モーダルアナリシスとその応用
（第１報）　概念とシステム開発

（昭和56年５月30日　原稿受付）

機械工学教室　竹内芳美
機械工学教室　坂本正史
機械工学教室　池崎八生
〃　（大学院）　菅原琢己
〃　（大学院）　宮武浩

Modal Analysis and its Application
(1st Report) Concept and Development of the System

by Yoshimi TAKEUCHI
Masafumi SAKAMOTO
Yatsuo IKEZAKI
Takumi SUGAWARA
Hiroshi MIYATAKE

Abstract

The dynamic behavior of machine tool structure has a significant influence upon the quality of finished work piece in all machining. Therefore, it is important to identify or analyze the dynamic characteristics of the machine tool in order to evaluate its capability. Among dynamic testing methods, impulse response method, that is, Modal Analysis has been become more important with the recent progress of digital data processing technique, which allows the analysis to be completed in a short time without any special equipment of exitation.

As the fundamental study of Modal Analysis, the analysis system has been developed, where analog signals of force and acceleration are picked up, translated into digital signals, and then stored in a floppy disk of a micro computer (SORD M 223) with 10 bits signal. The data stored in the micro computer are transmitted to MELCOM computer through telephone communication line. In MELCOM computer, the data are fast-Fourier-transformed. Further, transfer function, resonant frequencies, damping ratios and modal parameters are determined together with Bode diagram or Vector locus drawn on CRT display or plotter.

1. 序　論

工作機械の動特性は機械の性能を評価する上で重要であり，動特性に関する研究は従来から多数行なわれている。

実際に，工作機械の加工能力は仕様書通りに発揮されることは希で，多くの場合は振動現象により工作機械の加工能力が規定される[1]。そのため，この限界を使用者が知って工作機械を能率的に運用することはきわめて有効なことである。

現在，工作機械の動的な挙動を設計段階で予測することは非常に困難であるので，工作機械を製作してから実際に動特性を測定し，改善すべき箇所を発見する方法が一般的である。量産機械の場合でも，試作機について動特性を測定し，改良を加えたとしても接合部分の減衰特性の再現性が悪いために同等な挙動を他の量産機が示すと

は限らない。したがって工作機械の動特性は個々の工作機械において調べる必要がある。

この動特性の解析には，いくつかの方法がある。第一は正弦波形加振力を用いて解析するもので，現在最も広く実用に供されている。これは正弦波形の試験用加振力を用いて，問題とする範囲内で周波数をゆっくりと連続的に，または小さなステップで変え，変位と力の振幅の関係・位相の関係を調べ，結果をボード線図やベクトル軌跡の形で表わすものである。この方法には，加振機の取り付けによる質量的影響を無視できない，あるいは，測定の際に被測定物を振動させるため大がかりとなる，などの問題がある。

第二はランダム加振力を用いた解析方法で，この方法も正弦波加振力と並んで今日，よく用いられるようになってきた。以前はアナログ式のスペクトル解析装置を用いていたため，解析時間の面などで実用的でなかったが今日ではディジタル高速フーリェ変換などの導入によりミニコンを組み込んだシステムとして実用化されている。しかしながら，この方法も性能のよい加振機やミニコンを使用することから実験が手軽であるとは言い難い。

最後にインパルス加振力を用いた解析方法があげられこれは，ランダム加振力法と同様に近年の高速フーリェ変換などに見られるディジタルデータ処理技術の進歩によって注目を浴びてきた解析方法である。加振力がインパルスであるため，大がかりな加振機を必要とせず，ハンマで打つだけでよい。このため，実験の段取りが少なく，また加振機の取り付けによる構造への影響がなく，手軽に測定結果が得られる，といった特徴をもつが，現在使われている解析システムはミニコンを主体としたものでシステムが高価であるという難点がある。

このインパルス加振法の長所はそのままに，ミニコンを用いることなく，最近の高性能なマイコンや汎用機器を用いてシステムが構成できれば低価格のシステムが実現でき，より手軽に動特性解析が行なえるようになり，その貢献度は大きいものとなる。

このような背景から今回，マイコンと情報教育センターを電話回線で結んだ解析システムを開発したので，その理論とシステムについて報告する。

2．理論的背景

2.1．モーダルアナリシス

モーダルアナリシスとは次の一連の操作をいう。

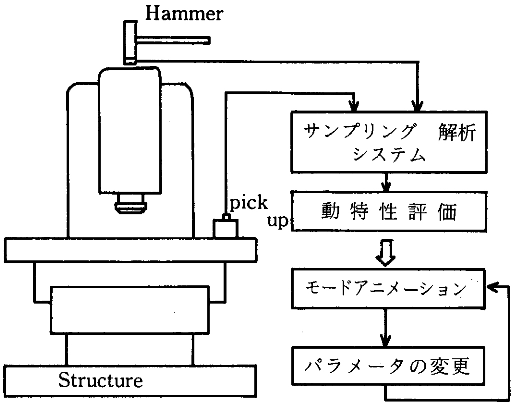
(1)対象物をハンマで加振して，その加振力と応答の2つの過渡信号を同時に記録する。

