

## しぼり形瞬時流量計の軸対称理論

(昭和48年5月15日 原稿受理)

機械工学教室 松 永 成 徳  
 機械工学教室(大学院) 黒 川 大 介

Theoretical Study On Measurement Of Pulsating  
Flow By Flow Nozzle

by Shigenori MATSUNAGA  
 Daisuke KUROKAWA

The difficulties in the measurement of pulsating flow are caused, first, by the effect of inertial term and the non-linearity between the flow velocity and the differential head in the pressure equation, second, by the change in velocity distribution over the cross-section with respect to time due to unsteady viscous effect.

In this report the numerical estimation of the effect of pulsation on a differential head of a flow nozzle is illustrated in the form of the distortion of out-put corresponding to sinusoidal change of flow with respect to time. We propound a theoretical treatment to eliminate the inertial terms existing in two pressure equations, and we demonstrate that the instantaneous and mean rate of flow is reasonably attained from the record of differential heads.

## 1. ま え が き

管路内の流れは圧力変動あるいは脈動を伴う場合が多く、特に最近流体機械や流体輸送系の動力増大によって、非定常性の影響が本質的な問題として重要視され、その計測に関する研究も多くなった<sup>1)</sup>。

われわれはすでに脈動する管内流量の一計測法として、非定常、非圧縮、一次元流れの理論をベンチュリ流量計に適用し、ベンチュリ水頭用測圧孔のほかに、その中間位置に測圧孔をもうけて、3個の圧力からえられる2個の瞬時差圧から、脈動流量の瞬時値、流れの加速度を求める方法を示し<sup>2)</sup>、さらにしぼり形流量計と高速応答性の圧力変換器の使用により、非定常流量式の普遍的適用性と実用性を実験的に確認した<sup>3)</sup>。

しかし上記の方法は一次元理論によるもので、しぼり角が大になると流速分布や、等圧面の曲率による誤差が大きくなる。

本報告は原理的には前述の2個の瞬時差圧を利

用し、理論的には軸対称理論を適用することにより適用範囲を拡大し、円錐形しぼりの形状寸法と流量脈動および差圧との関係を理論計算した結果について述べるものである。

## 2. 記 号

- $A$  面積
- $A_R$  球面の部分面積
- $B$  任意関数
- $D$  直径
- $E$  平方根誤差
- $f$  周波数
- $g$  重力の加速度
- $h$  差圧水頭
- $i$  高調波の次数
- $K$  しぼり形流量計の形状パラメータ
- $L$  同上
- $N$  高調波最高次数
- $o$  座標原点
- $p$  圧力

- $Q$  体積流量  
 $Q'$  三次元吸込みの強さ  
 $\bar{Q}$  時間平均流量  
 $\dot{Q}$  流量の時間変動率  
 $q$  脈動流無次元振幅  
 $R$  球半径  
 $S_r$  Strouhal 数  
 $T$  周期  
 $t$  時間  
 $u$   $z$  軸に直交する面内での平均流速  
 $v$  流速  
 $z$  しぼり流量計の軸方向座標軸  
 $\gamma$  流体の単位体積重量  
 $\theta$  円錐形しぼり流路の二次元細まり角  
 $\theta$  位相差  
 $\rho$  流体の密度  
 $\phi$  速度ポテンシャル  
 $\varphi$  位相角  
 $\Omega$  立体角  
 $\omega$  角速度

添字

- 1, 2, 3, 流れの上流から下流への半径位置を示す

### 3. 円錐形しぼり流路における非定常、非圧縮軸対称ポテンシャル流れ

脈動する流れの瞬時流量およびその時間平均の測定を目的として、非圧縮軸対称三次元ポテンシャル流れを円錐形流路に適用し、壁面圧力と流量およびその変動との関係式を導く。

