ルジャンドル形非線形オブザーバーとその電力系統への適用

（昭和54年5月25日　原稿受付）

情報工学教室　高田　等
〃（大学院）　内野　英治
電気工学教室　高田　茂夫

A Nonlinear Observer Based on the Legendre Polynomials and Its Application to the Electric Power System

by Hitoshi TAKATA
Eiji UCHINO
Shigeo TAKATA

ABSTRACT

This paper presents a nonlinear observer to estimate the states of a nonlinear deterministic system. The original nonlinear system is transformed into an augmented linear system by introducing a system of the Legendre Polynomials and regarding each of them as a new state variable. We, then, apply the linear observer theory to the resulting linear system.

The remainder of the paper is devoted to the problem of transient state estimation of a synchronous machine by using the nonlinear observer presented above. The numerical results indicate that this observer estimates the ststes of the synchronous machine successfully.

1．序　論

線形確定系に対する状態推定法としては，Luenberger による線形オブザーバー理論が，かなり詳細に研究されてきた。しかし非線形系に対しては，未だ十分な理論はできていないようである。そこで，本稿において我々は，非線形確定系に対する状態推定法として，ルジャンドル直交多項式による拡大次元形線形化法を基にした，非線形オブザーバーについて考究した。

一般に，非線形問題がもし，これと等価な線形問題に変換できれば，既存の平易な線形理論が適用できることから，その取り扱いが極めて容易なものとなる[1]。そこで，非線形系に対しルジャンドル直交多項式を用いて形式的に線形化する，いわゆる拡大次元形線形化を行ない，これに線形オブザーバー理論を適用したところのルジャンドル形非線形オブザーバーを合成した[2]。すなわち，ルジャンドル直交多項式系の各々の多項式を１つの新しい独立変数と考える。次に，これらの新変数に関する運動方程式を，システムを記述する原非線形微分方程式から導出する。こうしてできた運動方程式をフーリエ展開して，新変数についての形式的な線形微分方程式を求める。これに，線形オブザーバー理論を適用して得られたのがルジャンドル形非線形オブザーバーである。

最後に，本ルジャンドル形非線形オブザーバーを，一機無限大母線系統の過渡状態推定問題に適用して，その有効性を計算機シミュレーションにより確めた。

2．システムの記述と次元拡大形線形化

システムとしては，力学系が連続で観測系が離散形の非線形系，

$$\text{力学系：}\quad \dot{x}(t)=f(x(t)) \tag{2-1}$$

$$\text{観測系：}\quad y_k=g(x_k) \tag{2-2}$$

を考えよう。ここで，xはn次元状態ベクトル，y_kは時

刻t_kでのr次元観測量，fはn次元非線形ベクトル値関数，gはr次元非線形ベクトル値関数である。すなわち，

$$x \triangleq [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T,\ f \triangleq [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T,$$
$$y \triangleq [y_1, y_2, \cdots, y_r]^T,\ g \triangleq [g_1, g_2, \cdots, g_r]^T。$$

さてここで，ルジャンドル直交多項式を基にした次元拡大形線形化について考察しよう。まず，定義区間

$$D = \prod_{i=1}^{n}[m_i - p_i,\ m_i + p_i]\ \text{でのルジャンドル重み,}$$
$$w(x) = \prod_{i=1}^{n} w(x_i), \quad w(x_i) = 1/2p_i \quad (p_i > 0)$$

に関する直交多項式系

$$\{\phi_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x)\}_{\nu_1 + \cdots + \nu_n = 0}^{\infty}, \quad \phi_{(0 \cdots 0)}(x) = 1$$

は，各$i(i = 1, \cdots, n)$について1次元ルジャンドル直交多項式，

$$\phi_n(x_i) = \frac{1}{w(x_i)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} U_n(x_i),\ w(x_i) = 1/2p_i > 0$$

