

任意の点に摩擦力が作用する弾性体の自励振動

(昭和59年11月29日 原稿受付)

機械工学第二学科	中	島	国	継
機械工学第二学科	荒	木	嘉	昭
機械工学第二学科	陣	内	靖	介

The Self-Excited Oscillations of Elastic Beam
with a Frictional Force on an Arbitrary Position

by Kunitsugu NAKASHIMA
Yoshiaki ARAKI
Yasusuke JINNOUCHI

Abstract

This paper deals with the self-excited oscillations of an elastic beam with a frictional force on an arbitrary position. The system consists of a rotating cantilever with length l supported by a slider bearing at arbitrary position b/l . To analyze the system including multiple modes of oscillation, three different types of mechanical models are established, i.e. one-degree-of-freedom model, one dimensional finite difference model and two dimensional finite difference model. The dynamic behaviours of self-excited oscillations are analyzed theoretically applying the method of averaging and numerically by use of the method of Runge-Kutta-Gill for one degree-of-freedom model and Willson- θ Method for the finite difference models.

The analyses yield the following results:

- (1) The influences of the magnitude and position of frictional force and also of the internal and external damping upon the generation of self-excited oscillations are obtained.
- (2) Although there exist multiple solutions in the theoretical analysis, there generates only one mode of oscillation in the experiment. The mode of oscillation which actually generates is obtained by the numerical analysis of the finite difference models.

1. 序 論

負減衰効果を持つ摩擦力の作用する1自由度系の自由自励系は、亘理ら¹⁾、高野ら²⁾の研究がある。井上ら³⁾は、周期的外力の作用する1自由度系の強制自励系を解析し、引き込み現象について述べている。著者ら⁴⁾はボイラの管群の清浄装置であるスーツ・プロアのように中間すべり支持したオーバハング回転軸をモデルとして、分布定数系の強制自励系の振動について自励振動の発生条件ならびに引き込み現象を理論解析によって求め、実験結果と比較した。

本研究では、弾性体の摩擦による自励振動について、高次の振動モードを含めた自励振動の発生条件を求める

ため、任意の点に摩擦力が作用する弾性梁(図-1)を3種の解析モデルを用いて解析する。すなわち、文献(4)で用いた等価1自由度モデル(図-2a)、1次元差分モデル(b)、2次元差分モデル(c)である。

これらの3つのモデルを用いて平均法による理論解析を行い、また等価1自由度モデルにルンゲ・クッタ・ギル法を、1次元、2次元差分モデルにはウィルソン- θ 法⁵⁾を適用し数値解析を行う。そうして摩擦力の作用する質点の位置、摩擦特性、内部減衰、外部減衰などの各種パラメータが自励振動の発生へ与える影響を求めるとともに発生域における各振動モード相互の優位性を調べる。

2. 理論解析

2.1. 系のモデル化

解析モデルを図-1に示す。弾性梁は、角速度 ω で回転し、固定端より l_0 の位置で中間支持される。図-2 aの等価1自由度モデルは、図-1の弾性体モデルにガラーキン法を適用し、外部減衰を考慮したものである。図-2 bの1次元差分モデルは、弾性体の解析モデルを有限個の集中質量を剪断ばねで接続したモデルであり、また、質量のない曲げ剛性を持つ板ばねで集中質量を接合したものが、図-2 cの2次元差分モデルである。両差分モデルとも図では省略したが、内部減衰、外部減衰を考慮する。摩擦力は、任意のk番目の質点に作用するものとする。各質点の変位はy方向のみと考える。

