

非圧縮性粘性流体-剛体連成に対する中間変数を用いた 圧力ベース解法の増分型定式化とその検証*

石原大輔^{*1}, 松本純一^{*2}

Incremental Formulation of Pressure Based Method for Fluid-rigid Body Interaction Using Intermediate Variable and Its Verification

Daisuke ISHIHARA^{*3} and Junichi MATSUMOTO

^{*3} Department of Mechanical Information Science and Technology, Kyushu Institute of Technology,
680-4 Kawazu, Iizuka-shi, Fukuoka, 820-8502 Japan

In this paper, an incremental formulation of pressure based method for fluid-rigid body interaction using intermediate variable is presented. The present method is based on the method proposed by Matsumoto and Kawahara in previous studies. In their method, the pressure Poisson equation equivalent to the incompressibility constraint is derived by using the intermediate fluid velocity and the approximation of enough small error between the intermediate fluid velocity and the fluid velocity. In the present method, all terms appear in the coupled equation system are evaluated in the same time instant, and unknown variables are solved incrementally by iterative solution procedure in each time step so as to satisfy the coupled equation system defined in the time instant. The present formulation is required when structural nonlinearity such as large deformation should be considered. The present method is applied for the free vibration of a rigid circular cylinder in a quiescent fluid to verify its performance.

Key Words: Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction, Intermediate Variable, Pressure Poisson Equation, Incompressible Viscous Fluid, Rigid Body, Monolithic Method

1. 序 論

ある種の流体-構造連成問題では、構造物を剛体近似して流体-剛体連成問題として扱うことができる。この結果、問題が簡易化されるため、これまで流体-剛体連成問題の数値解析手法に関する多くの研究が見当たる。一般に、流体-構造連成の解析手法は、一体型解法と分離型解法に分類できる。一体型解法は、流体と構造の方程式を境界面における連続・平衡条件で結合した連成方程式を解く手法であり、分離型解法は流体と構造の方程式を独立に解き、その結果を境界条件として互いに課す手法である。それぞれ一長一短あるものの、一般に一体型解法は解析の安定性に優れている。そこで本研究では、一体型解法に注目する。流体-剛体連成問題の一体型解法に関する研究として、例えば、文献(1)-(6)を挙げることができる。文献(1)では、連成方程式を解くため、連立1次方程式の係数行列が悪条件になる場合がある。一方、文献(2)-(6)のように、連成方程式から圧力ポアソン方程式を導出

する圧力ベース解法 (Pressure Based Method; PBM) では、そのような問題が生じ難い。しかしながら、文献(2)-(4)の定式化では、連成方程式から加速度に関する方程式を縮約することで圧力ポアソン方程式を導出するので、移流・拡散項を陰的に取り扱った場合、圧力ポアソン方程式の中に、それらの項に関する逆行列を含む。一方、文献(5), (6)の定式化では、(a)中間速度による速度の段階的な求解, (b)段階的に求める速度間の誤差が十分小さいとする近似により、圧力ポアソン方程式を導出することで、上述の問題を回避できる。本研究においては、この文献(5), (6)に基づき、中間変数を用いた PBM の増分型定式化を行い、その検証を行なう。

2. 非圧縮性粘性流体-剛体連成の基礎方程式

ALE記述の非圧縮性粘性流体の有限要素離散化式を

$$\begin{cases} \mathbf{M} \mathbf{a}^f + \mathbf{N}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^{alc}) + \mathbf{C} \mathbf{v}^f - \mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{g}^f & \text{.....(1a,b)} \\ \mathbf{G} \mathbf{v}^f = 0 \end{cases}$$

と表す。ここで \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{G} はそれぞれ質量, 拡散項, 圧力項の行列, \mathbf{N} は移流項のベクトル, \mathbf{a} , \mathbf{v} , \mathbf{p} , \mathbf{g} は

