

異材界面及びその近傍に存在するき裂問題の特異積分方程式の数値解析法

(平成6年10月27日 原稿受付)

設計生産工学科機械工学教室 野 田 尚 昭
 設 計 生 産 工 学 科 矢 野 学
 設 計 生 産 工 学 科 (大 学 院) 小 田 和 広
 設 計 生 産 工 学 科 田 中 篤

Numerical Solutions of Singular Integral Equations for Interface Cracks

by Nao-Aki NODA
 Manabu YANO
 Kazuhiro ODA
 Atusi TANAKA

Abstract

In this paper, numerical solution of singular integral equations is discussed in the analysis of interface cracks. The problems are formulated in terms of a system of singular integral equations on the body force method. In the case of interface crack, the unknown functions of the body force doublet densities which satisfy the boundary conditions are approximated by the products of the fundamental density functions and power series. The accuracy of the present analysis is verified by comparing the present results with the results obtained by other researchers and examining the satisfaction of the boundary conditions. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical results for these problems as well as ordinary crack problems in homogeneous materials.

1. 序 論

近年、軽量化と高機能化を目的とした複合材料が広範囲で使用されており、その強度評価が重要な問題となっている⁽¹⁾。線形破壊力学の確立とともに、均質材中に存在するき裂の応力拡大係数に関する多くの資料が得られているが、異材境界近傍のき裂の解析は、非常に困難である。特に振動特異応力や開口変位の振動が生じる界面き裂の問題では、均質材中のき裂とは異なり、そのき裂挙動を特性づける破壊力学的パラメータが確立されておらず、また、数値解析上及び実験技術上の困難もあって、その評価法がまだ確立していないのが現状である。

著者らは、これまで均質材中のき裂問題⁽²⁾⁻⁽⁴⁾において、体積法の特異積分方程式によって問題を定式化し、それを数値的に高精度に解析する方法について考察

した。その結果、基本密度関数と多項式の積で未知関数を近似する離散化手法の有効性を示した。そこで本研究では、これらの方法を異材接合問題に拡張し、均質材中のき裂の場合と同様に応力拡大係数が高精度に求められること、本解析手法が異材接合問題においても有効であることを示す。

2. 基本解

基本解は接合半無限板中の1点に集中力が作用する場合の解である Muskhelishvili の複素応力関数により次のように表わされる⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[(\bar{z} - z)\phi'(z) - \phi(z) + \bar{\Omega}(z)] \end{aligned} \right\} (1)$$

異材境界を x 軸にとり注目点を $z = (x, y)$ と定義し着

力点 $\zeta = (\xi, \eta)$ に集中力 $R = Qe^{i\alpha}$ (大きさ Q , x 軸となす角度 α) が作用する場合 (図1), 複素応力関数 $\phi_1(z), \Omega_1(z), \phi_2(z), \Omega_2(z)$ は次のように表わされる⁽⁶⁾.

注目点, 着力点が同領域の場合の式

$$\left. \begin{aligned} \phi_m(z) &= \frac{1}{2\pi(\kappa_m+1)} \left[-\frac{R}{z-\zeta} + H_2 \left(\kappa_m R - \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{z-\bar{\zeta}} \bar{R} \right) \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right] \\ \Omega_m(z) &= \frac{1}{2\pi(\kappa_m+1)} \left[H_1 \frac{R}{z-\zeta} + \left(\kappa_m R - \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{z-\bar{\zeta}} \bar{R} \right) \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \right] \end{aligned} \right\} (2)$$

注目点, 着力点が異領域の場合の式

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(z) &= \frac{H_3}{2\pi(\kappa_m+1)} \frac{R}{z-\zeta} \\ \Omega_n(z) &= \frac{H_4}{2\pi(\kappa_m+1)} \left(\kappa_m R - \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{z-\bar{\zeta}} \bar{R} \right) \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし $H_1 \sim H_4$ は次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{G_m \kappa_n - G_n \kappa_m}{G_m \kappa_n + G_n}, H_2 = \frac{G_n - G_m}{G_n \kappa_m + G_m} \\ H_3 &= \frac{G_n (\kappa_m + 1)}{G_m \kappa_n + G_n}, H_4 = \frac{G_m (\kappa_n + 1)}{G_n \kappa_m + G_m} \end{aligned} \right\} (4)$$

き裂が領域 [1] の場合 $m=1, n=2$

き裂が領域 [2] の場合 $m=2, n=1$

式(2), (3)の複素応力関数を仮想き裂方向及びその垂直方向に微分し, それらを組み合わせることにより, 接合半無限板中に標準型集中力対を作用させた場合の解を導出し, それを使用する。