(2)その2つの信号をフーリェ変換し，周波数領域における信号に変換する。さらに伝達関数を求める。

(3)測定された伝達関数にパラメータ化した伝達関数の式を対応させ，各パラメータの決定を行なう。

(4)決定したパラメータを利用してモードのアニメーション化を行なったり，等価質量・等価ばね定数・等価減衰比を推定する。

さらにはパラメータの変更を試み，再び系の挙動をシミュレートすることにより，系の構造変更や次の設計への情報とすることが可能となる。これらの手順を図-1に示す。



図－1　モーダルアナリシスの手順

次に系の運動方程式のマトリクス表現を考えると次式のようになる。

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\} \qquad (1)$$

但し，$[M]$：質量マトリクス
$[C]$：減衰マトリクス
$[K]$：剛性マトリクス
x：絶対座標系
$\{f\}$：力のベクトル

ここで式(1)は互いに連成した運動方程式とみることができる。

今，この$[M]$，$[C]$，$[K]$の各マトリクスを同時に対角化するマトリクス$[Q]$が存在すれば，すなわち

$$[Q]^T[M][Q]=\lceil m \rfloor$$
$$[Q]^T[C][Q]=\lceil c \rfloor$$
$$[Q]^T[K][Q]=\lceil k \rfloor$$

但し，$\lceil\ \rfloor$は対角マトリクス
さらに次のような書き換えをする。

$$\{x\}=[Q]\{z\}$$
$$[Q]^T\{f\}=\{f^*\}$$

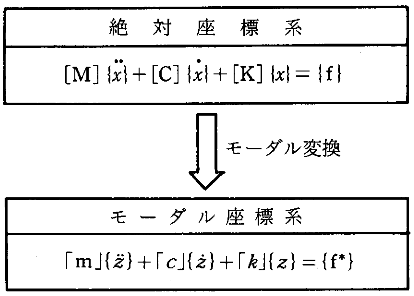
このようにすると式(1)は次のように変形できる。

$$\lceil m \rfloor\{\ddot{z}\}+\lceil c \rfloor\{\dot{z}\}+\lceil k \rfloor\{z\}=\{f^*\} \qquad (2)$$

但し，$\lceil m \rfloor$：モーダル質量マトリクス
$\lceil c \rfloor$：モーダル減衰マトリクス
$\lceil k \rfloor$：モーダル剛性マトリクス
z ：モーダル座標
$\{f^*\}$：力のベクトル

式(2)は明らかに非連成方程式である。

このように〝絶対座標系に存在する連成運動方程式をモーダル座標系に存在する非連成運動方程式に変換する″ことが運動方程式上から見た，モーダルアナリシスである。この概略を図-2に示す。



図－２　座標の変換

2.2. 系のモーダル表現

本節では系の運動方程式を変換し，モーダル表現を試みる。[2)]

簡単のため，系の自由度を有限個数nに拘束してn自由度系の〝非減衰系″，〝減衰系″の各々について考える。

2.2.1 非減衰系

n自由度のマトリクス運動方程式は次式で表わせる。

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \qquad (3)$$

周期外力による応答を求めるために

$$\{f(t)\}=\{F\}e^{i\omega t}$$
$$\{x(t)\}=\{X\}e^{i\omega t}$$

とおくと式(3)は次のように表わせる。

$$[-\omega^2[M]\{X\}+[K]\{X\}]=\{F\} \qquad (4)$$

$\{F\}=0$ すなわち，式(4)の同次式を考える。

$$\omega^2[M]\{X\}=[K]\{X\} \qquad (5)$$

式(5)は固有値問題と考えることができる。固有値をω_{nk}とすると，これは非減衰系の固有振動数を表わす。また対応する固有ベクトルを$\{\phi_k\}$とすると，これは実ノーマルモードを表わす。モードの直交性より，

$$\{\phi_k\}[M]\{\phi_l\}=\begin{cases}0 & (k\neq \ell)\\ m_k & (k=\ell)\end{cases} \qquad (6)$$

$$\{\phi_k\}[K]\{\phi_l\}=\begin{cases}0 & (k\neq \ell)\\ k_k & (k=\ell)\end{cases} \qquad (7)$$

但し，m_k：モーダル質量
k_k：モーダル剛性

非減衰系の固有振動数ω_{nk}は

$$\omega_{nk}=\sqrt{\frac{k_k}{m_k}} \qquad (8)$$

さらに $[\phi]=[\{\phi_1\}\{\phi_2\}\cdots\cdots\{\phi_n\}]$ とし，これをモーダルマトリクスと呼ぶ。これにより$[M]$，$[K]$は対角化される。すなわち，

$$[\phi]^T[M][\phi]=\lceil m \rfloor$$
$$[\phi]^T[K][\phi]=\lceil k \rfloor \qquad (9)$$

