

## 超低周波雑音を含む操業データからの動特性推定

(昭和51年5月31日 原稿受付)

制御工学教室 古 谷 忠 義

## Identification of Linear Systems in the Presence of Very Low Frequency Noise

by Tadayoshi FURUYA

If only fluctuating part of input and output signal is amplified for determination of dynamic characteristics, very low frequency components are relatively large, which caused by drift of instruments and nonstationary change of system variable. Therefore a long period data should be required to estimate parameters of dynamic characteristics.

This paper is concerned with the estimation of parameters of dynamic characteristics in the presence of very low frequency noise. Noise is separated into two parts, one of which is very low frequency part and the other is random noise part. Very low frequency part can be approximated by polynomials of time variable and random noise part can be represented by auto regressive form. We proposed an iterative algorithm for estimation of parameters of dynamic characteristics and noise characteristics. It is possible to determine dynamics of sub-system in the feed back loop and in the presence of very low frequency components, since both of dynamics and noise characteristics are estimated.

Experimental results are included to demonstrate the feasibility of the proposed method.

## 1. 緒言

最近のようにシステム運用に対して厳しい仕様の最適化や最適制御を行なうことが課せられるようになってくると、一般の工業プロセスでも常時制御系を最適に保つために計算機を導入し、オン・ラインでデータを計算機に読み込み、データ処理を行なうことが普通になってきた。さらに高度にシステムを運用するためには静的な特性のみならず動的な特性ことにシステム内部のサブ・システムの動特性やシステムに入ってくる外乱の特性を従来より正確に推定する必要がある。

ところが運用状態にあるシステムにおいては監視やデータ記録に設けられている入出力の計装設備から得られるシステム変数の時間的変動は僅少であるうえに動特性推定に関係のない低周波成分が大部分であってどうしても平均値成分を取り去った変動成分を増幅し取り出さねばならない。<sup>1)</sup> これは計測器などの感度限界の増大と計算機入力のための AD 変換器の量子化誤差を減少させるために不可欠な手段である。しかし変動成分のみを

増幅すれば非定常性の外乱や計測器のドリフト雑音が相対的に大きくなり、限られた時間内においても、これらの超低周波成分による影響が顕著である。この対策として平均値変動とも考えられる超低周波成分の除去を時間平均をとることによって行なうと長時間のデータを必要とし、逆に短時間のデータから動特性推定を行なうと超低周波以外の雑音によって推定値にばらつきが生じる。したがって超低周波成分が大きいデータからの動特性推定は困難と考えられてきた。

超低周波成分の除去を行なう動特性推定法として高域濾波器を用いる方法と W. D. T. Davis<sup>2)</sup>や Nikiforov<sup>3)</sup>らが提案しているような時間の多項式を用いる方法等がある。これらの方法は超低周波雑音を除去することには優れているが、通常の不規則雑音の除去すなわち推定が不十分であり、推定値の分散が大きいという欠点がある。さらに内部雑音が存在するシステムのサブ・システムの動特性推定においては推定値が不偏推定値とならないことがある。

これに対して通常の不規則雑音だけが存在する場合に

は動特性の最小分散不偏推定値を与える方法が数多く提案されており、雑音特性を考慮した Aström, Mayne,<sup>4)</sup>S. G. Tzafestas,<sup>5)</sup>Panuska, 赤池らの方法<sup>6)</sup>が良く知られている。しかし通常の不規則雑音のみを仮定しているため超低周波雑音の存在する場合にはやはり長時間のデータを必要とする欠点がある。

本論文で述べる方法はドリフトのような超低周波変動の存在する場合にも適用可能なように拡張したものである。ここでは超低周波成分を時間の多項式で近似し、そのパラメータと動特性を同時に推定することによって超低周波成分の除去を行なっている。

## 2. システム・モデル

ここで対象とするシステムは線形であると仮定する。システムに重畳している雑音はその周波数成分によって高周波成分、入出力変動と同帯域の雑音とドリフトのような超低周波成分に分けて考えることができる。このうち高周波成分はアナログ・フィルタを挿入して遮断することができるが、超低周波成分の混入してくることは避けられない。したがってここではシステム・モデルを Fig. 1 のように考える。

