日本機械学会論文集(A編)
75巻753号(2009-5)

論文 No. 08-1132

分布荷重を受ける界面き裂の応力拡大係数について*

野田尚昭*1, 張 玉*2
松林将寛*3, 高瀬 康*4

Stress Intensity Factors of an Interface Crack Under Polynomial Distribution of Stress

Nao-Aki NODA*5, Yu ZHANG,
Masahiro MATSUBAYASHI and Yasushi TAKASE

*5 Department of Mechanical and Control Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, stress intensity factors for a two-dimensional interfacial crack under polynomial distribution of stress are considered on the idea of the body force method. In this analysis, unknown body force densities are approximated by the products of the fundamental densities and power series ; here the fundamental densities are chosen to express singular stress fields due to an interface crack exactly. The stress intensity factors of a 2D interfacial crack under polynomial distribution of stress are expressed as formulars for the reader's convenience with varying the polynomial exponent n.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Interface Crack, Composite Material, Fracture Mechanics, Singular Integral Equation

1. 緒 言

機能性材料の集合体である電子製品などには，多数の異種材料接合界面が存在している．これらの界面を有する部材の破壊は，接合面の不良接着部やはく離を起点として生じた界面き裂の伝ぱに支配されることが多い．2次元界面き裂の問題に関してはSalganik[1]の解析をはじめとして多くの解析[2]~[10]がなされている．しかしこれまでなされてきた解析の多くは，特定の材料の組合せに対する数値計算である場合がほとんどであり，任意の材料の組合せに対して応力拡大係数が精度良く与えられているものは少ない．このため均質材中のき裂の応力拡大係数はハンドブック[8]に多くの結果が示されているが界面き裂に関しては，その利用できる解は依然として少ない．

本研究では，2次元界面き裂が分布荷重 p_{zz}, p_{zx}, p_{zy} を受ける問題を体積力法の特異積分方程式を用いて考察する．具体的には，未知関数を基本密度関数と級数の積で近似する方法を用いて，分布荷重を多項式で表現する際（例えば $p_{zz}=p_0(x/a)^n$）の指数 n を変えて解析する．なお均質無限板中の長さ $2a$ の2次元き裂に関しては，$p_{zz}=p_0\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x/a)^n$ で表される分布荷重を受ける場合，以下の式で厳密解が与えられている[9]．

$$
\begin{aligned}
K_{I,A}&=p_0\sqrt{\pi a}[\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n})(2n)!/2^{2n}(n!)^2]\\
K_{I,B}&=p_0\sqrt{\pi a}[\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_{2n-1}+\alpha_{2n})(2n)!/2^{2n}(n!)^2]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

これまで界面き裂に関しては式(1)に対応する解は知られていない．そこで，内圧の分布がき裂面の応力拡大係数に与える影響及び，任意の材料の組み合わせによる応力拡大係数の一般的表現について考察する．本論文で考察した解法と結果は3次元界面き裂問題[11]を考察する際にも有用と考えられる．

2. 解析方法

2・1 平面問題（図1で p_{zz} または p_{zx} を受ける場合）

図1に示すように，界面き裂が分布荷重 $p_{zz}=p_0(x/a)^n$ を受ける場合の応力拡大係数の解析を行う．以下の複素応力拡大係数の定義によれば，界面上の応力分布は次式で表される．

$$\sigma_{zz}+i\tau_{zx}=\frac{K_{\rm I}+iK_{\rm II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{r}{a}\right)^{i\varepsilon} \tag{2}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\{(G_2\kappa_1+G_1)/(G_1\kappa_2+G_2)\} \tag{3}$$

* 原稿受付 2008年12月22日．
*1 正員，九州工業大学工学研究院(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)．
*2 正員，九州工業大学大学院工学研究科．
*3 九州工業大学工学部機械知能工学科．
*4 正員，九州工業大学工学部機械知能工学科．
E-mail : noda@mech.kyutech.ac.jp

$$\kappa_m = \begin{cases} (3-\nu_m)/(1+\nu_m) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu_m & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