ただし，

$$U_n(x_i) = \frac{n!}{2p_i(2n)!}\{(x_i - m_i)^2 - p_i^2\}^n$$

を用いることにより，

$$\begin{aligned}\phi_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) &= \frac{1}{w(x)} \cdot \frac{d^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}}{dx_1^{\nu_1} \cdots dx_n^{\nu_n}} U_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)} \cdot \frac{d^{\nu_i}}{dx_i^{\nu_i}} U_{\nu_i}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \phi_{\nu_i}(x_i)\end{aligned} \tag{2-3}$$

ただし，

$$U_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) = \prod_{i=1}^{n} U_{\nu_i}(x_i)$$

として与えられる。

次に，（2－1）式を用いて（2－3）式の運動方程式を求め，これをさらに（2－3）式の系から張られる関数空間の中へ写像することを考えてみよう。（2－3）式の運動は，

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) &= \frac{\partial \phi_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x)}{\partial x^T} \cdot \dot{x} = \frac{\partial \phi_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x)}{\partial x^T} f(x) \\ &\triangleq f_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x)\end{aligned} \tag{2-4}$$

で規定される。$f_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x)$をフーリエ展開し，$N = \nu_1 + \cdots + \nu_n$次の項まで考慮すれば，

$$f_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) = \sum_{K=0}^{N} \sum_{r_1 + \cdots + r_n = K} a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} \phi_{(r_1 \cdots r_n)}(x)$$

である。ただし，$a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)}$は

$$a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} = \frac{\int_D f_{(\nu_1 \cdots \nu_n)}(x) \phi_{(r_1 \cdots r_n)}(x) w(x) dx}{\int_D \phi_{(r_1 \cdots r_n)}^2(x) w(x) dx}$$
$$\left(\int_D \cdot dx \equiv \int_{m_1 - p_1}^{m_1 + p_1} \cdots\cdots \int_{m_n - p_n}^{m_n + p_n} \cdot dx_1 \cdots dx_n\right)$$

として与えられるフーリエ係数である。

ここで，次の行列とベクトル

$$A \triangleq \begin{bmatrix} a_{(10\cdots0)}^{(10\cdots0)} & a_{(01\cdots0)}^{(10\cdots0)} & \cdots\cdots & a_{(0\cdots01)}^{(10\cdots0)} & \cdots\cdots & a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(10\cdots0)} & \cdots \\ a_{(10\cdots0)}^{(01\cdots0)} & a_{(01\cdots0)}^{(01\cdots0)} & \cdots\cdots & a_{(0\cdots01)}^{(01\cdots0)} & \cdots\cdots & a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(01\cdots0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(10\cdots0)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} & a_{(01\cdots0)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} & \cdots\cdots & a_{(0\cdots01)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} & \cdots\cdots & a_{(r_1 \cdots r_n)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$b \triangleq [a_{(0\cdots0)}^{(10\cdots0)} \quad a_{(0\cdots0)}^{(01\cdots0)} \quad \cdots \quad a_{(0\cdots0)}^{(0\cdots01)} \quad \cdots \quad a_{(0\cdots0)}^{(\nu_1 \cdots \nu_n)} \quad \cdots]^T$$
$$\Phi \triangleq [\phi_{(10\cdots0)} \quad \phi_{(01\cdots0)} \quad \cdots \quad \phi_{(0\cdots01)} \quad \cdots \quad \phi_{(\nu_1 \cdots \nu_n)} \quad \cdots]^T$$

を導入すれば，（2－4）式は

$$\dot{\Phi} = A\Phi + b \tag{2-5}$$

と線形表示される。すなわち，（2－1）式の非線形力学系は，ルジャンドル直交多項式を基にして，形式的に線形力学系へ変換された。一方（2－2）式の非線形観測系に対しても，力学系の場合と同様な，$N = \nu_1 + \cdots + \nu_n$次のフーリエ展開により，

$$y = H\Phi + h_{(0\cdots0)} \tag{2-6}$$

ただし，

$$H \triangleq [h_{(10\cdots0)}\ h_{(01\cdots0)} \cdots h_{(0\cdots01)} \cdots h_{(r_1 \cdots r_n)} \cdots]$$
$$h_{(r_1 \cdots r_n)} = \frac{\int_D g(x) \phi_{(r_1 \cdots r_n)}(x) w(x) dx}{\int_D \phi_{(r_1 \cdots r_n)}^2(x) w(x) dx}$$

