

モーダルアナリシスとその応用 (第2報) 機械構造への適用

(昭和57年5月31日 原稿受付)

機械工学教室 竹 内 芳 美
坂 本 正 史
池 崎 八 生
宮 武 浩

Modal Analysis and its Application (2nd Report) Application to Actual Structures

by Yoshimi TAKEUCHI
Masafumi SAKAMOTO
Yatsuo IKEZAKI
Hiroshi MIYATAKE

Abstract

A vibration in machining is undesirable, especially in precise machining because it frequently results in the deterioration of machining accuracy. Therefore, it is of importance to grasp the dynamic behavior of machine tool structures.

As a method to easily identify dynamic characteristics of structures, the modal analysis method, based on an impulse technique, is recently being watched with keen interest. The concept and development of the modal analysis system with a personal computer was previously reported.

This paper deals with a processing procedure and several applications to structure analysis. A cantilever is in the first place subjected to test in order to compare experimental results with theoretical ones. Next, the system is applied to determine resonance frequencies, damping ratios, modal parameters, transfer function and mode shapes of actual structures such as a workpiece attached to the chuck of a lathe and a radial drilling machine. From the results it is confirmed that the modal analysis system has advantages of investigating structure dynamics.

1. 序 論

機械構造の動特性は、その性能を評価する上で重要である。

第1報¹⁾では、近年、動特性解析に強力な手法となりつつある“モーダルアナリシス”について、その概念とシステム開発について報告した。モーダルアナリシスを適用する手順は、

- (1) 対象物をハンマで加振して、その加振力と応答を同時に記録する。
- (2) その2つの信号を高速フーリエ変換により、周波数

成分の信号に変換する。

- (3) 伝達関数(コンプライアンス:変位/力)を求める。という非常に簡便なものである。また、測定データの処理は、サンプリング系システムと解析系システムの2つのプログラムにより実行される。前者のサンプリング系システムでは、加振力・応答の各信号のサンプリング、データの次元化、及びそのファイル化が行なわれ、後者の解析系システムにおいては、データの周波数領域への変換、伝達関数の計算、固有振動数等の計算が行なわれる。

本報では、前報のシステムを実際に適用して簡単な一

様はりを加振実験し、システムの有効性を検証する。さらに、実機への適用として旋盤の主軸系、ラジアルボール盤へ応用した例を示す。

なお、前報では解析に情報センターの計算機 MELCOM COSMO 700 を用いていたため、パーソナルコンピュータを使うサンプリング系システムから解析系システムへは、電話回線を利用してデータを転送していた。しかし、現在では、プロッタ等の導入により全ての処理を本研究室のパーソナルコンピュータベースで実現している。

2. システムの詳細と検定

本章では、検定モデルとして一様な“はり”の加振実験を行ない、理論解と比較しつつ、その有効性を示すとともに合わせて処理手順の説明をする。

2.1. 使用機器

以下に、本システムで使用した機器とその機能を示す。

- パーソナルコンピュータ SORD M223 mark II (MK-II と略す) (SORD社) : サンプリングとデータ解析に用いる。また、これによりデジタル I/O, プロッタをコントロールする。
- シグナル・トランジェント・メモリ (S.T.M. と略す) (IMV社) : 指定した時間でデータの 2 ch. 同時 A/D 変換, サンプリングを行なう。
- インターフェース : S.T.M. → MK-II 間のインターフェース (10ビットのデータ転送とストロブ信号の発生)
- 力センサ (Piezotoronic 社) : 加振力信号の検出。ハンマヘッドの重量により 10.4 mV/1b, 9.53 mV/1b, 9.01 mV/1b の 3 種類の感度が得られる。
- 加速度センサ (Piezotoronic 社) : 応答信号の検出 (感度 98.8 mV/G)。
- オシロスコープ [松下電器] : サンプリング波形のモニタ用
- X-Y プロッタ : 周波数応答曲線などのグラフ出力