図1のように  $z$  軸の原点 0 に三次元吸込み  $Q'$  があるときの速度ポテンシャル  $\phi$  および流速  $v_r$  は

$$\phi = \frac{Q'}{4\pi R} \quad (1)$$

$$v_r = \frac{Q'}{4\pi R^2} \quad (2)$$

で与えられる。

$\theta$  は立体角  $\Omega$  をなす円錐面と子午面の交線が作る平面角とする。

圧力方程式および連続の式はつぎのようになる。

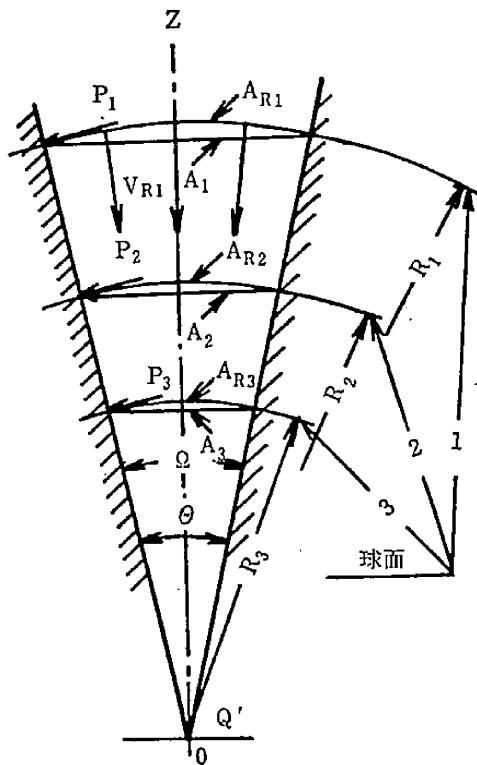


図1 しぼり流量計における理論モデル

$$p/\rho + gz + v_r^2/2 + \partial\phi/\partial t = B(t) \quad (3)$$

$$-Q = A_{R1}V_{R1} = A_{R2}V_{R2} = A_{R3}V_{R3} = A_R V_R \quad (4)$$

式(2)と式(4)より吸込み  $Q'$  と流量  $Q$  との関係はつぎのとおりである。

$$Q = -Q'\Omega/(4\pi) \quad (5)$$

以上の関係から、半径  $R_1, R_2, R_3$  における面積  $A_{R1}, A_{R2}, A_{R3}$  の部分球面について、面1より2ならびに面2より3にいたる流線上の二つの区間について圧力方程式をつぎのように書くことができる。

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{V_{R1}^2 - V_{R2}^2}{2} - \dot{Q} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_3) + \frac{V_{R2}^2 - V_{R3}^2}{2} - \dot{Q} \left[ \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right] = 0 \quad (7)$$

さらに流路の寸法定数を式 (8), 圧力ヘッドと位置ヘッドをまとめて式 (9) のように表わせれば, 式 (6), (7) は式 (10), (11) のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} K_{12} &= (A_{R1}^2 - A_{R2}^2) / (A_{R1} A_{R2})^2 \\ &= (R_1^2 - R_2^2) / (\Omega^2 R_1 R_2^2) \\ K_{23} &= (A_{R2}^2 - A_{R3}^2) / (A_{R2} A_{R3})^2 \\ &= (R_2^2 - R_3^2) / (\Omega^2 R_2^2 R_3^2) \\ L_{12} &= \frac{2}{\Omega} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \\ L_{23} &= \frac{2}{\Omega} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \\ h_{12} &= (p_1 - p_2) / \gamma + z_1 - z_2 \\ h_{23} &= (p_2 - p_3) / \gamma + z_2 - z_3 \\ 2gh_{12} - K_{12} Q^2 - L_{12} \dot{Q} &= 0 \\ 2gh_{23} - K_{23} Q^2 - L_{23} \dot{Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式 (10), (11) より  $\dot{Q}$  の項を消去すれば  $Q$  が,  $Q$  の項を消去すれば  $\dot{Q}$  が, それぞれ式 (12), (13) で求められる。

$$Q = \sqrt{2g/K_L} (L_{23} h_{12} - L_{12} h_{23})^{1/2} \quad (12)$$

$$\dot{Q} = -(2g/K_L) (K_{23} h_{12} - K_{12} h_{23}) \quad (13)$$

ただし  $K_L = K_{12} \cdot L_{23} - K_{23} L_{12}$  である。

以上によって, 二組の差圧  $h_{12}$  および  $h_{23}$  の時系列データと式 (8) の寸法定数をもちいて, 瞬時流量ならびに流量の時間変動率  $\dot{Q}$  を知ることができる。

