

博士論文

入力飽和を考慮した適応制御に関する研究

九州工業大学大学院
工学府 機械知能工学専攻

高木 夏樹

平成22年1月

目次

第 1 章	序論	1
1.1	背景	1
1.2	適応制御における入力飽和の問題	2
1.3	本研究の目的と特色	3
1.4	本論文の構成	4
第 2 章	全状態が利用可能な場合の適応制御系設計	6
2.1	問題設定	6
2.1.1	制御対象	6
2.1.2	規範モデル	7
2.1.3	追従誤差方程式	7
2.2	入力飽和が存在しない場合においてスムーズな 入力を生成する適応コントローラ	8
2.3	入力飽和が存在する場合においてスムーズな 入力を生成する適応コントローラ	12
2.3.1	適応コントローラの構成	12
2.3.2	適応制御系の安定解析	14
2.4	数値シミュレーションによる制御性能の検証	19
2.5	おわりに	30
第 3 章	相対次数までの出力の微分値が利用可能な場合の適応制御系設計	32
3.1	はじめに	32
3.2	問題設定	32
3.2.1	制御対象	32
3.2.2	規範モデル	33
3.2.3	追従誤差方程式	33
3.3	入力飽和が存在する場合においてスムーズな 入力を生成する適応コントローラ	35
3.3.1	適応コントローラの構成	35
3.3.2	適応制御系の安定解析	37

3.4	数値シミュレーションによる制御性能の検証	42
3.5	おわりに	47
第4章	結論	48
4.1	結論	48
4.2	今後の課題	49
付録 A	式 (2.19) および式 (2.20) の導出	55
付録 B	式 (2.27) および式 (2.28) の導出	55
付録 C	式 (2.45) および式 (2.46) の導出	56
付録 D	式 (2.50) の導出	57
付録 E	式 (3.19) および式 (3.20) の導出	57
付録 F	式 (3.33) および式 (3.34) の導出	58

第 1 章 序論

1.1 背景

制御工学の目的は，現実の物理システムに積極的に働きかけることによって，設計者が意図するシステム挙動を達成させることにある．現実の制御系は，アクチュエータの性能限界や制御系の動作状態に依存する拘束など，多くの拘束条件を有する‘拘束システム’である [1]．これらにより引き起こされる問題を線形の理論解析や設計の枠組で直接扱うことは困難である．このため，一般的な制御系設計ではこの問題を無視して扱う場合が多い [2]．しかし，入力制約による制御入力飽和が，制御性能の著しい劣化や，制御系の不安定化を招く場合があることが知られている [3]．この現象は，制御入力信号がその制限値で打ち切られることにより，フィードバックループが切断されたのと同じ状況に陥ることにより生じる．したがって，入力制約下では，制御系における最も基本的な設計要求である安定性ですら保証するのが困難となる．この問題の最も容易な解決法は，制御用アクチュエータをより入力飽和の大きなものに取り換えることや，制御性能の要求を下げることである．しかし，これらは問題の本質的な解決とはいえない．したがって，入力飽和を陽に考慮した制御系設計法の確立が，実用的にも理論的にも重要な課題となっている．

入力飽和の問題は古くから認識されており，これまでも様々な手法で解決が試みられてきた．一般的に最もよく知られているのは，入力飽和が原因で生じるワインドアップ現象 [4] に対処するためのアンチワインドアップ法と呼ばれる設計法である [5–10]．また，正の不変集合の性質を利用した状態フィードバックゲインの設計法 [11–13] や，目標信号の整形をおこなうことで，入力飽和が発生しない入力を生成できるリファレンスガバナと呼ばれる設計法なども存在する [14–17]．しかし，これらの手法を用いる場合，制御対象の運動方程式やシステムパラメータ（制御対象の運動を記述する運動方程式の係数）の値が既知である必要がある．実際，経年劣化や環境変動によって制御対象のシステムパラメータの値は変動する．このシステムパラメータ変動を考慮せずにコントローラが設計される場合，制御性能の劣化や制御系の不安定化を招く危険がある．

システムパラメータの不確定性や変動に対してロバストな制御法の一つに適応制御法がある [18–24]．適応制御法とは，制御対象の動特性が正確に把握できない場合や特性変動が大きい場合に，特性変動に応じてコントローラのパラメータをオンラインで自動調節

し，制御系としての性能を最良の状態に保持しようとする手法である．この適応制御系構成の概略を図 1.1 に示す．しかし，次節に示すように初期の適応制御研究において入力飽和は考慮されていなかった．この入力飽和を無視して設計された適応制御系において，入力飽和が発生する場合，制御性能が劣化する．最悪の場合，制御系の不安定化を招くこともある．