図-1 にシステムのブロック線図を、写真-1 にその全景を示す。

2.2. 検定モデル

検定モデルとして、一様丸棒はりを選び、それについての加振実験を行なった。そのモデル図を図-2 に示す。

用いた“はり”は外径 15 mm, 全長 305 mm の一様丸棒で、一端を固定して片持ちはりとした。

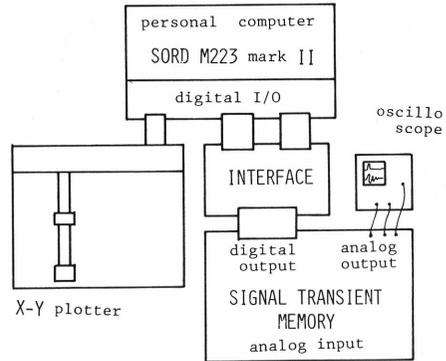


図-1 システムのブロック線図

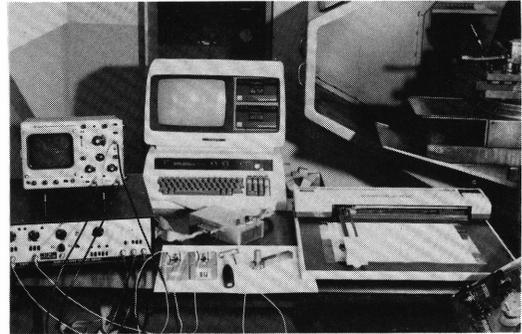


写真-1 システムの全景

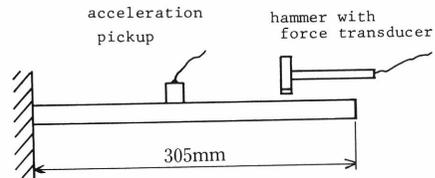


図-2 はりの検定モデル

2.3. サンプリング

本システムではデータの総数 $N = 1024$ は S.T.M. の容量により拘束されているのでデフォルト値としてセットされている。そのため、入力すべき情報はトータルサンプリングタイム T , 加振力・応答各信号の入力レンジ電圧 $R_a \cdot R_b$, 及びデータセーブ時のファイル名である。

今回の実験では、

$$T = 204.8 \text{ msec.}$$

$$R_a = 0.2 \text{ volt.} \quad R_b = 2.0 \text{ volt.}$$

とした。したがってサンプリング定理より、周波数分解能 Δf 、タイムインターバル Δt 、最大解析周波数 f_{max} は次のように決定される。すなわち、

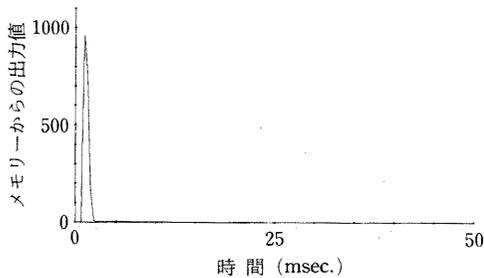
$$\Delta f = \frac{1}{T} = 4.88 \text{ Hz}$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} = 0.2 \text{ msec.}$$

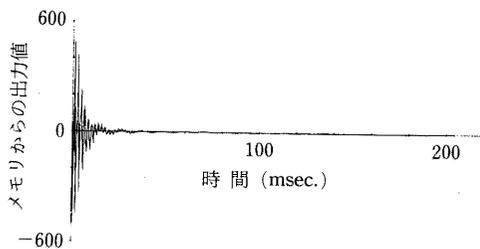
$$f_{max} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = 2500 \text{ Hz}$$

である。

図-3に加振力・応答のサンプリングデータの1例を示す。加振実験を行なう際、A/D変換で高い分解能を得るためにはピックアップからの信号は入力レンジ電圧を越えることなく、フルスケールに近い値で入力されることが望ましい。



(a) 力の時間変化



(b) 加速度の時間変化

図-3 はりモデルのインパルス加振とその応答の測定例

2.4. 高速フーリエ変換と伝達関数

サンプリングされた時間領域のデータは次式により、伝達関数(コンプライアンス：変位/力)に変換される。

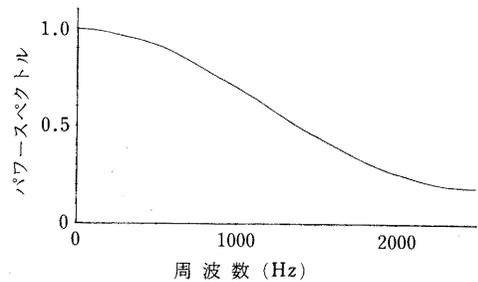
$$\frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt}{\int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt} \quad (2.1)$$