と書ける。一方，

$$\{X\}=[\phi]\{z\} \qquad (10)$$

なる$\{z\}$を考える。これはモーダル座標の列ベクトルである。すなわち，モーダルマトリクス$[\phi]$は系の座標Xをモーダル座標zへ変換する変換マトリクスと見ることができる。この変換マトリクス$[\phi]$は元の式，式(4)の解の特性を変えない。

次に式(10)を式(4)に代入して，

$$-\omega^2[M][\phi]\{z\}+[K][\phi]\{z\}=\{F\} \qquad (11)$$

$[\phi]^T$を左からかけると

$$-\omega^2[\phi]^T[M][\phi]\{z\}+[\phi]^T[K][\phi]\{z\}=[\phi]^T\{F\} \qquad (12)$$

式(6)，式(7)の直交性を考慮して，

$$\lceil -\omega^2\lceil m \rfloor+\lceil k \rfloor \rfloor\{z\}=[\phi]^T\{F\} \qquad (13)$$

これはn個の非連成方程式を表わす。
式(13)より$\{z\}$は

$$\{z\}=\lceil -\omega^2\lceil m\rfloor+\lceil k\rfloor\rfloor^{-1}[\psi]^T\{F\} \tag{14}$$

モーダル座標系から式(10)を考慮して，系の座標 $\{X\}$ が次のように得られる。

$$\{X\}=[\psi]\lceil -\omega^2\lceil m\rfloor+\lceil k\rfloor\rfloor^{-1}[\psi]^T\{F\} \tag{15}$$

または，

$$\{X\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\{\psi_k\}\{\psi_k\}^T\{F\}}{-\omega^2 m_k+k_k}$$

または，

$$\{X\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\{\psi_k\}\{\psi_k\}^T\{F\}}{k_k\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right]} \tag{16}$$

2.2.2 減衰系

n 自由度の減衰系マトリクス運動方程式は次式で表わせる。

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{17}$$

一般に，この $[M]$, $[C]$, $[K]$ を同時に対角化できる実数マトリクスは存在しない。すなわち，式(17)は実変換マトリクスでは非連成な形に変換できない。

そこで考え方を拡張し，複素モードの存在を考える。

$$[M]\{\dot{x}(t)\}-[M]\{\dot{x}(t)\}=\{0\} \tag{18}$$

を導入すると，次式のマトリクス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix}[C] & [M]\\ [M] & \lceil 0\rfloor\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{x}\}\\ \{\ddot{x}\}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[K] & \lceil 0\rfloor\\ \lceil 0\rfloor & -[M]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{x\}\\ \{\dot{x}\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{19}$$

ここで，$[A]=\begin{bmatrix}[C] & [M]\\ [M] & \lceil 0\rfloor\end{bmatrix}$，$[B]=\begin{bmatrix}[K] & \lceil 0\rfloor\\ \lceil 0\rfloor & -[M]\end{bmatrix}$，

$$\{y\}=\begin{Bmatrix}\{x\}\\ \{\dot{x}\}\end{Bmatrix}\quad,\ \{p\}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}$$

と定義すると，式(19)は次のように表わせる。

$$[A]\{\dot{y}\}+[B]\{y\}=\{p\} \tag{20}$$

$\{p\}=\{0\}$ すなわち，式(20)の同次式を考える。

$$[A]\{\dot{y}\}+[B]\{y\}=\{0\} \tag{21}$$

今，

$$\{y\}=\{Y\}e^{\lambda t} \tag{22}$$

として，式(22)を式(21)へ代入すると，

$$\lambda[A]\{Y\}=-[B]\{Y\} \tag{23}$$

剛性マトリクス $[K]$ が正則ならば，$[B]$ の逆マトリクスは存在する。($[K]$ が正則でない時，剛体モードが存在する。) そのとき式(23)は，次のようになる。

$$[E]\{Y\}=\frac{1}{\lambda}\{Y\} \tag{24}$$

ここで　$[E]=-[B]^{-1}[A]$

$$=\begin{bmatrix}-[K]^{-1}[C] & -[K]^{-1}[M]\\ \lceil I\rfloor & \lceil 0\rfloor\end{bmatrix}$$