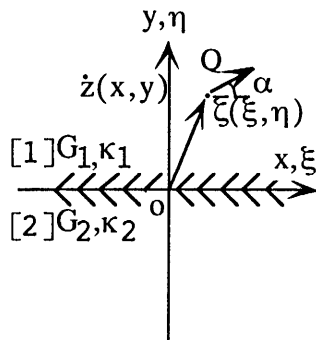


図1 基本解の記号

3. 解析方法

結城らの複素応力拡大係数の定義⁽¹⁾によれば界面上 ($y=0, x$ 軸) の応力分布はき裂先端からの距離 r の関数として次式で表わされる。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{l} \right)^{i\epsilon} \quad (5)$$

ここで, ϵ は次のように表わされる。

$$\epsilon = (1/2\pi) \ln \{ (G_2 \kappa_1 + G_1) / (G_1 \kappa_2 + G_2) \} \quad (6)$$

$$\kappa_m = \begin{cases} (3-4\nu_m)/(1+\nu_m) & \text{(平面応力)} \\ 3-4\nu_m & \text{(平面ひずみ)} \end{cases} \quad (7)$$

ν_m : ポアソン比 ($m=1, 2$)

本解析で使用する体積力法とは, 原理的には無限体中に集中力が作用するときの解 (基本解) を無限体中の仮想曲面上に重ね合せて解を得る方法である⁽⁷⁾。

体積力法を用いることにより, 問題は仮想境界上に分布させるべき体積力の密度を境界積分方程式から決める問題に還元される。ごく特別な場合を除いては, その積分方程式を解析的に解くことはできないので, 未知の密度を基本密度関数 (1個のき裂を表わすのに必要な密度を表現する関数) と重み関数の積によって表現するといった離散化手法を用いることによりそれを数値的に解く。

図2に示すような界面き裂を含む複数個のき裂の干渉問題を例にとる。長さ $2a_j$ のき裂が $j=1 \dots N$ 個存在し, その中で界面き裂に $j=1 \dots N_1$, 界面以外のき裂に $j=N_1+1 \dots N_1+N_2$ の番号をつける。

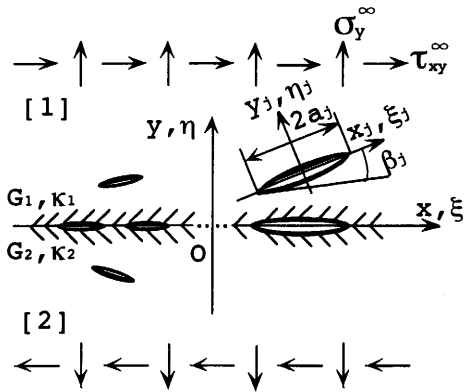


図2 界面き裂を含む複数個のき裂の干渉問題

ここで, j 番目の界面き裂を表現するには, き裂のない仮想き裂面に刃状転位がある密度で分布させれば良い。異材境界を x 軸にとり $x=\xi$ にバーガースペクトル $b = (b_x, b_y)$ の転位が存在するとき, x 軸上の応力は次のように表わされる⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^{b_x}(x, 0) &= -\beta C b_x (\xi - x), \tau_{xy}^{b_x}(x, 0) = \frac{C b_x}{\pi} \frac{1}{\xi - x} \\ \sigma_y^{b_y}(x, 0) &= \frac{C b_y}{\pi} \frac{1}{\xi - x}, \tau_{xy}^{b_y}(x, 0) = \beta C b_y (\xi - x) \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで, C, β は次のように表わされる。

$$C = \frac{2G_1(1+\alpha)}{(1-\beta^2)(\kappa_1+1)} = \frac{2G_2(1-\alpha)}{(1-\beta^2)(\kappa_2+1)} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{G_2(\kappa_1+1) - G_1(\kappa_2+1)}{G_2(\kappa_1+1) + G_1(\kappa_2+1)},$$

$$\beta = \frac{G_2(\kappa_1-1) - G_1(\kappa_2-1)}{G_2(\kappa_1+1) + G_1(\kappa_2+1)} \quad (10)$$