* 原稿受付 2007年7月17日。

^{*1} 正員, 九州工業大学情報工学部(☎ 820-8502 飯塚市川津 680-4)。

^{*2} 正員, (独)産業技術総合研究所(☎ 305-8564 つくば市並木 1-2-1)。

E-mail: ishihara@mse.kyutech.ac.jp

それぞれ加速度, 速度, 圧力, 外力のベクトルを表し, 添え字 f , ale , L , τ はそれぞれ流体に関する量, ALE 座標系に関する量, 行列の対角集中化, 行列の転置を表す. バネ支持された剛体の運動方程式を

$$\mathbf{m}\mathbf{a}^s + \mathbf{k}\mathbf{u}^s = \mathbf{g}^s \quad (2)$$

と表す. ここで \mathbf{m} , \mathbf{k} はそれぞれ質量, バネ定数の行列, \mathbf{u} は変位のベクトル, 上付き添え字 s は剛体に関する量を表す. 変位は剛体重心で定義する. 本研究では剛体の並進運動のみを考える. 流体と剛体の境界面における連続・平衡条件は

$$\mathbf{q}^s + \mathbf{T}\mathbf{q}_c^f = \mathbf{g}^s, \quad \mathbf{v}_c^f = \mathbf{T}\mathbf{v}^s \quad (3a, b)$$

と表せる. ここで \mathbf{q} は式(1a)または(2)の左辺の全ての項を含む等価内力, \mathbf{T} は物体の重心と物体表面の各流体節点の間の幾何学的な関係を表す行列⁽²⁾を表し, 下付き添え字 c は境界面の自由度を表す. 式(3)により, 式(1), (2)を結合することで, 次式の連成方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} {}^L\mathbf{M}_{ff} & 0 \\ 0 & \mathbf{m} + \mathbf{T}_L\mathbf{M}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_f^f \\ \mathbf{a}^s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{TN}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fc}\mathbf{T} \\ \mathbf{TC}_{cf} & \mathbf{TC}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_f^f \\ \mathbf{v}^s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \mathbf{TG}_c \end{bmatrix} \mathbf{p} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{ku}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_f^f \\ \mathbf{g}^s \end{Bmatrix}$$

$${}_r\mathbf{G}_f\mathbf{v}_f^f + {}_r\mathbf{G}_c\mathbf{T}\mathbf{v}^s = 0 \quad (4a, b)$$

3. 中間変数を用いた PBM の増分型定式化

時刻 $t + \Delta t$ において式(4)を満たす未知変数を求めるための次の反復計算 $k = 1, 2, 3 \dots$ を考える.

$$\begin{bmatrix} {}^L\mathbf{M}_{ff} & 0 \\ 0 & \mathbf{m} + \mathbf{T}_L\mathbf{M}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_f^f \\ \mathbf{a}^s \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{TN}_c \end{Bmatrix}^{(k-1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fc}\mathbf{T} \\ \mathbf{TC}_{cf} & \mathbf{TC}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_f^f \\ \mathbf{v}^s \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \mathbf{TG}_c \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(k)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^s(k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_f^f \\ \mathbf{g}^s \end{Bmatrix}$$

$${}_r\mathbf{G}_f\mathbf{v}_f^{f(k)} + {}_r\mathbf{G}_c\mathbf{T}\mathbf{v}^{s(k)} = 0 \quad (5a, b)$$

ここで括弧内の上付き添え字 k は反復 k 回目における諸量であることを表す. 但し, $k=0$ に対する変数は前時刻ステップ t において求めた変数を用いて与える. 流体の移流・拡散項を陽的に評価する場合, 安定に解析を行うために, 解析の時間刻み Δt に対して, 次式のクーラン数条件と拡散数条件が必要条件として課される.

$$U^f\Delta t/\Delta x_{\min}^f < 1, \quad v\Delta t/\Delta x_{\min}^2 < 1/2 \quad (6a, b)$$

ここで Δx_{\min}^f は流体要素の最小寸法, v は動粘性係数, U^f は流体の代表速度を表す. Δx が小さくなるにつれて, 拡散数条件(6b)は急速に厳しくなる. そこで式(5a)において, 拡散項を未知変数により陰的に評価している. 一方, 流体の移流項は既知変数により陽的に評価している. 反復 $k-1$ から k までの加速度, 速度, 変位, 圧力の増分

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{a} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{v} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{p} \end{aligned} \quad (7a, b, c)$$

に基づき, 式(5a)を増分形式で表示し, Newmark 法における加速度, 速度, 変位増分間の関係式

$$\Delta\mathbf{u} = \beta\Delta t^2\Delta\mathbf{a}, \quad \Delta\mathbf{v} = \gamma\Delta t\Delta\mathbf{a} \quad (8a, b)$$

