線形制御系における Extended Decoupling Problem と補償について

（昭和47年10月19日　原稿受理）

電子工学教室大学院　山本正治
電子工学教室　上田隆三
電子工学教室　隈本寛

On extended decoupling problem and precompensation for linear control systems

by Masaharu YAMAMOTO
Ryuzo UEDA
Yutaka KUMAMOTO

For multivariable systems, it is an interesting problem to decouple them, since it seems an easy control. A necessary and sufficient condition for decoupling by static feedback was given by Falb and Wolovich. Systems which do not satisfy this condition, but are invertible, can be decoupled by dynamic precompensators. Algorithms for decoupling invertible systems and equivalency between extended decoupling problem and dynamical precompensation, are presented in this paper.

1. まえがき

古典的な制御系では，一般に1入力一1出力であるが，現代的な制御になると，多入力一多出力の制御系が一般的となり，それらの間に状態変数と呼ばれる変数が存在し，それが互に干渉し合っているため，1つの入力によって，いくつかの出力が変化することになり，出力の制御が困難な場合が多い。例えば制御対象が飛行機の場合を考えると，方向変換のために，方向舵のみを動かしたとすると，そのために，速度，高度などの変化が伴うことになる。このようなことを考えると，1つの入力で，1つの出力を制御することが望ましいことがわかる。このようなことから，状態変数を feedback することによって，入力と出力とを1対1に対応づける問題が生じて来た。これが，decoupling problem である。Falb, Wolovich[1]らは，decoupling 可能性の必要十分条件を代数的に確立させ，Wonham[2)3)]は幾何学的方法により，これを考えた。又，今までの静的な feedback では decoupling できなくても，動的な補償器を用いることにより，decoupling できることも示された。この場合，補償器の次数を最小にすることが問題となって来た。出力 feedback による decoupling は observer[4)] を用いることで，状態 feedback となるから，ここでは，すべて，状態 feedback で考えることにする[5)]。

2. Restricted Decoupling Problem (RDP)

次のような時不変線形系を考える。

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここで，

$x(t)$ は n 次状態ベクトル
$u(t)$ は m 次制御ベクトル
$y(t)$ は m 次出力ベクトル

A, B, C は各々，$n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ 行列であ

る。但し，$m \leq n$ とする。

系 (1) に次のような線形状態 feedback を与える。

$$u(t)=Fx(t)+G\omega(t) \tag{2}$$

ここで，ω は新しい m 次入力ベクトルで，F, G は各々，$m\times n$, $m\times m$ 行列で，G は正則である。

(2) 式のような静的な feedback によって，decoupling する問題を Restricted Decoupling Problem と言う。

(1)，(2) より，系は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\mathring{x}(t)&=(A+BF)x(t)+BG\omega(t)\\ y(t)&=Cx(t)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

この系において，ω_i と y_i に1対1の対応がつくような F と G を定めることが，RDP の課題である。但し，ω_i, y_i は各々，ω, y の成分である。$(i=1, 2, \cdots, m)$

d_i, B^*, A^* を次のように定義する。

$d_i=\min\{j: C_iA^jB\neq 0,\ j=0,1,\cdots,n-1\}$

$C_iA^jB=0(j=0,1,\cdots,n-1)$ ならば，

$d_i=n-1$ とする。$(i=1,2,\cdots,m)$

ここで C_i は行列 C の i 番目の行ベクトルを示す。

$$B^*=\begin{pmatrix}C_1A^{d_1}B\\ C_2A^{d_2}B\\ \vdots\\ C_mA^{d_m}B\end{pmatrix}\quad (m\times m)\ 行列$$

$$A^*=\begin{pmatrix}C_1A^{d_1+1}\\ C_2A^{d_2+1}\\ \vdots\\ C_mA^{d_m+1}\end{pmatrix}\quad (m\times n)\ 行列$$

この時，RDP は次の定理で示される。

定理1 (Falb, Wolovich)[1]

B^* が正則ならば，その時に限り，decoupling するような F, G が存在する。

この時，F, G は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}F&=-B^{*-1}A^*\\ G&=B^{*-1}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

実際には，$G=B^{*-1}\Lambda$ として，gain を変えることができる。但し，$\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]$。