但し，「I」：単位マトリクス

この式から得られる 2 n 個の固有値は，安定な減衰系では負の実数，あるいは負の実部をもつ複素数となる。もし，複素固有値となるなら，それらは共役な他の値をもつ。その複素固有値を λ_k, $\bar{\lambda}_k$ とすると，

$$\lambda_k=\mu_k+i\nu_k,\quad \bar{\lambda}_k=\mu_k-i\nu_k \tag{25}$$

各固有値に対応する固有ベクトルを $\{\Phi_k\}$ とすると，$\{\Phi_k\}$ は 2 n 個の成分をもち，$2n$ 個存在する。

次に次式で表わせる複素マトリクス $[\Phi]$, 対角マトリクス「Λ」を考える。

$$[\Phi]=[\{\Phi_1\}\{\Phi_2\}\cdots\{\Phi_{2n}\}]$$

「Λ」= 対角項は複素固有値

上式を用いると式(23)は

$$[A][\Phi]\lceil\Lambda\rfloor=-[B][\Phi] \tag{26}$$

と表わせる。$[\Phi]^T$ を左からかけて

$$[\Phi]^T[A][\Phi]\lceil\Lambda\rfloor=-[\Phi]^T[B][\Phi] \tag{27}$$

$[A]$, $[B]$ は対称，「Λ」は対角マトリクスであるから，

$$\lceil\Lambda\rfloor[\Phi]^T[A][\Phi]=-[\Phi]^T[B][\Phi] \tag{28}$$

式(27)，式(28)より，

$$[\Phi]^T[A][\Phi]\lceil\Lambda\rfloor=\lceil\Lambda\rfloor[\Phi]^T[A][\Phi] \tag{29}$$

ここで固有値 λ_k が異なれば，$[\Phi]^T[A][\Phi]$ は対角マトリクスとなり，式(27)より $[\Phi]^T[B][\Phi]$ も対角マトリクスとなる。すなわち，

$$\begin{aligned}[\Phi]^T[A][\Phi]&=\lceil a\rfloor\\ [\Phi]^T[B][\Phi]&=\lceil b\rfloor\end{aligned} \tag{30}$$

と表わせる。これは $[A]$, $[B]$ は同じマトリクス $[\Phi]$ によって対角化されているに他ならない。また，式(27)から「a」,「b」は正規化マトリクスとして示される。すなわち，

$$\lceil a\rfloor\lceil\Lambda\rfloor=-\lceil b\rfloor$$

故に

$$\lceil\Lambda\rfloor=-\lceil a\rfloor^{-1}\lceil b\rfloor \tag{31}$$

次に $[\Phi]$ をシステム座標 $\{Y\}$ とモーダル座標 $\{z\}$ とを関連づける変換マトリクスとして

$$\{Y\}=[\Phi]\{z\} \tag{32}$$

とおく。式(20)について，周期外力による応答を求めるために，

$$\{p\}=\{P\}e^{i\omega t}, \quad \{y\}=\{Y\}e^{i\omega t}$$

とすると，式(20)は

$$i\omega[A]\{Y\}+[B]\{Y\}=\{P\} \tag{33}$$

式(32)を式(33)に代入，左より$[\Phi]^T$をかけると，

$$i\omega[\Phi]^T[A][\Phi]\{z\}+[\Phi]^T[B][\Phi]\{z\}=[\Phi]^T\{P\}$$

式(30)より

$$\lceil i\omega\lceil a\rfloor+\lceil b\rfloor\rfloor\{z\}=[\Phi]^T\{P\} \tag{34}$$

モーダル座標$\{z\}$は

$$\{z\}=\lceil i\omega\lceil a\rfloor+\lceil b\rfloor\rfloor^{-1}[\Phi]^T\{P\} \tag{35}$$

システム座標$\{Y\}$は

$$\{Y\}=[\Phi]\lceil i\omega\lceil a\rfloor+\lceil b\rfloor\rfloor^{-1}[\Phi]^T\{P\} \tag{36}$$

ここで$\{Y\}$を元に戻す。すなわち

$$\{Y\}=\begin{Bmatrix}\{X\}\\ \{\dot{X}\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{X\}\\ \lambda\{X\}\end{Bmatrix} \tag{37}$$

また，マトリクス$[\Phi]$は次のように細分できる。

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}[\psi] & [\bar{\psi}]\\ [\psi]\lceil\Lambda\rfloor & [\bar{\psi}]\lceil\bar{\Lambda}\rfloor\end{bmatrix} \tag{38}$$

但し，$\lceil\Lambda\rfloor$：虚部が正である対角マトリクス

$[\psi]$：モーダル変位の複素ベクトルからなる複素モーダルマトリクス

$\lceil\bar{\Lambda}\rfloor$, $[\bar{\psi}]$：$\lceil\Lambda\rfloor$, $[\psi]$の複素共役マトリクス

式(36)，(37)，(38)より

$$\begin{Bmatrix}\{X\}\\ \lambda\{X\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\psi] & [\bar{\psi}]\\ [\psi]\lceil\Lambda\rfloor & [\bar{\psi}]\lceil\bar{\Lambda}\rfloor\end{bmatrix}\cdot\lceil i\omega\lceil a\rfloor+\lceil b\rfloor\rfloor^{-1}\begin{bmatrix}[\psi] & [\bar{\psi}]\\ [\psi]\lceil\Lambda\rfloor & [\bar{\psi}]\lceil\bar{\Lambda}\rfloor\end{bmatrix}^T\{P\}$$