j 番目の界面き裂の境界条件を表わす特異積分方程式は、仮想き裂面上の転位密度 $B_{xj}(\xi_j)$, $B_{yj}(\xi_j)$ を未知関数とする次の式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} & -\pi\beta B_{xj}(x_j) + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{yj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nn}(\xi_k, x_j) B_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nt}(\xi_k, x_j) B_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty, \\ & \pi\beta B_{yj}(x_j) + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{xj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nn}(\xi_k, x_j) B_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nt}(\xi_k, x_j) B_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} \tau_x^\infty \end{aligned} \right\} (j=1 \cdots N_1) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{yj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nn}(\xi_k, x_j) B_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nt}(\xi_k, x_j) B_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} (\sigma_y^\infty \cos^2 \beta_j - 2\tau_{xy}^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j), \\ & \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{xj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nn}(\xi_k, x_j) B_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nt}(\xi_k, x_j) B_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} \{-\sigma_y^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j + \tau_{xy}^\infty (\sin^2 \beta_j - \cos^2 \beta_j)\} \end{aligned} \right\} (j=N_1+1 \cdots N_1+N_2) \quad (12)$$

$$\int_{-a_j}^{a_j} B_{xj}(\xi_j) d\xi_j = 0, \quad \int_{-a_j}^{a_j} B_{yj}(\xi_j) d\xi_j = 0 \quad (13)$$

式(11), (12)はき裂縁での自由表面を表わす境界条件式 $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$ に相当している。ここで f はコーシーの主値をとることを意味し, $H_{nn}(\xi_k, x_j)$ 等は注目している j 番目のき裂面以外のき裂となる仮想境界に転位を分布させたとき x_j に生じる応力であり, 下添字 $m=1, 2$ はそれぞれ材料1, 2を表わす。

転位と食違いの関係⁽⁹⁾から式(11), (12)は仮想き裂面上の食違いの分布密度 $V_{xj}(\xi_j)$, $V_{yj}(\xi_j)$ を未知関数とする次の式で表わされる。

$$\begin{aligned}
& -\pi\beta \frac{dV_{xj}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{V_{xj}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nn}(\xi_k, x_j) V_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nt}(\xi_k, x_j) V_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty, \\
& \pi\beta \frac{dV_{yj}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{V_{yj}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nn}(\xi_k, x_j) V_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nt}(\xi_k, x_j) V_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\frac{\pi}{C} \tau_x^\infty
\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} (j=1 \cdots N_1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_j}^{a_j} \frac{V_{yj}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nn}(\xi_k, x_j) V_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nt}(\xi_k, x_j) V_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\sum_{m=1}^2 \frac{\pi}{C} (\sigma_y^\infty \cos^2 \beta_j - 2\tau_{xy}^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j), \\
& \int_{-a_j}^{a_j} \frac{V_{xj}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nn}(\xi_k, x_j) V_{yk}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} K_{nt}(\xi_k, x_j) V_{xk}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\sum_{m=1}^2 \frac{\pi}{C} \{-\sigma_y^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j + \tau_{xy}^\infty (\sin^2 \beta_j - \cos^2 \beta_j)\}
\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (j=N_1+1 \cdots N_1+N_2) \quad (15)$$

ここで \int は発散積分の有限部分をとることを意味し、 $K_{nn}(\xi_k, x_j)$ 等は注目している j 番目のき裂面以外のき裂となる仮想境界に食違いを分布させたとき x_j に生じる応力である。食違いと標準型集中力対による応力の関

係⁽⁷⁾から式(14)、(15)は y 方向引張、せん断の標準型集中力対の分布密度 $P_{1j}(\xi_j)$ 、 $P_{2j}(\xi_j)$ を未知関数とする次の式で表わされる⁽¹⁰⁾。

$$\begin{aligned}
& -\pi\beta \frac{dP_{2j}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{1j}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1k}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2k}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\sum_{m=1}^2 \frac{G_m(1+\kappa_m)}{\kappa_m-1} \frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty, \\
& \pi\beta \frac{dP_{1j}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{2j}(\xi_j)}{(\xi_j-x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1k}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2k}(\xi_k) d\xi_k \\
& \qquad \qquad \qquad = -\sum_{m=1}^2 G_m \frac{\pi}{C} \tau_{xy}^\infty
\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (j=1 \cdots N_1) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{1j}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{2k}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{ni}(\xi_k, x_j) P_{1k}(\xi_k) d\xi_k \\
& = - \sum_{m=1}^2 \frac{G_m(1+\kappa_m)\pi}{\kappa_m-1} \frac{\pi}{C} (\sigma_y^\infty \cos^2 \beta_j - 2\tau_{xy}^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j), \\
& \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{2j}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1k}(\xi_k) d\xi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{ni}(\xi_k, x_j) P_{2k}(\xi_k) d\xi_k \\
& = - \sum_{m=1}^2 G_m \frac{\pi}{C} \{-\sigma_y^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j + \tau_{xy}^\infty (\sin^2 \beta_j - \cos^2 \beta_j)\}
\end{aligned} \quad (j = N_1 + 1 \cdots N_1 + N_2) \quad (17)$$