を適用すると, 次式を得る.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{ff} & \hat{\mathbf{M}}_{fc} \\ \hat{\mathbf{M}}_{cf} & \hat{\mathbf{M}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{a}_f^f \\ \Delta\mathbf{a}^s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \mathbf{TG}_c \end{bmatrix} \Delta\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{g}_f^f \\ \Delta\mathbf{g}^s \end{Bmatrix} \quad (9)$$

但し, 一般化質量行列 $\hat{\mathbf{M}}$ と方程式残差 $\Delta\mathbf{g}$ はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{ff} & \hat{\mathbf{M}}_{fc} \\ \hat{\mathbf{M}}_{cf} & \hat{\mathbf{M}}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^L\mathbf{M}_{ff} & 0 \\ 0 & \mathbf{m} + \mathbf{T}_L\mathbf{M}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\Delta t\mathbf{C}_{ff} & \gamma\Delta t\mathbf{C}_{fc}\mathbf{T} \\ \gamma\Delta t\mathbf{TC}_{cf} & \beta\Delta t^2\mathbf{k} + \gamma\Delta t\mathbf{TC}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{g}_f^f \\ \Delta\mathbf{g}^s \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_f^f \\ \mathbf{g}^s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^L\mathbf{M}_{ff} & 0 \\ 0 & \mathbf{m} + \mathbf{T}_L\mathbf{M}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_f^f \\ \mathbf{a}^s \end{Bmatrix}^{(k-1)} \\ &+ \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{TN}_c \end{Bmatrix}^{(k-1)} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fc}\mathbf{T} \\ \mathbf{TC}_{cf} & \mathbf{TC}_{cc}\mathbf{T} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_f^f \\ \mathbf{v}^s \end{Bmatrix}^{(k-1)} \\ &- \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \mathbf{TG}_c \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(k-1)} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^s(k-1) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

と与えられる. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^{(k-1)}$ に対して, 式(5a)を中間変数

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k)*} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{a}^* \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k)*} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{v}^* \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)*} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (12a, b, c)$$

を満たすとする, 式(9)と同様にして次式を得る.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{ff} & \hat{\mathbf{M}}_{fc} \\ \hat{\mathbf{M}}_{cf} & \hat{\mathbf{M}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{a}_f^{s*} \\ \Delta\mathbf{a}^{s*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{g}_f^{f*} \\ \Delta\mathbf{g}^{s*} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式(9)と(13)の差を取り, 中間変数とその増分間の関係

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a}_i^f - \Delta \mathbf{a}_i^{f*} \\ \Delta \mathbf{a}^s - \Delta \mathbf{a}^{s*} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma \Delta t} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)*} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)*} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

を適用し, 整理すると次式を得る.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{ii} & \hat{\mathbf{M}}_{ic} \\ \hat{\mathbf{M}}_{ci} & \hat{\mathbf{M}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)*} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)*} \end{Bmatrix} - \gamma \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i \\ \mathbf{TG}_c \end{bmatrix} \Delta \mathbf{p} = 0 \quad (15)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} {}_r \mathbf{G}_i & {}_r \mathbf{G}_c {}_r \mathbf{T} \\ 0 & (\mathbf{m} + \mathbf{T}_L \mathbf{M}_{cc} {}_r \mathbf{T})^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

を式(15)に左からかけ, 非圧縮性条件(5b)を代入し, 整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \gamma \Delta t \left({}_r \mathbf{G}_i \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{G}_i + {}_r \mathbf{G}_c {}_r \mathbf{T} (\mathbf{m} + \mathbf{T}_L \mathbf{M}_{cc} {}_r \mathbf{T})^{-1} \mathbf{TG}_c \right) \Delta \mathbf{p} \\ & = - \left\{ {}_r \mathbf{G}_i {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)*} + {}_r \mathbf{G}_c {}_r \mathbf{T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)*} \right\} \\ & + \Lambda \begin{bmatrix} \gamma \Delta t \mathbf{C}_{ii} & \gamma \Delta t \mathbf{C}_{ic} {}_r \mathbf{T} \\ \gamma \Delta t \mathbf{TG}_{ci} & \beta \Delta t^2 \mathbf{k} + \gamma \Delta t \mathbf{TG}_{cc} {}_r \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)*} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)*} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