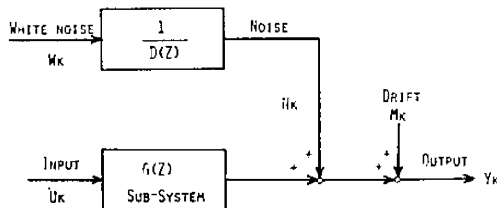


Fig. 1 Mathematical Model

システムの入力を  $u(t)$  出力を  $y(t)$  超低周波雑音を  $m(t)$  不規則性雑音を  $n(t)$  とあらわすと入出力の関係はインパルス応答  $g(\mu)$  を用いて

$$y(t) = \int_0^{T_s} g(\mu)u(t-\mu)d\mu + m(t) + n(t) \quad (1)$$

と書くことができる。超低周波雑音  $m(t)$  は時間に関する多項式

$$m(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{Nr} a_i t^i \quad (2)$$

で近似的にあらわす。ここで  $a_i$  が超低周波雑音の時間変化をあらわす未知パラメータである。

①式を離散値系に書き換えると

$$y_k = \sum_{i=1}^{Nr} h_i u_{k-i} + m_k + n_k \quad (3)$$

となる。ここで  $T$  をサンプル周期として

$$h_i = \int_{(i-\frac{1}{2})T}^{(i+\frac{1}{2})T} g(\mu)d\mu, \quad u_{k-i} = u((k-i)T)$$

$$y_k = y(kT), \quad m_k = m(kT), \quad n_k = n(kT)$$

である。(2)式についても同様に離散化すれば、

$$m_k = a_0 + \sum_{i=1}^{Nr} a_i (kT)^i \quad (4)$$

となる。

$n(t)$  の離散値  $n_k$  は

$$x_n(k) = \Phi x_n(k-1) + b w_k \quad (5)$$

$$n_k = C^T x_n(k)$$

ここで  $\Phi$  は遷移行列である。

と書きあらわすことができる。(5)式を  $Z$  変換し、整理すると

$$x_n(z)(I - \Phi z^{-1}) = b w(z) \quad (6)$$

$$x_n(z) = (I - \Phi z^{-1})^{-1} b w(z)$$

となる。(7)式を(5)式に代入すると

$$n(z) = C^T (I - \Phi z^{-1})^{-1} b w(z) \quad (7)$$

$$= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} w(z)$$

となる。Aström<sup>7)</sup>が示しているように  $n(t)$  が定常であれば

$$n(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i z^{-i}} w(z) \quad (8)$$

と仮定できる。すなわち  $n(t)$  の離散値  $n_k$  は

$$n_k = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i n_{k-i} + w_k \quad (9)$$

なる自己回帰モデルで生起しているものと仮定する。ここで  $w_k$  は正規白色性の雑音である。動特性推定の問題は与えられた入出力データ  $y_k$  と  $u_k$  からパラメータ  $h_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$  を推定することである。

## 3. 動特性推定法

### 3-1 原理

超低周波雑音、動特性および雑音特性それぞれをあらわすパラメータの推定方法を考える。(3)式、(4)式、(9)式を考えてみると

$$w_k = y_k - \sum_{i=1}^{Nr} h_i u_{k-i} - \sum_{j=0}^{Nr} a_j (kT)^j - \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i n_{k-i} \quad (10)$$

の関係があり、 $w_k$  を正規白色雑音と仮定しているため最尤推定を行なうことができる。尤度関数から

$$J = \sum_{k=1}^{N_s} \left( y_k - \sum_{i=1}^{Nr} h_i u_{k-i} - \sum_{j=0}^{Nr} a_j (kT)^j - \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i n_{k-i} \right)^2 \quad (11)$$

を最小とすれば良い。ところが(11)式には  $\alpha_i$  と  $n_{k-i}$  のともに未知項の積が存在しているため通常の線形推定を行な

うことができない。そこで、なんらかの方法で得られた  $\hat{h}_i, \hat{a}_j$  を用いて(3), (4)式を変形した

$$\hat{n}_k = y_k - \sum_{i=1}^{N_p} \hat{h}_i u_{k-i} - \hat{a}_0 - \sum_{j=1}^{N_r} \hat{a}_j (kT)^j \quad (12)$$

から  $n_k$  の推定値  $\hat{n}_k$  を求める。そして評価関係  $J$  のなかの  $n_k$  を  $\hat{n}_k$  で置き換えた評価関数

$$J_d = \sum_{k=1}^{N_s} \left( y_k - \sum_{i=1}^{N_p} h_i u_{k-i} - \sum_{j=1}^{N_r} a_j (kT)^j - \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i \hat{n}_{k-i} \right)^2 \quad (13)$$