F については，

$$F=B^{*-1}\left[\sum_{R=0}^{\delta} M_RCA^R-A^*\right] \tag{5}$$

として，Pole を変えることができる。

ここで，M_k は $m\times m$ の対角行列。

$$\delta=\max_i d_i$$

以上のようにして，decoupling を行ない，Laplace 変換した形で表わすと次のようになる。

$$\begin{pmatrix}y_1(s)\\ y_2(s)\\ \vdots\\ y_m(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_1(s) & & & \\ & H_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_m(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1(s)\\ \omega_2(s)\\ \vdots\\ \omega_m(s)\end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで，$H_i(s)$ は $y_i(s)$ と $\omega_i(s)$ の間の伝達関数である $(i=1,2,\cdots,m)$。

伝達関数の行列が対角形になることから，このような decoupling を diagonal decoupling と言う。他にも，triangular decoupling[A-1], group decoupling[A-2] などもある。

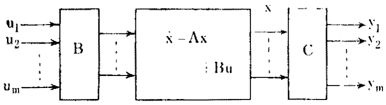

Fig. 1 系 (1) (Plant)

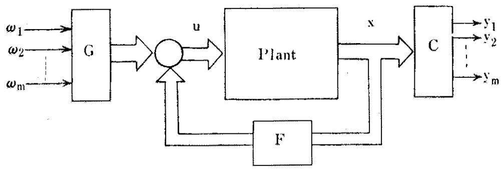

Fig. 2

3. 前段補償器による decoupling

系 (1) において，B^* が正則ならば，状態ベクトルを feedback することによって decoupling は可能であるが，B^* が正則でない時，(2) のような feedback では decoupling できないので，これを適当な前段補償器によって，decoupling することを考える。

Gilbert[6] による分類

系の伝達関数行列 $H(s)=C(sI-A)^{-1}B$ によって次のようになる。

i) No inherent coupling: det $B^*\neq 0$

ii) Weak inherent coupling: det $B^*=0$, det $H(s) \neq 0$

iii) Strong inherent coupling: det $B^*=0$, det $H(s)=0$

i) は明らかに状態 feedback によって，decoupling できる場合であり，ii) 及び iii) は decoupling できない場合である。しかし，det $H(s) \neq 0$ の場合は，理論的には，それに対応する inverse system が存在するから，そのような系を結合することにより，入力，出力に1対1の対応をつけることができる[7]。なぜなら，そのような系の inverse system の伝達関数行列は $H(s)^{-1}$ であるから，合成の伝達関数行列 $K(s)$ は $K(s)=H(s)\cdot H(s)^{-1}=I$ となり，これは対角形であるから，入力，出力に1対1の対応がつくことになる。しかし，現実には，$H(s)^{-1}$ はその行列の各成分の分子の次数が分母の次数以上になっているから，実現不可能であり，又，極が右半平面上に存在するおそれもある。

上に述べたことから，$H(s)^{-1}$ に相当する実現可能なものを考える。

$H(s)^{-1}$ を次のように書く。

$$H(s)^{-1} = M(s)/m(s) \tag{7}$$

$M(s)$: 各成分が η 次以下の s の多項式である行列 $(m \times m)$。

$m(s)$: ρ 次の多項式 $(\eta > \rho)$。

$m(s)$ を2つの積に分割する。

$$m(s) = m_1(s)m_2(s) \tag{8}$$

$m_1(s)$: 非正の実部を持つ根を全て含む ρ_1 次多項式。

$m_2(s)$: ρ_2 次多項式。

$m_3(s)$ を $(\eta+\rho_2-\rho_1)$ 次の多項式で，その根の実部は全て非正であるとする。

$$G(s) = \frac{m_2(s)}{m_3(s)}H(s)^{-1}$$

$$= \frac{m_2(s)}{m_3(s)} \cdot \frac{1}{m_1(s)m_2(s)}M(s)$$

$$= \frac{1}{m_1(s)m_3(s)}M(s) \tag{9}$$

とすると，$G(s)$ は全て左半平面に極を持ち，その各成分は全て (分母の次数)≧(分子の次数) であるから，実現可能である。この $G(s)$ を用いて，次のように $u(s)$ を補償する。

$$u(s) = G(s)\omega(s) \tag{10}$$

(10) を系 (1) に接続すると，その合成伝達関数行列 $K(s)$ は次式となる。

$$K(s) = H(s)G(s) = \frac{m_1(s)}{m_3(s)}I \tag{11}$$

これより，$K(s)$ が安定で，対角形になっていることがわかる。

設計の仕方から明らかなように，$G(s)$ の gain と $m_3(s)$ の選択により，gain と pole の設定が行なえる。以上のことを，Extended Decoupling Problem (EDP)[A-3] 方式で書くと次のようになる。

元の系は

$$\left.\begin{aligned} \mathring{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