中間変数 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)*}$ は流速 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)}$ の予測流速と考えられ, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)*}$ は時刻 $t + \Delta t$ における反復計算の過程で漸近的に零に近づくので, 本研究では, 式(17)の右辺第2項を省略した次の圧力ポアソン方程式を採用する.

$$\begin{aligned} & \gamma \Delta t \left({}_r \mathbf{G}_i \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{G}_i + {}_r \mathbf{G}_c {}_r \mathbf{T} (\mathbf{m} + \mathbf{T}_L \mathbf{M}_{cc} {}_r \mathbf{T})^{-1} \mathbf{TG}_c \right) \Delta \mathbf{p} \\ & = - \left\{ {}_r \mathbf{G}_i {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i^{f(k)*} + {}_r \mathbf{G}_c {}_r \mathbf{T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{s(k)*} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$k = 0$ に対する変数を Newmark 法に基づく予測子

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(0)} = {}^t \mathbf{u} + \Delta t {}^t \mathbf{v} + \Delta t^2 (1/2 - \beta) {}^t \mathbf{a} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(0)} = {}^t \mathbf{v} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t \mathbf{a} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^{(0)} = 0 \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{(0)} = {}^t \mathbf{p} \end{cases} \quad (19)$$

によって与えるとする, 時刻 $t + \Delta t$ における求解過程は次のようになる.

$k = 0$

- ・ 式(19)より, 変数を予測する

$k = 1, 2, 3 \dots$

- ・ 式(13)より, 中間加速度増分を求める
- ・ 式(18)より, 圧力増分を求める
- ・ 式(9)より, 加速度増分を求める
- ・ 式(7)より, 変数を修正する

図1に本解法による解析の流れを示す.

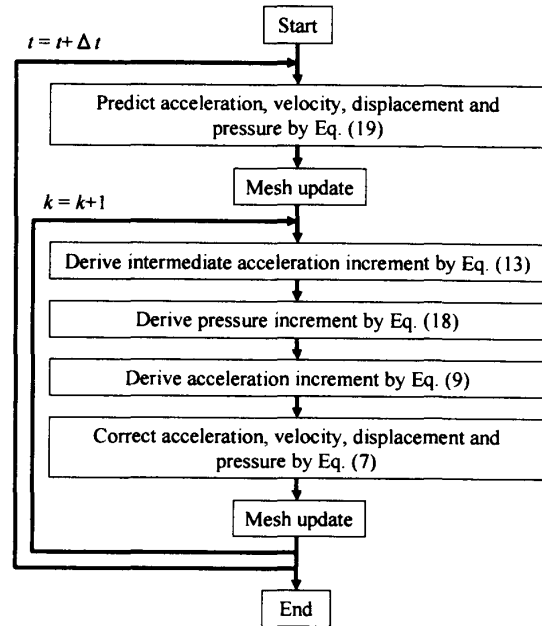


Fig. 1 Analysis flow of the present method.

本提案解法の時刻 $t + \Delta t$ における反復(収束)計算を考察すると, 式(13), (18), (9)の各増分量 $\Delta \mathbf{a}_i^{f*}$, $\Delta \mathbf{a}^{s*}$, $\Delta \mathbf{a}_i^f$, $\Delta \mathbf{a}^s$, $\Delta \mathbf{p}$ は零に収束して行き, 中間変数 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)*}$ は ${}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{(k)}$ に収束して行く. 従って, 式(13), 式(9)は時刻 $t + \Delta t$ における式(4a)に, 式(18)は時刻 $t + \Delta t$ における式(4b)に収束して行く.

本研究では, 文献(5), (6)の解法を基本とし, その増分型定式化を行っており, 大変形といった構造非線形への対応が可能である. また(a)連成方程式の全ての項を同時刻で評価する, (b)各時刻における連成方程式を満足するように, 未知変数を反復計算により増分的に求める, (c)時間積分に Newmark 法を適用し, パラメータにより時間積分特性を制御できる, という特徴を持つ.