ν_m :(ポアソン比), $(m=1, 2)$

G_m :(横弾性係数), $(m=1, 2)$

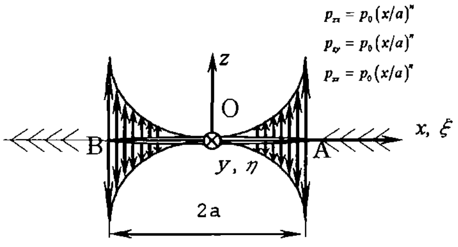

Fig.1 Two-dimensional interface crack under polynomial distribution of stress

長さ$2a$の界面き裂の境界条件を表す特異積分方程式は，界面き裂のない接合無限板中の界面上に分布させたy方向引張形の標準型集中力対ならびにせん断形の標準型集中力対の分布密度 $P_1(\xi), P_2(\xi)$ を未知関数とする次の式で表される(6).

$$-\pi\beta\frac{dP_2(x)}{dx} + \sum_{m=1}^{2}\frac{\kappa_m-1}{\kappa_m+1}\,⨎_{-a}^{a}\frac{P_1(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = -\sum_{m=1}^{2}G_m\frac{\pi}{C}p_{zz}(x)$$

$$\pi\beta\sum_{m=1}^{2}\frac{\kappa_m-1}{\kappa_m+1}\frac{dP_1(x)}{dx} + ⨎_{-a}^{a}\frac{P_2(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = -\sum_{m=1}^{2}G_m\frac{\pi}{C}p_{zx}(x) \tag{4}$$

$$C = \frac{2G_1(1+\alpha)}{(1-\beta^2)(\kappa_1+1)} = \frac{2G_2(1-\alpha)}{(1-\beta^2)(\kappa_2+1)} \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{G_2(\kappa_1+1)-G_1(\kappa_2+1)}{G_2(\kappa_1+1)+G_1(\kappa_2+1)}$$

$$\beta = \frac{G_2(\kappa_1-1)-G_1(\kappa_2-1)}{G_2(\kappa_1+1)+G_1(\kappa_2+1)} \tag{6}$$

参考のために，界面き裂の開口変位により導かれる特異積分方程式を示すと，$\Delta u_x(\xi), \Delta u_z(\xi)$ を未知関数として次の式で表される(6).

$$-\beta\frac{d\Delta u_x(x)}{dx} + \frac{1}{\pi}⨎_{-a}^{a}\frac{\Delta u_z(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = -\frac{p_{zz}(x)}{C}$$

$$\beta\frac{d\Delta u_z(x)}{dx} + \frac{1}{\pi}⨎_{-a}^{a}\frac{\Delta u_x(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = -\frac{p_{zx}(x)}{C} \tag{7}$$

ここで，y方向引張形の標準型集中力対の分布密度と界面き裂の開口変位の間に以下の関係がある.

$$P_1(\xi) = -\sum_{m=1}^{2}\frac{G_m(1+\kappa_m)}{\kappa_m-1}\Delta u_z(\xi)$$

$$P_2(\xi) = \sum_{m=1}^{2}G_m\Delta u_x(\xi) \tag{8}$$

下添字$m=1,2$はそれぞれ材料1，2を表す．また，$⨎$は発散積分の有限部分をとることを意味する．式 (4)の標準形体積力対の分布密度$P_1(\xi), P_2(\xi)$は，次式で表されるように1個の界面き裂を表すのに必要な密度を表現する基本密度関数$w_1(\xi), w_2(\xi)$と重み関数$F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$の積で近似する.

$$P_1(\xi) + iP_2(\xi) = \{w_1(\xi) + iw_2(\xi)\}\{F_1(\xi) + iF_2(\xi)\} \tag{9}$$

界面き裂の場合，基本密度関数は界面き裂のき裂縁の変位をもとにした次式で表される(4),(10).

$$\Delta u_z + i\Delta u_x = \sum_{m=1}^{2}\frac{1}{G_m}\left\{\frac{\kappa_m-1}{1+\kappa_m}w_1(\xi) + iw_2(\xi)\right\}(F_1(\xi) + iF_2(\xi))$$

$$= \sum_{m=1}^{2}\frac{1}{G_m}\frac{1+\kappa_m}{4\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}(F_1(\xi) + iF_2(\xi)) \tag{10}$$

ここで，一般的に一様な応力σ_0, τ_0を受ける界面き裂のき裂縁の開口変位は次のように表される(10).

$$\Delta u_z + i\Delta u_x = \sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}(\sigma_0 + i\tau_0) \tag{11}$$

この式は引張力とせん断力の両方を受ける場合を考慮されているので，せん断の分布荷重を受ける場合も基本密度関数として同様の式を用いた.