上式の上側n個の成分に注目すると

$$\{X\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\{\psi_k\}\{\psi_k\}^T\{F\}}{i\omega a_k+b_k}+\frac{\{\bar{\psi}_k\}\{\bar{\psi}_k\}^T\{F\}}{i\omega\bar{a}_k+\bar{b}_k}\right] \tag{39}$$

但し，a_k：$\lceil a\rfloor$ の上側n個の成分

$\bar{a}_k$：$\lceil a\rfloor$ の下側n個の成分

b_k：$\lceil b\rfloor$ の上側n個の成分

$\bar{b}_k$：$\lceil b\rfloor$ の下側n個の成分

一方，式(31)より

$$\lambda_k=-b_k/a_k, \quad \bar{\lambda}_k=-\bar{b}_k/\bar{a}_k \tag{40}$$

式(40)を式(39)に代入

$$\{X\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\{\psi_k\}\{\psi_k\}^T\{F\}}{a_k(i\omega-\lambda_k)}+\frac{\{\bar{\psi}_k\}\{\bar{\psi}_k\}^T\{F\}}{\bar{a}_k(i\omega-\bar{\lambda}_k)}\right] \tag{41}$$

式(41)で表わされた形が系のモーダル表現である。

2.3 モーダルパラメータの誘導

2.3.1 伝達関数のパラメータ化

式(41)より，1つの成分を取り出して

$$\frac{X_i}{F_j}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\psi_{ik}\ \psi_{jk}}{a_k(i\omega-\lambda_k)}+\frac{\bar{\psi}_{ik}\ \bar{\psi}_{jk}}{\bar{a}_k(i\omega-\bar{\lambda}_k)}\right] \tag{42}$$

但し，j 点は加振点，i 点は変位の測定点

のように表わす。ここで

$$\lambda_k=\mu_k+i\nu_k \qquad \bar{\lambda}_k=\mu_k-i\nu_k \tag{43}$$

とおくと，パラメータ μ_k，ν_kは各々，減衰係数，減衰固有振動数を表わす。

また，式(30)の直交条件よりψ_{ik}，ψ_{jk}，a_kには相互関係がある（任意の2変数が決まれば他の1つも決まる）から，

$$\frac{\psi_{ik}\ \psi_{jk}}{a_k}=U_{ijk}+iV_{ijk} \tag{44}$$

$$\frac{\bar{\psi}_{ik}\ \bar{\psi}_{jk}}{\bar{a}_k}=U_{ijk}-iV_{ijk} \tag{45}$$

とおくと，ψ_{ik}，ψ_{jk}，$\bar{\psi}_{ik}$，$\bar{\psi}_{jk}$ はモーダル変位の複素ベクトル成分であるから，パラメータ U_{ijk}，V_{ijk}はj点を加振したときのi点の振幅を表わしたものとなる。これらU_{ijk}，V_{ijk}は振幅パラメータの実数部・虚数部と呼ばれる。

以上のことを考慮して，式(42)を書き換えると

$$\frac{X_i}{F_j}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{U_{ijk}+iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega-\nu_k)}+\frac{U_{ijk}-iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega+\nu_k)}\right] \tag{46}$$

のように表わせる。

さらに次のことが定義される。

固有値λ_k，$\bar{\lambda}_k$の大きさは固有振動数を表わす。すなわち，式(43)より固有振動数ω_{0k}は

$$\omega_{0k}=\sqrt{\mu_k^2+\nu_k^2} \tag{47}$$

減衰比ζ_kは

$$\zeta_k=\frac{-\mu_k}{\omega_{0k}}=\frac{-\mu_k}{\sqrt{\mu_k^2+\nu_k^2}} \tag{48}$$

2.3.2 Inertia effect と Residual flexibility

今までは系の自由度を有限個nに限定して議論を進めてきたが，実際に取り扱われる系は有限自由度ではなく，

無限自由度をもった連続体である。すなわち，式(46)で$n\to\infty$とした式

$$\frac{X_i}{F_j}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{U_{ijk}+iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega-\nu_k)}+\frac{U_{ijk}-iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega+\nu_k)}\right] \tag{49}$$

で取り扱われるべきである。しかし，それは不可能であるし，その必要もない。そこで系の自由度を限定し，問題とする周波数領域について解析を行ない，それ以下，以上の領域については残余の項を用いて近似することにより，計算精度を上げることを考える。

解析を試みようとする周波数領域を$[\omega_s,\ \omega_e]$とすると，その前後の領域は$[\,0,\ \omega_s]$，$[\omega_e,\ \infty]$である。よって式(49)は

$$\frac{X}{F}=\sum_{k=1}^{\infty}=\sum_{0\to\omega_s}+\sum_{\omega_s\to\omega_e}+\sum_{\omega_s\to\infty} \tag{50}$$

