

## ある電気回路に生ずる動的挙動の実験的考察

(昭和63年5月31日 原稿受付)

住友金属工業(株) 野 瀬 和 孝  
 新日本製鐵(株) 永 岡 歳 邦  
 設計生産工学科 宮 浦 す が

Experimental Considerations for Dynamic Behavior  
in a Electric Circuit

by Kazutaka NOSE  
 Tosikuni NAGAOKA  
 Suga MIYAURA

## Abstract

Studies on nonlinear dynamical systems was first originated by H. Poincare. Since then, there are many papers which are some qualitative approaches to systems, and which have some numerical analyses of systems by means of computers. However, many problems have been left unsolved.

Since 1974, chaotic behavior has attracted the attention of many researchers. Chaos is one of the nonlinear dynamical phenomena, and has the disordered behavior within the bounded region. This phenomenon presents a practical as well as a theoretical interest for us.

In this paper, we make some experiments in an electric circuit. And, we reports the results of some experiments on dynamic behavior and discuss them.

## 1. はじめに

非線形力学系の理論に関する研究は、ポアンカレの3体問題あたりから始まったと言われている。それ以来、非線形系の定性的な解析や計算機を用いた定量的な解析が数多く行なわれているが、まだ未解明の部分も多い。非線形現象の中でも、14~5年程前から注目され始めたカオスの現象は、物理学、数学、生物学、工学等の極めて広い分野にわたってその研究が進められている。工学でも、電気系ではかなりの量のカオスに関する文献が見られるが、機械系や制御系ではまだ少ない。筆者らは、最近特に、これらの系に現われるカオスに興味を持っている。

しかしながらとりあえず、本論文では3階自律系の微分方程式で表される電気回路の動的挙動について実験的な考察を行なう。これは早稲田大学の松本氏によって用

いられた回路とほぼ同じものである<sup>1)</sup>。回路内のパラメータのひとつである抵抗値を変化させることにより、平衡点、周期振動、そしてカオスの振動を観測したい。これらは、位相面軌道、パワースペクトル、及び分岐図等においても確認することができる。さらに、計算機による数値実験も行ない同様の挙動が観測されるということを示す。

## 2. 基礎式

図1の電気回路は、次のような3階自律系の微分方程式で記述される。

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dVC_1}{dt} &= \frac{1}{R} (VC_2 - VC_1) - f(VC_1) \\
 C_2 \frac{dVC_2}{dt} &= \frac{1}{R} (VC_1 - VC_2) + i_L
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -VC_2$$

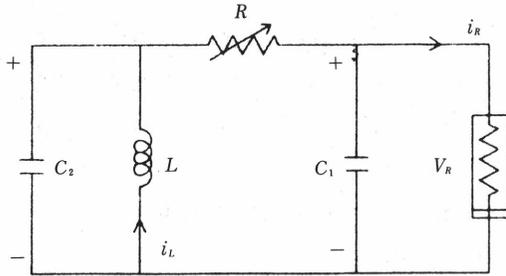


図-1 回路図

但し、 $C_1$ 、 $C_2$ はキャパシタンスの値、 $L$ はインダクタンスの値、 $R$ は可変抵抗の値、 $VC_1$ 、 $VC_2$ はそれぞれ $C_1$ 、 $C_2$ の節点電圧、 $i_L$ は $L$ を流れる電流である。また、 $f(V)$ は非線形素子（負性抵抗）を流れる電流で、図2、式(2)に示されるような特性を持つ区分的に線形な関数である。

$$f(V) = \begin{cases} m_0 V + B_p(m_1 - m_0), & V \geq B_p \\ m_1 V & |V| < B_p \\ m_0 V - B_p(m_1 - m_0), & V \leq -B_p \end{cases} \quad (2)$$