1.2 適応制御における入力飽和の問題

入力飽和を持つ制御対象に対する適応制御法は，1975 年に初めて提案された [25]．しかし，文献 [25] では，制御系の全信号の有界性を保証できてなかった．その後，入力飽和を考慮した場合において，制御系の全信号の有界性を保証する適応コントローラが種々提案された [26–47]．文献 [26–39] は，1 入出力線形系に対して提案された手法である．近年では，文献 [40, 41] において多入出力線形系に対する手法や，文献 [42–47] においてあるクラスの非線形系に対する手法も提案されている．最近になって，文献 [38, 41] の手法を航空機に適用した事例も報告されている [48, 49]．しかし，文献 [26–47] の手法には，以下の問題点がある．

- (1) 文献 [38, 40] を除き，制御対象出力と規範モデル出力との追従誤差の漸近安定性が保証されない．
- (2) 文献 [38, 40] では，制御対象が漸近安定な場合にのみ追従誤差の漸近安定性が保証される．
- (3) 過渡応答の制御性能を改善するための設計パラメータ調整法が示されていない．

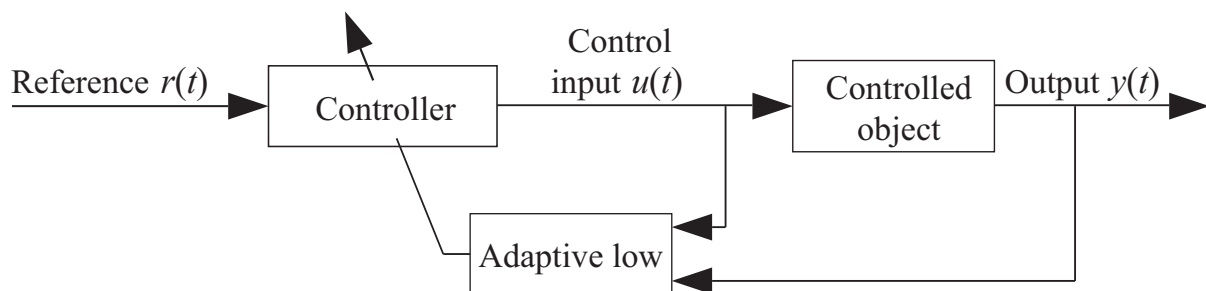


Fig. 1.1 Adaptive control system

1.3 本研究の目的と特色

本研究では、前節で述べた問題が解決できる適応コントローラを提案することを目的とする。

制御性能の改善は、入力飽和が存在しないシステムに対する適応制御系においても問題となってきた。

制御系全体の安定性および追従誤差の漸近安定性が保証される適応制御系の基本的な設計法は1980年ごろに発表された[19, 20]。しかし、これらの手法において、制御系全体の安定性は保証されたが、収束性能や過渡応答といった制御性能の改善法は示されていないかった。実際、これらの手法を用いた場合、追従誤差や制御入力に大振幅の高周波振動が発生する場合がある。この振動現象は、適応制御系において導入される未知パラメータ推定器に起因して発生する。そのため、設計パラメータの設定には試行錯誤が必要であった。この問題を解決するために、近年、制御性能の改善に注目が集まり、種々の手法が提案された[50–63]。文献[50–56]では、従来の適応コントローラの入力に、あるフィードバック信号を加えることにより制御性能を改善する手法が提案されている。文献[57]では、高階調整法を用いた手法が提案され、文献[58, 59]ではバックステッピング法を利用した手法が提案され、文献[60, 61]では複数の対象モデルを用いてモデルを切り替えることにより制御性能を改善できる手法が提案されている。さらに、文献[62, 63]では、追従誤差と制御入力を用いたある評価関数に対して最適(準最適)となる手法が提案されている。しかし、文献[50–63]の手法では、制御入力の過渡応答に対する理論的な議論はなされていない。最近になって、スムーズな制御入力の生成、および制御性能の改善が簡単に実現できる手法が提案された[64]。この手法では、一つの設計パラメータの値を大きく設定するだけで、制御入力に振動現象が発生しにくくなり、かつ追従誤差が指定された収束速度で指数的に零に収束することが理論的に保証できる。

本研究では、文献[64]の手法を基に、入力飽和が存在する場合において、制御対象の安定性に依らず追従誤差の漸近安定性を保証し、かつ制御性能が簡単に改善できる適応コントローラの開発を目指す。その初段階として、本論文では、入力飽和の存在する1入出力線形時不変系に注目し、新しい適応制御法を提案する。

まず全状態が利用可能な場合において、適応コントローラ的设计法を提案する[65, 66]。全状態が利用可能な実システムは、ロボットマニピュレータや航空機など多く存在してい

