

フレキシブルビームの静的最適位置制御

(昭和60年11月27日 原稿受付)

制 御 工 学 科 小 林 敏 弘
大 学 院 生 羅 正 華

Static Optimal Location Control for a Flexible Beam

by Toshihiro KOBAYASHI
Zheng hua LUO

Abstract

The problem of optimizing the location for the static shape control of a large flexible beam is discussed. The calculation is simplified by the approximation of Green function with the eigenvalue and eigenfunction. The numerical results point out that only two actuators are rather enough for the control accuracy. Even if we add actuators they have little efficiency to the improvement of the control accuracy.

1. まえがき

大型宇宙構造物や弾性アームを持つロボットに関連して、フレキシブルビームの動的、静的制御の研究が常に注目されている。

Connie J. Weeks¹⁾がGreen関数を用いて、あらかじめ与えられた数のアクチュエータを与えられた位置に入れて、評価関数を最小にするようにトルクあるいは力を加えて、静的状態制御が可能であると指摘したが、実際上では、少なくとも次の点で問題がある。

- ①アクチュエータの数がいくつあれば良いのか。
- ②アクチュエータ数が一定である条件下で、評価関数の最小値が存在するのか。
- ③設計手順がもっと簡単にならないか。

問題①に対しては、Weeksの方法だと、アクチュエータの数が多ければ多いほど精度があがるようだが、本稿で、アクチュエータ数が二つ以上になると、これらのアクチュエータを最適位置におけば、精度の改善にはほとんど効果がないということを示す。果して、アクチュエータ数が二つで十分ということになる。

問題②は、本稿の主目的であり、数値計算によりアクチュエータ数がそれぞれ二つ、三つ、四つの場合の最適位置を求めた。

本稿では、2章で、問題を明らかにするために、Weeksに従って系の記述を簡単に述べる。

3章ではGreen関数を右限次元固有値と固有モードで近似して、力と位置に対して、評価関数を最適化するアルゴリズムを考える。これによって、Green関数の具体形を求めることが必要でなくなる。

4章では、数値シミュレーション結果を示し、データを比較してみる。

2. 問題の記述

$u(x)$ をビームの垂直変位とし、 $f(x)$ をビームに加えた制御入力とすれば、一般的に系は次のように表現できる。

$$\begin{cases} (1) & Lu(x) = f(x) & x \in (0, l) \\ (2) & Bu(x) = 0 & x = 0 \text{ or } l \end{cases}$$

ここに、 L は線形自己共役な微分作用素を表わし、(2)

式は境界条件である。

また、系(1), (2)の斉次問題

$$\begin{cases} Lv(x) = 0 & x \in (0, l) \\ Bv(x) = 0 & x = 0 \text{ or } l \end{cases}$$

は特異解しか持たないと仮定する。

Green 関数 $g(x|\xi)$ を次のように定義する。

$$(3) \quad \begin{cases} Lg(x|\xi) = \delta(x-\xi) & x, \xi \in (0, l) \\ B(g) = 0 \end{cases}$$

そうすると、系(1), (2)のような境界値問題が積分形式にかわって、次のように表現できる。

$$(4) \quad u(x) = \int_0^l g(x|\xi) f(\xi) d\xi$$

以下では点入力とする。

$$(5) \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \delta(x-x_i)$$

の場合に、評価関数

$$(6) \quad J(u, F) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i^2 r_i + \frac{1}{2} \int_0^l (y(x) - u(x))^2 dx$$

を最小にする問題を考える。

ここに、 $y(x)$ は希望形状関数、 r_i は重みである。

(4)式を用いて、 X, F を

$$\begin{cases} X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \end{cases}$$

とおくと、(6)式は

$$(7) \quad J(X, F) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i^2 r_i + \frac{1}{2} \int_0^l (y(\xi) - \sum_{i=1}^n f_i g(x_i|\xi))^2 d\xi$$

となる。

(7)式の第1項はエネルギーの消費に対する評価で、第2項は制御精度の評価である。

3. 位置最適化アルゴリズム

前に作用素 L を自己共役作用素としたが、さらに L がコンパクトレゾルベント (compact resolvent) $(\lambda I - L)^{-1}$ をもてば、系(1), (2)の境界値問題に対して、可算無限個の固有値 $\{\lambda_k\}$ とそれらに対応する正規直交関数列 $\{\phi_k(x)\}$ が存在する²⁾。