但し、 $\frac{X(\omega)}{F(\omega)}$ ：コンプライアンス

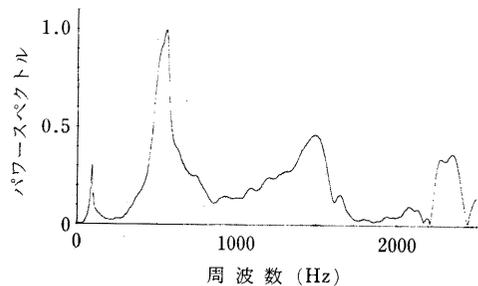
$x(t)$ ：時間領域の応答データ

$f(t)$ ：時間領域の加振力データ

しかし、実際にサンプリングされるデータは有限個なデジタル量であるから、データを離散的高速フーリエ変換 (FFT) により周波数領域へ変換し、対応する周波数において変位を力で除算することによりコンプライアンスの計算を実現している。(結果として $N/2 = 512$ 個ずつの実部データと虚部データが得られる。)



(a) 力のスペクトル



(b) 加速度のスペクトル

図-4 FFTによる力と加速度のパワースペクトル (最大値で正規化)

図-3に示した、力と加速度のサンプリングデータをFFTにより変換した結果とコンプライアンスを図-4、図-5に示す。

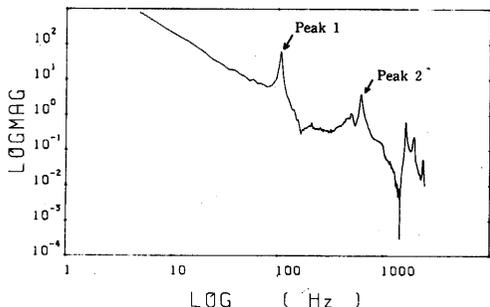


図-5 はりモデルのコンプライアンス

図-5より2個の共振点が存在するのが分かる。

各モードにおける固有振動数 ω_n 、減衰比 ζ は図-6に模式的に示されるような ω_L 、 ω_R から式 (2.2), (2.3) を用いて推定される。すなわち、

$$\omega_n = \frac{\omega_R + \omega_L}{2} \quad (2.2)$$

$$\zeta \approx \frac{\omega_R - \omega_L}{2\omega_n} \quad (2.3)$$

ここで ω_R 、 ω_L は図-7に示す“はり”モデルの伝達関数であるコンプライアンスの複素成分中の実部における各ピークに対応する。 $(\omega_L$ は左側ピーク、 ω_R は右側ピークの角振動数である。) この ω_R 、 ω_L を決定するため、コンプライアンスの実部の極大値・極小値の探索を行なう。その探索ルーチンのプログラムリストを図-8に示す。