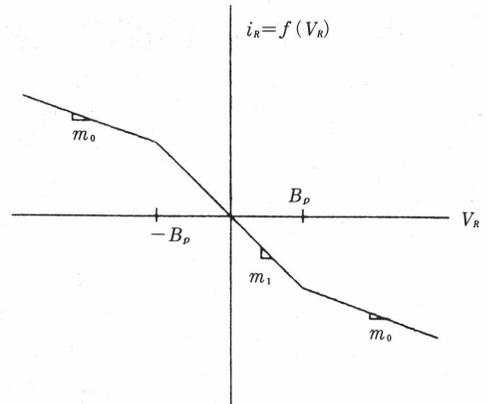


図-2 負性抵抗の特性

### 3. 実験結果

#### 3.1 回路実験

私達は図1に示されているコンデンサー $C_1$ 、 $C_2$ の端子間電圧 $VC_1$ 、 $VC_2$ をオシロスコープで観測した。可変抵抗 $R$ の値を適当に変えることにより、種々の動的挙動、すなわち、平衡点、周期振動、カオスが発生するのが確認される。 $R$ の値を徐々に減少させていくとき、典型的に観測される $(VC_1, VC_2)$ の位相面軌道と、対応する $VC_1$ 、 $VC_2$ の時間波形を写真撮影したのでそれらを示す。さらに、FFTアナライザを用いて