る．そのため，全状態が利用可能な状況を想定しておくことは，提案手法の実システムへの応用を考える上で重要となる．

つぎに，出力の相対次数までの微分信号が利用可能な場合において，適応コントローラ的设计法を提案する [67, 68]．これによって，制御対象の出力をある軌道に追従させるだけの場合，相対次数に応じた出力の微分値までを観測すればよくなり，適応コントローラを構成するために必要となる状態の次元が緩和される．

1.4 本論文の構成

前節で述べたように，本論文では，入力飽和の存在する 1 入出力線形時不変系に対し，制御性能が簡単に改善できる適応コントローラを提案する．本論文は 4 章より構成され，第 1 章は序論であり，本文は第 2 章から始まる．

第 2 章では，全状態が利用可能な場合に対する適応コントローラを提案する [65, 66]．まず，文献 [64] に基づき，入力飽和が存在しない場合において，制御性能が簡単に改善できる適応コントローラを示す．そして，ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，制御入力に未知パラメータ推定器に起因する振動現象が発生しにくくなり，かつ追従誤差が指定した収束速度で零に収束することを示す．つぎに，上記の適応コントローラを拡張し，入力飽和を考慮した適応コントローラを提案する．そして，ある初期値集合に対する制約が満足される場合，制御対象の安定性にかかわらず，出力追従誤差の漸近安定性が保証されることを示す．さらに，ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，制御入力に振動現象が発生しにくくなり，制御性能が簡単に改善されることを示す．また，出力追従誤差の初期値が零の場合，この一つの設計パラメータの設定によって，入力飽和は瞬時に発生しなくなり，出力追従誤差が指定された速度で零に収束することも示す．章末では，数値シミュレーションを用いて，提案する手法の有効性を検証した結果を示す．

第 3 章では，第 2 章の手法に基づき，適応コントローラを構成するために必要となる状態の次元を緩和する．すなわち，出力の相対次数までの微分信号が利用可能な場合に対する適応コントローラを提案する [67, 68]．そのために，まず出力の相対次数までの微分信号からなる状態を定義し，この状態を用いた出力追従誤差方程式の状態空間表現を導出する．次に，前章と同様の構成をもつ適応コントローラを提案する．そして，提案する適応コントローラが，前章で提案したものと同等の制御性能をもつことを示し，制御性能が簡

単に改善されることを示す．章末では，数値シミュレーションを用いて，提案する手法の有効性を検証した結果を示す．

最後に，第5章で結論を述べる．

第 2 章 全状態が利用可能な場合の適応制御系設計

本章では，全状態が利用可能な場合において，入力飽和が存在する 1 入出力線形時不変系に対する適応制御手法を提案する [65, 66]．2.1 節では，問題設定を行う．そして，制御対象，規範モデル，および制御対象出力と規範モデル出力との追従誤差を定義する．さらに，適応コントローラを設計するのに適した追従誤差方程式を導出する．2.2 節では，入力飽和が存在しない場合に，ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，制御性能を簡単に改善できる適応コントローラの設計法を示す．2.3 節では，前節の手法を拡張し，入力飽和を考慮した適応コントローラの設計法を提案する．提案する手法では，ある初期値集合に対する制約が満足される場合，制御対象の安定性にかかわらず，追従誤差の漸近安定性が保証される．また，ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，制御入力に振動現象が発生しにくくなる．特に，追従誤差の初期値が零の場合，入力飽和は瞬時に発生しなくなり，出力追従誤差が指定された速度で零に収束する．2.4 節では，数値シミュレーションにより，提案する手法の有効性を検証する．

2.1 問題設定

2.1.1 制御対象

制御対象は，次式で与えられるものとする．

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + b_m \bar{\mathbf{b}} f(u) \quad (2.1)$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態， $u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力であり， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は未知の行列， $b_m \in \mathbb{R}$ は未知の正定数， $\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ は既知の定数ベクトルである． $f(u) \in \mathbb{R}$ は，次式で与えられる $u(t)$ に関する飽和関数である．

$$f(u) = \begin{cases} \sigma & \text{for } u(t) > \sigma \\ u(t) & \text{for } |u(t)| \leq \sigma \\ -\sigma & \text{for } u(t) < -\sigma \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで， σ は既知の正定数であり，アクチュエータの入力制限値とする．

適応コントローラを設計するために，式 (2.1) の制御対象に対し，以下の仮定を設ける．

A2.1 : ある既知行列 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ および未知定数ベクトル $k \in \mathbb{R}^n$ を用いて, 行列 A は次式で表現できる .

$$A = \bar{A} - b_m \bar{b} k^\top \quad (2.3)$$

A2.2 : (\bar{A}, \bar{b}) は可制御である .