このような二組の差圧による方式を仮に二差圧方式, 従来定常流れの流量式に使用されている一組の差圧による方式を一差圧方式と称しておく。

なお脈動流量の計測原理として二差圧方式を採用すればよいことを円錐形しほり流路の速度ポテンシャルを利用して提示したが, この考え方は流路形状が異なる場合でも  $\phi$  が求まれば適用できる。

なお流れが定常であるときは式 (13) の  $\dot{Q} = 0$  を満たす条件  $h_{12}/h_{23} = K_{12}/K_{23}$  により流量式 (12) は  $h_{12}$  あるいは  $h_{23}$  のいずれか一つで表示され, 一差圧方式となり式 (12) は非定常, 定常両状態に使用出来る一般式といえる。

#### 4. しほり形流量計の動特性

しほり形流量計の非定常問題についてはその壁面圧力自体が加速度や流速分布の影響を受け, さらに圧力計測法も多くの問題があると指摘されている。またしほり形流量計における Strouhal 数は, 正弦的流量変動に対する  $h_{12}$  あるいは  $h_{23}$  の応答に対し, 位相差を生ずる要因となり, その位相差を一つの限界値以内にするには, しほり形流量計の形状に応じて Strouhal 数の限界値をこえてはならない<sup>4)</sup>。

ベンチュリ管やノズルは精度の高い流量計であり<sup>5)</sup>, 非定常誤差を無視出来るような方式の適用が望まれる。

ここでは正弦的な流量変動を入力, しほり形流量計の壁面差圧を出力と見たときのゲイン, および位相特性すなわち, 一次計器の動特性について考える。

##### 4-1. 一差圧方式

この場合は文献 (4) に示されているとおりであるが, あとで述べる二差圧方式との比較のため, 式 (10) の応答性を調べてみる。

流量  $Q$  がその時間平均値  $\bar{Q}$  に対して周期的に変動する場合つぎのように書ける。

$$Q = \bar{Q} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N q_i \sin(i\omega t + \varphi_{i-1}) \right\} \quad (15)$$

その変動率  $\dot{Q}$  は

$$\dot{Q} = \bar{Q} \left\{ \sum_{i=1}^N i\omega q_i \cos(i\omega t + \varphi_{i-1}) \right\} \quad (16)$$

ここに  $i$  は高調波成分をしめし,  $i = 1$  は基本波である。

式 (15), (16) を式 (10) に入れるとつぎの式をうる。

$$\begin{aligned} 2gh_{12} &= K_{12} \bar{Q}^2 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N q_i \sin(i\omega t + \varphi_{i-1}) \right\}^2 \\ &\quad + L_{12} \bar{Q} \left\{ \sum_{i=1}^N i\omega q_i \cos(i\omega t + \varphi_{i-1}) \right\} \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} 2gh_{12} &= K_{12} \bar{Q}^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N q_i \sqrt{\left( \frac{i\omega L_{12}}{K_{12} \bar{Q}} \right)^2 + 4} \right. \\ &\quad \times \sin(i\omega t + \varphi_{i-1} + \theta_{i-1}) \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^N q_i \sin(i\omega t + \varphi_{i-1}) \right\}^2 \right] \quad (17) \end{aligned}$$

$$\tan\theta_{i-1} = \frac{i\omega L_{12}}{2K_{12}Q} \quad (18)$$

したがって  $h_{12}$  には位相および波形歪が生じ、瞬時流量を  $h_{12}$  より求めることは困難である。

式 (17) と式 (15) の二乗との比をとりこれを  $1+d_i$  とおき、 $d_i$  を二乗歪率と定義すれば  $d_i$  の最大値はつぎのようになる。

$$d_{i\max} = \frac{iL_{12}\omega}{K_{12}Q} F(q_i) \quad (19)$$

$$F(q_i) = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{1+8q_i^2}-1-2q_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\{3-(1+8q_i^2)^{\frac{1}{2}}\}^2} \quad (20)$$

式 (17) を基本波の 1 周期にわたり平均すれば

$$2g\bar{h}_{12} = K_{12}\bar{Q}^2 \left\{ 1 + (1/2) \sum_{i=1}^N q_i^2 \right\} \quad (21)$$