が最小となるように  $\hat{h}_i, \hat{a}_j, \hat{\alpha}_i$  を決定する。この  $J_d$  はパラメータに関して線形であるので通常の最小2乗法と同様にパラメータを求めることができる。

次に繰り返し計算を考える。すなわち  $J_d$  を最小とする  $\hat{h}_i, \hat{a}_j, \hat{\alpha}_i$  のうち  $\hat{h}_i, \hat{a}_j$  を用いて(12)式から再び  $\hat{n}_k$  を求め、 $J_d$  が最小となるように  $\hat{h}_i, \hat{a}_j, \hat{\alpha}_i$  を計算する。以上の計算を収束するまで繰り返すことによって動特性、雑音特性、超低周波雑音のそれぞれのパラメータを決定する。

### 3-2 計算方法

まず(13)式を最小とするように  $\hat{h}_i, \hat{a}_j, \hat{\alpha}_i$  を求めるための計算方法から考える。通常の最小2乗法と同様に(13)式を最小とする  $\hat{h}_i, \hat{a}_j, \hat{\alpha}_i$  は次の線形方程式によって与えられる。

$$\sum_{k=1}^{N_s} X_k X_k^T \beta = \sum_{k=1}^{N_s} X_k y_k \quad (14)$$

ここで

$$X_k^T = [u_{k-1} u_{k-2} \dots u_{k-N_p}; 1, kT, \dots, (kT)^{N_r}; n_{k-1} \dots n_{k-N_r}]$$

$$\beta^T = [\hat{h}_1 \hat{h}_2 \dots \hat{h}_{N_p}; \hat{a}_0 \hat{a}_1 \dots \hat{a}_{N_r}; \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_{N_r}]$$

したがってこの線形代数方程式を解けばパラメータが決定される。この計算において  $\hat{n}_k$  の値は繰り返し計算ごとに(12)式から求められるので  $X_k X_k^T$  と  $X_k y_k$  の  $\hat{n}_k$  に関する部分は計算が繰り返されることに異っているが、 $\hat{n}_k$  の関係しない部分は常に同一であるので繰り返し計算から除くことができる。

以上の計算手順をまとめてみると Fig. 2 に示すようになる。

- Step 1. まず(12)式の  $\hat{h}_i, \hat{a}_j$  をすべて0と置いて  $\hat{n}_k$  を求め(14)式から1回目の推定値  $\beta$  を得る。
- Step 2.  $\beta$  のパラメータを用いて  $\hat{n}_k$  を求める。
- Step 3. 再び(14)式の  $\sum X_k X_k^T$  と  $\sum X_k y_k$  における  $\hat{n}_k$  の関係する部分を計算し、(14)式の代数方程式を解き、新しく  $\beta_N$  を得る。
- Step 4. 収束の判定を行う。すなわち前回の  $\beta_{N-1}$  と新し

く得られた  $\beta_N$  の差のノルムを規準化したもの

$$\|\beta_N - \beta_{N-1}\| / \|\beta_N\| \quad (15)$$

が十分に0に近ければ収束したものとStep 5に進み、収束していなければStep 2に戻る。

Step 5. 収束した  $\beta$  が真の動特性と雑音特性をあらわしているか、その精度は十分かなどを検証するために  $w_k$  の正規性と白色性の検定を行う。もし  $w_k$  が正規白色性でなければパラメータ個数  $N_p, N_r, N_s$  を変えて計算を繰り返す。

以上の計算手順によって対象の動特性  $h_i$ 、雑音特性  $\alpha_i$  と超低周波成分  $a_j$  を求めることができる。

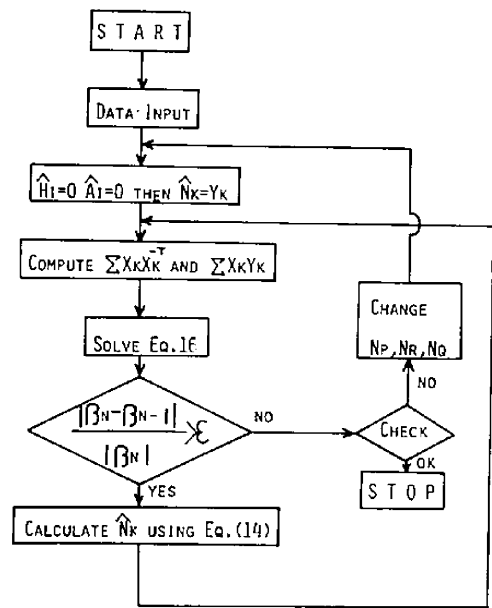


Fig. 2 Estimation Algorithm

### 4. 実験例

以上述べた方法によって、動特性推定の模擬実験を行った。実験データは、デジタル計算機かアナログ計算機によってシステムを模擬し、作製している。精度や求められた数値が重要であるものについてはデジタル計算機により行ない、一方統計的な理論と現実のシステムに差異の生じることが考えられる場合にはアナログ計算機を用いた。