4. 性能検証

4・1 問題設定 バネ支持された剛体円柱が流体中で x 方向に自由振動する問題⁽²⁾を用いる(図2(a)). 円柱質量 $m = 3.408\text{g}$, バネ定数 $k = 34611.3\text{g/sec}^2$, 円柱直径 $d = 1.27\text{cm}$ とする. 流体はシリコン油(質量密度 $\rho^f = 0.956\text{g/cm}^3$, 粘性係数 $\mu = 1.45\text{g/(cm sec)}$), ミネラル油($\rho^f = 0.935\text{g/cm}^3$, $\mu = 0.41\text{g/(cm sec)}$), 水($\rho^f = 1.0\text{g/cm}^3$, $\mu = 0.0133\text{g/(cm sec)}$)を用い, 円筒直径 $D = 6.35\text{cm}$ とする. 剛体の自由振動の初期変位 0 とし, また流体が無い場合の剛体の振動振幅が $a = 0.01d = 0.00127\text{cm}$ となるように, 減衰無し

体の1自由度自由振動の解析解から、初期速度 1.28 cm/sec を与える。流体は初め静止している。Newmark 法の β , γ をそれぞれ 0.3025, 0.6 とする。plpl 要素を用い、安定化手法として SUPG・PSPG 法⁽⁷⁾を用いる。図1における各時刻ステップでの反復収束計算を、式(9)の残差ベクトルの各成分の絶対値の平均値が 10^{-6} より小さくなった場合、終了する。

4・2 精度検証 最初に、空間・時間解像度を変化させたときの解析結果の収束を調べる。次に、収束したとみなせる解析結果から、流体中で運動する物体に対する流体の動力学的影響を表す付加質量、付加粘性係数を導出し、最後に、それらを文献(2)の結果と比較する。

4・2・1 有限要素メッシュの分割数について 流体領域の周・径方向分割数 N 、円柱に接する要素の径方向長さ L_1 、外周に接する要素の径方向長さ L_2 とする。 $L_2/L_1 = 5$ と固定し、 $N = 20, 40, 80, 160, 320$ とする。 $N = 160$ のときの有限要素メッシュを図2(b)に示す。時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ sec に固定し、解析を行った。 $N = 160$ のときの円柱の水平方向 (x 方向) 変位の時刻歴を図3、流体を水とした場合の圧力コンターを図4にまとめる。ミネラル油の場合、図3から得られる減衰固有角振動数 ω_d と N との関係を図5、対数減衰率 δ と N との関係を図6に示す。同図において、 $N = 160$ のときに $N = 320$ に対する相対誤差が 1%未満となる。そこで以後の解析では、 $N = 160$ の有限要素メッシュを用いる。

4・2・2 時間刻みの大きさについて 時間刻み $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-3}, 5.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-5}$ sec とし、解析を行った。このとき Δt と ω_d の関係を図7、 Δt と δ の関係を図8に示す。 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ sec に対する $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ sec の相対誤差は、 ω_d に関しては、いずれの流体でも 1%未満、 δ に関しては、シリコン油、ミネラル油のとき 1%未満、水のとき 3.4%であった。4・2・1 項の結果と総合し、 $N = 160$, $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ sec の場合の解析結果を、空間・時間解像度を変化させたときの収束解と定義する。

以上の解析において、時間刻みを大きくした場合、数値誤差に基づき、減衰と位相遅れが大きくなる。これは本研究で用いた plpl 要素の場合、帯行列である整合質量行列を対角集中化したことが原因として考えられる。本解法においては、質量行列の逆行列を取ることが必要であるため、質量行列が対角行列であることが必須となる。文献(8)の気泡関数安定化法を用いれば、整合質量行列が対角行列となる。従って、上述の数値誤差を緩和するために、文献(8)の気泡関数安定化法を利用するといった対応が考えられる。

4・2・3 付加質量/粘性係数の導出と比較 次式の付加質量係数 C_M 、付加粘性係数 C_V は、流体中で運動する物体に対する流体の動力学的影響を定量的に表す。

$$C_M = m_{ad} / M, \quad C_V = c_{ad} / (M\omega_d) \quad (20a, b)$$

ここで M は円柱が排除する流体の質量、 m_{ad} は付加質量、 c_{ad} は付加粘性である。 m_{ad} , c_{ad} はそれぞれ次式により与えられる。

$$m_{ad} = k(1 - \zeta^2) / \omega_d^2 - m, \quad c_{ad} = 2\zeta \sqrt{(m + m_{ad})k} \quad (21a, b)$$