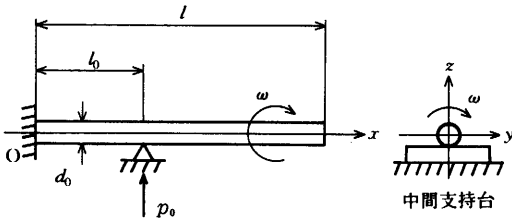


図-1 解析モデル

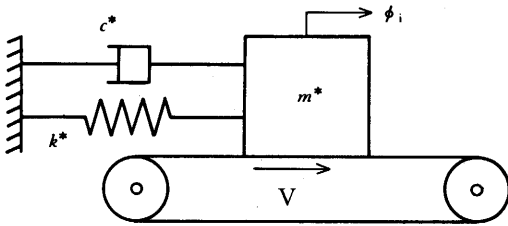


図-2 a 等価1自由度モデル

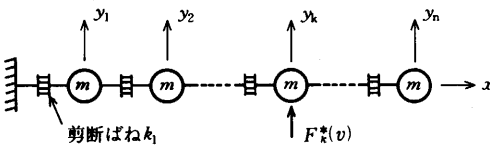


図-2 b 1次元差分モデル

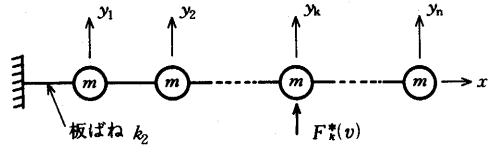


図-2 c 2次元差分モデル

2.2. 運動方程式

等価1自由度モデルの理論解析は文献(4)と同様なので、本報は、差分モデルにおける理論解析を示す。1次元差分モデルと2次元差分モデルの運動方程式は次式で表される。

$$M^* \ddot{y}^* + (C_{in}^* + C_{ex}^*) \dot{y}^* + K_1^* y^* = F^* \tag{1}$$

ここで

$$M^* = \begin{bmatrix} m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m \end{bmatrix}, \quad F^* = \begin{bmatrix} 0 \\ P_0 \mu^*(V_z^* - y_k^*) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{in}^* + C_{ex}^* = \begin{bmatrix} 2C_{in} + C_{ex} & -C_{in} & & 0 \\ -C_{in} & 2C_{in} + C_{ex} & -C_{in} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -C_{in} & 2C_{in} + C_{ex} & -C_{in} \\ 0 & & -C_{in} & C_{in} + C_{ex} \end{bmatrix} \tag{2}$$

M^* : 質量マトリックス, C_{in} : 内部減衰係数, C_{ex} : 外部減衰係数とする。摩擦力は k番目の質点に作用し、摩擦係数 $\mu^*(v)$ は V_z^* を軸の外周速度とし次式で示すようにすべり速度 v の3次関数で近似する。

$$v = V_z^* - y^*$$

$$\mu^*(v) = av^3 + bv^2 + cv + d \tag{3}$$

1次元差分モデルの剛性マトリックスは

$$K_1^* = \begin{bmatrix} 2k_1 & -k_1 & & \\ -k_1 & 2k_1 & -k_1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_1 & 2k_1 & -k_1 \\ 0 & & & -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

である。

2次元差分モデルの剛性マトリックスは影響係数法を用いて求める。

$$K_2^* = k_2 \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

$$k_2 = 6EI/(l/n)^3$$

影響係数 g_{ij} は、次のようになる。

$$g_{ij} = \begin{cases} j^3(i/j-3)(i/j)^2 & (0 \leq i \leq j) \\ j^3(3(1-i/j)-2) & (j \leq i \leq n) \end{cases}$$

さらに、 $\tau = \omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{k_i/m}$, $y = y^*/l$, $\zeta_{in} = c_{in}/c_c$, $\zeta_{ex} = c_{ex}/c_c$ とおいて(1)式を無次元化すると

$$y'' + (C_{in} + C_{ex})y' + K_2 y = F \quad (6)$$

$$C_{in} + C_{ex} = \begin{bmatrix} 4\zeta_{in} + 2\zeta_{ex} & -2\zeta_{in} & & 0 \\ -2\zeta_{in} & 4\zeta_{in} + 2\zeta_{ex} & -2\zeta_{in} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\zeta_{in} & 4\zeta_{in} + 2\zeta_{ex} & -2\zeta_{in} & \\ 0 & -2\zeta_{in} & 2\zeta_{in} + 2\zeta_{ex} & \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \mu (V_z - y'_k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし $F_0 = P_0/m \omega_n^2 l$, $V_z = V_z^*/\omega_n l$

