Lyapunovの安定理論に基づく離散形適応観測器の設計

（昭和52年10月31日　原稿受付）

制御工学科　大川不二夫
広島大学工学部　米澤洋

Design of Discrete Adaptive Observer based on Lyapunov's Direct Method

by Fujio OHKAWA
Yoo YONEZAWA

Recently, design of Adaptive Observer where system's parameters are unknown have been studied based on stability theorem.

In this paper, two types of simple structure discrete Adaptive Observer are proposed. Using Lyapunov's direct method, it is shown that these Adaptive Observers are constructed by identical adaptive algorithm which is obtain with style of having access to only system's input and output. Then, extension of this adaptive observer algorithm to the system with time dely is indicated. Futhermore, by digital simulation, it is shown that the validity of proposed adaptive algorithm.

１．まえがき

近年，未知パラメータを含むシステムのオブザーバ，いわゆる適応観測器の設計例が安定理論に基づき種々報告されて来ている[1]。

しかし，それらは主として連続系について議論されている。離散値系については，P. Kudvaらの研究[2]があり，Lüdersらが連続系に対して提案した〝新しい標準形〟[3]を離散値系に拡張し，大域漸近安定であるための適応観測器のアルゴリズムを誘導している。この新しい標準形の導入は興味ある手法であるが，補助変数を導入するために，m 次のシステムに対して観測器が（$2m$—1）次となること，さらに，補助変数が一意的に決定できず必ずしも満足な結果が得られるとは限らないこと等に問題がある。

筆者らは，先に適応制御系を構成するために，離敵値適応観測器を設計し，その有用性を明らかにした[4]が，ここでは，新たに簡潔な構成の離散値適応観測器を提案する。そして，この観測器によると，先の観測器の場合と同一の誤差方程式に帰着することを示す。すなわち，同一の適応アルゴリズムでもって設計可能であることを明らかにする。つぎに，この観測器を用いた場合に，観測値がバイアスなしに真値に収束するための条件を誘導する。さらに，むだ時間要素を含むシステムに対して，観測器を拡張し，その適用手順の一例を示す。最後に，数値計算例によって本手法の有用性について考察する。

２．適応観測器の設計

未知システムは次式の状態推移方程式で表現される可観測正準形とする。

$$X_{k+1} = HX_k + Bu_k \tag{2.1}$$

$$X_k,\ B \in R^m \quad H \in R^{m\times m}$$

$$H \triangleq \begin{bmatrix} h^1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ h^m & & & \end{bmatrix} \qquad B \triangleq \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}$$

ここで，k は整数でサンプル時刻を示し，u_k はスカラー入力を示す。また，出力は

$$y_k = DX_k = x_k^1 \qquad (2.2)$$
$$D \triangleq [1 \ \ 0 \cdots\cdots 0] \qquad D \in R^{1\times m}$$

とする。(2.1) と (2.2) より次式を得る。

$$y_{k+1} = x_{k+1}^1 = \sum_{j=1}^{m} (h^j x_{k+1-j}^1 + b^j u_{k+1-j}) \qquad (2.3)$$

ここで，適応観測器の設計問題は未知システムと観測器の状態量の差が収束するように，y_k および u_k のみの情報を用いた観測器をどのように構成するかということである。

2.1. 適応観測器（I）[4)]

(2.1) で表現される未知システムに対して，観測器の構成を

$$\hat{X}_{k+1} = (C_k - \hat{H}_k)E_k + \hat{H}_k \hat{X}_k + \hat{B}_k u_k \qquad (2.4)$$
$$E_k \triangleq \hat{X}_k - X_k$$

$$C_k \triangleq \begin{bmatrix} c_k^1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ c_k^m & & & \end{bmatrix} \qquad \hat{H}_k \triangleq \begin{bmatrix} \hat{h}_k^1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ \hat{h}_k^m & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_k \triangleq \begin{bmatrix} \hat{b}_k^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{b}_k^m \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_k,\ \hat{H}_k \in R^{m\times m} \\ \hat{X}_k,\ E_k \in R^m \end{array}$$