またここでは，重み関数$F_1(\xi), F_2(\xi)$を次のような級数で近似する

$$F_1(\xi) = \sum_{n=1}^{M}a_n\xi^{n-1},\ F_2(\xi) = \sum_{n=1}^{M}b_n\xi^{n-1} \tag{12}$$

境界条件を満足させる選点は，き裂の両端で同じように密となるように配置する(6). 以上のような離散化手法により式 (4) で表される特異積分方程式は，係数a_n, b_n についての$2M$元連立方程式に帰着される．それを解くことによって未知関数$F_1(\xi), F_2(\xi)$を決定し，き裂先端での重みの値より界面き裂の応力拡大係数は次式のように表される.

$$K_1 + iK_2 = \{F_1(a) + iF_2(a)\}p_0\sqrt{\pi a}(1+2i\varepsilon) \tag{13}$$

2・2　面外せん断問題（図1で p_{zy} を受ける場合）

面外せん断分布荷重を受ける長さ $2a$ の2次元界面き裂の境界条件を表す特異積分方程式は，界面き裂のない接合無限版中の界面上に分布させたせん断型の標準型集中力対の分布密度 $P_3(\xi)$ を未知関数とする次の式で表される[7].

$$\frac{1}{\pi}\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\oint_{-a}^{a}\frac{P_3(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi=-\sum_{m=1}^{2}G_m p_{zy}(x) \tag{14}$$

また，界面き裂の開口変位により導かれる特異積分方程式を示すと，$\Delta u_y(\xi)$ を未知数として次の式で表される.

$$\frac{1}{\pi}\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\oint_{-a}^{a}\frac{\Delta u_y(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi=-p_{zy}(x) \tag{15}$$

ここでせん断形の標準型集中力対の分布密度と界面き裂の開口変位の間に以下の関係がある.

$$P_3(\xi)=\sum_{m=1}^{2}G_m\Delta u_y(\xi) \tag{16}$$

未知関数 $P_3(\xi)$ は界面き裂を表すのに必要な密度を表現する基本密度関数 $w_3(\xi)$ と重み関数 $F_3(\xi)$ の積で近似する.

$$P_3(\xi)=w_3(\xi)F_3(\xi) \tag{17}$$

また，基本密度関数 $w_3(\xi)$ は2次元界面き裂が一様な面外せん断応力を受ける場合のき裂縁の変位をもとにした次式で表される[4].

$$\Delta u_y=\sum_{m=1}^{2}\frac{1}{G_m}w_3(\xi)F_3(\xi)=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m}\sqrt{a^2-\xi^2}F_3(\xi) \tag{18}$$

重み関数 $F_3(\xi)$ は次のような級数で近似する.

$$F_3(\xi)=\sum_{n=1}^{M}c_n\xi^{n-1} \tag{19}$$

境界条件を満足させる選点は，き裂の両端で同じように密となるように配置する[6]. 以上のような離散化手法により式(14)で表される特異積分方程式は係数 c_n についての M 元連立方程式に帰着される. それを解くことによって，未知関数 $F_3(\xi)$ を決定し，き裂先端での重みの値より応力拡大係数は次のように与えられる.

$$K_3=F_3(a)p_0\sqrt{\pi a} \tag{20}$$

3. 解析結果及び考察

表1は分割数 M を変化させたときの無次元化応力拡大係数の収束状況である. この結果より，本解析法は $n=0$ では $M=1$ で，$n=1$ では $M=2$ で厳密解が得られ，一般的に $n=n_0$ では $M=n_0+1$ で厳密解を与えることが分かる. また図1の x 軸方向に $p_{zx}=p_0(x/a)^n$，$n=n_0$ なるせん断の分布荷重を受ける場合も同様に $M=n_0+1$ で厳密解が与えられる. このときせん断の分布荷重を受ける場合の応力拡大係数を F_1', F_2' とすると，$F_1'=F_2, F_2'=F_1$ となった（表2）.

