dot{x} = Ax, y = c'x$  を  $n$  次完全可観測とする。 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  を  $A$  の固有値とは異なり、互いに異なった複素数とする。

$(n-1)$  個の  $\mu_i$  を遷移行列の固有値とする  $(n-1)$  次の observer を構成することができる。

出力が  $m$  個である場合、次の定理が成立し、出力の数が多い程、簡単な observer となることを示している。

定理 5.<sup>4)</sup>  $S_1$  を完全可観測な  $n$  次系で、出力が  $m$  個 (独立) であるとする、observer  $S_2$  は  $(n-m)$  次で良い。



[Fig. 2]

8. observer を用いた decoupling

次式で表わされた制御系を考える。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (24)$$

ここで、各ベクトルの次数は系 (1) と同じである。

この系において、decoupling するような  $F$  及び  $G$  が求まったとする。この時 feedback する状態変数は observer により推定された  $\hat{x}(t)$  を用いると、 $u(t)$  は次式となる。

$$u(t) = F\hat{x}(t) + G\omega(t) \quad (25)$$

(25) を (24) に代入する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BF\hat{x}(t) + BG\omega(t) \\ &= (A + BF)x(t) + BG\omega(t) + BF(\hat{x}(t) - x(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

これを Laplace 変換する。

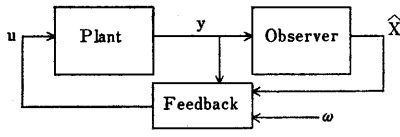
$$x = (SI - A - BF)^{-1}BG\omega + (SI - A - BF)^{-1}BF(\hat{x} - x) \quad (27)$$

$$y = Cx = C(SI - A - BF)^{-1}BG\omega + C(SI - A - BF)^{-1}BF(\hat{x} - x) \quad (28)$$

(28) 式の右辺第1項目は、 $y$  と  $\omega$  について、decoupling された関係であり、第2項目は、observer による推定誤差である。誤差  $(\hat{x} - x)$  は、定理2によって、 $z(0) = Tx(0)$  となるように選べば、0であり、初期値の与え方が悪くても、observer によって0に収束させることができる。それ故、 $C(SI - A - BF)^{-1}BF$  を安定になるように選んでおけば、十分、時間がたつと、(28) は次式となる。

$$y = C(SI - A - BF)^{-1}BG\omega \quad (29)$$

これは、系 (24) が decoupling されたことを



[Fig. 3]

示している。

## 9. 例題

Plant:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この系は状態変数 feedback によって, decoupling される。

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}: \text{正則}$$

(14) において,  $M_0, M_1$  を次のように選ぶ。

$$M_0 = M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$G = B^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

これより,

$$C(SI - A - BF)^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S^2 + S + 1} \end{bmatrix}$$

$$C(SI - A - BF)^{-1}BF$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & -\frac{1}{S} & 0 \\ 0 & \frac{4}{S^2 + S + 1} & \frac{-7}{S^2 + S + 1} \end{bmatrix}$$

次に observer によって状態変数の復元を考える。この系で  $y_1 = x_1, y_2 = x_3$  となっているから,  $x_2$  の推定  $\hat{x}_2$  のみで良いことになり,  $y_1 = x_1$  を用いて, 1次の observer を考える。

observer の Pole を  $-3$  とする。

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[t_1, t_2] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 3[t_1, t_2] = [10]$$

これを解くと,  $[t_1, t_2] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$  を得る。故に observer の方程式は, 次式となる。

$$\dot{z} = -3z + x_1 + u_1$$

$$z = Tx = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

$$\therefore x_2 = x_1 - 2z$$

これが推定値  $\hat{x}_2$  となる。

又,  $\hat{x}_1 = x_1, \hat{x}_3 = x_3$  である。

$$\hat{x}_2 - x_2 = \{2z(0) + x_2(0)\}e^{-3t}$$

これらより, 次の結果が得られる。

$$y_1 = \frac{1}{S}\omega_1 - \frac{1}{S(S+3)}(2z(0) + x_2(0))$$

$$y_2 = \frac{1}{S^2 + S + 1}\omega_2 + \frac{4}{(S^2 + S + 1)(S + 3)}(2z(0) + x_2(0))$$

これは  $y_1$  が  $\omega_1$  に,  $y_2$  が  $\omega_2$  に制御されることを示している。

## 10. 結論

以上の結果から, observer を用いて decoupling が可能であることが示された。これをまとめると次のようになる。

1) 元の系は, 状態変数 feedback によって decoupling できること。

2) 元の系は, 完全可観測であること。

今後の問題点として, Pole の設定や大規模系 Multilevel 系の decomposition への応用などが考えられる。

## 謝辞

この研究にあたり, ご討論いただいた本学高田茂夫教授に深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) B. S. Morgan, JR : The Synthesis of Linear Multivariable Systems by State-Variable Feedback. IEEE. AC-9 October 1964
- 2) P. L. Falb and W. A. Wolovich : Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE. AC-12. December 1967
- 3) E. G. Gilbert : The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback. SIAM J. Control Vol-7 February 1969
- 4) D. G. Luenberger : Observing the State of a Linear System. IEEE MIL-8 April 1964
- 5) D. G. Luenberger : Observers for Multivariable Systems. IEEE AC-11 April 1966
- 6) A. P. Sage : Optimum Systems Control. PRENTICE-HALL, INC. Chap. 11 1968