となり平方根誤差は

$$E = \left( 1 + (1/2) \sum_{i=1}^N q_i^2 \right) - 1 \quad (22)$$

となる。

図 2 は正弦的な脈動流量と対応する差圧の変動状態を無次元化して示したものである。出力波形が大きな歪率を示すことがわかる。

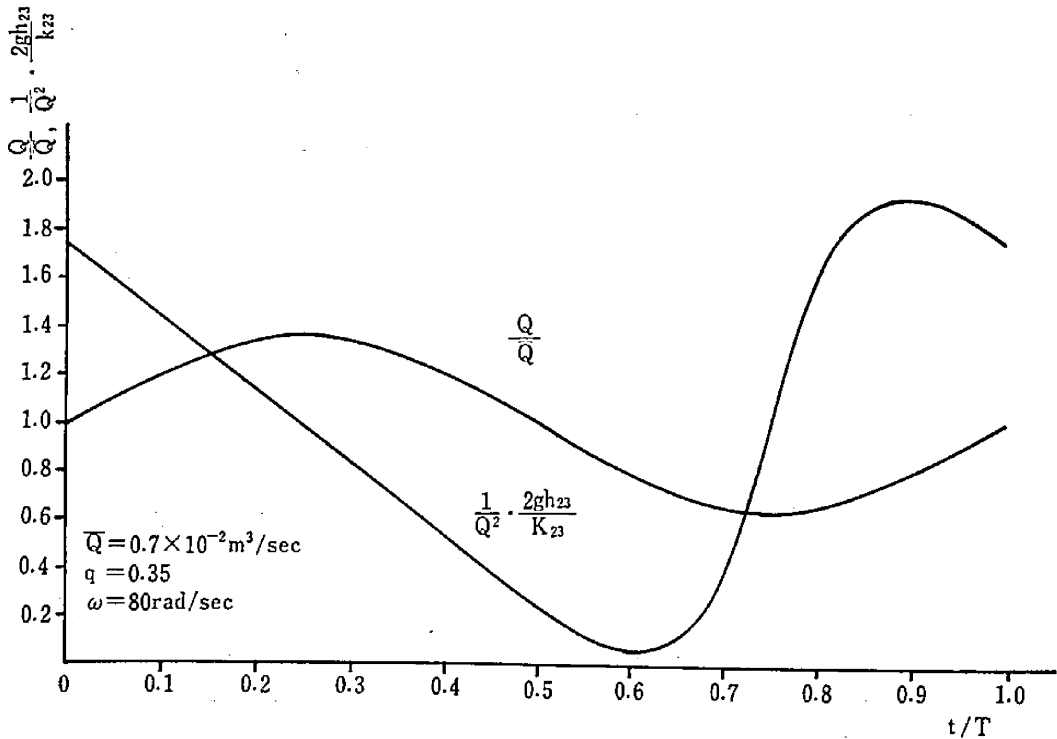


図 2 二乗歪率  $d$  の時間的变化

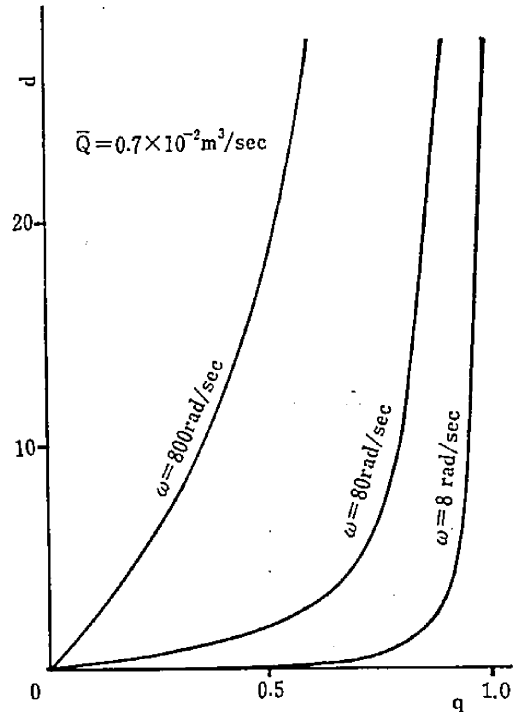


図 3  $q$  及び  $\omega$  の最大歪率  $d$  に及ぼす影響

図 3 は  $2gh_{23}/(K_{23}Q^2)$  すなわち出力歪値の二乗

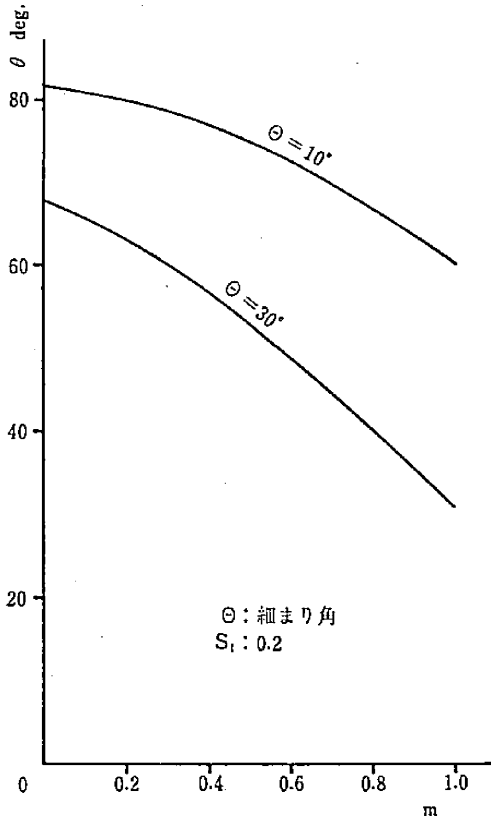


図4 直径比  $m$  と位相差  $\theta$  の関係

の極大値が脈動流量振幅  $q$  によって変化する状態を示し、また脈動角速度によって増大する様子を示している。

つぎに流路形状の影響を考える。

常用の寸法記号を導入するため、 $A_2 = \pi D_2^2/4$ 、 $\bar{u}_2 = \bar{Q}/A_2$ 、 $\bar{V}_{R2} = \bar{Q}/A_{R2}$ 、 $n = \omega/2\pi$ 、 $S_1 = nD_2/\bar{u}_2$  とおき位相角の正接を求めるとつぎのようになる。