2.1.2 規範モデル

次式で与えられる規範モデルを考える .

$$\dot{x}_M(t) = \bar{A}_M x_M(t) + \bar{b} r_M(t) \quad (2.4)$$

ここで, $x_M(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態, $r_M(t) \in \mathbb{R}$ は一様有界な規範入力であり, $\bar{A}_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は次式で与えられる既知な安定行列である .

$$\bar{A}_M = \bar{A} - \bar{b} \bar{k}_M^\top \quad (2.5)$$

ここで, $\bar{k}_M \in \mathbb{R}^n$ は既知の定数ベクトルである .

2.1.3 追従誤差方程式

追従誤差を $x_e(t) = x(t) - x_M(t)$ で定義する . このとき, 追従誤差方程式は次式で表現できる .

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \bar{A}_e x_e(t) + b_m \bar{b} (f(u) - q(t)) \\ q(t) &= \theta^\top \omega(t) \\ \theta &= [\theta_e^\top, \theta_M^\top]^\top \\ \theta_e &= k - \frac{1}{b_m} \bar{k}_e \\ \theta_M &= \left[0, \left(k - \frac{1}{b_m} \bar{k}_M \right)^\top, \frac{1}{b_m} \right]^\top \\ \omega(t) &= [x_e(t)^\top, \omega_M(t)^\top]^\top \\ \omega_M(t) &= [1, x_M(t)^\top, r_M(t)]^\top \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ここで, $\omega_M(t)$ の第 1 要素は $\|\omega(t)\|^2 \geq 1$ の関係を満足させるために 1 として設定している . この関係は後述の定理 2.3 の証明において用いられる . 行列 $\bar{A}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は既知な安定行列であり, 次式で与えられる .

$$\bar{A}_e = \bar{A} - \bar{b}\bar{k}_e^T \quad (2.7)$$

ここで, $\bar{k}_e \in \mathbb{R}^n$ は既知な定数ベクトルである.

本章での設計目的は, 入力飽和が存在する制御対象の漸近安定性にかかわらず, 追従誤差 $x_e(t)$ が零に収束する適応コントローラを設計することである.

2.2 入力飽和が存在しない場合においてスムーズな 入力を生成する適応コントローラ

本節では, 入力飽和が存在しない制御対象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_m \bar{b}u(t) \quad (2.8)$$

に対して, 制御性能が簡単に改善可能な適応コントローラの設計法を示す. このとき, 追従誤差方程式は

$$\dot{x}_e(t) = \bar{A}_e x_e(t) + b_m \bar{b}(u(t) - q(t)) \quad (2.9)$$

となる.

文献 [64] に基づき, 次式で与える適応コントローラについて考える.

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \hat{q}(t) = \hat{\theta}(t)^T \omega(t) \\ \hat{\theta}(t) &= [\hat{\theta}_e(t)^T, \hat{\theta}_M(t)^T]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\alpha^3 \Gamma \omega(t) \bar{x}_e(t)^T P b, \Gamma > 0, \alpha \geq \underline{\alpha} > 0 \\ \bar{x}_e(t) &= x_e(t) - \hat{x}_e(t) \\ \dot{\hat{x}}_e(t) &= \bar{A}_e \hat{x}_e(t) + \alpha^2 \bar{x}_e(t), \hat{x}_e(0) = x_e(0) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

ここで, $\hat{x}_e(t)$ は $x_e(t)$ の推定値であり, $\hat{\theta}_e(t)$ および $\hat{\theta}_M(t)$ は, それぞれ未知定数ベクトル θ_e および θ_M の推定値である. α は正定数の設計パラメータであり, $\underline{\alpha}$ はその下限値をあらわしている. Γ は正定行列の設計パラメータである. P はつぎのリアプノフ方程式を満足する正定対称行列である.

$$\bar{A}_e^T P + P \bar{A}_e = -Q, Q > 0 \quad (2.12)$$

適応コントローラ (2.10), (2.11) を用いた閉ループ系の構成を図 2.1 に示す. 未知パラメータ推定器 (2.11) において, 設計パラメータ α を大きな値に設定したとき, 素早い未知パラメータ推定が期待できる. さらに, 推定値 $\hat{\theta}(t)$ の初期速度 $\dot{\hat{\theta}}(0)$ を零としているため, 推定値の初期振動の発生が軽減されることも期待できる. このことを実現するために, 推定値 $\hat{x}_e(t)$ を導入している.

適応コントローラ (2.10), (2.11) を用いた閉ループ系に対し, つぎの定理が成り立つ.