$h_{nn}(\xi_k, x_j)$ 等は注目している j 番目のき裂面以外のき裂となる仮想境界に力対を分布させたとき x_j に生じる応力である。標準型集中力対の分布密度 $P_{1j}(\xi_j)$, $P_{2j}(\xi_j)$ は、次式で表わされるように基本密度関数 $w_{1j}(\xi_j)$, $w_{2j}(\xi_j)$ と未知関数 $F_{1j}(\xi_j)$, $F_{2j}(\xi_j)$ の積で表わされる。

$$P_{1j}(\xi_j) + iP_{2j}(\xi_j) = \{w_{1j}(\xi_j) + iw_{2j}(\xi_j)\} \{F_{1j}(\xi_j) + iF_{2j}(\xi_j)\} \quad (18)$$

界面き裂の場合、基本密度関数は界面き裂のき裂縁の変位⁽¹¹⁾をもとにした次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\kappa_m - 1}{1 + \kappa_m} w_{1j}(\xi_j) + iw_{2j}(\xi_j) \right\} \\
& = \sum_{m=1}^2 \frac{1 + \kappa_m}{4 \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a_j^2 - \xi_j^2} \left(\frac{a_j - \xi_j}{a_j + \xi_j} \right)^{i\varepsilon} \quad (19)
\end{aligned}$$

界面以外のき裂については式(19)において $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$, $\varepsilon = 0$ とおいた均質材中のき裂の場合の基本密度関数を表わす次式を用いる。

$$\frac{\kappa - 1}{1 + \kappa} w_{1j}(\xi_j) + iw_{2j}(\xi_j) = \frac{1 + \kappa}{2} \sqrt{a_j^2 - \xi_j^2} \quad (20)$$

本解析では、重み関数 $F_{1j}(\xi_j)$, $F_{2j}(\xi_j)$ を従来の体積力法で用いられるような階段関数で近似する方法、ならびに次式のような級数で近似する方法を用いて解析し、比較検討する。

$$F_{1j}(\xi_j) = \sum_{n=1}^M a_n \xi_j^{n-1}, \quad F_{2j}(\xi_j) = \sum_{n=1}^M b_n \xi_j^{n-1} \quad (21)$$

式(21)の係数 a_n , b_n は仮想き裂上に選んだ点 $[2(M \times N)$ 個]の境界条件を表わす次式のような連立一次方程式から求められる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sum_{n=1}^{2M} \{a_n A_n(\xi_k, x_j) + b_n B_n(\xi_k, x_j)\} = - \sum_{m=1}^2 \frac{G_m(1+\kappa_m)}{\kappa_m-1} \frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty, \\
& \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sum_{n=1}^{2M} \{a_n C_n(\xi_k, x_j) + b_n D_n(\xi_k, x_j)\} = - \sum_{m=1}^2 G_m \frac{\pi}{C} \tau_{xy}^\infty
\end{aligned} \quad (j = 1 \cdots N_1) \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sum_{n=1}^{2M} \{a_n A_n(\xi_k, x_j) + b_n B_n(\xi_k, x_j)\} \\
& = - \sum_{m=1}^2 \frac{G_m(1+\kappa_m)}{\kappa_m-1} \frac{\pi}{C} \{\sigma_y^\infty \cos^2 \beta_j - 2\tau_{xy}^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j\}, \\
& \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sum_{n=1}^{2M} \{a_n C_n(\xi_k, x_j) + b_n D_n(\xi_k, x_j)\} \\
& = - \sum_{m=1}^2 G_m \frac{\pi}{C} \{-\sigma_y^\infty \cos \beta_j \sin \beta_j + \tau_{xy}^\infty (\sin^2 \beta_j - \cos^2 \beta_j)\}
\end{aligned} \quad (j = N_1 + 1 \cdots N_1 + N_2) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{1n}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1n}(\xi_k) d\xi_k \\ B_n(\xi_k, x_j) &= -\pi\beta \frac{dP_{2n}(\xi_j)}{dx_j} + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2n}(\xi_k) d\xi_k \\ C_n(\xi_k, x_j) &= \pi\beta \frac{dP_{1n}(\xi_j)}{dx_j} + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1n}(\xi_k) d\xi_k \\ D_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{2n}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2n}(\xi_k) d\xi_k \end{aligned} \right\} (j = 1 \cdots N_1) \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{1n}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1n}(\xi_k) d\xi_k \\ B_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2n}(\xi_k) d\xi_k \\ C_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1n}(\xi_k) d\xi_k \\ D_n(\xi_k, x_j) &= \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{2n}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2n}(\xi_k) d\xi_k \end{aligned} \right\} (j = N_1 + 1 \cdots N_1 + N_2) \quad (25)$$