と形式的に線形化される。

3．ルジャンドル形オブザーバーの構成

（2－5）式は観測周期T（$T = t_{k+1} - t_k$）ごとの離散表示によって

$$\Phi(\overline{K+1}\,T)=\chi(T)\Phi(KT)+\Delta(T) \qquad (3\text{-}1)$$

ここに，

$$\chi(T)=\exp(AT),\ \Delta(T)=A^{-1}[\exp(AT)-I]b$$

と表わされる。よって（2－6）式，（3－1）式に離散形線形オブザーバー理論が適用できることになり，これによりルジャンドル形オブザーバーが構成できた。次にカルマンフィルタ形オブザーバーゲインを用いたときの推定アルゴリズムを示す。(詳細は参考文献3）参照)

オブザーバーアルゴリズム

0〕 先験値 $\hat{\Phi}_{1|0}$，$C_{1|0}$ を与える。

1〕 m_i，$p_i(i=1,\cdots,n)$，V_K を与える。

2〕 A_K，b_K，H_K，$h_{(0-0)K}$ を求め χ_K，Δ_Kを設定する。

3〕 $K_K=C_{K|K-1}H_K^T[H_KC_{K|K-1}H_K^T+V_K]^{-1}$

4〕 $\hat{\Phi}_{K|K}=\hat{\Phi}_{K|K-1}+K_K[y_K-H_K\hat{\Phi}_{K|K-1}-h_{(0-0)K}]$

5〕 $\hat{x}_{iK}=\hat{\phi}_{(0-\overset{i}{1}-0)K|K}+m_i$

6〕 $C_{K|K}=[I-K_KH_K]C_{K|K-1}$

7〕 $\hat{\Phi}_{K+1|K}=\chi_K\hat{\Phi}_{K|K}+\Delta_K$

8〕 $C_{K+1|K}=\chi_KC_{K|K}\chi_K^T$

9〕 $K=K+1$ として 1〕へ帰る。

$C_{1|0}$と V_K は任意の正定値対称行列である。

4．例題（一機無限大母線系統）

同期機の動揺に対する状態推定問題を，ここでは無限大母線に直結した1機の同期発電機について考察する。この同期機の動揺特性は，負荷角を δ として，

$$M\ddot{\delta}+D\dot{\delta}+P_{em}\sin\delta=P_{in} \qquad (4\text{-}1)$$

で与えられる。ここで，M は慣性定数，D は摩擦係数，P_{em} は最大電気出力，P_{in} は機械入力である。観測としては，無効電力

$$y=1-\cos\delta \qquad (4\text{-}2)$$

を選んだ。

$$x_1=\delta,\ x_2=\dot{\delta},\ a_1=-P_{em}/M,\ a_2=-D/M$$
$$b_1=P_{in}/M$$

とすれば，（4－1），（4－2）式から

$$\text{力学系；}\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=a_1\sin x_1+a_2x_2+b_1\end{cases}$$

$$\text{観測系；}y_k=1-\cos x_{1k}$$

なる状態変数表示式が得られる。

この際，2節による2次元ルジャンドル直交多項式は，

$$\phi_{(00)}=1,\ \phi_{(10)}=x_1-m_1,\ \phi_{(01)}=x_2-m_2$$
$$\phi_{(20)}=(x_1-m_1)^2-p_1^2/3,\ \phi_{(11)}=(x_1-m_1)(x_2-m_2)$$
$$\phi_{(02)}=(x_2-m_2)^2-p_2^2/3,\ \cdots\cdots$$

である。この時，（2－5）及び，（2－6）式に関する具体的な式については，付録を参照されたい。

5．数値実験

上の例題に3節で述べたルジャンドル形オブザーバーを適用する。ここで用いた定数は，

$$M=0.026526\text{(p.u.)},\quad D=0.005\text{(p.u.)}$$
$$P_{em}=1.0\text{(p.u.)},\quad P_{in}=0.8\text{(p.u.)}$$