$$\tan\theta = \frac{L_{12}i\omega}{2K_{12}\bar{Q}} = \frac{4\pi}{(1+m^2)(1+m)} \cdot \times \frac{\sin^2(\theta/4)}{\sin^3(\theta/2)} \cdot S_1 \quad (23)$$

ここに  $m = D_2/D_1$  である。

$\theta$  と幾何学的形状  $\theta$ 、 $m$  との関係を示すため  $f(\theta) = \sin^2(\theta/4)/\sin^3(\theta/2)$  とおけば、 $0 < \theta < 120^\circ$  に対して  $\theta$  が増すと  $f(\theta)$  は減少するから図4に示すように  $m$  が一定で  $\theta$  が増すと  $\theta$  も減少し  $\theta$  が一定のときは、 $m$  の増大により  $\theta$  は減少することがわかる。

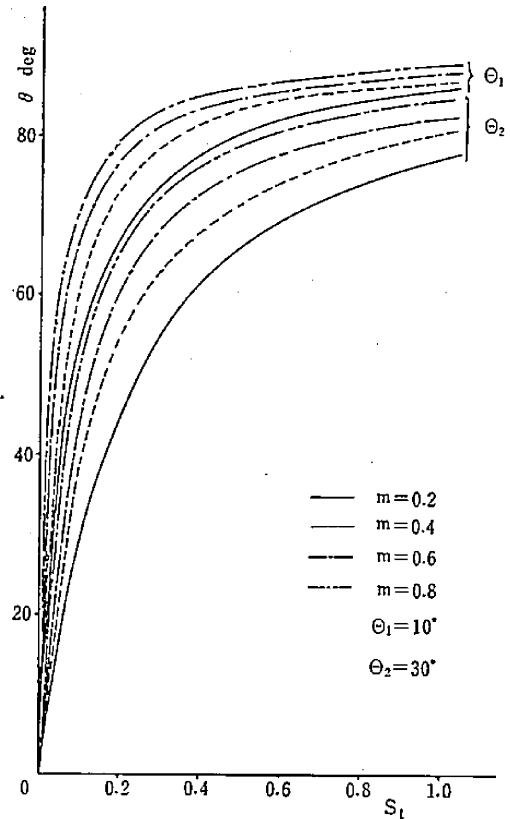


図5 ストロハル数  $S_1$  と位相差  $\theta$  の関係

図5は位相角が  $S_1$  によって変化する状況を  $m$  を変えて示したもので、 $\theta$  が  $10^\circ$ 、 $30^\circ$  の場合を示す。