以上のような離散化手法により式(22), (23)を解くことによって未知関数 $F_{1j}(\xi_j)$, $F_{2j}(\xi_j)$ を決定し, き裂先端での重みの値より j 番目の界面き裂の応力拡大係数は次式のように表わされる。

$$K_1 + iK_2 = \{F_{1j}(a_j) + iF_{2j}(a_j)\} \sqrt{\pi a_j} (1 + 2i\varepsilon) \quad (26)$$

また, 界面以外のき裂の応力拡大係数は式(26)において $\varepsilon = 0$ とおくことによって得られる従来の応力拡大係数を用いる。

4. 解析結果及び考察

異材境界近傍のき裂問題の具体例として, 界面に平行な1個のき裂がき裂に垂直方向の引張を受ける問題(図3)を解析した。

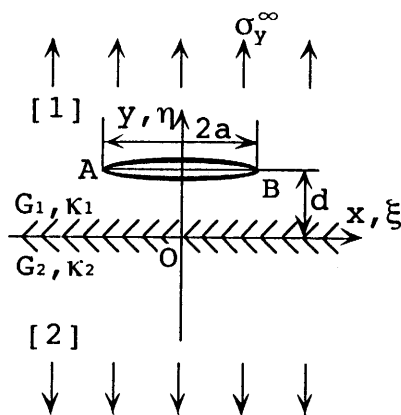


図3 引張を受ける界面に平行なき裂

未知関数を階段関数で近似する従来の体積力法で用いられている方法と級数で近似する方法の両方で解析を行ったが, 表1及び図4に応力拡大係数の収束性の比較を示す。階段関数を用いた場合の解析結果は3桁程度収束しており, 石田, 結城らの値にはほぼ一致している。一方, 級数で近似する場合には4桁程度の収束性がある。階段関数の場合, 図4に示すようにき裂先端での未知関数の変化を十分に表現できないため, 誤差が生じたもの

表1 界面に平行なき裂の無次元化応力拡大係数の収束性 ($\Gamma = G_1/G_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 平面応力)

$d/2a$	Present analysis			Stepped function		
	M	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$	M	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$
0.1	6	1.44924	0.218760	20	1.46780	0.219182
	8	1.44971	0.218196	30	1.45420	0.223013
	10	1.44852	0.218879	50	1.44497	0.226208
	12	1.44973	0.218946	100	1.43935	0.228672
	14	1.44951	0.218918	(30-20)	1.43270	0.230875
	16	1.44951	0.218994	(50-30)	1.43111	0.231002
				(100-50)	1.43340	0.231135
		Isida	1.437	0.231		
	Yuuki	1.4363	0.2360			
$d/2a$	Present analysis			Stepped function		
	M	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$	M	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$
0.5	1	1.17378	0.073156	10	1.20407	0.068755
	2	1.19542	0.068349	20	1.19988	0.069892
	3	1.19547	0.068417	30	1.19868	0.070218
	4	1.19547	0.068422	50	1.19784	0.070446
	5	1.19547	0.068417	100	1.19732	0.070585
	6	1.19547	0.068417	(30-50)	1.19657	0.070784
				(100-50)	1.19680	0.070725
		Isida	1.197	0.071		
	Yuuki	1.1964	0.077			

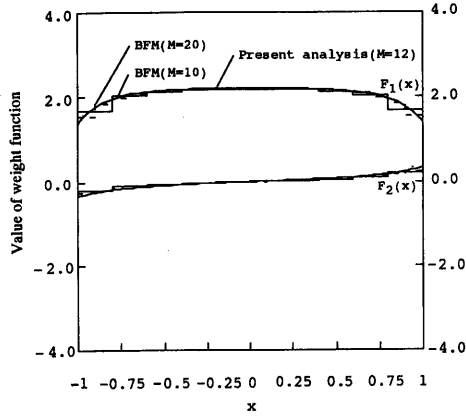


図4 界面に平行なき裂の仮想き裂面に沿う未知関数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ の変化