として，C_kの各要素にある適応アルゴリズムをもたせると

$$e_{k+1}^1 = \Phi_k \omega_k \qquad (2.5)$$
$$\Phi_k \triangleq [\alpha_k^1 \beta_k^1 \cdots\cdots \alpha_k^m\ \beta_k^m]$$
$$\alpha_k^i = \hat{h}_k^i - h^i \qquad \beta_k^i = \hat{b}_k^i - b^i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$
$$\omega_k \triangleq [y_k\ u_k\ \cdots\cdots y_{k+1-m}\ u_{k+1-m}]^T$$
$$\Phi_k \in R^{1\times 2m} \qquad \omega_k \in R^{2m}$$

が得られた。

2.2. 適応観測器（II）

つぎに，観測器を

$$\hat{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{h}_k^1 & \cdots\cdots\cdots & \hat{h}_k^m \\ \vdots & & \\ \hat{h}_k^m & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ \vdots \\ y_{k+1-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b}_k^1 & \cdots\cdots\cdots & \hat{b}_k^m \\ \vdots & & \\ \hat{b}_k^m & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+1-m} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

とすると

$$x_{k+1}^1 = \sum_{j=1}^{m} (\hat{h}_k^j y_{k+1-j} + \hat{b}_k^j u_{k+1-j}) \qquad (2.7)$$

が得られ，(2.3) と同形となる。したがって，(2.3) と (2.7) より

$$e_{k+1}^1 = \sum_{j=1}^{m} \{(\hat{h}_k^j - h^j) y_{k+1-j} + (\hat{b}_k^j - b^j) u_{k+1-j}\} = \Phi_k \omega_k \qquad (2.8)$$

が得られる。(2.8) は (2.5) と同一であるので，適応アルゴリズムは観測器（I）の場合と同一の

$$\hat{h}_{k+1}^j = \hat{h}_k^j - \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} y_{k+1-j} \qquad (2.9)$$

$$\hat{b}_{k+1}^j = \hat{b}_k^j - \frac{e_{k+1}^1}{\omega_k^T \omega_k} u_{k+1-j} \qquad (2.10)$$

を用いればよいことになる。

2.3. 比較検討

観測器（I）の場合には，(2.4) より内部状態量は次式で表現される。

$$\hat{x}_{k+1}^i = (c_k^i - \hat{h}_k^i) e_k^1 + \hat{h}_k^i \hat{x}_k^1 + \hat{x}_k^{i+1} + \hat{b}_k^i u_k \qquad (i = 2, \cdots, m-1)$$
$$\hat{x}_{k+1}^m = (c_k^m - \hat{h}_k^m) e_k^1 + \hat{h}_k^m \hat{x}_k^1 + \hat{b}_k^m u_k \qquad (2.11)$$

一方，観測器（II）の場合には (2.6) より

$$\hat{x}_{k+1}^i = \sum_{j=i}^{m} \{\hat{h}_k^i y_{k+i-j} + \hat{b}_k^i u_{k+i-j}\} \qquad (2.12)$$

となる。

(2.4) と (2.6) より観測器の構成を比較すると表-1に示す結果となる。ただし，表-1で状態変数の記憶とは (2.11) および (2.12) を用いて内部状態量を推定（観測）するための記憶の数である。

表－1　観測器構成の比較

	Observer(I)	Observer(II)
Dimension	m	m
Parameter (Independent)	$3m$	$m\times(m+1)$ $(2m)$
Memory of State Variable	$m+2$	$2m$

つぎに，(2.11) と (2.12) を用いた内部状態量の観測誤差はそれぞれ次式となる。

$$e_{k+1}^i = \sum_{j=i}^{m} (c_k^i e_{k+i-j}^1 + \alpha_{k+i-j}^j y_{k+i-j}$$

$$+\beta^i_{k+i-j}u_{k+i-j}) \qquad (i=2,\cdots,m) \tag{2.13}$$

$$e^i_{k+1}=\sum_{j=i}^{m}(\alpha^j_k y_{k+i-j}+\beta^j_k u_{k+i-j}) \qquad (i=2,\cdots,m) \tag{2.14}$$

内部状態量の推定誤差の収束は，明らかに α_k と β_k の収束性に依存することがわかる。

2.4. 収束条件の検討

つぎに，パラメータ誤差の収束性について考察する。Lyapunov 関数

$$V_k=\bar{\Phi}_k\bar{\Phi}_k^T \tag{2.15}$$

$$\bar{\Phi}_k\triangleq[\alpha^1_k\beta^1_k\cdots\cdots\alpha^m_{k+1-m}\beta^m_{k+1-m}]$$