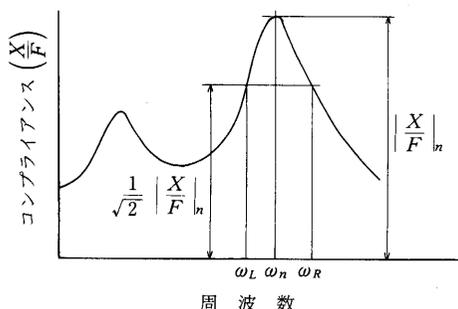


図-6 共振点と振幅の関係

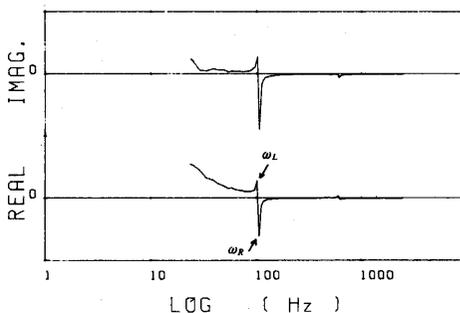


図-7 はりモデルのコンプライアンスの複素表示

```

100 REM SUBROUTINE SEARCH
110 REM
120 FOR I = C1 TO C2
130 FOR J = 1 TO 9
140 LET K = I+J-6
150 LET D9(J) = T(K)
160 NEXT J
170 FOR J = 1 TO 5
180 LET U = 0
190 FOR K = 1 TO 5
200 LET L = J+K-1
210 LET V = U+D9(L)
220 NEXT K
230 LET D5(J) = U-V
240 NEXT J
250 REM
260 LET G1 = 1.5*(D5(3)-D5(2))+0.5*(D5(2)-D5(1))
270 LET G2 = 1.5*(D5(5)-D5(4))+0.5*(D5(4)-D5(3))
280 LET G = G1*G2
290 LET C3 = I-1
300 IF G >= 0 THEN GOTO 350
310 IF G1 > 0 THEN GOTO 340
320 GOSUB 390
330 GOTO 350
340 GOSUB 470
350 NEXT I
360 RETURN
370 REM
380 REM
390 REM SUB. MIN. VALUE
400 PRINT #6, TAB(8); "MIN. ";
410 PRINT #6 USING "###.#####"; D9(5);
420 PRINT #6 USING "##### Hz"; F3;
430 PRINT #6 USING "##### ch. "; C3
440 RETURN
450 REM
460 REM SUB. MAX. VALUE
470 PRINT #6, TAB(8); "MAX. ";
480 PRINT #6 USING "###.#####"; D9(5);
490 PRINT #6 USING "##### Hz"; F3;
510 PRINT #6 USING "##### ch. "; C3
520 RETURN
NO END MARK
    
```

図-8 サブルーチンSEARCHのプログラムリスト

このプログラムにおいて C1, C2 は探索する周波数レンジの始めと終わりのチャンネル、^(脚注)T(k)はコンプライアンスの実部である。また、D9(J)、D5(J)は抽出した実部とそれに重みをつけ、平滑化した値である。結果として、極値は D9(5)に、また、その時の周波数及びチャンネルが F3, C3 に入っている。これらの情報をもとに、先の式 (2.2), (2.3) を用いて固有振動数・減衰比の計算を行なう。

(脚注) 周波数=周波数分解能*チャンネルなる関係をもつ。

さらに,

$$\omega_n^2 = \mu^2 + \nu^2 \quad (2.4)$$

$$\zeta = \frac{-\mu}{\omega_n} \quad (2.5)$$

但し, ω_n : 固有振動数 (固有値)

μ : 減衰係数 (固有値の実部)

ν : 減衰固有振動数 (固有値の虚部)

なる関係を用いてモーダルパラメータの減衰係数, 減衰固有振動数が推定される。(実際は $\mu = -\zeta \cdot \omega_n$, $\nu = \sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}$ で計算される。)

検定モデルの加振実験データに基づいて, 上記の関係から得られた結果を図-9に示す。

```

***** EIGEN VALUE *****
FILE NAME      = C:1
RESOLUTION OF FREQUENCY = 4.68
Maximum FREQUENCY   = 2580

# Mode 1 #
Eigen value      = 674.95
Eigen frequency  = 107.42
Damping ratio    = 0.0909
Decay rate       = -61.359
Damped natural freq. = 672.16
Measured Compliance
Place No.       = 1
REAL            = -3.4863E 01
IMAG            = 50.4369E 00
MAG             = 61.3543E 00

# Mode 2 #
Eigen value      = 3926.99
Eigen frequency  = 625.60
Damping ratio    = 0.0234
Decay rate       = -92.039
Damped natural freq. = 3925.91
Measured Compliance
Place No.       = 1
REAL            = 16.5024E-02
IMAG            = 38.2113E-01
MAG             = 38.2470E-01

```

図-9 検定モデルの解析結果

2.5. 理論解との比較

本節では, 加振実験で得た固有振動数を非減衰片持ちはりの曲げ振動として解析した理論解と比較, 検討する。曲げ剛性が一定な分布定数振動系の運動方程式は,

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

但し, EI : はりの曲げ剛性

ρ : はりの密度

A : はりの断面積

はりの定常状態を考え, $y = u(x) \sin \omega t$ を式 (2.6) に代入して, 整理すると

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \beta^4 u = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{但し, } \beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$$