と思われる。一方、級数を用いた場合、選点数 $M=12$ と $M=14$ の結果がほぼ一致しており、未知関数を正確に近似しているものと考えられる。また、本解析の有効性を確認するために、き裂先端近傍の境界条件の満足度を調べた。その一例として、 $d/2a=0.1$ の場合の σ_y , τ_{xy} の値を表2に示す。表より、本解析では境界上で0となるべき σ_y , τ_{xy} の値は 10^{-6} 程度以下であることがわかる。このことから、未知関数を基本密度関数と級数の積で近似する本解析法が、異材境界近傍のき裂問題の解析においても有効であることが確認される。

複数個の界面き裂問題の具体例として、長さの等しい二個の界面き裂が界面垂直方向の引張を受ける問題(図5)、及び等長三界面き裂問題(図6)についての解析を行った。

はじめに、等長二界面き裂問題の解析結果について述べる。表3に、 $\lambda=a/d=0.5$ と 0.8 の場合の解である応力拡大係数の収束性を示す。干渉効果の大きい $\lambda=0.8$ の場合でも選点数 $M=12$ 程度で有効数字5桁程度の収束性を示している。また、表4にき裂先端近傍の境界条件の満足度を示す。表より、本解析では境界上で0となるべき σ_y , τ_{xy} の値は 10^{-5} 程度以下であることがわか

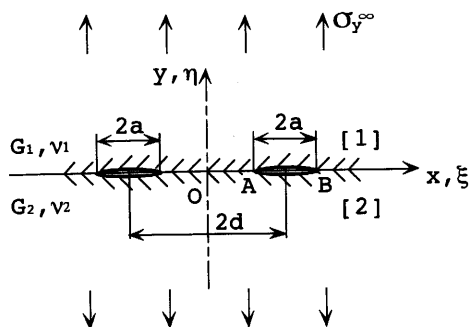


図5 等長2界面き裂の干渉

表2 界面に平行なき裂の先端での境界条件の満足度 (r ; き裂先端 B からの距離)

$\Gamma=0.25, d/2a=0.1, M=14$		
r/a	σ_y	τ_{xy}
0.01	1.4782E-06	1.4439E-06
0.02	5.9660E-07	5.8442E-07
0.03	-8.9131E-07	-7.8826E-07
0.04	-1.0638E-06	-9.1054E-07
0.05	-2.6599E-07	-2.0310E-07
0.06	6.6722E-07	4.8923E-07
0.07	1.0583E-06	8.1115E-07
0.08	8.5795E-07	6.1933E-07
0.09	1.6199E-07	1.5567E-07
0.10	-6.4091E-07	-3.7497E-07

る。このことから、本解析法が界面き裂問題の解析においても有効であることが確認される。

表5に $\Gamma=G_1/G_2$ 及び $\lambda=a/d$ を系統的に変化させて解析を行った結果を示す。表中の () 内の値は、才本⁽¹²⁾の解析結果であり、() * で示す値は、Erdoganによる均質材中の等長二き裂の厳密解⁽¹³⁾である。表より、本解析結果と才本の結果はよく一致しており、 $\Gamma=1.0$ (均質材) の場合はErdoganの厳密解と非常によく一致している。

つぎに、等長三界面き裂の干渉問題(図6)の解析結果を表6に示す。() の値は、Sihによる均質材の場合の厳密解⁽¹⁴⁾の値を示している。 $\Gamma=1.0$ の場合の解析結果は λ の広範囲にわたってSihの厳密解とよく一致している。また、表5及び表6よりわかるように、剛性比は $\Gamma=1.0 \sim 0.001$ まで大きく変化しているにもかかわらず、結城らの定義による無次元化応力拡大係数 F_1 は、 $\Gamma=1.0$ (均質材) の場合のそれとほとんど変わらない。このことから結城らの定義に基づく任意個の界面き裂の F_1 は、均質材中のき裂の解析結果から推定できるものと考えられる。

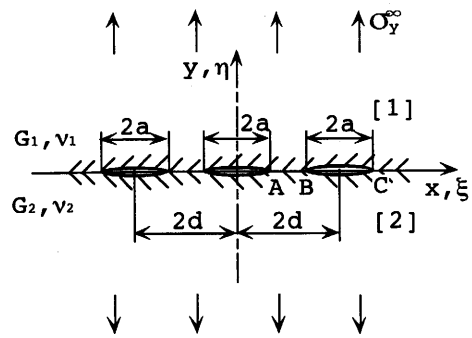


図6 等長3界面き裂の干渉

表3 等長2界面き裂問題(図5)の解の収束性
($\Gamma = G_1/G_2 = 0.1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 平面応力)