に対して，適応アルゴリズム (2.9) と (2.10) を用いたとき

$$\Delta V_k=V_{k+1}-V_k=-\frac{(\bar{\Phi}_k\omega_k)^2}{\omega_k^T\omega_k}\leqq 0 \tag{2.16}$$

であるから，もし

$$\bar{\Phi}_k\omega_k=0 \tag{2.17}$$

が満足されると V_k の原点への収束性は保証されず，観測値が真値に収束せずバイアスが生じる可能性がある。したがって，(2.17) が成立するとき，常に

$$\bar{\Phi}_k=0 \tag{2.18}$$

が満足される必要がある。このための条件を以下に誘導する。ここでは，誘導手順を簡潔にするために，$\bar{\Phi}_k$ にかえて Φ_k を用いる（こうしても，一般性は失なわれない），すなわち (2.17) にかえて

$$\Phi_k\omega_k=0 \tag{2.19}$$

について考察する。(2.19) は表現をかえると

$$\Phi_n\omega_n=\alpha_n\bar{x}_n+\beta_n\bar{u}_n \tag{2.20}$$

$$\bar{x}_n\triangleq[x^1_n\ \ x^1_{n-1}\cdots\cdots x^1_{n+1-m}]^T$$

$$\bar{u}_n\triangleq[u_n\ \ u_{n-1}\cdots\cdots u_{n+1-m}]^T$$

である。また，時間 shift 作用素を p とすると未知システムは

$$\bar{x}_n=D(Ip-H)^{-1}B\bar{u}_n$$

$$=\frac{b^1p^{m-1}+\cdots\cdots+b^{m-1}p+b^m}{p^m-h^1p^{m-1}-\cdots\cdots-h^{m-1}p-h^m}\bar{u}_n \tag{2.21}$$

で表現できる。ここで，

$$\left.\begin{aligned} g(p)&\equiv b^1p^{m-1}+\cdots\cdots+b^{m-1}p+b^m\\ f(p)&\equiv p^m-h^1p^{m-1}-\cdots\cdots-h^{m-1}p-h^m\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

とすると (2.19) は

$$\alpha_n\bar{x}_n+\beta_n\bar{u}_n=\frac{1}{f(p)}\{\alpha_n g(p)+\beta_n f(p)\}\bar{u}_n=0 \tag{2.23}$$

となり

$$\{\alpha_n g(p)+\beta_n f(p)\}\bar{u}_n=0 \tag{2.24}$$

を得る。(2.24) は行列を用いると次式のように表現できる。

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & & 0\\ -h^1 & 1 & & b^1 & & \\ -h^2 & -h^1 & \ddots & b^2 & b^1 & \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots \\ -h^m & -h^{m-1} & \cdots\cdots -h^1 & b^m & b^{m-1} & \cdots\cdots b^1\\ & -h^m & -h^2 & & b^m & b^2\\ & & \ddots\ \vdots & & & \ddots\ \vdots\\ & 0 & -h^m & & 0 & b^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^1_n\\ \beta^2_n\\ \vdots\\ \beta^2_n\\ \alpha^1_n\\ \alpha^2_n\\ \vdots\\ \alpha^m_n\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u_{n+m}\\ \vdots\\ u_{n+1}\\ u_n\\ \vdots\\ u_{n-m+1}\end{pmatrix}=0 \tag{2.25}$$

ここで，u_n による行列

$$M\triangleq\begin{bmatrix} u_n & u_{n+1}\cdots\cdots\cdots & u_{n+\ell}\\ u_{n-1} & u_n\cdots\cdots\cdots\cdots & u_{n+\ell-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ u_{n-2m+1} & u_{n-2m+2}\cdots\cdots & u_{n+\ell-2m+1}\end{bmatrix}\quad \ell\geqq 2m \tag{2.26}$$