#### 4-2. 二差圧方式

式(15)の入力に対する応答は式(12)であるから、

$$\sqrt{2g/K_L}(L_{23}h_{12} - L_{12}h_{23})^{\frac{1}{2}} = \bar{Q} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^N q_r \sin(\omega t + \varphi_{r-1}) \right\} \quad (24)$$

$h_{12}$ 、 $h_{23}$ はそれぞれ式(17)、(18)の応答特性を持つがこれを式(24)の左辺に入れて確認できるように、この場合は入力に対する歪成分が消える。したがって非粘性、非圧縮の流れであれば、 $h_{12}$ 、 $h_{23}$ の時系列データにより瞬時流量が求まり、またその時間平均もつぎのように正しく求められる。

$$\bar{Q} = \sqrt{2g/K_L} \int_0^T (L_{23}h_{12} - L_{12}h_{23})^{\frac{1}{2}} \frac{dT}{T}$$

(25)

つぎに  $h_{12}$  および  $h_{23}$  の時間平均と流量の関係を考える。これは変動差圧をマンメータへの専圧装置によって理想的に制動し、正しい平均圧計測ができた場合に於ける。

式 (21) と同様に  $h_{23}$  についてもつぎの関係があるから

$$2g\bar{h}_{23} = K_{23}\bar{Q}^2 \left\{ 1 + (1/2) \sum_{i=1}^N q_i^2 \right\} \quad (21)'$$

式 (21), (21)' を式 (12) に入れ、求まる流量を  $Q_M$  とすれば

$$Q_M = \bar{Q} \left\{ 1 + (1/2) \sum_{i=1}^N q_i^2 \right\}^{1/2} \quad (26)$$

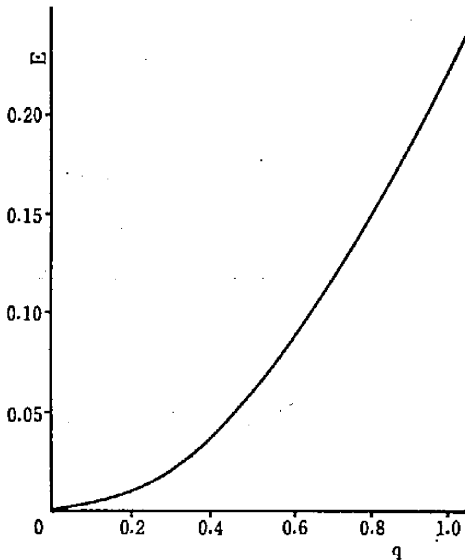


図 6  $q$  と平方根誤差  $E$  の関係

となり平方根誤差は式 (22) すなわち一差圧方式と同じになる。

図 6 は脈動振幅と平方根誤差を示したものである。

## 5. 結 論

最近特に重要視される非定常流量の計測法として、円錐形しぼりに軸対称ポテンシャル流理論を適用して、流量と差圧の関係を理論的に調べた結果を要約するとつぎのようになる。

(1) 二差圧瞬時値計測方式は流量の瞬時値、平均値およびその変動速度を求めるとともに当然定常流にもそのまま適用できる。

(2) 差圧は瞬時値計測しないと一差圧、二差圧両方式とも平方根誤差を生じる。

最後に本研究を卒業研究の一部として数値計算を実行した本学卒業生田中実、小谷良一郎君に謝意を表す。また本研究は文部省科学研究費の援助を受けたものの一部であることを付記する。

## 文 献

- 1) 日本機械学会分科会報告, 日本機械学会誌, 75—638 (1972—3), p. 452
- 2) 松永, 福元: 日本機械学会前刷集, No. 153 (1966—4), p. 101
- 3) 松永, ほか 2 名: 日本機械学会講演論文集, No. 700—15 (1970—10), p. 73
- 4) Moseley, D. S., ASME "Flow Measurement Symposium", 1966, p. 103
- 5) Hawley, R. H., Inst. & Control System, 37—3, pp. 99—101