ここで ζ は減衰比であり、図3から得られる ω_d と δ を次式に代入して求める。

$$\zeta = \delta / \sqrt{\delta^2 + 4\pi^2} \quad (22)$$

4・2・2 節で定義した収束解の ω_d と δ それらから得られる運動学的レイノルズ数 (kinematic Reynolds number) $R_\omega = \omega_d d^2 / \nu$ 、レイノルズ数 $Re = a \omega_d d / \nu$ 、 C_M , C_V の一覧を表1に、また R_ω , C_M , C_V の間の関係を図9にまとめる。同図に示すように、定性的に、本解析結果と文献(2)の解析結果は良く一致している。一方、同表の C_M , C_V , R_ω の文献(2)の解析結果に対する相対誤差は、シリコン油：それぞれ 2.5%, 2.7%, 0.5%, ミネラル油：それぞれ 8.8%, 7.8%, 1.7%, 水：それぞれ 0.48%, 3.0%, 1.1% となり、ミネラル油において、若干大きな差が見られるが、シリコン油と水において、良く一致している。

4・3 計算効率の検討 拡散項を陽的に扱う PBM の場合、解析の安定性のために、拡散数条件 (6b) が課される。一方、拡散項を陰的に扱う本 PBM は、それが課されないが、圧力ポアソン方程式に加え、式(9)を加速度増分に関して解く必要がある。本研究の場合、連立1次方程式の解法(ソルバー)として、共役勾配法を用い、その各反復計算において、計算量が支配的となる行列・ベクトル演算を element-by-element 法に基づき実行した。プログラム実装等に依存して変わるが、本解析の場合、式(9)の求解に要した時間は、圧力ポアソン方程式に比べて、高々2倍であった。各時間ステップにおいて、これらの式の求解に要する計算量が支配的であるので、拡散項を陽的に扱う PBM の場合に比べて、本 PBM は、高々3倍、計算量が多い。従って、本解析の場合、精度の観点から決まる Δt が、拡散数条件による Δt より、3倍以上、大きい場合、本 PBM の方が、拡散項を陽的に扱う

PBM に比べて、計算量が少なくなる。本解析の場合、 $\Delta x_{\min}^f \sim 0.02\text{cm}$ であることから、拡散数条件による臨界時間刻み (critical time increment) Δt_c は、シリコン油の場合、約 0.0001sec となる。一方、精度の観点から妥当な Δt を考える。4・2・2項において、Case 1: シリコン油、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}\text{sec}$, Case 2: ミネラル油、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}\text{sec}$, Case 3: 水、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}\text{sec}$ の各場合に対して得られた δ , ω_d の収束解に対する相対誤差を調べると、Case 1: それぞれ 3.8%, 1%未満, Case 2: それぞれ 4.2%, 1%未満, 水, Case 3: それぞれ 3.4%, 1%未満であった。ここで、これらの Δt が妥当であると判断したとする。シリコン油の場合、上記の Δt は Δt_c の 10 倍である。従って、拡散項を陽的に扱う PBM に比べて、本 PBM の方が効率的である。一方、ミネラル油、水の場合、精度の観点から決めた Δt が Δt_c より小さいので、いずれの解法も同じ時間刻みを用いることになり、式(9)を余分に解く本 PBM の方が、拡散項を陽的に扱う PBM に比べて、計算時間を要する。

最後に、本 PBM の計算効率上の利点を、一般的に述べる。欠点は、上述のように、拡散項を陽的に扱う PBM に比べて、計算量が増える点である。一方、拡散数条件から決まる Δt は、 Δx_{\min}^f の 2 乗に比例して小さくなるので、精度の観点から決まる時間刻み Δt に比べて、過剰に小さい可能性がある。拡散数条件に制約を受けない本 PBM を、そのような場合に選択できることは有用である。