と書き換えられる。

このうち，解析を試みる領域$[\omega_s,\ \omega_e]$にn個の共振点が存在するとき，その項は式(46)の右辺に帰着できる。また，$\sum_{0\to\omega_s}$は解析を試みる周波数域より低次のモードの寄与を，$\sum_{\omega_e\to\infty}$は高次のモードの寄与を表わす。ここで，

$$\sum_{0\to\omega_s}=-\frac{1}{M_{ij}\omega^2}\ :\ \text{Inertia effect}$$

$$\sum_{\omega_e\to\infty}=S_{ij}\qquad :\ \text{Residual flexibility}$$

とおく。

以上より式(46)は

$$\frac{X_i}{F_j}=-\frac{1}{M_{ij}\omega^2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{U_{ijk}+iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega-\nu_k)}+\frac{U_{ijk}-iV_{ijk}}{-\mu_k+i(\omega+\nu_k)}\right]+S_{ij} \tag{51}$$

と表わせる。

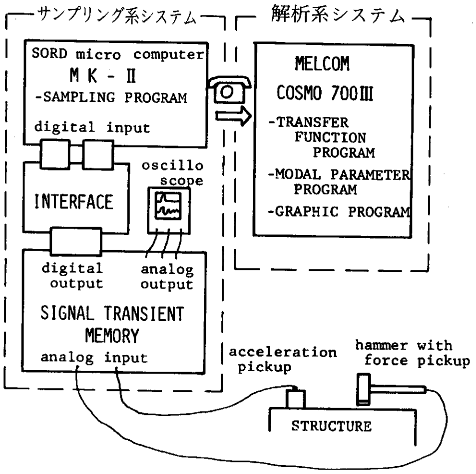
ここに誘導されたμ_k，ν_k，U_{ijk}，V_{ijk}，M_{ij}，S_{ij}を総称して，モーダルパラメータという。

3．モーダルアナリシスシステム

3.1．システムの構成

本研究では加振力と応答から系の伝達関数・共振周波数・減衰比及び先に誘導したモーダルパラメーターを決定するシステムを開発した。

本システムは，「サンプリング系システム」と「解析系システム」に分けられる。サンプリング系システムでは加振力と応答の2つの過渡信号をA－D変換・サンプリングして、自作のインターフェースを介してマイクロコンピューター（SORD M223 mark II,以下MK-IIと略す）のミニフロッピーディスクに取り込む。一方，解析系システムではサンプリングされたデータを周波数領域のデータに変換し，伝達関数等を求める。また，結果のグラフ表示を行なう。システムの構成図を図-3に示す。



図－3　モーダルアナリシスシステムの構成

3.2．サンプリング系システム

図-3を参照して各ブロックの機能について述べる。

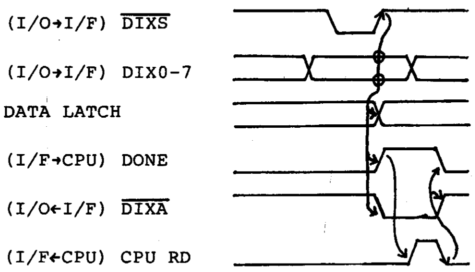
(1) SIGNAL TRANSIENT MEMORY (S. T. M.)

各ピックアップより得られた加振力と応答の2つのアナログ信号はここでA－D変換・サンプリングされ，メモリーに蓄えられる。このデータは指定した入力レンジに応じて10ビットの分解能（0～1023の整数値）でディジタル出力される。また，アナログ出力部には波形観察用のオシロスコープを接続してある。

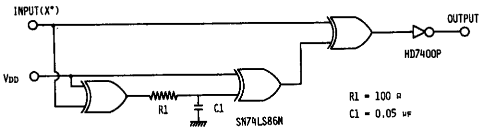
(2) インターフェース

これはS. T. M. のディジタル出力ポートとMK-IIのディジタル入力ポートを接続するもので，ピンの変換とMK-IIへ入力するための信号を作り出す役目をもつ。MK-II側では外部機器からのデータ送信信号（ストローブ信号）を確認した後，データ信号を取り込み，その後にデータ要求信号（アック信号）を出力して次のデータを要求する。このタイミングチャートを図-4に示す。今回使用したS.T.M. にはアック・ストローブ信号を認識したり，出力したりする機能がないのでインターフェー

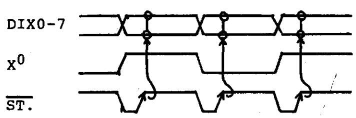
スを自作し，MK-IIのタイミングに合致するストローブ信号を作り出した。これは，S.T.M. より出力されるアドレスデータの最下位ビット（0，1，0，1，…の繰り返し）に着目し，それを2倍の周波数にした後，反転して作ったものである。この回路図を図-5に，そのタイミングチャートを図-6に示す。また，アック信号はデータ出力の間隔を十分にとることで無視した。