[定理 2.1] 制御対象 (2.8) に対して, 適応コントローラ (2.10), (2.11) を用いた場合, 閉ループ系は安定となり, 追従誤差 $x_e(t)$ は零に収束する. \square

証明: 式 (2.6), (2.8), (2.10), (2.11) より, 追従誤差方程式は次式であらわされる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_e(t) &= -\alpha^2 \hat{x}_e(t) + \bar{A}_e \tilde{x}_e(t) - b_m \bar{b} \tilde{\theta}(t)^\top \omega(t) \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) &= [\tilde{\theta}_e(t)^\top, \tilde{\theta}_M(t)^\top]^\top \\ \tilde{\theta}_e(t) &= \theta_e - \hat{\theta}_e(t) \\ \tilde{\theta}_M(t) &= \theta_M - \hat{\theta}_M(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

ここで, $\tilde{\theta}(t)$ はパラメータ推定誤差である. リアプノフ関数の候補を

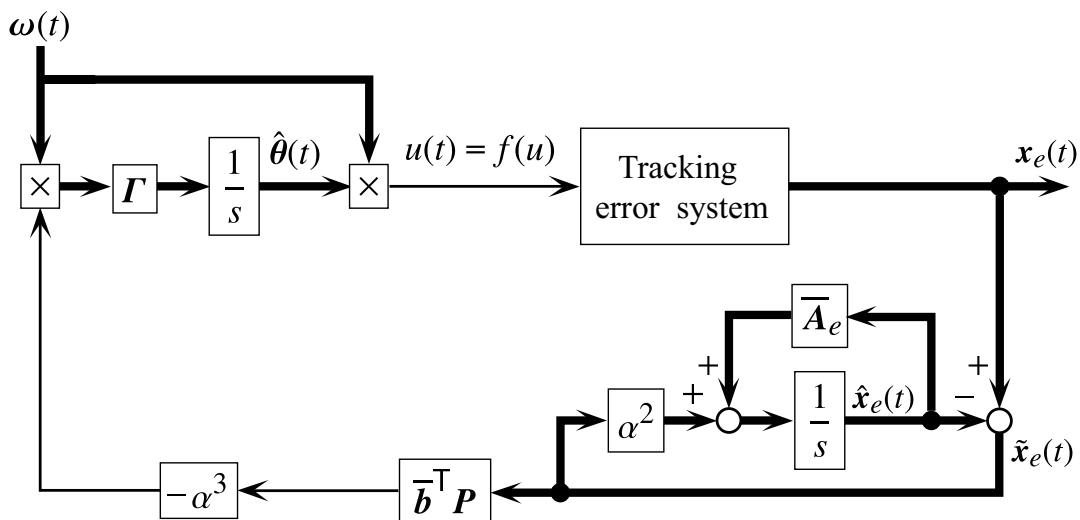


Fig. 2.1 Block diagram of the closed-loop system using the controller (2.10), (2.11) in case of $f(u) = u(t)$

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= \alpha^3 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) + \rho_{\hat{e}} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{x}_e(t) \\ &\quad + b_m \tilde{\theta}(t)^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) \\ \rho_{\hat{e}} &= \frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \left(\frac{\|\mathbf{P}\|}{\underline{\alpha}} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

で定義する．このとき， $V(t)$ の時間微分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -2\alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) - \alpha^3 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{Q} \tilde{x}_e(t) \\ &\quad - \rho_{\hat{e}} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{Q} \hat{x}_e(t) + 2\alpha^2 \rho_{\hat{e}} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで，つぎの関係

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha^2 \rho_{\hat{e}} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) &\leq \alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) + \frac{\rho_{\hat{e}}^2}{\alpha} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{x}_e(t) \\ \frac{\rho_{\hat{e}}^2}{\alpha} \hat{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{x}_e(t) &\leq \rho_{\hat{e}}^2 \frac{\|\mathbf{P}\|}{\underline{\alpha}} \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \\ &= \frac{\rho_{\hat{e}}}{2} \lambda_{\min}[\mathbf{Q}] \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

を用いると，次式が得られる．

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_{\hat{e}} \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \quad (2.17)$$

Lasalle-Yoshizawa theorem[22] に従えば，式(2.17)より， $\tilde{x}_e(t), \hat{x}_e(t), \tilde{\theta}(t), \hat{\theta}(t) \in \mathcal{L}^\infty$ ならびに $\tilde{x}_e(t), \hat{x}_e(t)$ の零への収束性が示される．よって，追従誤差 $x_e(t)$ の零への収束性が示される．また，これらの事実より， $\omega(t), u(t) \in \mathcal{L}^\infty$ も示される．

以上示した信号の有界性より，すべての内部信号が有界となり，適応コントローラ(2.10)，(2.11)を用いた閉ループ系の安定性が示される． ■

入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ を $\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t) = \tilde{\theta}(t)^\top \omega(t)$ で定義する．このとき，図2.1の閉ループ系において，つぎに示す性質が保証される．