について，M の階数が $2m$ となるような有限な ℓ が存在するならば（2.25）より

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 & & \\ -h^1 & 1 & 0 & & b^1 & 0 & \\ -h^2 & -h^1 & \ddots & & b^2 & b^1 \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ -h^m & -h^{m-1}\cdots\cdots & -h^1 & & b^m & b^{m-1}\cdots\cdots & b^1 \\ & -h^m & -h^2 & & & \ddots & b^2 \\ 0 & \ddots & \vdots & & 0 & & \vdots \\ & & -h^m & & & & b^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n^1 \\ \beta_n^2 \\ \vdots \\ \beta_n^m \\ \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.27)$$

が得られる。(2.27)において，第1行列（以後行列 N と呼ぶ）の行列式は終結式にあたるので，$g(p)$ と $f(p)$ に共通因子が存在しなければ行列 N はfull rank である[5]。この条件が成立するとき，（2.27）より

$$\alpha_n^i = \beta_n^i = 0 \quad (i = 1, \cdots\cdots, m) \qquad (2.28)$$

が得られる。

一方，(2.21)の系が完全可制御であるための必要十分条件は，$g(p)$，$f(p)$ が共通因子をもたないことであるから，つぎの結論が得られる。

“(2.19) の解が（2.28）となる条件は系が完全可制御であるとともに，行列 M の階数が $2m$ となる有限な ℓ が存在するような入力系列 u_n であること。”

また，この条件が満足されれば，Φ_k の原点への収束性が保証されるので，(2.13) および (2.14) より，明らかに，内部状態量の収束性も保証される結果となる。

3． むだ時間を含むシステム

前章で提案した適応観測器は，未知システムの次数が必ずしも既知である必要がない。したがって，高次系の低次系近似およびむだ時間を含む系への適用が可能である。

ここでは，未知システムがむだ時間要素を含む場合について，適応観測器を拡張し，むだ時間等を同定するためのアルゴリズムを誘導する。

3.1． システム方程式

1入出力系においては，むだ時間は入力 u_k のみに存在すると考えてよい。したがって，(2.1) の系にむだ時間 L が存在すると (2.3) は

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{m} (h^j x^1_{k+1-j} + b^j u_{k+1-j-\ell}) \qquad (3.1)$$

$$L = \ell\tau \qquad \tau：サンプリング周期$$
$$\qquad\qquad \ell：整数$$

とできる。

いま，B よりも十分に大きなベクトル Q を導入して

$$\sum_{j=1}^{m} b^j u_{k+1-j-\ell} = \sum_{j=1}^{r} q^j u_{k+1-j} \qquad (3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} q^j &= 0 & j &= 1, \cdots\cdots, \ell \\ &= b^{j-\ell} & j &= \ell+1, \cdots\cdots, \ell+m \\ &= 0 & j &= \ell+m+1, \cdots\cdots, r \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$
$$Q \in R^r \qquad r > \ell+m$$

とすることが可能である。

(3.3) で定義した Q を用いると (3.1) は

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{m} h^j x^1_{k+1-j} + \sum_{j=1}^{r} q^j u_{k+1-j} \qquad (3.4)$$