この時、Green 関数 $g(x|\xi)$ は $\{\lambda_k\}$ を用いて

$$g(x|\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(x)\phi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

と表わせる。

今、Green 関数を m 項までで近似して、

$$(8) \quad g(x|\xi) = \sum_{k=1}^m \frac{\phi_k(x)\phi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

としよう。

(7)式の最適解 X^*, F^* として $\frac{\partial J}{\partial X} = 0, \frac{\partial J}{\partial F} = 0$ 、すなわち

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_1(x_i^*)\phi_1(x_i^*)}{\lambda_1^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\phi_1(x_i^*)\phi_m(x_i^*)}{\lambda_1^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\phi_m(x_i^*)\phi_1(x_i^*)}{\lambda_m^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\phi_m(x_i^*)\phi_m(x_i^*)}{\lambda_m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ \vdots \\ f_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{b_1 \phi_1(x_i^*)}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{b_m \phi_m(x_i^*)}{\lambda_m} \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_1(x_i^*)\phi_1(x_i^*)}{\lambda_1^2} + r_1 & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\phi_1(x_i^*)\phi_m(x_i^*)}{\lambda_1^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\phi_m(x_i^*)\phi_1(x_i^*)}{\lambda_m^2} & \dots & \sum_{i=1}^n \frac{\phi_m(x_i^*)\phi_m(x_i^*)}{\lambda_m^2} + r_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ \vdots \\ f_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{b_1 \phi_1(x_i^*)}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{b_m \phi_m(x_i^*)}{\lambda_m} \end{bmatrix}$$

を満足するものを求めよう。

ここに、 $b_k = \int_0^l y(\xi)\phi_k(\xi)d\xi$ とおいた。

一般的に $\phi_k(x)$ は x の非線形関数であるから、(9), (10)式は $f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*$ に関しては線形であるが、 x_1^*, \dots, x_m^* に関しては非線形な関係にある。そこで、(9), (10)式を

$$(11) \quad \begin{cases} P_1(x_1^*, \dots, x_m^*; f_1^*, \dots, f_m^*) = 0 \\ \vdots \\ P_n(x_1^*, \dots, x_m^*; f_1^*, \dots, f_m^*) = 0 \\ \vdots \\ P_m(x_1^*, \dots, x_m^*; f_1^*, \dots, f_m^*) = 0 \end{cases}$$

つまり、 $P(Z) = 0$ と記して、ニュートン法を用いて解くことにする。

ここに、 $P = (P_1 \dots P_n \dots P_m)^T$

$$Z = (x_1^* \dots x_m^*; f_1^* \dots f_m^*)^T$$

プログラムフローチャートを図1-1に示す。

$\frac{\partial P}{\partial Z}$ は Jacobian を表わす。

$$(12) \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial P_1}{\partial Z_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial Z_{2N}} \\ \frac{\partial P_2}{\partial Z_1} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial P_{2N}}{\partial Z_1} & \dots & \dots & \frac{\partial P_{2N}}{\partial Z_{2N}} \end{pmatrix}$$

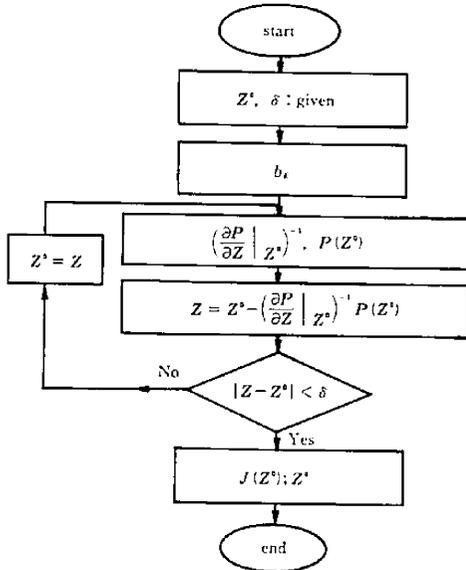


図-1 ニュートン法フローチャート

4. 数値計算例

ここでは $L = \frac{d^4}{dx^4}$, $f(x) = \sum_{i=1}^N f_i \delta(x-x_i)$ ($N = 2, 3$, 4) にとり次の系に対して数値計算を実行した。