図－4　SORD MK-II
入力ポート・タイミングチャート



図－5　インターフェース回路図



図－6　インターフェース
ストローブ信号出力タイミングチャート

(3)　マイクロコンピュータ（MK-II）

"SAMPLING PROGRAM"を用いて，以下の処理を行なう。このプログラムはすべてBASIC言語を用いて書かれている。

(i)　データ入力ポートのコントロール

(ii)　S.T.M. の極性モードの指定に応じた，データの変換すなわち，極性モード（＋）(力)の場合は，

$F(I)$＝入力データ値

（0～1023の1024段階）

極性モード（－）(加速度）の場合は，

$X(I)$＝入力データ値－512

（－512～511の1024段階）

この変換は力の場合は正の値のみ，加速度の場合は正負の値をもつために行なうものである。

(iii)　S.T.M. の入力レンジの指定に応じたデータの単位の換算

力の場合，入力レンジを　$R_A(V)$　とすると変換定数 R_A^* は，

$$R_A^* = \frac{2R_A \times 1000 \times 0.453}{10.33 \times 1023}$$

但し，10.33はピックアップの電圧感度 (mV/lb)，2は(＋)モードの係数，1000×0.453は1 b/mVをkg/Vに変換する定数，1023は10ビットの分解能である。よって力の値 $F^*(I)$ (kg) は

$$F^*(I) = R_A^* \times F(I)$$

で得られる。

加速度の場合，入力レンジを $R_B(V)$ とすると変換定数 R_B^* は，

$$R_B^* = \frac{R_B \times 1000 \times 9.8}{69.8 \times 1023}$$

但し，69.8はピックアップの電圧感度（mV/G)，1000×9.8はG/mV をm/s^2Vに変換する定数である。よって加速度の値 $X^*(I)(m/s^2)$ は

$$X^*(I) = R_B^* \times X(I)$$

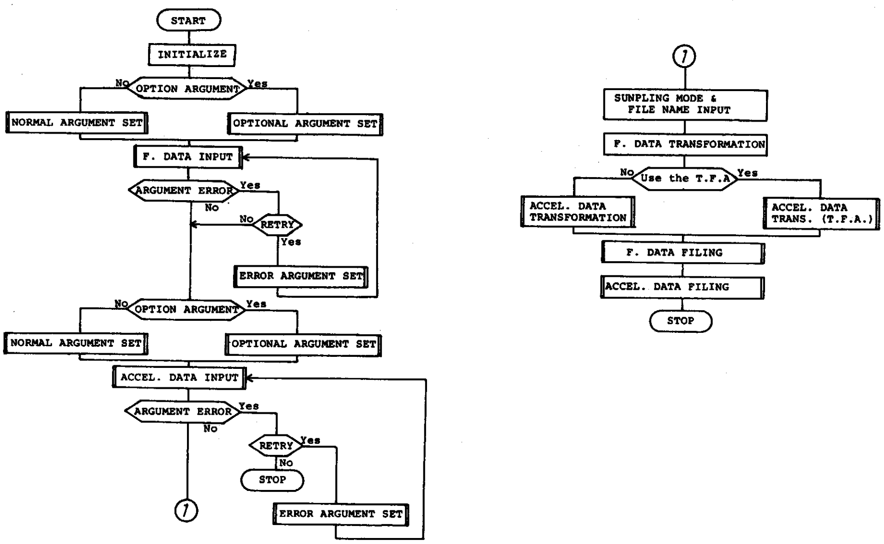
で得られる。

(iv)　力・加速度データの計算機センター (MELCOM) への転送

解析プログラムではFORTRAN を使用したため，データ入力には書式の統一が必要であり，FORTRAN用データに直した後ディスクにファイルする。

本プログラムのフローチャートを図-7に示す。

ファイルされた各データは電話回線を通して本学情報処理センターへ転送され，次の解析系システムで用いられる。



図－7 "SAMPLING PROGPAM" フローチャート

3.3. 解析系システム

転送されたデータは，MELCOM COSMO 700Ⅲで

"TRANSFER FUNCTION PROGRAM" - TFP と略す。

"MODAL PARAMETER PROGRAM" - MPP と略す。

の 2 つの解析プログラムを用いて,以下の処理を行なう。

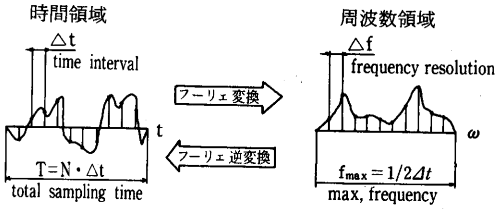
3.3.1. TRANSFER FUNCTION PROGRAM

(1) フーリェ変換；MK - Ⅱより転送された，力・加速度のデータに高速フーリェ変換[3]を施すことにより，データを時間領域から周波数領域へ変換する。解析可能な周波数分解能 Δf や最大周波数 f_{max} はサンプリング時の条件によって決まる。すなわち，サンプリシグのタイムインターバルを Δt，トータルサンプリングタイムを T とすると，サンプリング定理より，

$$f_{max}=\frac{1}{2\Delta t}\ ,\quad \Delta f=\frac{1}{T}$$

となる。尚，時間領域と周波数領域の関係を図- 8 に示す。

(2)伝達関数；(1)で得られた値よりコンプライアンス（変位/力)，メカニカルインピーダンス（力/速度）を算出する。これとコンプライアンスのグラフより共振の個数，ピークのチャンネルを選ぶ。これは次のプログラムのデータとなる。このプログラムのフローチャートを図 - 9 に示す。