ここで，引張の分布荷重を受ける場合の結果を調べると，n が奇数のとき，式(12)の $F_1(\xi)$ は奇関数となるので，係数 a_n は偶数次のみとなる. また $F_2(\xi)$ は偶関数となるので，係数 b_n は奇数次のみとなる. 逆に n が偶数のとき，式(12)の $F_1(\xi)$ は偶関数となるので，係数 a_n は奇数次のみとなり，また $F_2(\xi)$ は奇関数となるので，係数 b_n は偶数次のみとなっていることが明らかとなった. 表3はその係数をまとめたものである. これらの係数は ε のみの関数となっており，表4に ε を用いた一般的表現を示す. 無次元化応力拡大係数はき裂先端での重みの値によって決定されるので，係数と同様に ε のみの関数となることが明らかとなった. 表5にその一般的表現を示す.

また面外せん断荷重を受ける場合の係数及び，無次元化応力拡大係数の値を表6，7に示す.

結局，面内分布荷重 $p_{zz}=p_0(x/a)^n$ 及び $p_{zx}=p_0(x/a)^n$ を受けるときの界面き裂の開口変位は

$p_{zz}=p_0(x/a)^n$ で n が奇数のとき

$$\begin{aligned}\Delta u_z+i\Delta u_x&=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}\\&\times[a_2(\xi/a)+a_4(\xi/a)^3+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n\\&+i\{b_1+b_3(\xi/a)^2+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]\\&\times(p_{zz}+ip_{zx})\end{aligned} \tag{21. a}$$

$p_{zz}=p_0(x/a)^n$ で n が偶数のとき

$$\begin{aligned}\Delta u_z+i\Delta u_x&=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}\\&\times[a_1+a_3(\xi/a)^2+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n\\&+i\{b_2(\xi/a)+b_4(\xi/a)^3+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]\\&\times(p_{zz}+ip_{zx})\end{aligned} \tag{21. b}$$

$p_{zx}=p_0(x/a)^n$ で n が奇数のとき

$$\begin{aligned}\Delta u_z+i\Delta u_x&=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}\\&\times[a_1+a_3(\xi/a)^2+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n\\&+i\{b_2(\xi/a)+b_4(\xi/a)^3+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]\\&\times(p_{zz}+ip_{zx})\end{aligned} \tag{22. a}$$

$p_{zx} = p_0(x/a)^n$ でnが偶数のとき

$$\Delta u_z + i\Delta u_x = \sum_{m=1}^{2} \frac{1+\kappa_m}{4G_m \cosh \pi\varepsilon} \sqrt{a^2-\xi^2} \left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}$$
$$\times [a_2(\xi/a) + a_4(\xi/a)^3 + \cdots + a_{n+1}(\xi/a)^n$$
$$+ i\{b_1 + b_3(\xi/a)^2 + \cdots + b_n(\xi/a)^{n-1}\}]$$
$$\times (p_{zz} + ip_{zx}) \qquad (22.\mathrm{b})$$

となる．また面外分布荷重 $p_{zy} = p_0(x/a)^n$を受けるときの界面き裂の開口変位は．

nが奇数のとき

$$\Delta u_y = \sum_{m=1}^{2} \frac{1+\kappa_m}{4G_m} \sqrt{a^2-\xi^2}$$
$$\times \{c_2(\xi/a) + c_4(\xi/a)^3 + \cdots + c_{n+1}(\xi/a)^n\} p_{zy} \qquad (23.\mathrm{a})$$

nが偶数のとき

$$\Delta u_y = \sum_{m=1}^{2} \frac{1+\kappa_m}{4G_m} \sqrt{a^2-\xi^2}$$
$$\times \{c_1 + c_3(\xi/a)^2 + \cdots + c_n(\xi/a)^{n-1}\} p_{zy} \qquad (23.\mathrm{b})$$

となる．

4. 結　言

本研究では，き裂面に分布荷重を受ける2次元界面き裂の問題を，体積力法の未知関数を基本密度関と級数の積で近似する方法を用いて，内圧の分布を$n = 1$–6と変えて正確に解析した．そして，内圧の分布がき裂面の応力拡大係数に与える影響及び，任意の材料の組み合わせによる応力拡大係数の一般的表現について考察した．解析によって得られた結果を以下に示す．

Table 1 Convergence of the results for 2D interface crack under polynomial distribution of stress