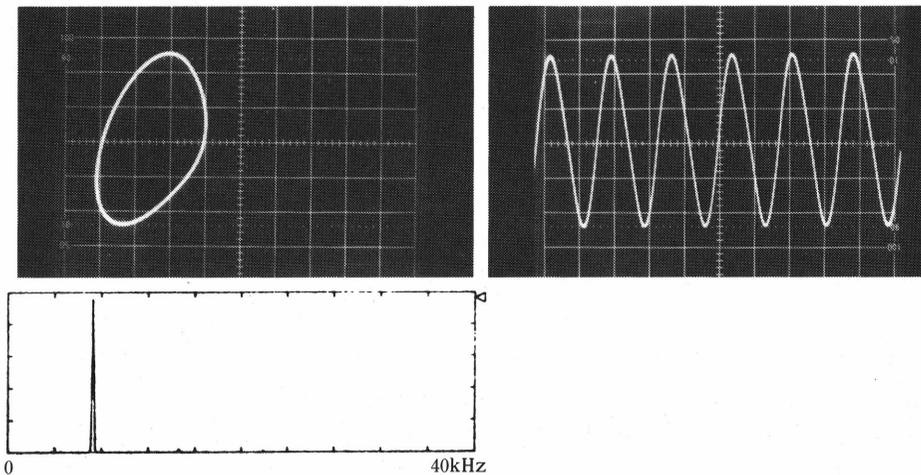


図-3 周期振動

パワースペクトルを求め、周期性やカオスの挙動を確かめる。

各パラメータは次のように設定した。

$$C_1 = 3.8 \times 10^{-3} \quad [\mu\text{F}]$$

$$C_2 = 3.52 \times 10^{-4} \quad [\mu\text{F}]$$

$$L = 4.7 \quad [\text{mH}]$$

$$m_0 = -0.55$$

$$m_1 = -0.8$$

$$B_p = 1.1 \quad [\text{V}]$$

観測結果の一部を図3～図7に示す。それぞれ、位相

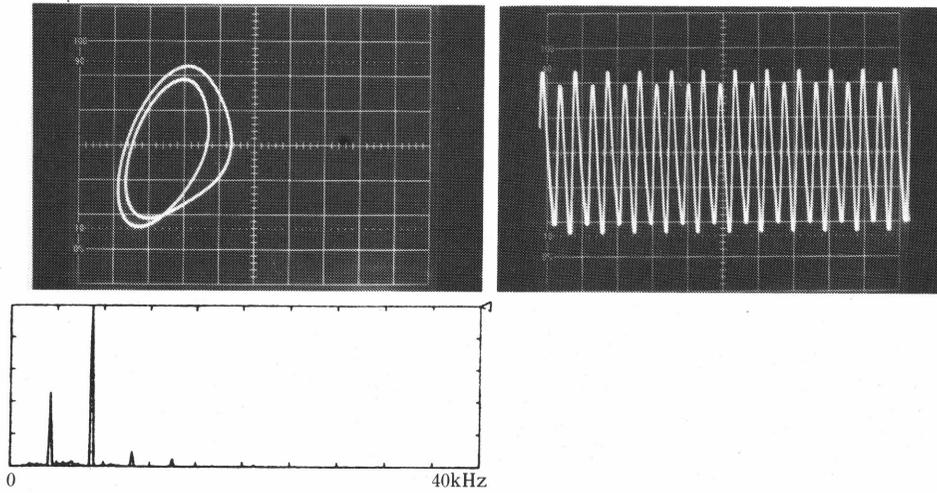


図-4 2周期振動

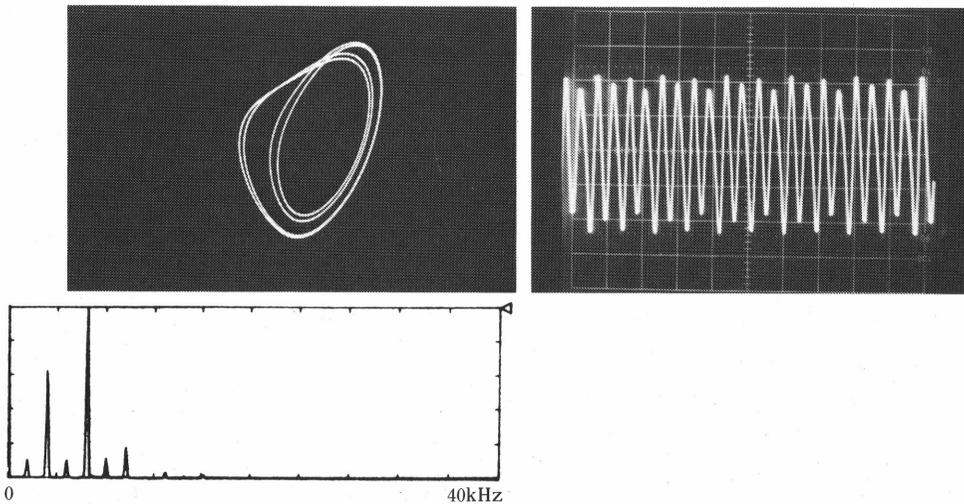