λ	M	$F_{1,A}$	$F_{2,A}$	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$
0.5	4	1.04938	0.00428	1.02881	0.00224
	6	1.04946	0.00431	1.02885	0.00222
	8	1.04946	0.00431	1.02885	0.00220
	10	1.04946	0.00430	1.02886	0.00218
	11	1.04946	0.00430	1.02886	0.00217
	12	1.04946	0.00429	1.02886	0.00216
	13	1.04946	0.00429	1.02886	0.00214
0.8	4	1.22703	0.03631	1.08158	0.01137
	6	1.23281	0.03938	1.08300	0.01087
	8	1.23351	0.03985	1.08319	0.01100
	10	1.23360	0.03992	1.08321	0.01098
	11	1.23361	0.03992	1.08322	0.01097
	12	1.23361	0.03993	1.08322	0.01096
	13	1.23362	0.03993	1.08322	0.01095

表4 界面き裂の先端での境界条件の満足度
(r : き裂先端 A からの距離)

$\Gamma = 0.1, \lambda = 0.8, M = 14$		
r/a	σ_y	τ_{xy}
0.01	-3.4998E-05	7.1568E-05
0.02	-1.4064E-06	3.6386E-06
0.03	2.3276E-06	-7.2903E-06
0.04	2.1751E-06	-8.2153E-06
0.05	1.4159E-06	-6.6027E-06
0.06	7.5789E-07	-4.4652E-06
0.07	3.0787E-07	-2.4732E-06
0.08	8.9595E-08	-8.3326E-07
0.09	-3.1892E-08	3.8552E-07
0.10	-2.5696E-08	1.2284E-06

表5 等長2界面き裂(図5)の無次元化応力拡大係数
[$K_1 + iK_2 = (F_1 + iF_2)\sigma\sqrt{\pi a}(1 + 2i\varepsilon)$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 平面応力]

Γ	λ	0.1	0.2	0.5	2/3	0.8
1.0	$F_{1,A}$	1.00132 (1.00132)*	1.00566 (1.00566)*	1.04796 (1.04796)*	1.1124	1.2289 (1.22894)*
	$F_{1,B}$	1.00119 (1.00120)*	1.00462 (1.00462)*	1.02795 (1.02795)*	1.0516	1.0810 (1.08107)*
0.1	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0058 (1.0058)	1.0494 (1.0489)	1.1155 (1.1145)	1.2336
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0042 (0.0035)	0.0146 (0.0118)	0.0399
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0047 (1.0047)	1.0288 (1.0285)	1.0532 (1.0527)	1.0832
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0021 (0.0018)	0.0055 (0.0045)	0.0109
0.01	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0059 (1.0059)	1.0501 (1.0493)	1.1169 (1.1154)	1.2357
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0002 (0.0002)	0.0052 (0.0042)	0.0180 (0.0145)	0.0490
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0048 (1.0048)	1.0292 (1.0288)	1.0539 (1.0531)	1.0842
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0026 (0.0022)	0.0068 (0.0055)	0.0134
0.001	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0059 (1.0059)	1.0502 (1.0934)	1.1171 (1.1154)	1.2360
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0002 (0.0002)	0.0054 (0.0043)	0.0184 (0.0146)	0.0501
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0048 (1.0048)	1.0293 (1.0288)	1.0540 (1.0532)	1.0843
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0027 (0.0022)	0.0070 (0.0056)	0.0137

(*) : Erdogan () : Saimoto

5. 結 言

本解析では、体積法の特異積分方程式を用いて応力拡大係数を求めた。得られた結果は以下の通りである。

(1) 均質材のき裂問題等で有効であった未知関数を基本密度関数と級数の積で近似する手法によって数値解析を行った結果、少ない選点数で良好な解の収束性が得られ、境界条件もほとんど完全に満足させることが可能であることが確認された。

(2) 2個及び3個の等長界面き裂の干渉問題の解析を行い、き裂の相対位置 $\lambda = a/d$ 及び剛性比 $\Gamma = G_1/G_2$ を系統的に変化させた結果を示した(表5, 表6)。 $\Gamma = 1.0$ の場合の解析結果は厳密解と非常に良く一致した。また、結城らの定義に基づく無次元化応力拡大係数 F_1 は剛性比を変化させても $\Gamma = 1.0$ (均質材) の場合とそ