$$\mu(V) = AV^3 + BV^2 + CV + D$$

$$A = a(l\omega_n)^3, \quad B = b(l\omega_n)^2$$

$$C = c l \omega_n, \quad D = d$$

である。

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(8)

$$K_2 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

1次元差分モデルと2次元差分モデルの固有値と固有モードを次に示す。

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(9)

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{in} \\ X_{21} & X_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

(6)式の両辺に左から X_i^T を掛け、 $y = X_i \varphi$ の変換を行うと運動方程式は

$$\varphi' + A_i \varphi = X_i^T (-C_{in} + C_{ex}) y' + F \quad (10)$$

(10)式よりS次モードの運動方程式は

$$\varphi''_s + \lambda_s \varphi_s = P_s \varphi_s^3 + Q_s \varphi_s^2 + R_s \varphi_s + T_s \quad (11)$$

ただし

$$P_s = -F_0 \mu'''(V_z) X_{ks}^4 / 6$$

$$Q_s = F_0 \mu''(V_z) X_{ks}^3 / 2$$

$$R_s = -(2\zeta_{ex} + 2H_s \zeta_{in} + F_0 \mu'(V_z) X_{ks}^2)$$

$$T_s = F_0 \mu(V_z) X_{ks}$$

$$H_s = 2 - \sum_{\rho=2}^{n-1} X_{\rho s} (X_{\rho-1s} + X_{\rho+1s}) - X_{1s} X_{2s} - X_{ns} (X_{n-1s} + X_{ns})$$

2.3. 定常解

(11)式のS次モードの運動方程式について平均法を適用して解を求める。自励振動の解を次式のように仮定する。

$$\varphi_s = A_s \sin(\tau_s + \eta_s) \quad (12)$$

$$\varphi'_s = A_s \cos(\tau_s + \eta_s)$$

A_s , η_s は無次元時間 τ_s に関してゆるやかに変化する。解の仮定から次の条件式が得られる。

$$A'_s \sin(\tau_s + \eta_s) + A_s \eta'_s \cos(\tau_s + \eta_s) = 0 \quad (13)$$

(12式より φ_s の 2 階微分は

$$\varphi''_s = A'_s \cos(\tau_s + \eta_s) - A_s(1 + \eta'_s) \sin(\tau_s + \eta_s) \quad (14)$$

(12式, (14式)を(11式)に代入し(13式)と連立させ A'_s , η'_s の標準形を得る。

$$\begin{aligned} A'_s &= P_s A_s^3 \cos^4(\tau_s + \eta_s) + Q_s A_s^2 \cos^3(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad + R_s A_s \cos^2(\tau_s + \eta_s) + T_s \cos(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad - (1 - \lambda_s) A_s \sin(\tau_s + \eta_s) \cos(\tau_s + \eta_s) \\ A_s \eta'_s &= -P_s A_s^3 \sin(\tau_s + \eta_s) \cos^3(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad - Q_s A_s^2 \sin(\tau_s + \eta_s) \cos^2(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad - R_s A_s \sin(\tau_s + \eta_s) \cos(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad - T_s \sin(\tau_s + \eta_s) \\ &\quad - (1 - \lambda_s) A_s \sin(\tau_s + \eta_s) \end{aligned} \quad (15)$$

(15式)に平均法を適用し次の第1近似を得る。

$$\begin{aligned} A'_s &= (3/8)P_s A_s^3 + R_s A_s / 2 \\ \eta'_s &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