$p_{zz} = p_0(x/a)^n \quad (\varepsilon=0.02) \quad K_{\mathrm{I}} + iK_{\mathrm{II}} = \{F_{\mathrm{I}} + iF_{\mathrm{II}}\} p_0\sqrt{\pi a}(1+2i\varepsilon)$

	M	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
F_{I}	1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00000	0.00000
	2	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.03125	0.01563
	3	1.0000	0.5000	0.4997	0.2222	0.2221	0.09877	0.09872
	4	1.0000	0.5000	0.4997	0.3748	0.2772	0.21668	0.15567
	5	1.0000	0.5000	0.4997	0.3748	0.3747	0.24865	0.24855
	6	1.0000	0.5000	0.4997	0.3748	0.3747	0.31222	0.26921
	7	1.0000	0.5000	0.4997	0.3748	0.3747	0.31222	0.31212
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	∞	1.0000	0.5000	0.4997	0.3748	0.3747	0.31222	0.31212
F_{II}	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.00000	0.0000	0.00000	0.00000
	2	0.0000	0.0200	0.0000	0.00500	0.0000	0.00125	0.00000
	3	0.0000	0.0200	0.1333	0.00890	0.0059	0.00395	0.00263
	4	0.0000	0.0200	0.1333	0.01833	0.0083	0.01075	0.00474
	5	0.0000	0.0200	0.1333	0.01833	0.0147	0.01262	0.01037
	6	0.0000	0.0200	0.1333	0.01833	0.0147	0.01716	0.01159
	7	0.0000	0.0200	0.1333	0.01833	0.0147	0.01716	0.01471
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	∞	0.0000	0.0200	0.1333	0.01833	0.0147	0.01716	0.01471

Table 2 Convergence of the results for 2D interface crack under polynomial distribution of stress

$p_{zx} = p_0(x/a)^n \quad (\varepsilon=0.02) \quad K_{\mathrm{I}} + iK_{\mathrm{II}} = \{F_{\mathrm{I}} + iF_{\mathrm{II}}\} p_0\sqrt{\pi a}(1+2i\varepsilon)$

M	n=0		n=1		n=2		n=3	
	F_{I}	F_{II}	F_{I}	F_{II}	F_{I}	F_{II}	F_{I}	F_{II}
1	0.0000	1.0000	0.0200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	1.0000	0.0200	0.5000	0.0000	0.2500	0.0050	0.1250
3	0.0000	1.0000	0.0200	0.5000	0.1333	0.4997	0.0089	0.2222
4	0.0000	1.0000	0.0200	0.5000	0.1333	0.4997	0.0183	0.3748
5	0.0000	1.0000	0.0200	0.5000	0.1333	0.4997	0.0183	0.3748
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0.0000	1.0000	0.0200	0.5000	0.1333	0.4997	0.01833	0.3748

Table 3 Coefficient of power series

		$\varepsilon=0.02$	$\varepsilon=0.06$	$\varepsilon=0.10$
a_n	n=0	a_1=1	a_1=1	a_1=1
	n=1	a_2=0.5	a_2=0.5	a_2=0.5
	n=2	a_1=0.1664, a_3=0.3333	a_1=0.1643, a_3=0.3333	a_1=0.1600, a_3=0.3333
	n=3	a_2=0.1248, a_4=0.25	a_2=0.1232, a_4=0.25	a_2=0.1200, a_4=0.25
	n=4	a_1=0.07481, a_3=0.09984, a_5=0.2	a_1=0.07332, a_3=0.09856, a_5=0.2000	a_1=0.07035, a_3=0.09600, a_5=0.2000
	n=5	a_2=0.06234, a_4=0.08320, a_6=0.1667	a_2=0.06110, a_4=0.08213, a_6=0.1667	a_2=0.05862, a_4=0.08000, a_6=0.1667
	n=6	a_1=0.04450, a_3=0.05344, a_5=0.07131, a_7=0.1429	a_1=0.04339, a_3=0.05237, a_5=0.07040, a_7=0.1429	a_1=0.04118, a_3=0.05025, a_5=0.06857, a_7=0.1429
b_n	n=0	b_0=0	b_0=0	b_0=0
	n=1	b_1=0.02	b_1=0.06	b_1=0.1
	n=2	b_2=0.01334	b_2=0.04	b_2=0.06667
	n=3	b_1=0.008332, b_3=0.01	b_1=0.02493, b_3=0.03	b_1=0.04133, b_3=0.05
	n=4	b_2=0.006666, b_4=0.008001	b_2=0.01994, b_4=0.024	b_2=0.03307, b_4=0.04
	n=5	b_1=0.004943, b_3=0.005555, b_5=0.006668	b_1=0.01476, b_3=0.01662, b_5=0.02	b_1=0.02439, b_3=0.02756, b_5=0.03333
	n=6	b_2=0.004237, b_4=0.004761, b_6=0.005715	b_2=0.01265, b_4=0.01425, b_6=0.01714	b_2=0.02091, b_4=0.02362, b_6=0.02857