図-5 4周期振動

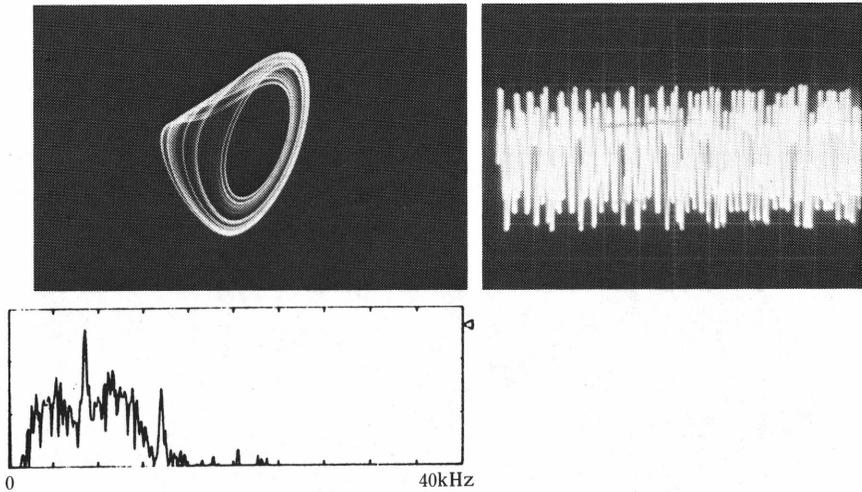


図-6 カオス

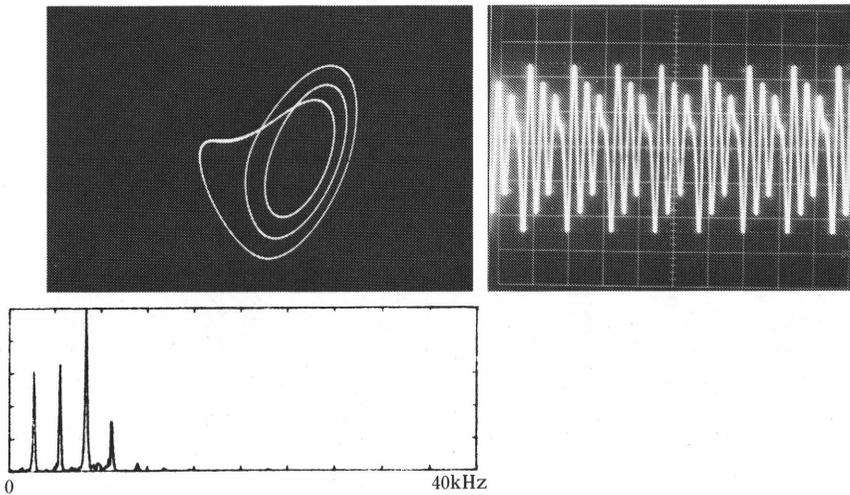


図-7 3周期振動

面軌道，時間波形，パワースペクトルである。

### 3.2 数値実験

数値実験ではまず，図8の分岐図を作成した。これは  $V_{C1}=2[V]$  と固定して作成したものである。その他のパラメータ， $C_1, C_2, L, m_0, m_1, B_p$  の値は回路実験のものをそのまま用いた。(以下のすべての数値実験に対しても，同様である。)

図8の分岐図を用いて周期振動，2周期振動，4周期振動，カオス，3周期振動の現われる抵抗値  $R$  を読み取りそれぞれの位相面軌道，時間波形，パワースペクトルを求めたので，それを図9～図13に示す。ただし，