実験は主に次の3点について行なわれている。まず超低周波雑音の影響とその除去、つぎにシステムにフィード・バック経路があり、その内部に雑音が存在している

場合その内部雑音の影響とその除去である。最後に超低周波雑音と不規則雑音がともに存在している場合についてである。

4-1 超低周波成分の除去

以上述べた方法によって、超低周波成分が除去されることを示すために動特性推定を行なった。Fig. 3 に示すシステムをデジタル計算機によって模擬し、入出力データとした。ここでは超低周波雑音  $m_k$  のみが重畳しているものとし、 $m_k$  は

$$m_k = 0.02kT - 5 \times 10^{-5}(kT)^2$$

と仮定した。このとき入力の分散は 2.5 である。

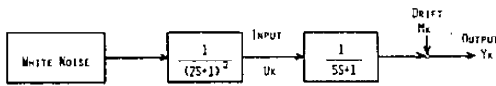


Fig. 3 Simulated System

Table 1 はこれらのパラメータの真値と推定値を示したものである。以上の結果から超低周波成分の影響の大きいこと、多項式近似によって超低周波成分が除去されることがわかる。

TABLE 1 ESTIMATED VALUE ( $N_k=0, M_k=C_0+0.02k+0.00005k^2$ )

	TRUE VALUE	NK=2 83	NK=1	NK=0
H <sub>1</sub>	0.32968	0.32968	0.2714	0.2708
H <sub>2</sub>	0.22099	0.22099	0.2107	0.2106
H <sub>3</sub>	0.14814	0.14814	0.1203	0.1197
H <sub>4</sub>	0.09929	0.09929	0.0812	0.0808
H <sub>5</sub>	0.06656	0.06656	0.0468	0.0464
H <sub>6</sub>	0.04562	0.04562	0.0294	0.0293
H <sub>7</sub>	0.02991	0.02991	0.0075	0.0074
H <sub>8</sub>	0.02005	0.02005	0.0029	0.0025
H <sub>9</sub>	0.01344	0.01344	-0.0058	-0.0062
H <sub>10</sub>	0.00901	0.00901	0.0413	0.0409
C <sub>0</sub>	0.195	0.19499	1.4083	1.3422
C <sub>1</sub>	0.02	0.01900	-0.0003	
C <sub>2</sub>	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$		
C <sub>3</sub>	0.0	$(3 \times 10^{-12})$		

4-2 内部雑音のあるシステム

これまでに述べた方法はシステムに重畳している不規則雑音が白色雑音になるように推定しているので、内部雑音の存在するフィード・バック制御系においてもその内部のサブ・システムの動特性を不偏推定できると考えられる。これを示すために Fig. 4 に示すシステムをアナログ計算機によって模擬し、そのサブ・システムの出入

力をデータ処理装置によって計算機に読み込んだ。雑音と入力の分散の比を 0.47 になるように  $K_f$  を決定し、サンプル周期を 2 秒、データ個数を 300 個に選び、実験を行なった。パラメータ個数は残差が白色に近いように決定し、 $N_p = 10, N_d = 4, N_r = 0$  とし、推定した結果が Fig. 5 である。通常の最小 2 乗法すなわち  $N_d = 0$  とした場合の推定値を参考のために示してある。この図からあきらかなように通常の最小 2 乗法では推定値にバイアスが存在している。これに対して、ここで提案した方法によると十分な精度で推定できる。