一般解は

$$u = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (2.8)$$

但し A, B, C, D は境界条件によって決まる定数

境界条件は, 自由端においてモーメント=0, せん断力=0。固定端において, たわみ=0, 傾き=0であるから,

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_{x=l} = 0 \quad (2.9)$$

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.10)$$

が成り立つ。

式 (2.9), (2.10) を考慮して, 式 (2.11) が導かれる。

$$1 + \cos \beta l \cdot \cosh \beta l = 0 \quad (2.11)$$

式 (2.11) を解くと i 次の固有振動数は, 式 (2.12) のように求まる。

$$\omega_i = \frac{(\beta_i l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

or

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{(\beta_i l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.12)$$

但し, $(\beta_1 l)^2 = 3.516$, $(\beta_2 l)^2 = 22.035$

$(\beta_3 l)^2 = 61.697$, ……

式 (2.12) を用いて, 検定モデルの1~3次の固有振動数を計算すると以下のようなになる。

1次: 115 Hz

2次: 726 Hz

3次: 2033 Hz

これに比べ, 測定で得た固有振動数は

1次: 107 Hz

2次: 625 Hz

であり, 1次では近い値をとっているが, 一般には低い値をとる。これは実際の振動系が, その固定端等において減衰特性をもつのに対し, 理論解ではそれらを考慮していないためである。特に高い振動数になるほどその影響は大きくなり, 理論値と測定値はずれる。これより,

系の構造が複雑になり、多くの接合部をもつ場合、その部分の減衰特性により理論値よりさらに低くなることが予想される。

3. 実機への応用

本章ではモーダルアナリシス・システムを工作機械の動特性解析に応用した例を示す。さらに多点測定によって推定したモード図を合わせて示す。

3.1. 旋盤主軸系の動特性解析

主軸系の動特性解析例として、図-10に示すような円筒型ワークの加振実験を行った。

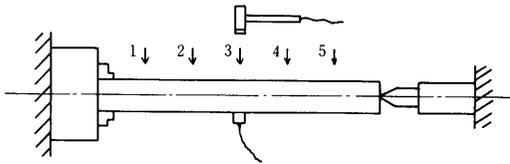


図-10 旋盤主軸系のモデル図

この場合の測定条件は、

トータルサンプリングタイム $T = 204.8 \text{ msec}$.

周波数分解能 $\Delta f = 4.88 \text{ Hz}$

加振点：5点（ほぼ等間隔、図中の点1～5）

加速度ピックアップの位置：中央

一端：チャック固定

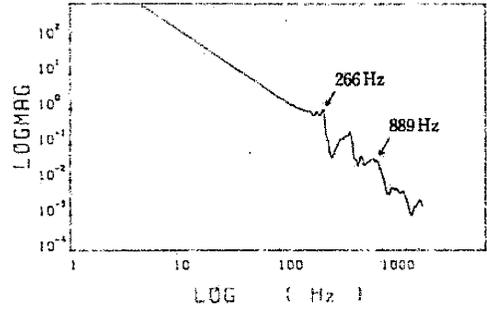
他端：センタ支持

ワークの寸法：全長455 mm，外径32 mm

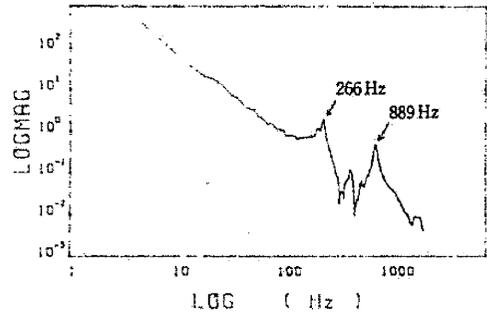
である。

加振実験での、“加振点-ピックアップ”間の伝達関数曲線を図-11(a)～(e)に示す。この図より2つのピークが認められる。その固有振動数は、 $f_1 = 266 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 889 \text{ Hz}$ である。但し(d)においては $f_2 = 889 \text{ Hz}$ でのピークが現われていない。これより、この測定点は f_2 のモードでは節に相当すると推察される。

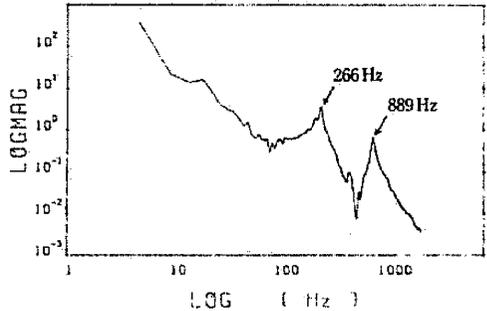
測定によって得た固有振動数はワーク自身のもつ固有振動数に比べ低い値となっている。これは主軸系支持部のベアリング等による、“ばね特性”、“減衰特性”の影響が現われているからである。