4・4 反復計算の収束性 本反復計算における残差は一次収束する。例として、流体を水、時間刻みを $1.0 \times 10^{-3}\text{sec}$ とした場合、解析の第 1 時間ステップにおける流体運動方程式の残差ノルムの推移を表 2 に示す。残差ノルムは、残差ベクトルの各成分の絶対値の平均により定義する。表 2 において、 $y^{(k)}$ は反復 $k+1$ における残差を反復 k における残差で割ったものである。同表に示すように、反復計算において、残差が一次収束する。式 (5a) において、移流項を既知の時刻で評価すれば、反復解法として、Newton-Raphson 法を用いることになり、収束性が向上すると考えられる。

5. 結 論

本研究においては、非圧縮性粘性流体-剛体連成に対する中間変数を用いた PBM の増分型定式化を行い、静止流体中で自由振動する剛体円柱の解析を通じて、本解法の解析精度、計算効率、反復計算の収束性について議論した。本問題の範囲ではあるものの、本解法

が十分な精度で解析が行えることを示した。また従来の PBM に比べ、計算を効率的に行える場合があることを示した。今後は、剛体を弾性体に拡張し、構造の大変形問題を含む流体構造連成問題に適用する予定である。

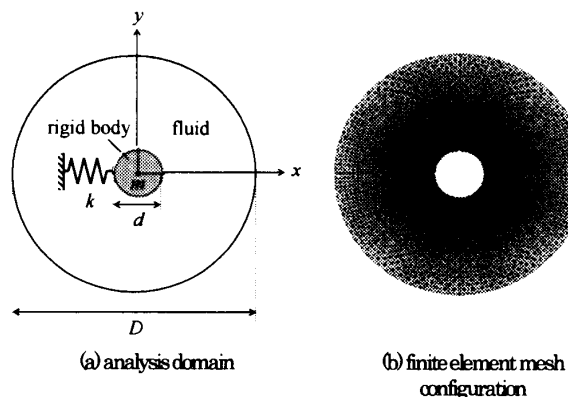


Fig. 2 Problem setup.

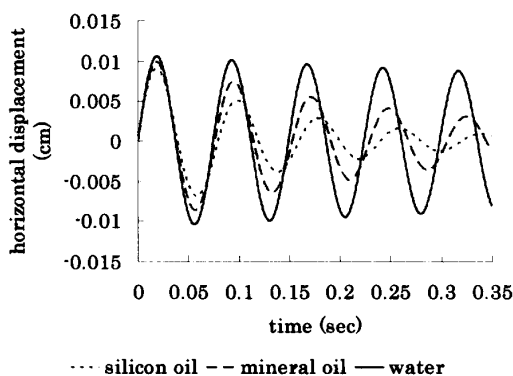


Fig. 3 Time histories of horizontal displacement of rigid body for three kinds of fluid.

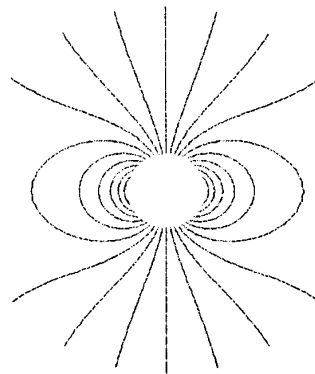


Fig. 4 Pressure contour of fluid domain in the case of water. $t = 0.093\text{ sec}$, instant, when approximately local maximum displacement is taken.

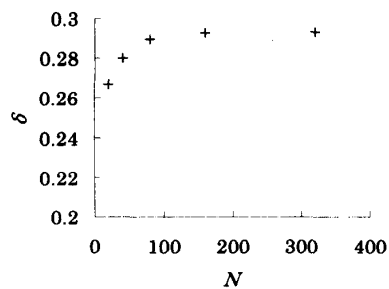


Fig. 5 The relation between the iteration number N and the logarithmic damping ratio δ .

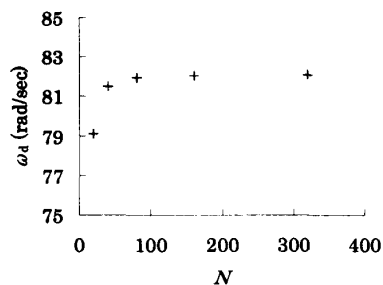


Fig. 6 The relation between the iteration number N and the damped natural angular frequency ω_d .