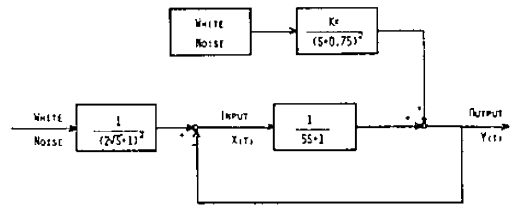


Fig. 4 Simulated Subsystem in the Feed Back Loop

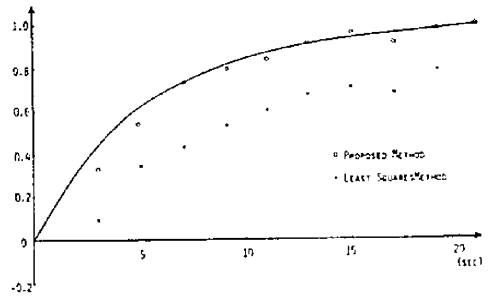


Fig. 5 Estimated Results

4-3 内部雑音とドリフトが共に存在する場合

最後に内部雑音と超低周波成分(ドリフト)が同時に存在している場合について実験を行なった。対象のシステムは Fig. 6 に示すものでデジタル計算機によって模擬を行なった。サンプル周期を 2 秒に選び、超低周波雑音  $m_k$  を  $0.005kT$  とし重畳させ、データ個数、パラメータ個数をそれぞれ  $N_p = 10, N_d = 400, N_r = 1, N_s = 2$  と選案し、推定を行なった。Fig. 7 が対象のシステムのステップ応答の推定結果である。この場合雑音特性の推定結果をインパルス応答列の形式で表示したのが、Fig. 8 である。これらの結果から対象のシステムの動特性と雑音特性を合わせて同時に推定できることがわかる。

## 参考文献

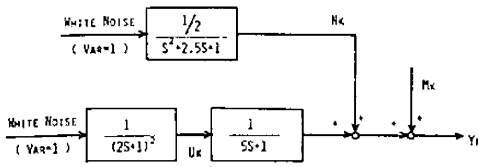


Fig. 6 Simulated Process

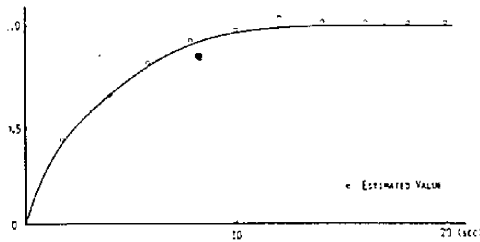


Fig. 7 Estimated Results of Fig.6

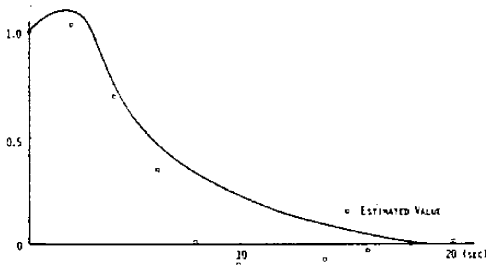


Fig. 8 Noise Dynamics

## 5. むすび

プロセスの動特性の際に、どうしても超低周波成分の混入が避けられないことから、その成分を多項式近似であらわし、不規則雑音のパラメータとともに推定する方法について報告した。このなかで超低周波成分の存在する場合やシステムの内部に雑音が存在する場合の動特性推定が可能なことを実験例によって示した。ここで述べた方法は信号に含まれている雑音成分の特性をそれぞれ2つの成分に分けて除去するようにしている。すなわち多項式近似と雑音過程の自己回帰モデルによる表現である。したがって計算のうえで隔通性に富む形式であり、残差が白色となるようにパラメータ個数を決定してやるだけでよいという特徴がある。

最後に、九州工業大学 米澤 洋 教授ならびに大阪大学 藤井克彦教授に謝意を表するとともに、本研究が昭和46年度文部省科学研究費(奨励A)によって行なわれたことを付記する。

- 1) 鈴木 胖, 古谷忠義, 藤井克彦: 動特性推定に用いるプロセスの操業データの処理方法, 計測自動制御学会論文集, 4, 2, 175/181 (1967).
- 2) W. D. T. Davis, J. L. Douce: On-line System Identification in the Presence of Drift, Preprints of the IFAC Symp., 3-12, Prague Czecho (1967).
- 3) P. N. Nikiforuk, M. M. Gupta, R. Hoffman: Identification of Linear Discrete Systems in the Presence of Drift using Pseudo Random Sequences, Preprints of the 2nd Prague IFAC Symp., 7-4, Prague Czecho (1970).
- 4) D. Q. Mayne: Parameter Estimation, Automatica, 3, 245/255 (1966).
- 5) S. G. Tzafestas: Some computer-aided Estimation in Stochastic Control Systems Identification, Int. J. Control, 12, 3, 385/399 (1970).
- 6) H. Akaike: Annals of the Institute of Statistical Mathematics Japan, 20 (1968).
- 7) K. J. Astrom: Introduction to Stochastic Control Theory, 98/102, Academic Press (1970).