定常状態を考慮し, $A'_s = 0$ とおけば次の定常解を得る。

$$A_s = \sqrt{-4R_s / (3P_s)} \quad (17)$$

3. 数値解析

3.1. 等価1自由度系

図-2 b の等価1自由度モデルに, ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて自励振動の数値解を求める。数値解析によって得られた自励振動の発生域を, 実験値及び等価1自由度系の理論値と比較する。

運動方程式は

$$\begin{aligned} m^* \ddot{\phi}_i + C^* \dot{\phi}_i + K^* \phi_i &= F(v) l^* \\ (i: \text{各モード数}) \end{aligned} \quad (18)$$

である。

$\phi_i = x$, $\phi_i = y$, とおき一階の連立微分方程式にすると

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} \\ \dot{x} &= (F(v) l^* - C^* y - K^* x) / m^* \end{aligned} \quad (19)$$

(19式)に初期値を与え, L. K. G 法により解を求める。

3.2. 差分モデル

ウィルソン- θ 法を用いて(11式)の両差分モデルの数

値解析を行う。ウィルソン- θ 法とは, $t + \Delta t$ の時点での値を求めるためにそれより将来の時点 $t + \theta \Delta t$ ($\theta = 1.4$) で運動方程式が成立するとして, 逆に補間することで $t + \Delta t$ 時点の値を導くものである。こういう算方は無条件安定であるという⁵⁾。実際には1次元差分モデルと2次元差分モデルとも分割数 $n = 6$ で計算する。

4. 解析結果ならびに実験結果

4.1. 1自由度モデルの自励振動発生域

図-3 にすべり速度の関数である定常摩擦特性を示す。○は実験値を示し, 実線は(3式)の3次関数近似曲線を示す。この摩擦特性を各モデルの理論解析, 数値解析に用いた。図に見られるように摩擦特性には, ある範囲で負減衰効果(右下がり特性)が見られ, これが自励振動の原因となる。内部, 外部減衰は摩擦力作用点とは無関係に一定であるが, 摩擦力の負減衰効果は摩擦力作用点 l_0 に依存する。

図-4 に等価1自由度モデルの理論解析と数値解析に

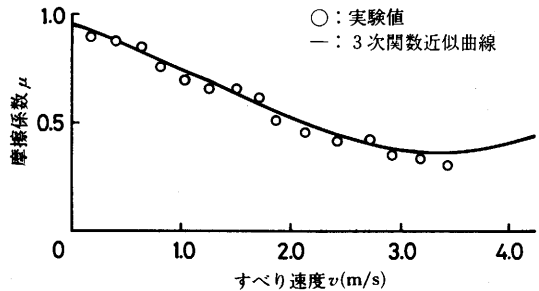


図-3 定常摩擦特性

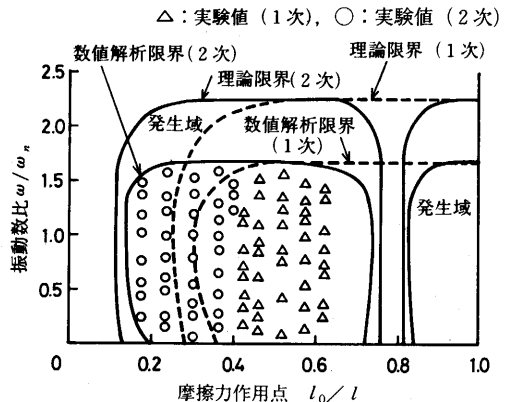


図-4 自励振動発生域

よって求めた1次と2次モードの自励振動発生限界を、実験結果と併せて示す。摩擦力作用点と回転数をパラメータとする発生限界がよく表わされている。2次の自励振動は、節の近傍の摩擦力作用点で解が存在しない。理論の発生限界が数値解析による発生限界より広い理由は、数値解析では摩擦特性を実際と同様すべり速度の奇関数としているが、理論解析ではすべり速度が負の領域で摩擦力も負となることを考慮していないためである。理論及び数値解析による限界において、1次と2次モードが共に存在する領域があるが、実験結果では1次と2次モードが $l_0/l=0.4$ を境として独立に存在した。