[定理 2.2] α 以外の設計パラメータを固定したとき，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ は零に収束する．さらに， $\tilde{q}(t)$ に関し，

$$\tilde{q}(t)^2 \leq \exp(-\alpha\bar{\rho}_{q1}t) \tilde{q}(0)^2 + \alpha^{-1}\bar{\rho}_{q2} \quad (2.18)$$

を満足する α に無関係に定まる正定値 $\bar{\rho}_{qi}$, $i = 1, 2$ が存在する． \square

証明： 最初に， $\tilde{q}(t)$ が零に収束することを示す．式 (2.13) において， $\dot{\tilde{x}}_e(t)$ が零に収束するとき， $\tilde{x}_e(t)$ の零への収束性により， $\tilde{q}(t)$ が零に収束することが示される．以下では， $\dot{\tilde{x}}_e(t)$ の零への収束性を Barbalat't Lemma [23] を用いて示す．定理 2.1 の証明において示される閉ループ系の全信号の有界性より， $\dot{\omega}(t) \in \mathcal{L}^\infty$, $\dot{\tilde{x}}_e(t) \in \mathcal{L}^\infty$ となることを簡単に確かめることができる．このこと，ならびに $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\tilde{x}}_e(\tau) d\tau = -\tilde{x}_e(0)$ の関係を用いれば，Barbalat's Lemma [23] より $\dot{\tilde{x}}_e(t)$ の零への収束性が保証される．

つぎに，式 (2.18) が満足されることを示す．式 (2.14) より， $V(0)$ は α と無関係に有界となることがわかる．これより， $\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\theta$, $\|\omega(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\omega$, $\|\dot{\omega}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{\dot{\omega}}$, $|u(t)|^2 \leq \bar{\rho}_u$ の関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_\bullet$ が存在することが示される．この事実，ならびに $\tilde{x}_e(0) = \mathbf{0}$ より，つぎの関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{ei}$, $i = 1, 2, 3$ が存在することがわかる（付録 A 参照）．

$$\|\tilde{x}_e(t)\|^2 \leq \alpha^{-4}\bar{\rho}_{e1} \quad (2.19)$$

$$\|\dot{\tilde{x}}_e(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{e2} \exp(-\alpha^2 t) + \alpha^{-2}\bar{\rho}_{e3} \quad (2.20)$$

以上の関係を用いて正定値関数 $V_q(t) = \tilde{q}(t)^2$ を解析することにより，誤差信号 $\tilde{q}(t)$ の収束性能を調べる． $\alpha^2 \tilde{x}_e(t) = -\dot{\tilde{x}}_e(t) + \bar{A}_e \tilde{x}_e(t) - b_m \bar{b} \tilde{q}(t)$ の関係を用いると， $V_q(t)$ の時間微分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{V}_q(t) &= 2\tilde{q}(t) \left(\alpha^3 \bar{b}^\top P \tilde{x}_e(t) \omega^\top \Gamma \omega(t) + \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) \right) \\ &= -2\alpha b_m \bar{b}^\top P b \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) \tilde{q}(t)^2 - 2\tilde{q}(t) \alpha b_m \bar{b}^\top P \dot{\tilde{x}}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) \\ &\quad + 2\tilde{q}(t) \alpha b_m \bar{b}^\top P \bar{A}_e \tilde{x}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) + 2\tilde{q}(t) \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

よって，閉ループ系の全信号の有界性，ならびに式 (2.19), (2.20), $\|\omega(t)\|^2 = \omega(t)^\top \omega(t) \geq 1$ の関係より，次式を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{qi}$, $i = 3, 4, 5$ が存在することがわかる．

$$\dot{V}_q(t) \leq -\alpha\bar{\rho}_{q3}V_q(t) + \alpha \exp(-\alpha^2 t)\bar{\rho}_{q4} + \bar{\rho}_{q5} \quad (2.22)$$

式(2.22)より,式(2.18)の関係式を満足する正定値 $\bar{\rho}_{qi}$ が存在することがわかる. ■

定理2.2より, α の値を大きく設定したとき, $\tilde{q}(t)^2$ が素早く零に近づくことが理論的に保証される.このとき,制御入力(2.10)は理想入力 $u_d(t) = q(t)$ に素早く近づくことになる.理想入力 $u_d(t)$ は未知パラメータの推定値 $\hat{\theta}(t)$ の影響を受けない入力信号である.したがって, α の値を大きく設定したとき,未知パラメータ推定器に起因する高周波振動現象が制御入力に発生しにくくなる.

$u(t) = u_d(t)$ のとき,追従誤差 $x_e(t)$ の応答は式(2.9)より, $\dot{x}_e(t) = \bar{A}_e x_e(t)$ によって生成される.すなわち, α の値を大きく設定したとき,追従誤差 $x_e(t)$ は行列 \bar{A}_e によって指定された収束速度で零に収束することになる.