である。さらに力学系の離散化及び観測周期については，

$$T=1/60\,\text{(sec)},\quad \text{推定区間}\ [0,\ 4.0]\,\text{(sec)}$$

任意の正定値対称行列 $C_{1|0}$, V_k としては，

$$C_{1|0}=0.1I,\quad V_K=10^{-5}$$

を用いた。真値の初期値及びオブザーバーの初期値としては，それぞれ

$$x_{10}=0.6,\ x_{20}=0.2$$
$$\hat{\Phi}_{1|0}=O,$$

また，ルジャンドル重み関数のパラメーターとしては，

$$m_1=1.0,\ m_2=0.0,\ p_1=p_2=0.1$$

を採用した。

なおルジャンドル直交多項式次数 N を1，2，3とした場合の推定状況をグラフに示す。

6．結　論

一般に電力系統は，非線形性のかなり強い系である。5節の系に対して，Fig. 1，2に示すような高い推定精度が得られた。従ってさらにもっと複雑な非線形性の強い系においても，本オブザーバーの効力が有効に発揮できるものと思われる。

本実験においては，重み関数のパラメーター，m,p は固定しているが，推定精度をさらに向上させるために，m,p をそれぞれ時変形にすることなどに関する研究については，今後にまちたい。

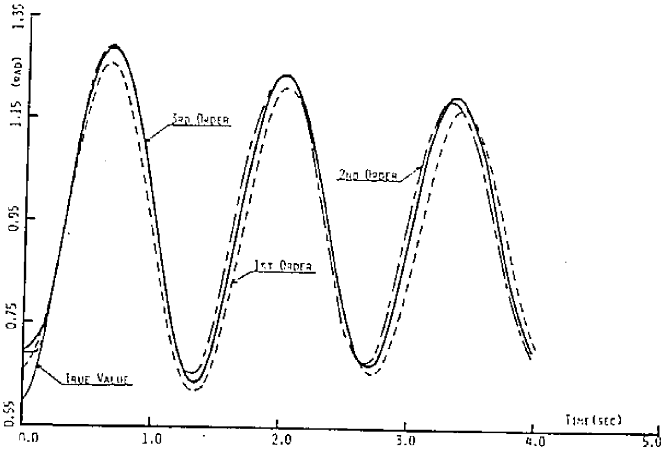

Fig. 1 $\hat{x}_1$ の推定状況

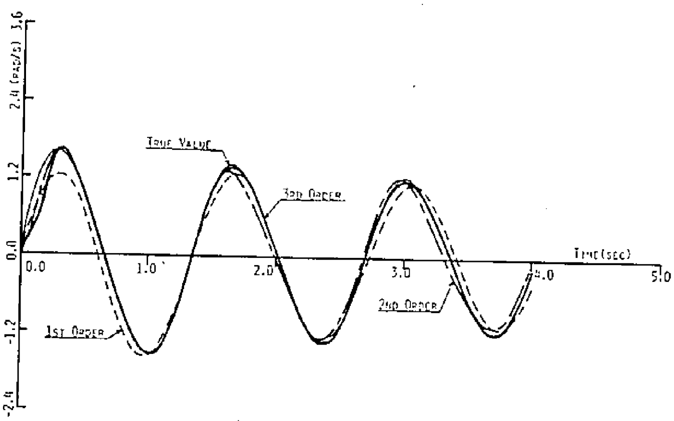

Fig. 2 $\hat{x}_2$ の推定状況

参　考　文　献

1) 高田（等）；非線形微分方程式に対し，線形独立な関数列の導入による連立線形微分方程式への変換，九州工業大学研究報告（工学）No. 35, 1977年9月.

2) 高田（等），中川，吉永，高田（茂）；直交多項式による次元増加形線形化を基にした離散形非線形オブザーバー，昭和53年電気学会全国大会，1078.