4.2. 差分モデルの自励振動発生域

等価1自由度モデルの解析においては、理論、数値解析ともに1次と2次モードの自励振動が同域に共存するが、実験結果では独立に存在した。この原因を明らかにするため、差分モデルに対する理論解析と数値解析を行って得られた結果を以下に示す。

図-5に理論解析によって求めた1次元、2次元差分モデルの1次から6次までの振動モードを示す。

表-1と表-3に1次元、2次元差分モデルの理論解析結果を、表-2、表-4に数値解析結果を示す。理論結果は、摩擦力が任意の質点に作用する場合に存在する振動モードを表わし、数値解析結果は、1次から6次のモード値を初期値として与えた場合に収束する振動モードを表わす。理論、数値解析結果ともに摩擦力の作用する質点の位置によって、発生する振動モードが異なっていることが分る。理論結果は、複数のモードが共存する

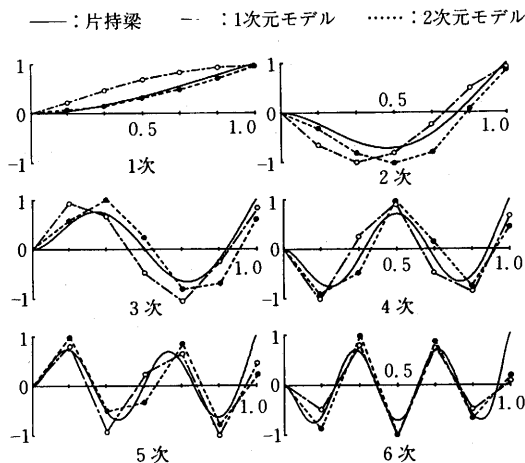


図-5 片持梁と差分モデルの振動モード

表-1 1次元モデル理論解析結果

○：解有り， -：解なし

No	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○	○	○	○
2	○	○	○	-	-	○
3	○	-	-	○	-	○
4	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-

表-2 1次元モデル数値解析結果

数字：発生モード

No	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	2
3	3	2	2	3	1	1
4	2	2	1	1	1	1
5	2	2	1	1	1	1
6	2	2	1	1	1	1

表-3 2次元モデル理論解析結果

○：解有り， -：解なし

No	1	2	3	4	5	6
1	-	-	○	○	○	○
2	-	○	-	○	-	○
3	○	○	-	○	○	○
4	○	-	○	-	○	-
5	○	-	-	○	-	-
6	-	-	-	-	-	-

表-4 2次元モデル数値解析結果

数字：発生モード

No	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	1	1	1
2	0	2	2	1	1	1
3	0	3	2	1	1	1
4	0	3	2	1	1	1
5	0	3	2	1	1	1
6	0	3	2	1	1	1

が、数値解析結果は発生し易い1つのモードとなる。このことは実験結果とよく一致した。

次に、解析解に摩擦力、内部、外部減衰が与える影響を見てみる。図-6, 7, 8, 9は2次元差分モデルの理論解析により、内部、外部減衰と摩擦力及び摩擦力作用点が自励振動の発生に与える影響を示す。1次の振動モードは、摩擦力作用点が固定端に近いほど解が存在しない。2次、3次、4次の振動モードは、腹の辺りで解が存在し、節の近傍で解が存在しない。外部減衰が増加すると全般に発生域が狭くなり、内部減衰が徐々に大きくなると高次の振動モードが消滅する傾向がある。摩擦力が減少すると振幅が小さくなり、高次の振動モードが無くなると、ともに全体に解が存在しなくなる。

5. 結論

弾性体における自励振動の発生条件を求めため、3種のモデルを用いて理論解析及び数値解析し、実験と比較して次の様な結果を得た。

(1)差分モデルの理論解析により摩擦特性の負減衰効果と内部、外部減衰ならびに摩擦力の作用する質点の位置が、高次モードを含んだ自励振動の発生へ及ぼす影響を明らかにした。