図－8 データの変換

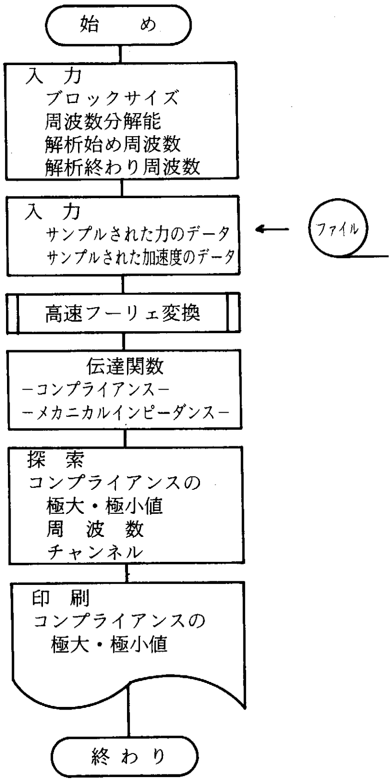
3.3.2. MODAL PARAMETER PROGRAM

(1)共振周波数，チャンネル，減衰比；TFP で得た情報より各値を算出する。

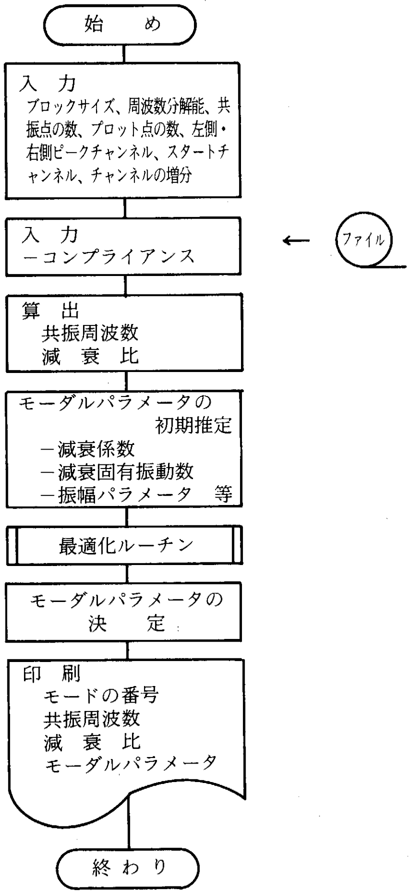
(2)モーダルパラメータの初期推定；共振周波数・減衰比との関係（式 (47)，(48)）から μ_k，ν_k を求める。さらに U_{ijk}，V_{ijk}，M_{ij}，S_{ij} を求める。

(3)モーダルパラメータの決定；最適化ルーチンを用いてモーダルパラメータの最終値を決定する。最適化ルーチンとはコンプライアンスの測定値とモーダルパラメータより計算した値との 2 乗誤差が小さくなるよう，パラメータを繰り返し変動させて決定するものである。

さらに MELCOM の図形処理ライブラリーを用いて伝達関数等のディスプレイ・プロッタ出力が可能である。このプログラムのフローチャートを図-10に示す。



図－9　"TRANSFER FUNCTION PROGRAM" フローチャート



図－10　"MODAL PARAMETER PROGRAM" フローチャート

4．結　論

系の動特性を簡便に解析できるモーダルアナリシスのシステムを開発し，システムとして確実に機能することが確かめられた。このシステムを用いて動特性評価の情報となる伝達関数・共振周波数・減衰比などを容易に得ることができる。さらに各モードに対するモーダルパラメータが解析的に求められる。

謝　辞

本研究に多大な協力をいただいた中央大学・大久保信行助教授に，また，実験機材等に便宜をはかっていただいた機械工学科・陣内靖介教授，荒木嘉昭講師，渡辺徹助手に感謝致します。

参 考 文 献

1）M. Weck, K. Teipel 著，稲崎一郎訳：工作機械動特性の測定と評価，マシニスト出版（1979.10）
2）Patrick Van Loon : Modal Parameters of Mechanical Structures, Dissertation Katholieke Univestiteit Leuven (1974)
3）宮川洋ほか1名：高速フーリェ変換，科学技術出版社（1978）