3) S. Tsuji, H. Takata, R. Ueda, and S. Takata, "Second-Order Observer for Nonlinear Systems from Discrete Noiseless Measurements", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-22, No. 1, pp. 105/112, 1977.

付　　　録

状態方程式の次元が2次元の場合における，(2-5)，(2-6) 式に関する具体的な表現は次のとおりである。

(1)　$N=1$ の場合（1次近似）

$$\Phi=[\phi_{(10)}\ \ \phi_{(01)}]^T$$

$$A=(a_{ij})\ \ (i,j=1,2),\quad b=(b_i)\ \ (i=1,2)$$

$$H=(h_{1j})\ \ (j=1,2),\quad h_{(00)}=h_0$$

(2)　$N=2$ の場合（2次近似）

$$\Phi=[\phi_{(10)}\ \ \phi_{(01)}\ \ \phi_{(20)}\ \ \phi_{(11)}\ \ \phi_{(02)}]^T$$

$$A=(a_{ij})\ \ (i,j=1\sim5),\quad b=(b_i)\ \ (i=1\sim5)$$

$$H=(h_{1j})\ \ (j=1\sim5),\quad h_{(00)}=h_0$$

(3)　$N=3$ の場合（3次近似）

$$\Phi=[\phi_{(10)}\,\phi_{(01)}\,\phi_{(20)}\,\phi_{(11)}\,\phi_{(02)}\,\phi_{(30)}\,\phi_{(21)}\,\phi_{(12)}\,\phi_{(03)}]^T$$

$$A=(a_{ij})\ \ (i,j=1\sim9),\quad b=(b_i)\ \ (i=1\sim9)$$

$$H=(h_{1j})\ \ (j=1\sim9),\quad h_{(00)}=h_0$$

ただし，

$$\phi_{(30)} = (x_1 - m_1)^3 - p_1^2(x_1 - m_1)3/5$$
$$\phi_{(21)} = [(x_1 - m_1)^2 - p_1^2/3](x_2 - m_2)$$
$$\phi_{(12)} = (x_1 - m_1)[(x_2 - m_2)^2 - p_2^2/3]$$
$$\phi_{(03)} = (x_2 - m_2)^3 - p_2^2(x_2 - m_2)3/5$$

である。また，A，b，H，h の各要素は次のとおりである。

マトリクス　A：

$a_{12} = 1$

$a_{21} = 3a_1 \cos m_1(\sin p_1 - p_1 \cos p_1)/p_1^3$

$a_{22} = a_2$

$a_{23} = 15a_1 \sin m_1 (p_1^2 \sin p_1/2 + 3p_1 \cos p_1/2 - 3\sin p_1/2)/p_1^5$

$a_{26} = 175a_1 \cos m_1/2[(3p_1 - p_1^3/5)\cos p_1 + (6p_1^2/5 - 3)\cdot\sin p_1]/p_1^7$

$a_{31} = 2m_2$

$a_{34} = 2$

$a_{41} = a_2 m_2 + b_1 + 3a_1 \sin m_1(p_1^2 \sin p_1 + 2p_1 \cos p_1 - 2\sin p_1)/p_1^3$

$a_{42} = m_2$

$a_{43} = 45a_1 \cos m_1(3 - p_1^2/3)\cos p_1/2/p_1^4 + 45a_1 \cos m_1(4p_1^2/3 - 3)\sin p_1/2/p_1^5$

$a_{44} = a_2$

$a_{45} = 1$

$a_{46} = 175[(4p_1^4/5 - 108p_1^2/5 + 48)a_1 \sin m_1 \sin p_1 + (28p_1^3/5 - 48p_1)a_1 \sin m_1 \cos p_1]/8/p_1^7$