と表現できるので，(3.1) にかえて (3.4) に対する適応観測器を設計し，Q を同定すれば ℓ すなわちむだ時間が同定できる。

3.2． むだ時間同定のためのアルゴリズム

適応観測器を用いて，実際にむだ時間等を同定するためのアルゴリズムの一例を以下に示す。

① 適当な容量の Q を用いた (3.4) に対して，適応アルゴリズム (2.9) および (2.10) を適用する。

② k が十分に大きくなると

$$q^j \quad (j = 1, \cdots, \ell, \ell+m+1, \cdots\cdots, r)$$

は非常に小さくなるので，隣接する q^j の m 個の組の中で絶対値の和が最大の組を選び出す。

③ その組の最初の要素番号を j とすると ℓ は $(j-1)$ となる。

④ ℓ が決定されると (3.1) に対して適応アルゴリズム (2.9) および (2.10) を適用すれば，さらに適切な H と B が同定される。

以上の手順により，ℓ，H と B さらに X_k が同定，推定される。

4． 数値計算例

ここでは，先に提案した適応観測器を用いて数値計算を行なった結果について考察する。

〈数値例 I〉

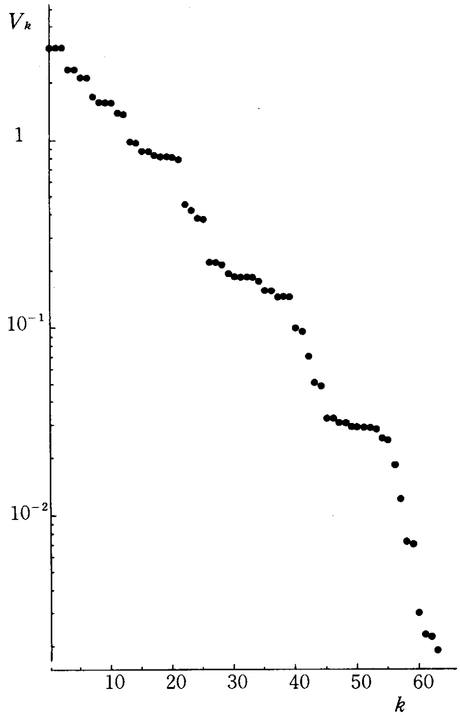
未知システムのパラメータおよび状態量の初期値が

$$H=\begin{bmatrix}-0.1 & 1 & 0\\ -0.2 & 0 & 1\\ -0.3 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0.8\\0.9\\1.2\end{bmatrix}\qquad X_0=\begin{bmatrix}0.2\\0.1\\0.2\end{bmatrix}$$

である系に対して，観測器の初期値を

$$\hat{h}_0^i=\hat{b}_0^i=\hat{x}_0^i=0\quad(i=1,2,3)$$

として，V 関数を数値計算した結果が図-1 である。V 関数がかなり急速に減少しているのが読み取れ，観測器の有用性を裏付けている。なお，図-1 は観測器（II）を用いた場合であるが，観測器（I）の場合もほぼ同様の収速過程を示した。なお，観測器の初期値を全て 0 としたが，初期値の適切な設定によって，さらに優れた収束性が期待できる。また，表-2 はパラメータの推移を示したもので，下段は観測器の初期値を適当な値に設定した結果である。ただし，入力 u_k は-0.5〜0.5 の一様分布である乱数を用いた。（表-2 において $k=70$以降の下段は省略した。）



図－1　数値例 I

表－2

k	$\hat{h}_k^1$	$\hat{h}_k^2$	$\hat{h}_k^3$	$\hat{b}_k^1$	$\hat{b}_k^2$	$\hat{b}_k^3$	V_k
0	0 -0.2	0 -0.15	0 -0.1	0 1	0 1	0 1	3.030 0.1425
10	-0.126 -0.164	0.031 -0.198	-0.518 -0.334	0.235 0.826	0.207 0.967	0.382 1.228	1.545 1.124×10^{-2}
20	0.422 -0.143	0.052 -0.215	-0.567 -0.288	0.559 0.805	0.467 0.938	0.806 1.230	0.808 5.556×10^{-3}
30	-0.056 -0.103	-0.033 -0.210	-0.273 -0.304	0.884 0.789	0.816 0.908	0.823 1.228	0.187 1.112×10^{-3}
40	-0.053 -0.105	-0.014 -0.213	-0.431 -0.290	0.785 0.800	0.843 0.904	0.997 1.214	9.867×10^{-2} 5.051×10^{-4}
50	-0.103 -0.100	-0.126 -0.205	-0.326 -0.298	0.768 0.801	0.968 0.895	1.073 1.210	2.921×10^{-2} 1.481×10^{-4}
60	-0.064 -0.103	-0.175 -0.201	-0.317 -0.300	0.786 0.801	0.924 0.898	1.203 1.200	2.997×10^{-3} 1.406×10^{-5}
70	-0.096	-0.195	-0.313	0.794	0.908	1.185	5.729×10^{-4}
80	-0.103	-0.198	-0.302	0.796	0.897	1.191	1.733×10^{-4}
90	-0.100	-0.200	-0.300	0.800	0.900	1.195	3.325×10^{-5}
True Value	-0.1	-0.2	-0.3	0.8	0.9	1.2	