れほど変わらないことが明らかになった。

参 考 文 献

- (1) 結城, 界面の力学, (1993), 培風館.
- (2) 野田・小田・陳, 機論, 56-532, A (1990), 2405.
- (3) 野田・小田・増田, 機論, 57-542, A (1991), 2332.
- (4) 野田・小田・石井, 機論, 59-558, A (1993), 332.
- (5) Dunders, J. and Hetenyi, M., J. Appl. Mech., 28 (1961), 103. 及び Hetenyi, M. and Dunders, J., J. Appl. Mech., 29 (1962), 362.
- (6) 石田・野口, 機論, 49-437, A (1983), 36.
- (7) 西谷・陳, 体積法, (1987), 培風館.
- (8) Comninou, M., J. Appl. Mech., 44, (1977), 631.
- (9) 野田・松尾, 機論, 57-543, A (1991), 2811.
- (10) 野田・矢野, 機論, No.938-2, (1993), 186.
- (11) 西谷・野口・才本, 機論, 59-552, A (1993), 68.
- (12) 才本, 九州大学学位論文, (1993), 114.
- (13) Erdogan, F., Proc. 4th U. S. Nat. Conger. Appl. Mech., (1962), 547.
- (14) Sih, G. C., Proc. Second Conf. Theor. Appl. Mech., Pergamon Press, (1964), 117.

表6 等長2界面き裂(図6)の無次元化応力拡大係数

[$K_1 + iK_2 = (F_1 + iF_2)\sigma\sqrt{\pi a}(1 + 2i\varepsilon)$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 平面応力]

Γ	λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	$F_{1,A}$	1.00251 (1.00252)	1.01029 (1.01030)	1.02407 (1.02407)	1.04529 (1.04529)	1.07663 (1.07663)	1.12316 (1.12316)	1.19557 (1.19558)	1.3213 (1.32136)	1.606 (1.60685)
	$F_{1,B}$	1.00164 (1.00164)	1.00701 (1.00702)	1.01710 (1.01710)	1.03353 (1.03353)	1.05913 (1.05913)	1.09915 (1.09915)	1.16456 (1.16456)	1.2834 (1.28348)	1.564 (1.56454)
	$F_{1,C}$	1.00150 (1.00150)	1.00585 (1.00585)	1.01296 (1.01296)	1.02297 (1.02297)	1.03631 (1.03631)	1.05383 (1.05383)	1.07724 (1.07724)	1.1103 (1.11032)	1.164 (1.16439)
0.1	$F_{1,A}$	1.0026	1.0106	1.0248	1.0468	1.0790	1.1269	1.2010	1.3290	1.616
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0021	0.0052	0.0121	0.0295	0.086
	$F_{1,B}$	1.0016	1.0072	1.0176	1.0346	1.0610	1.1022	1.1692	1.2900	1.570
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0048	0.0104	0.0220	0.0484	0.128
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0060	1.0134	1.0237	1.0375	1.0556	1.0796	1.1136	1.168
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0010	0.0024	0.0046	0.0081	0.0140	0.025
0.01	$F_{1,A}$	1.0026	1.0108	1.0252	1.0475	1.0802	1.1286	1.2036	1.3326	1.620
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0010	0.0026	0.0064	0.0149	0.0363	0.106
	$F_{1,B}$	1.0017	1.0073	1.0179	1.0351	1.0619	1.1037	1.1714	1.2930	1.573
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0002	0.0006	0.0024	0.0059	0.0129	0.0272	0.0596	0.158
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0061	1.0136	1.0241	1.0381	1.0564	1.0808	1.1151	1.170
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0029	0.0057	0.0101	0.0173	0.031
0.001	$F_{1,A}$	1.0026	1.0108	1.0253	1.0476	1.0804	1.1289	1.2039	1.3330	1.621
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0010	0.0027	0.0065	0.0153	0.0371	0.108
	$F_{1,B}$	1.0017	1.0073	1.0179	1.0352	1.0620	1.1038	1.1716	1.2934	1.573
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0002	0.0006	0.0024	0.0060	0.0132	0.0277	0.0609	0.161
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0061	1.0136	1.0242	1.0382	1.0565	1.0810	1.1154	1.170
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0003	0.0013	0.0030	0.0058	0.0102	0.0177	0.032

() : Sih