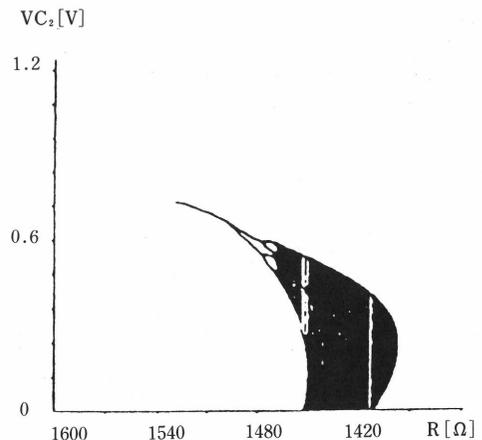


図-8 分岐図

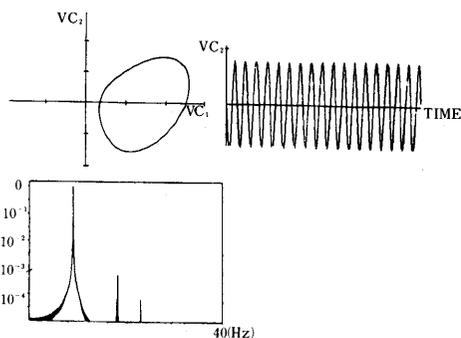


図-9 周期振動

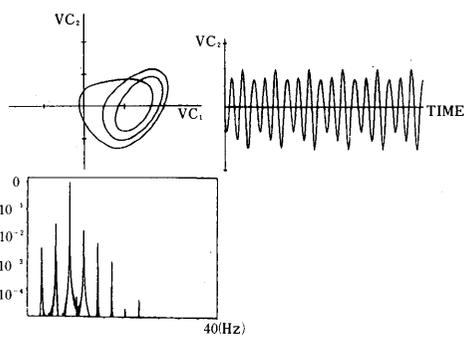


図-13 3周期振動

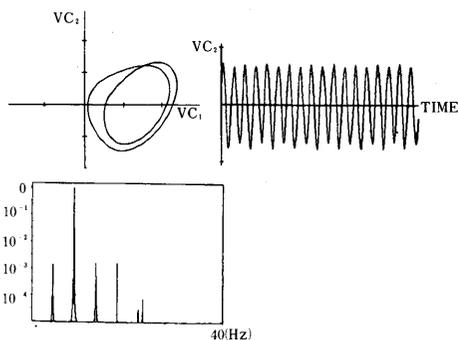


図-10 2周期振動

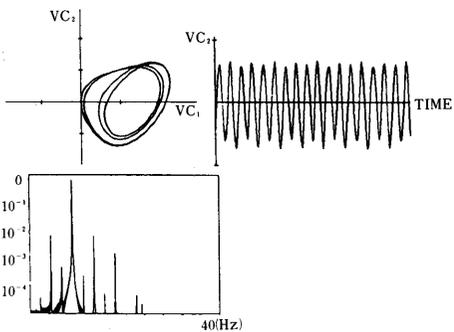


図-11 4周期振動

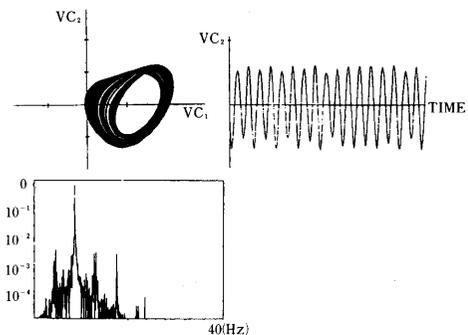


図-12 カオス

刻み幅： $10^{-7}$   
 初期値： $VC_1(0) = 0.1$   
 $VC_2(0) = 0.2$   
 $i_L(0) = 0.2$   
 としている。

#### 4. 考 察

前節で示した実験結果より、式(1)の3階自律系で表される電気回路は、回路内のパラメータである抵抗値Rを小さい方に変化させていくにつれ、平衡点、周期振動、カオスなどの動的挙動を示すことが、物理的にも数値的にも観測された。

この回路系では、回路実験でまず周期倍加過程を経てカオスが発生し、カオス領域のなかで3周期振動が現われている。このことは、全く同様な経過を示す1次元ロジスティック系の分岐構造を思い出させる。そこで、私達も変数のひとつを適当な値に固定して1次元的な分岐図を求めたところ、図8のようなかなりよく似た構造をもつものが得られた。数値実験はそれを基に行なったものである。

ついでに、初期値の変化に対する解の振る舞いについて調べてみた。周期振動を与える領域ではいずれの場合でも同じ定常軌道を示すのに対し、カオス領域では図14に示されるようにわずかな初期値の違いにもかかわらず全く異なった軌道を示す。すなわち、カオスは決定論的な式で支配されるものから発生するにもかかわらず、予測不能な解を持つというよく知られた事実を確認することもできた。

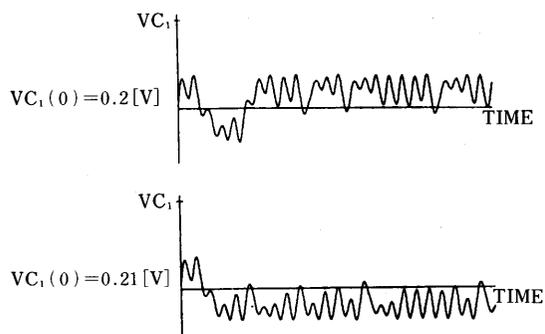


図-14 初期値の微小差により発生する  
カオスの軌道の例

## 5. おわりに

本論文では、3階の自律系で表される電気回路の幾つかの挙動を実験的に求めた。ロジスティック map とのつながりなど、理論的な考察については次の機会に述べたい。

この実験を行なう際、設計生産工学科の小林敏弘教授、松岡清利助教授、技官の星野英聡氏をはじめ、その他有益なアドバイスをいただいたおおぜいの皆様に感謝致します。

また、筆者のひとり宮浦は、「カオス」のテーマをいただき常に御指導を賜わっている、西日本工業大学学長、井上順吉先生に心より感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) 松本, 小室, L. O. Chua, "電子回路の chaotic attractor: Double Scroll", フィジクス, Vol. 7, No. 1, pp. 56-65 (1986)