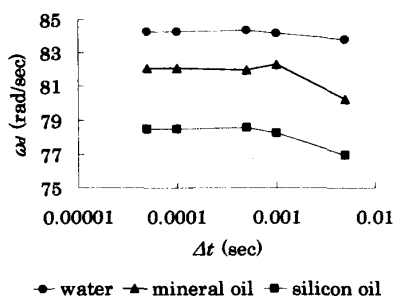


Fig. 7 The relation between the time increment Δt and the damped natural angular frequency ω_d .

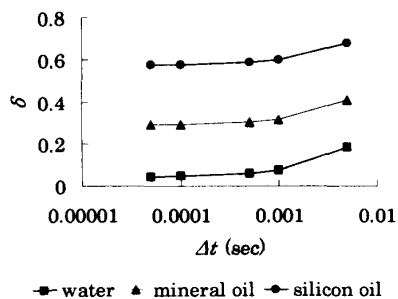


Fig. 8 The relation between the time increment Δt and the logarithmic damping ratio δ .

Table 1 Summary of the present results.

Fluid	Silicon oil	Mineral oil	Water
R_ω	83.42	301.9	10220
Re	0.8342	3.019	102.2
C_M	1.832	1.451	1.238
C_V	0.8623	0.4013	0.06035
ω_d	78.44	82.08	84.26
δ	0.5752	0.2913	0.04607

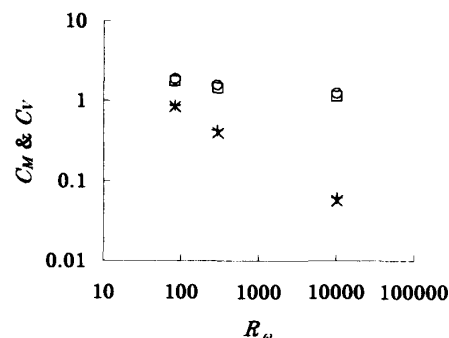


Fig. 9 Relation between R_ω and C_M or C_V : \square and \times indicate present C_M , C_V , respectively. \circ and $+$ indicate C_M , C_V given in Ref.(2), respectively.

Table 2 Transition of the residual norm.

k	Residual norm	$\gamma^{(k)}$
1	4.25×10^{-2}	8.36×10^{-3}
2	3.55×10^{-4}	2.32×10^{-1}
3	8.23×10^{-5}	2.30×10^{-1}
4	1.89×10^{-5}	4.01×10^{-1}
5	7.58×10^{-6}	5.54×10^{-1}
6	4.21×10^{-6}	6.29×10^{-1}
7	2.64×10^{-6}	6.73×10^{-1}
8	1.78×10^{-6}	7.04×10^{-1}
9	1.25×10^{-6}	7.39×10^{-1}
10	9.24×10^{-7}	

文 献

- (1) Dettmer, W. and Peric, D., A Computational Framework for Fluid-Rigid Body Interaction: Finite Element Formulation and Applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 195, (2006), pp. 1633-1666.
- (2) Nomura, T. and Hughes, T.J.R., An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Interaction of Fluid and a Rigid Body, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, (1992), pp. 115-138.

- (3) Nomura, T., ALE Finite Element Computations of Fluid-Structure Interaction Problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 112, (1994), pp. 291-308.
 - (4) Sarrate, J. et al., Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation for Fluid-Rigid Body Interaction, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 190, (2001), pp. 3171-3188.
 - (5) Matsumoto, J. and Kawahara, M., Stable Shape Identification for Fluid-Structure Interaction Problem Using MINI Element, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 3, (2000), pp. 263-274.
 - (6) Matsumoto, J. and Kawahara, M., Shape Identification for Fluid-Structure Interaction Problem Using Improved Bubble Element, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 15, (2001), pp. 33-45.
 - (7) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R., Incompressible Flow Computations with Stabilized Bilinear and Linear Equal-Order-Interpolation Velocity-Pressure Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, (1992), pp. 221-242.
 - (8) Matsumoto, J., A Relationship between Stabilized FEM and Bubble Function Element Stabilization Method with Orthogonal Basis for Incompressible Flows, *J. Appl. Mech. JSCE*, Vol.8, (2005), pp. 233-242.
-