補償器の dynamic equation を次式とする。

$$\left.\begin{aligned} \mathring{v}(t) &= \tilde{A}v(t)+\tilde{B}\omega(t) \\ u(t) &= \tilde{C}v(t)+\tilde{D}\omega(t) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(1′), (12) より，

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathring{x} \\ \mathring{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B\tilde{C} \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B\tilde{D} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}\omega \\ y &= [\,C \;\; 0\,]\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\frac{y(s)}{\omega(s)} = [\,C \;\; 0\,]\begin{pmatrix} sI_n-A & -B\tilde{C} \\ 0 & sI_e-\tilde{A} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B\tilde{D} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$$

$$= C(sI_n-A)^{-1}B[\tilde{C}(sI_e-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D}] \tag{15}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} H(s) &= C(sI_n-A)^{-1}B \\ G(s) &= \tilde{C}(sI_e-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

であるから，(15) 式は $K(s)=H(s)G(s)$ となっていることを示している。

4. 例　　題

次のような系を考えてみる。

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

この系におけるB^*は正則でないから状態 feedback によって decoupling できない。

伝達関数行列は次のように正則である。

$$H(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2}&\dfrac{1}{s}\\ \dfrac{1}{s^2}&\dfrac{1}{s^2}\end{pmatrix}$$

故に,

$$H(s)^{-1}=\begin{pmatrix}s^2&-s^3\\-s^2&s^3+s^2\end{pmatrix}=M(s)$$

$$m(s)=1\ ,\ (m_1(s)=m_2(s)=1)$$

$$m_3(s)=a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4$$

とすると,

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s^2}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}&\dfrac{-s^3}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}\\ \dfrac{-s^2}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}&\dfrac{s^3+s^2}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}\end{pmatrix}$$

$$K(s)=H(s)G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}&0\\ 0&\dfrac{1}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}\end{pmatrix}$$

これで, decoupling されていることがわかる。

以上の方法では, $G(s)$ がかなり複雑であるが, 例えば, $a_3=a_4=0$ とすることによって,

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a_1s+a_2}&\dfrac{-s}{a_1s+a_2}\\ \dfrac{-1}{a_1s+a_2}&\dfrac{s+1}{a_1s+a_2}\end{pmatrix}\qquad(19)$$

となり, $G(s)$ の次数が下がることがわかる。しかし, 合成の $K(s)$ は3次であり, まだ複雑である。

5. 低次の補償器

補償器の次数は一般に低い方が良いから, 前の例題について, 低い次数の補償器を考えてみる。

$$G(s)=\begin{pmatrix}a(s)&b(s)\\c(s)&d(s)\end{pmatrix}$$

なる補償器を結合したとすると, 合成の $K(s)$ は,

$$K(s)=H(s)G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s^2}a(s)+\dfrac{1}{s}(a(s)+c(s))\ ,&\dfrac{1}{s^2}b(s)+\dfrac{1}{s}(b(s)+d(s))\\ \dfrac{1}{s^2}(a(s)+c(s))\ ,&\dfrac{1}{s^2}(b(s)+d(s))\end{pmatrix}$$

これを対角形とせねばならないから,

$$\frac{1}{s^2}b(s)+\frac{1}{s}(b(s)+d(s))=0\qquad 条件\ (1)$$

$$\frac{1}{s^2}(a(s)+c(s))=0\qquad 条件\ (2)$$

$G(s)$ の次数をなるべく, 低くすることから, $a(s)=1$, $c(s)=-1$ とすれば, 条件 (2) は満たされる。条件 (1) は

$$\frac{d(s)}{b(s)}=-\left(1+\frac{1}{s}\right)$$ となり,

$b(s)=1$ とすれば,

$$d(s)=-\left(1+\frac{1}{s}\right)$$ となる。

この時の $G(s)$ は次のようになる。

$$G(s)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-\dfrac{s+1}{s}\end{pmatrix}\qquad(17)$$

これによる合成の $K(s)$ は次のようになる。

$$K(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^3} \end{pmatrix} \tag{18}$$

(16) と (17) を比較すると，(17) の方が簡単なことがわかる。そこで，(17) の補償器と，それを結合した系を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{s+1}{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$u_1=\omega_1+\omega_2$$

$$u_2=-\omega_1-\frac{s+1}{s}\,\omega_2=-\omega_1-\omega_2-\left(\frac{1}{s}\right)\omega_2$$