Table 4 General expression for coefficient of power series

	a_n	b_n
n=0	$a_1=1$	$b_0=0$
n=1	$a_2=0.5$	$b_1=\varepsilon$
n=2	$a_1=-0.6667\varepsilon^2+0.16667$, $a_3=0.333333$	$b_2=0.666667\varepsilon$
n=3	$a_2=-0.5\varepsilon^2+0.125$, $a_4=0.25$	$b_1=0.416667\varepsilon$, $b_3=0.5\varepsilon$
n=4	$a_1=-0.46611\varepsilon^2+0.075$ $a_3=-0.4\varepsilon^2+0.1$, $a_5=0.2$	$b_2=0.333333\varepsilon$ $b_4=0.4\varepsilon$
n=5	$a_2=-0.388\varepsilon^2+0.0625$ $a_4=-0.3334\varepsilon^2+0.0833333$ $a_6=0.166667$	$b_1=0.247135\varepsilon$ $b_3=0.27774\varepsilon$ $b_5=0.333333\varepsilon$
n=6	$a_1=-0.35\varepsilon^2+0.0446428$ $a_3=-0.332\varepsilon^2+0.0535714$ $a_5=-0.28782\varepsilon^2+0.071429$ $a_7=0.142857$	$b_2=0.21183\varepsilon$ $b_4=0.238065\varepsilon$ $b_6=0.28575\varepsilon$

Table 5 General expression of $F_{\mathrm{I}}, F_{\mathrm{II}}$ under polynomial distribution of stress $K_{\mathrm{I}}+iK_{\mathrm{II}}=\{F_{\mathrm{I}}+iF_{\mathrm{II}}\}p_0\sqrt{\pi a}(1+2i\varepsilon)$

(a) tension

	F_{I}	F_{II}	F_{I} (ε=0)
n=0	1	0	1
n=1	0.5	ε	1/2=0.5
n=2	$0.5-0.6667\varepsilon^2$	$(2/3)\varepsilon$	1/2=0.5
n=3	$0.375-0.5\varepsilon^2$	0.916ε	3/8=0.375
n=4	$0.375-0.8661\varepsilon^2$	0.733ε	3/8=0.375
n=5	$0.3125-0.7214\varepsilon^2$	0.857ε	5/16=0.3125
n=6	$0.3125-0.9698\varepsilon^2$	0.735ε	5/16=0.3125

(b) shear

	F_{I}	F_{II}	F_{II} (ε=0)
n=0	0	1	1
n=1	ε	0.5	1/2=0.5
n=2	$(2/3)\varepsilon$	$0.5-0.6667\varepsilon^2$	1/2=0.5
n=3	0.916ε	$0.375-0.5\varepsilon^2$	3/8=0.375
n=4	0.733ε	$0.375-0.8661\varepsilon^2$	3/8=0.375
n=5	0.857ε	$0.3125-0.7214\varepsilon^2$	5/16=0.3125
n=6	0.735ε	$0.3125-0.9698\varepsilon^2$	5/16=0.3125

Table 6 Coefficient c_n of power series

n=0	c_1=1
n=1	c_2=0.5
n=2	c_1=0.1667, c_3=0.3333
n=3	c_2=0.125, c_4=0.25
n=4	c_1=0.075, c_3=0.1, c_5=0.2
n=5	c_2=0.0625, c_4=0.08333, c_6=0.1667
n=6	c_1=0.0446428, c_3=0.0535714, c_5=0.0714285, c_7=0.142857