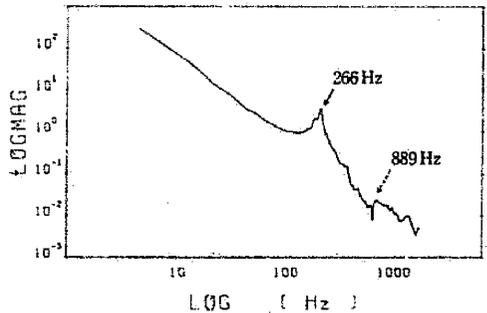
(a) 点1におけるコンプライアンス



(b) 点2におけるコンプライアンス

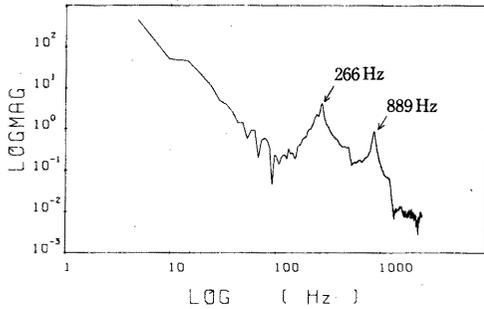


(c) 点3におけるコンプライアンス



(d) 点4におけるコンプライアンス

図-11 主軸系の伝達関数



(e) 点5におけるコンプライアンス

図-11 主軸系の伝達関数

また、多点測定により得たモード図を図-12に示す。両端固定という支持法にもかかわらずセンタ側で変位がみられるのは、チャック側のような強い拘束力がないので実際には一端固定のようになっていると思われる。

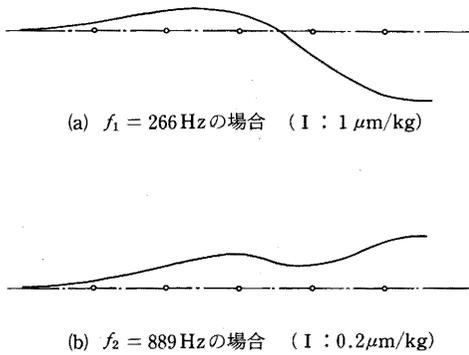


図-12 主軸系のモード図
(左側：チャック，右側：センタ)

3.2. ラジアルボール盤

測定に使用したラジアルボール盤を図-13に示す。また、これをモデル化したものを図-14に示すが、図中の番号(1)~(6)はハンマによる加振点を、矢印はハンマの加振方向を表わす。加速度ピックアップは*印の位置に固定した。(振動は面内で起こっているとしている。)