$\frac{1}{s}\omega_2=x_5$ とすると，$\dot{x}_5=\omega_2$ となり，

故に，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}x_5 \tag{19}$$

となる (Fig. 3)。

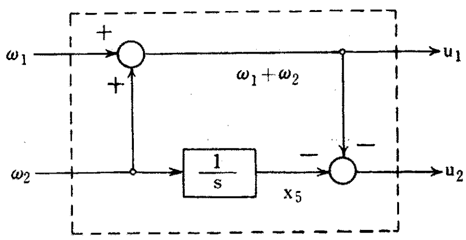

Fig. 3 補償器 $G(s)$

次に，これを (12) の形に書き改ためて，EDP の形で，解いてみる。

(19) 式において，$x_5=v$ とすると，

$$\left.\begin{aligned} \mathring{v}&=[\,0 \quad 1\,]\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}v+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

となり，

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{A}=0 \qquad \tilde{B}=[\,0 \quad 1\,] \\ &\tilde{C}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

となる。これを，(13) 式に適用すると，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathring{x}_1 \\ \mathring{x}_2 \\ \mathring{x}_3 \\ \mathring{x}_4 \\ \hline \mathring{x}_5 \end{pmatrix}&=\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline x_5 \end{pmatrix}+\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}&=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline x_5 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(22) 式を

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\omega$$

$$y=\bar{C}\bar{x}$$

と考えて，B^* を計算すると，

$$\bar{B}^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となって，decoupling でき，既に，$\bar{F}=0$, $\bar{G}=I_2$ で，decoupling できているのである。実際，伝達関数行列を計算すると，

$$\bar{C}(SI_5-\bar{A})^{-1}\bar{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^3} \end{pmatrix}$$

となり，これは，(18) 式と一致する。

もちろん，Pole 設定のために，(5) 式で示されるような feedback を与えても良い。

6. 結　　論

以上の結果から，dynamic な補償器によって，静的 feedback で decoupling 不可能なものが，可能となる場合のあることが示された。そして，dynamic な補償器と，ＥＤＰとは等価であることがわかり，拡張するならば，observer の使用もＥＤＰとなるであろう。

ここで述べた方法では，系の次数が大きくなると，簡単ではなくなるが，伝達関数行列が正則で

あれば，必ず decoupling 可能であり，系の分解によって，かなり制御が容易になると思われる。

参考文献

1) P. L. Falb and W. A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE. AC-12, 651-659, Dec. 1967
2) W. M. Wonham and A. S. Morse: Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems, A geometric approach: SIAM. Vol. 8, No. 1, 1-18, Feb. 1970.
3) A. S. Morse and W. M. Wonham: Status of Noninteracting Control: IEEE. AC-16. 568-581. Dec. 1971.
4) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems: IEEE. AC-11, 190-197. Apr. 1966.
5) 山本，上田，限本：Observer を用いた場合の制御系の decoupling について：九州工大研究報告，第25号，23-28，昭和47年6月
6) E. G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback: SIAM, Vol. 7, 50-63, Feb. 1969.
7) L. M. Silverman: Decoupling with State Feedback and Precompensation: IEEE. AC-15, 487-489, Aug. 1970.

付　　録

A-1) triangular decoupling

伝達関数行列が三角形になることを言う。

即ち，

$$C(SI-A-BF)^{-1}BG=\begin{pmatrix} h_{11}(s) & & 0 \\ h_{21}(s) & \ddots & \\ \vdots & & \\ h_{m1}(s) & \cdots & h_{mm}(s) \end{pmatrix}$$

A-2) group decoupling

入力と出力の差が一般に異なる場合，グループに分けること。

即ち，伝達関数行列は次のようになる。

$$C(SI-A-BF)^{-1}BG=\begin{pmatrix} H_1(s) & & & \\ & H_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_m(s) \end{pmatrix}$$

A-3) Extended Decoupling Problem (EDP)

静的な feedback によって，deoupling できない場合，状態変数空間を拡大して考える。即ち，系の方程式は (13) 式のようになり，元の状態空間を $\mathfrak{X}$，拡張部分を $\tilde{\mathfrak{X}}$ とすると，全体の状態空間 $\overline{\mathfrak{X}}$ は，$\overline{\mathfrak{X}}=\mathfrak{X}\oplus\tilde{\mathfrak{X}}$ となる。この場合，$\tilde{\mathfrak{X}}$ の次数をなるべく小さくすることが問題となる。$\tilde{\mathfrak{X}}$ が最小である時，minimal extension と言う。例題の (22) 式は，拡張された部分が1次であるから，minimal extension と言うことになる。