Table 7 General expression of F_{III} under polynomial distribution of stress $K_{\mathrm{III}}=F_{\mathrm{III}}p_0\sqrt{\pi a}$

	F_{III}
n=0	1
n=1	1/2=0.5
n=2	1/2=0.5
n=3	3/8=0.375
n=4	3/8=0.375
n=5	5/16=0.3125
n=6	5/16=0.3125

(1) 提案した解析法によって$p_{zz}=p_0(x/a)^n$を受ける2次元界面き裂は$M=n+1$で厳密解を与える．同様にx方向に$p_{zx}=p_0(x/a)^n$を受ける場合も$M=n+1$で厳密解を与える．

(2) 面内分布荷重を受ける界面き裂の開口変位は以下に示すように表現できる．

$p_{zz}=p_0(x/a)^n$ (nが奇数) を受ける場合

$$\Delta u_z+i\Delta u_x=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}$$
$$\times[a_2(\xi/a)+a_4(\xi/a)^3+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n$$
$$+i\{b_1+b_3(\xi/a)^2+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]$$
$$\times(p_{zz}+ip_{zx})$$

$p_{zz}=p_0(x/a)^n$ (nが偶数) を受ける場合

$$\Delta u_z+i\Delta u_x=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}$$
$$\times[a_1+a_3(\xi/a)^2+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n$$
$$+i\{b_2(\xi/a)+b_4(\xi/a)^3+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]$$
$$\times(p_{zz}+ip_{zx})$$

$p_{zx}=p_0(x/a)^n$ (nが奇数) を受ける場合

$$\Delta u_z+i\Delta u_x=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}$$
$$\times[a_1+a_3(\xi/a)^2+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n$$
$$+i\{b_2(\xi/a)+b_4(\xi/a)^3+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]$$
$$\times(p_{zz}+ip_{zx})$$

$p_{zx}=p_0(x/a)^n$ (nが偶数) を受ける場合

$$\Delta u_z+i\Delta u_x=\sum_{m=1}^{2}\frac{1+\kappa_m}{4G_m\cosh\pi\varepsilon}\sqrt{a^2-\xi^2}\left(\frac{a-\xi}{a+\xi}\right)^{i\varepsilon}$$
$$\times[a_2(\xi/a)+a_4(\xi/a)^3+\cdots+a_{n+1}(\xi/a)^n$$
$$+i\{b_1+b_3(\xi/a)^2+\cdots+b_n(\xi/a)^{n-1}\}]$$
$$\times(p_{zz}+ip_{zx})$$

ここで係数a_n, b_nは表3で与えられる．

(3) 一般内圧p_{zz}, p_{zx}, p_{zy}を受ける2次元界面き裂の応力拡大係数はεのみの関数となる．その表現は表5，7で与えられる．

文献

(1) Salganik, R.L., The Brittle Fracture of Cemented Bodies, *Prikladnaia metematica i mekhanika*, Vol. 27, (1963), pp. 957-962.

(2) Erdogan, F., Stresses Distribution in a Non-homogeneous Elastic Plane with Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, (1963), pp. 232-236.

(3) England, A.H., A Crack between Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, (1965), pp. 400-402.

(4) Rice, J. R. and Sih, G. C., Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, (1965), pp. 418-423.

(5) Comninou, M., The Interface Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, (1977), pp. 631-636.

(6) Noda, N-A. and Oda, K., Interaction Effect of Stress Intensity Factors for any Number of Collinear Interface Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 84, (1997), pp. 117-128.

(7) Erdogan, F. and Gupta, G.D., Bonded Wedges with an Interface Crack under Anti-plane Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 11, (1975), pp. 583-593.

(8) Murakami, Y. Ed., Stress Intensity Factors Handbook, Vol. 4-5, JSMS & Elsevier, (2001).

(9) Isida, M., Elasticity Solution and the Stress Intensity Factors of the Crack, (1979), p. 140.

(10) Nisitani, H., Saimoto, A. and Noguchi, H., Analysis of an Interface Crack Based on the Body Force Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 59, (1993), pp. 68-73.

(11) Noda, N-A., Xu, C. and Takase, Y., Stress Intensity Factor for a Planar Interfacial Crack in Three Dimensional Bimaterials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 73, (2007), pp. 379-386.