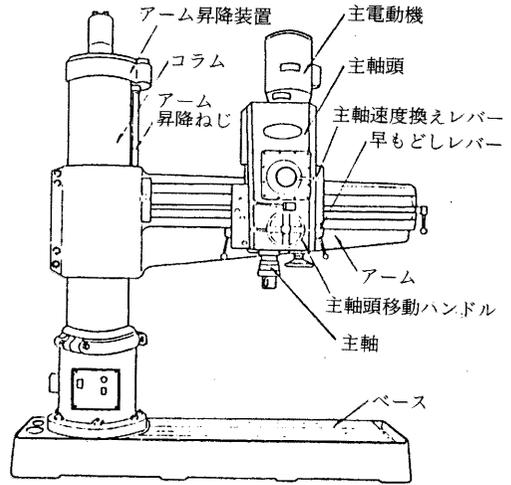


図-13 供試ラジアルボール盤図

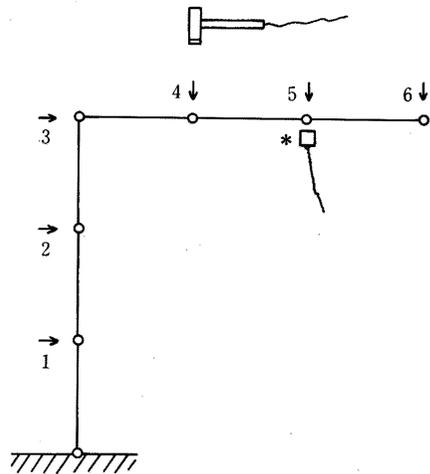


図-14 ラジアルボール盤のモデル図

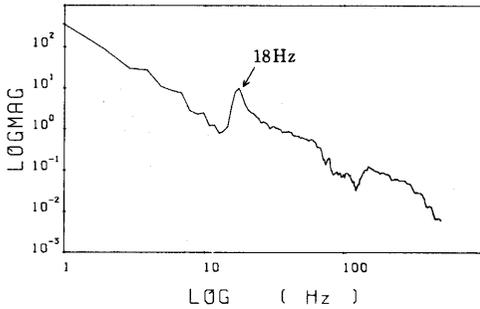
測定条件は、

トータルサンプリングタイム $T = 1024 \text{ msec.}$

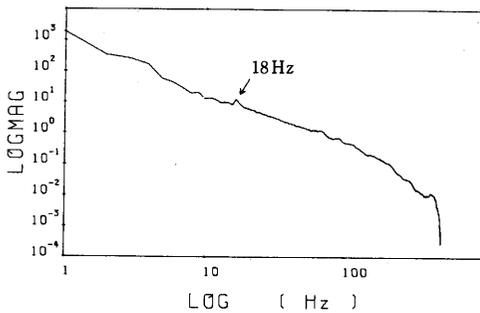
周波数分解能 $\Delta f = 0.98 \text{ Hz}$

である。

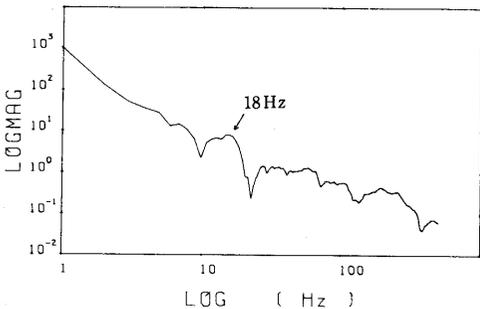
この測定によって得た加振点 3, 4, 6 とピックアップ間の伝達関数曲線を図-15(a)~(c)に、また、加振点 3 におけるコンプライアンスの複素成分を図-16に示す。



(a) 点3におけるコンプライアンス



(b) 点4におけるコンプライアンス



(c) 点6におけるコンプライアンス

図-15 ラジアルボール盤の伝達関数

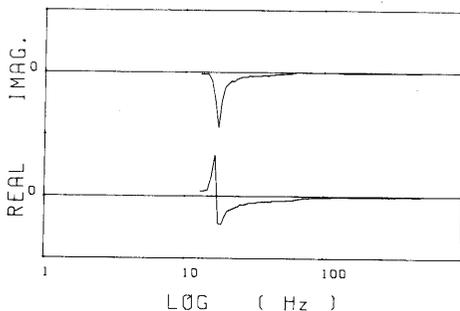


図-16 コンプライアンスの複素表示

1次モードでの解析結果は、固有振動数18 Hz, 減衰比0.135であった。ラジアルボール盤のような大きな構造系は低域の振動数で共振することがわかる。

4. 結論

本研究によって以下の結論を得た。

1. 従来、ミニコンピュータベースで行なわれていたモーダルアナリシスをパーソナルコンピュータベースで実現し、系の動特性を簡便に推定できるシステムを構築した。プログラムは、コンパイラ型 BASIC 言語で作成しており、処理速度の面からも十分実用に耐え得る。

2. 工作機械等、実機への適用も十分可能である。

3. 多点測定を行なうことにより、構造物の固有モード形が容易に推定できる。

今後、グラフィック機能を備えたパーソナルコンピュータを本システムに接続し、CRT ディスプレイ上で振動モードのアニメーションを行わせ、動変形の特徴を視覚的に表現することを計画している。

謝 辞

S.T.M. の使用で便宜を図って下さった、機械工学教室陣内靖介教授・荒木嘉昭助教授に、また、力・加速度センサを快よくお貸し下さっている、東京大学工学部佐田登志夫教授に心から感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 竹内芳美他4名：モーダルアナリシスとその応用(第1報)概念とシステム開発, 九州工業大学研究報告(工学)第43号(1981) p. 1~9