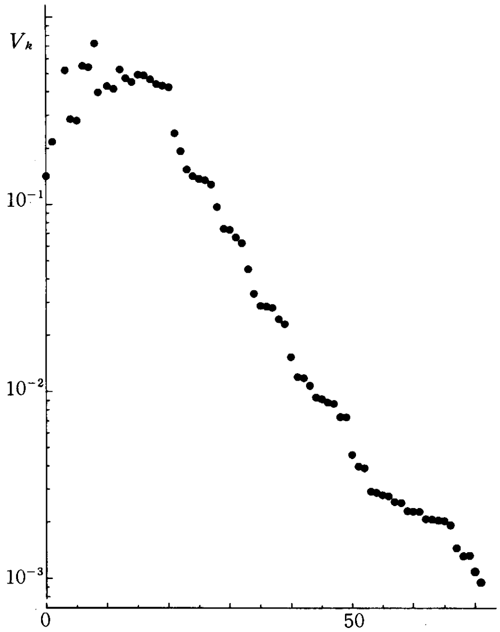
〈数値例II〉　むだ時間

つぎに，パラメータおよび状態量の初期値は〈数値例I〉と同一であるが，$L=2\tau$ のむだ時間要素が存在するシステムを観測対象とする。この未知システムに対して，観測器の初期値を

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 0 \\ -0.15 & 0 & 1 \\ -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T$$

として，先に提案したアルゴリズムを適用し，観測を行なうとともに V 関数を計算した結果が図-2 である。むだ時間を同定する $\ell=2$ は $k=15$ の時点で決定され，それ以降は先の例と同様の収束特性を示しており，むだ時間が存在する場合にも有効であることが読み取れる。



図－2　数値例II

〈数値例III〉　低次系近似

5次の未知システム

$$H = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.15 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = [6 \ \ 4 \ \ 5.5 \ \ 4.5 \ \ 5]^T$$

に対して，観測器を3次として観測するとともに最適制御を行なった結果が図-3 である。ここで，観測器の初期値は

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \\ -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

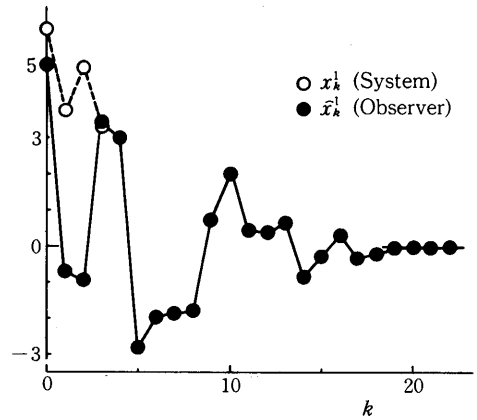
とした。また，最適制御方策は

$$V_k = \hat{X}_k^T \hat{X}_k$$

において，ΔV_k が最小値をとる

$$u_k = -\frac{\hat{B}_k^T \hat{H}_k \hat{X}_k}{\hat{B}_k^T \hat{B}_k}$$

を用いた。初期の時点においては，振動を生じているが，以後，良好な応答特性を示し，低次系近似の有効性を裏付けている。



図－3　数値例III

5．あとがき

Lyapunov の安定理論に基づき，離散形適応観測器を設計したが，その結果つぎのことが明らかになった。

1)現在までに提案されている適応観測器と比較して，より簡潔な構成（低次数，小パラメータ数）で実現可能である。

2) 入力系列がある条件を満足すれば，観測値の真値への収束性が保証される。

3)未知システムの次数が既知である必要がないので，高次系の低次近似およびむだ時間要素を含む系の観測が可能である。

4）数値計算例からは本手法による観測器の有用性を裏付ける結果が得られた。

また，提案した適応観測器のアルゴリズムは観測雑音が存在する場合にも十分有効であるが，それらについては別の機会に述べたい。

参 考 文 献

1）例えば，R. L. Carroll & D. P. Lindorff: An Adaptive Obsever for Single-Input Single-Output Linear System, *IEEE Tran.* AC-18, no. 5, 428/435（1973).

2）P. Kudva & K. S. Narendra: The Discrete Adaptive Observer, Yale Univ., Becton Center Tech. Rept, CT-63（1974).

3）G. Lüders & K. S. Narendra: A New Canonical Form for an Adaptive Observer, *IEEE Trans.* AC-19, no. 2, 117/119（1974).

4）米澤，大川：Lyapunou の安定理論に基づく離散値適応制御系の設計，九州工業大学研究報告（工学）第35号（1977).

5）佐武一郎：行列と行列式，裳華房（1958).