以上より,ただ一つの設計パラメータ α の値を大きく設定することで,制御性能を簡単に改善できることがわかる.

2.3 入力飽和が存在する場合においてスムーズな入力を生成する適応コントローラ

2.3.1 適応コントローラの構成

この節では,適応コントローラ(2.10),(2.11)の設計法に基づき,入力飽和を考慮した適応コントローラの設計法を提案する.まず,以下の仮定を設ける.

A2.3: $\underline{\rho}_b \leq b_m, \|\theta_e\| \leq \bar{\rho}_e, |\theta_M^T \omega_M(t)| \leq \bar{\rho}_{M1}, \|\omega_M(t)\| \leq \bar{\rho}_{M2}$ の関係を満足する有界な正定数 $\underline{\rho}_b, \bar{\rho}_e, \bar{\rho}_{M1}, \bar{\rho}_{M2}$ が存在する.

A2.4: $\sigma - \bar{\rho}_{M1} > 0$ の関係が満足される.

仮定A2.3において, $\underline{\rho}_b, \bar{\rho}_e, \bar{\rho}_{M1}, \bar{\rho}_{M2}$ は, b_m の下限値および $\|\theta_e\|, |\theta_M^T \omega_M(t)|, \|\omega_M(t)\|$ の上限値をあらわしている.これらの値は,実際には制御対象の同定実験によって得ることができ,本章においては既知なパラメータとする.

設計目的を達成するために,つぎの補題を用いる.

[補題 2.1] 任意の信号 $a(t) \in \mathbb{R}$ に関して，切り換え関数 $\delta_{af}(t)$ を

$$\delta_{af}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{for } a(t)\tilde{f}(u) \leq 0 \\ 0 & \text{for } a(t)\tilde{f}(u) > 0 \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

$$\tilde{f}(u) = f(u) - u(t)$$

で定義する．このとき，任意の定数 $1 \geq \beta > 0$ に対しつぎの関係が満足される．

$$a(t)\tilde{f}(u) \leq -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)|\left\{\sigma - \bar{\rho}_{M1} - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3}V(t)\right\} \\ + (1 - \beta)(1 - \delta_{af}(t))a(t)\tilde{\theta}(t)^{\top}\omega(t) + |a(t)|\|\theta_e\|\|\tilde{x}_e(t)\| \quad (2.24)$$

ここで， ρ_{ui} , $i = 1, 2, 3$ は次式で与えられる．

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{u1}^2 = \frac{\bar{\rho}_e^2}{\rho_e \lambda_{\min}[\mathbf{P}]} \\ \rho_{u2}^2 = \frac{\bar{\rho}_{M2}}{\rho_b \lambda_{\min}[\mathbf{\Gamma}^{-1}]} \\ \rho_{u3}^2 = \frac{2}{\rho_b \lambda_{\min}[\mathbf{\Gamma}^{-1}] \lambda_{\min}[\mathbf{P}]} \max\left\{\frac{1}{\underline{\alpha}^3}, \frac{1}{\rho_e}\right\} \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

□

証明: $a(t)\tilde{f}(u) > 0$ のとき， $\tilde{f}(u) \neq 0$ であり， $|f(u)| = \sigma$, $|u(t)| > \sigma$, $a(t)f(u) = -|a(t)|\sigma < 0$ の関係が成り立つ．この事実より，任意の定数 $1 \geq \beta > 0$ に対し，つぎの関係が得られる．

$$a(t)\tilde{f}(u) = -\delta_{af}(t)|a(t)\tilde{f}(u)| + (1 - \delta_{af}(t))a(t)\tilde{f}(u) \\ \leq -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)|\sigma - (1 - \delta_{af}(t))a(t)(\theta - \tilde{\theta}(t))^{\top}\omega(t) \\ \leq -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)|\left(\sigma - |\theta^{\top}\omega(t)| - \beta|\tilde{\theta}(t)^{\top}\omega(t)|\right) \\ + (1 - \beta)(1 - \delta_{af}(t))a(t)\tilde{\theta}(t)^{\top}\omega(t) \quad (2.26)$$

ここで， $(1 - \delta_{af}(t)) \leq 1$ および

$$|\theta^{\top}\omega(t)| \leq \rho_{u1}V(t)^{\frac{1}{2}} + \bar{\rho}_{M1} + \|\theta_e\|\|\tilde{x}_e\| \quad (2.27)$$

$$|\tilde{\theta}(t)^{\top}\omega(t)| \leq \rho_{u2}V(t)^{\frac{1}{2}} + \rho_{u3}V(t) \quad (2.28)$$

の関係が満足されることより（付録 B 参照），式 (2.24) が導出される． ■

補題 2.1 に基づき , 入力飽和を考慮したつぎの適応コントローラを提案する .