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d^4 u}{dx^4} = \sum_{i=1}^N f_i \delta(x-x_i) \\ u(0) = 0 = u''(0) \\ u(\ell) = 0 = u''(\ell) \\ J(X, F) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i r_i \\ \quad + \frac{1}{2} \int_0^\ell (y(\xi) - \sum_{i=1}^N f_i g(x_i | \xi))^2 d\xi \end{cases}$$

ただし、 $y(x) = x(\ell-x)e^{-x}$ とする。

$$(14) \quad \begin{cases} Lh = \frac{d^4 h}{dx^4} \\ D(L) = \begin{cases} h \in L_1(0, \ell); \frac{dh}{dx}, \frac{d^2 h}{dx^2}, \frac{d^3 h}{dx^3}, \frac{d^4 h}{dx^4} \in L_1(0, \ell) \\ h(0) = 0 = \frac{dh(0)}{dx}; h(\ell) = 0 = \frac{dh(\ell)}{dx} \end{cases} \end{cases}$$

のような作用素 L がコンパクトな自己共作用素であることはただちにわかる。固有値と固有関数はそれぞれ

$$(15) \quad \begin{cases} \lambda_K = \left(\frac{K\pi}{\ell}\right)^4 & K = 1, 2, \dots, \infty \\ \phi_K(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{K\pi x}{\ell}\right) \end{cases}$$

である。

図-2 は $N = 2$ で、Green 関数を 6 次モードまでで近似して、上記アルゴリズムを用いて求めた結果を示している。

データを表-1 にまとめておく。

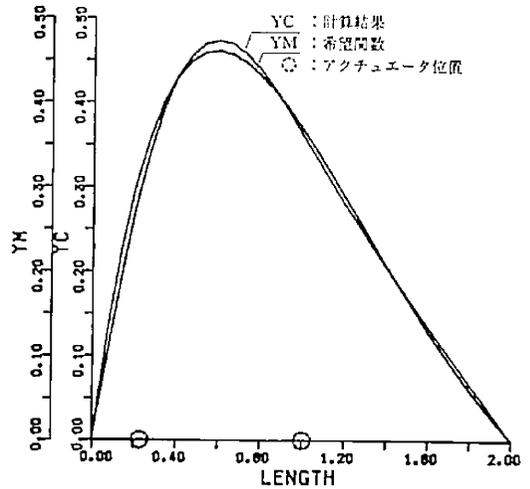


図-2 $N = 2$ の時の最適位置と最適状態

表-1 図-2 に関するデータ

| x_1^* | x_2^* | f_1^* | f_2^* |
|-----------|---------|-----------------------|---------|
| 0.2673 | 1.0402 | 18.5581 | -5.1039 |
| 最小値 J^* | | 3.35×10^{-4} | |

それに対して、図-3 は勝手に $x_1 = \frac{\ell}{3}$, $x_2 = \frac{2\ell}{3}$ の位置にアクチュエータを入れた時の結果を示す。Green 関数をそのまま使って計算したものである。データを表-2 にまとめておく。