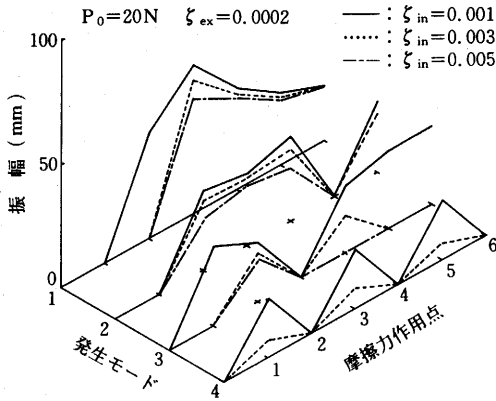


図-6 差分モデルの自励振動発生域

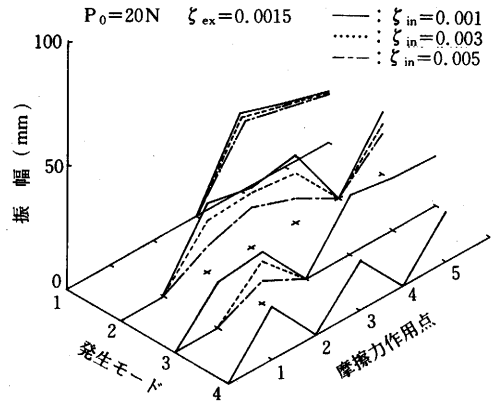


図-8 差分モデルの自励振動発生域

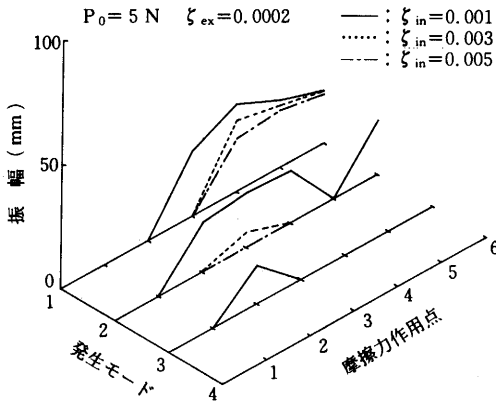


図-7 差分モデルの自励振動発生域

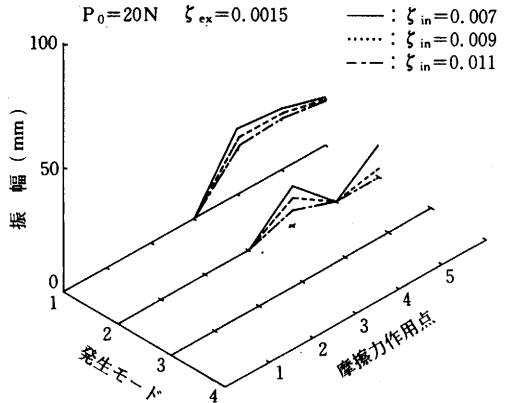


図-9 差分モデルの自励振動発生域

(2)等価1自由度系の自励振動発生域から、摩擦力作用点によって発生モードに相互の優位性が存在することがわかった。

(3)差分モデルの数値解析結果は、理論解析では複数の振動モードの解が存在するにもかかわらず、ある1つの振動モードの優位性を示し、実験結果とほぼ同様の結果を得た。

参考文献

- 1) 亘理・杉本, 機論, 29-200 (昭和38-4), 769.
- 2) 高野, 機論, 33-253 (昭和42-9), 1352.
- 3) 井上ら, 機論, 35-274 (昭和44-6), 1242.
- 4) 渡辺ら, 九工大研究報告(工学), No. 44 (昭和57-3), 51.
- 5) 戸川隼人, 有限要素法による振動解析, サイエンス社, (昭和50), 44.