$a_{52} = 2(a_1 \sin m_1 \sin p_1 + a_2 m_2 p_1 + b_1 p_1)/p_1$

$a_{54} = 6a_1 \cos m_1(\sin p_1 - p_1 \cos p_1)/p_1^3$

$a_{55} = 2a_2$

$a_{57} = 45a_1 \sin m_1[(p_1^2/3 - 1)\sin p_1 + p_1 \cos p_1]/p_1^5$

$a_{62} = 2p_1^2/5$

$a_{63} = 3m_2$

$a_{67} = 3$

$a_{71} = 2p_2^2/3 + 2a_1 \cos m_1(9 - p_1^2)\cos p_1/p_1^2 + 2a_1 \cos m_1(4p_1^2 - 9)\sin p_1/p_1^3$

$a_{73} = 5a_1 \sin m_1[(p_1^4 - 24p_1^2 + 54)\sin p_1 + (6p_1^3 - 54p_1)\cos p_1]/p_1^5 + a_2 m_2 + b_1$

$a_{74} = 2m_2$

$a_{76} = 175a_1 \cos m_1[(-8p_1^5/15 + 144p_1^3/5 - 240p_1)\cos p_1 + (24p_1^4/5 - 544p_1^2/5 + 240)\sin p_1]/8/p_1^7$

$a_{77} = a_2$

$a_{78} = 2$

$a_{81} = 2a_2 p_2^2/3$

$a_{82} = 4p_2^2/15 + 2a_1 \cos m_1(-p_1 \cos p_1 + \sin p_1)/p_1$

$a_{84} = 6a_1 \sin m_1[(p_1^2 - 2)\sin p_1 + 2p_1 \cos p_1]/p_1^3 + 2m_2 a_2 + 2b_1$

$a_{85} = m_2$

$a_{87} = a_1 \cos m_1[(-15p_1^2 + 135)\cos p_1/p_1^4 + (60p_1^2 - 135)\sin p_1/p_1^5]$

$a_{88} = 2a_2$

$a_{89} = 1$

$a_{91} = 6a_1 p_2^2 \cos m_1(-p_1 \cos p_1 + \sin p_1)/5/p_1^3$

$a_{92} = 6a_2 p_2^2/5$

$a_{93} = 9a_1 p_2^2 \sin m_1[(p_1^2/3 - 1)\sin p_1 + p_1 \cos p_1]/p_1^5$

$a_{95} = 3(a_1 \sin m_1 \sin p_1/p_1 + a_2 m_2 + b_1)$

$a_{96} = 35a_1 p_2^2 \cos m_1[(-p_1^3/5 + 3p_1)\cos p_1 + (6p_1^2/5 - 3)\sin p_1]/p_1^7$

$a_{98} = 9a_1 \cos m_1(-p_1 \cos p_1 + \sin p_1)/p_1^3$

$a_{99} = 3a_2$

他はすべて 0。

ベクトル　b：

$b_1 = m_2$

$b_2 = (a_1 \sin m_1 \sin p_1 + p_1 b_1 + p_1 a_2 m_2)/p_1$

$b_4 = p_2^2/3 + a_1 \cos m_1(\sin p_1 - p_1 \cos p_1)/p_1$

$b_5 = 2a_2 p_2^2/3$

$b_6 = 2m_2 p_1^2/5$

$b_7 = 2a_1 \sin m_1[(p_1^2/3 - 1)\sin p_1 + p_1 \cos p_1]/p_1$

$b_9 = 2a_1 p_2^2 \sin m_1 \sin p_1/5/p_1 + 2a_2 m_2 p_2^2/5 + 2b_1 p_2^2/5$

他は 0。

マトリクス　H：

$h_{11} = 3\sin m_1(\sin p_1 - p_1 \cos p_1)/p_1^3$

$h_{13} = \cos m_1(-15p_1^2 \sin p_1/2 - 45p_1 \cos p_1/2 + 45\sin p_1/2)/p_1^5$

$h_{16} = 35\sin m_1[(-4p_1^3 + 60p_1)\cos p_1 + (24p_1^2 - 60)\sin p_1]/8/p_1^7$

他は 0。

ベクトル　h：

$h_0 = 1 - \cos m_1 \sin p_1/p_1$

ただし，表記法は Fortran 形式に従った。