図-2 と図-3 を比較してみると、最適位置にアクチュエータを入れたとき、制御精度が上っていることがわかる。

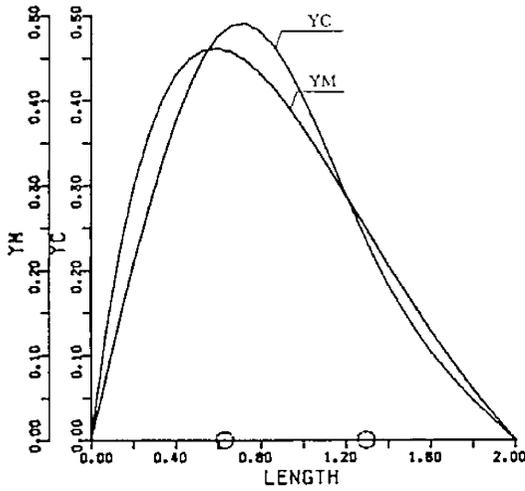


図-3 $N = 2$, $x_1 = \frac{l}{3}$, $x_2 = \frac{2l}{3}$ の時の状態

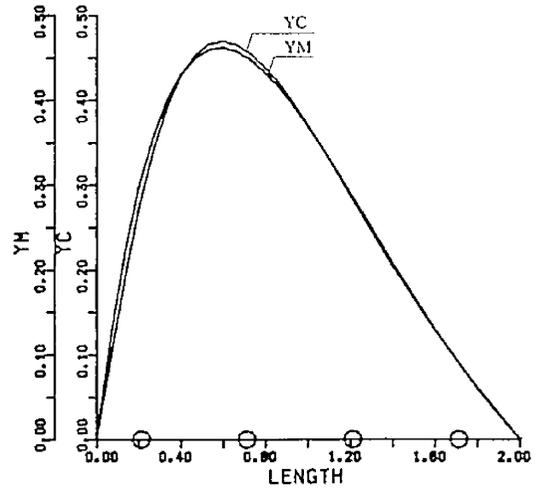


図-4 $N = 4$, 一定の間隔にアクチュエータを入れた時の状態

表-2 図-3に関するデータ

| x_1 | x_2 | f_1 | f_2 |
|--------|-------|------------------------|--------|
| 0.667 | 1.334 | 9.683 | -6.834 |
| 評価関数 J | | 18.47×10^{-4} | |

図-4 は等間隔にアクチュエータを入れた時の結果でデータを表-3に整理しておく。この時の評価関数の最小値は図-2の場合とほぼ同じで、しかもエネルギーコスト $\sum_{i=1}^N f_i$ が図-2の場合より大きいということがわかる。

$N = 3$, $N = 4$ の場合の最適位置と最適解をそれぞれ表-4, 表-5 にリストする。

表-4, 表-5 から分かるように、 $N = 3$ の時二つの最適点が同じ位置で、 $N = 4$ の時三つの最適点が同じになる。制御精度、つまり評価関数の第2項目の改善が非常に小さいのであるが、エネルギーコストも評価関数に考えているので、やはり N の大きい方が評価関数の最小値が小さくなる。現実では、同じ場所に二つ以上のアクチュエータを入れるのは不具合であるし、経済的に考えれば $N = 2$ の時一番良いようである。

表-3 図-4に関するデータ

| | |
|--------|-----------------------|
| x_1 | 0.25 |
| x_2 | 0.75 |
| x_3 | 1.25 |
| x_4 | 1.75 |
| f_1 | 20.69 |
| f_2 | -3.29 |
| f_3 | -2.21 |
| f_4 | -0.93 |
| 評価関数 J | 3.27×10^{-4} |

表-4 $N = 3$ の場合の最適解

| x_1^* | x_2^* | x_3^* | f_1^* | f_2^* | f_3^* |
|---------|---------|---------|-----------------------|---------|---------|
| 0.2370 | 0.2370 | 1.0278 | 10.347 | 10.378 | -5.074 |
| 最小値 J* | | | 2.23×10^{-4} | | |

表-5 $N = 4$ の場合の最適解

| | |
|---------|------------------------|
| x_1^* | 0.2194 |
| x_2^* | 0.2191 |
| x_3^* | 0.2194 |
| x_4^* | 1.0263 |
| f_1^* | 7.384 |
| f_2^* | 7.381 |
| f_3^* | 7.398 |
| f_4^* | -5.010 |
| 最小値 J* | 1.935×10^{-4} |

5. ま と め

本稿では、フレキシブルビームの静的状態制御問題に対し、点入力の場合に最適入力点及び点数の決定について考察した。そこでは次の3点を仮定した。

① L はコンパクトなレゾルベントを持つ自己共役作用素。

② 系(1), (2)の齊次問題(3), (4)は特異解しか持たない。

③ 一次元問題。

仮定②, ③が成立しない場合は、文献1)に指摘されているように、本稿での結論が容易に拡張できる。仮定①は基本的で、それにより直交関数列の存在性と式(4)及び式(8)が保証される。

Green 関数, 特に多次元の場合の Green 関数マト

リックスを求めるのが非常に大変であるのに対し、本稿でのアルゴリズムでは、境界値問題の固有値と固有関数さえ分かれば、計算できる。数値計算例では、 $m = 6$ と取ったが、 $m = 2$ でも十分な精度を得ることが分かった。

数値計算上の問題点としては、初期値 Z^0 の値によって、計算が発散したり、収束したりすることがある。それと、最適解の存在性と一意性の証明は今後の興味ある課題である。

参 考 文 献

- 1) Connie J. Weeks, "Static Shape Determination and Control For Large Space Structures", J. Dynamic Sys. Measurement and Control, Vol. 106/261, December, 1984.
- 2) Curtain and Pritchard, "Infinite Dimensional Linear Systems Theory", Springer-Verlag, Berlin, 1978.