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \hat{q}(t) = \hat{\theta}(t)^\top \omega(t) \\ \hat{\theta}(t) &= [\hat{\theta}_e(t)^\top, \hat{\theta}_M(t)^\top]^\top \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= -g(t)\alpha^3 \Gamma \omega(t) \tilde{x}_e(t)^\top \bar{P} \bar{b} \\ \tilde{x}_e(t) &= x_e(t) - \hat{x}_e(t), \Gamma > 0, \alpha > \underline{\alpha} > 0 \\ \dot{\hat{x}}_e(t) &= \bar{A}_e \hat{x}_e(t) + \alpha^2 \tilde{x}_e(t), \hat{x}_e(0) = x_e(0) \\ g(t) &= 1 - (1 - \beta)(1 - \delta_{ef}(t)), 1 \geq \beta > 0 \\ \delta_{ef}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{for } \tilde{x}_e(t)^\top \bar{P} \bar{b} \tilde{f}(u) \leq 0 \\ 0 & \text{for } \tilde{x}_e(t)^\top \bar{P} \bar{b} \tilde{f}(u) > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

ここで , β は制御入力 $u(t)$ と理想入力 $u_d(t) = q(t) = \theta^\top \omega(t)$ との追従性能を保証するために導入した設計パラメータである . 切り換え関数 $\delta_{ef}(t)$ は入力飽和を有する閉ループ系の安定性を確保するために導入している . 提案する適応コントローラ (2.29), (2.30) を用いた閉ループ系の構成を図 2.2 に示す .

2.3.2 適応制御系の安定解析

提案する適応コントローラ (2.29), (2.30) を用いた閉ループ系において , つぎの定理が成り立つ .

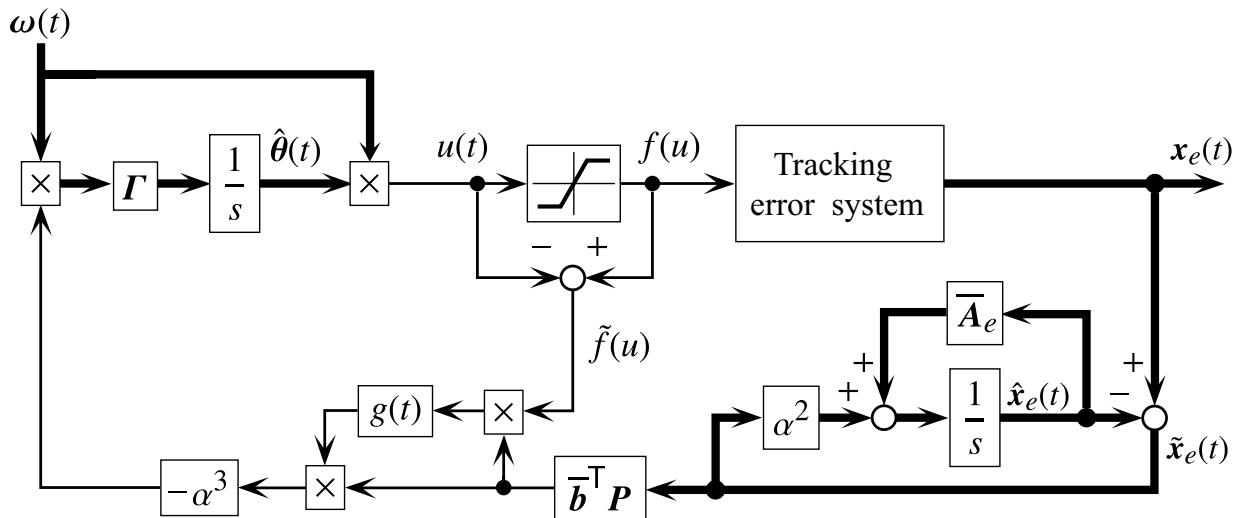


Fig. 2.2 Block diagram of the closed-loop system using the proposed controller (2.29), (2.30)

[定理 2.3] システムの初期値に関し，式 (2.14) に対し

$$\left. \begin{aligned} \rho_v^2 &\geq V(0) = \rho_e \mathbf{x}_e(0)^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) + b_m \tilde{\boldsymbol{\theta}}(0)^\top \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) \\ \rho_v &= \frac{1}{2\beta\rho_{u3}} \left\{ -(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) + \sqrt{(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})^2 + 4(\sigma - \bar{\rho}_{M1})\beta\rho_{u3}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

が満足され，そして設計パラメータの下限 $\underline{\alpha}$ が，

$$\underline{\alpha}^2 \geq 2b_m \bar{\rho}_e \sqrt{\bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \lambda_{\min}[\mathbf{P}^{-1}]} \quad (2.32)$$

を満足しているものとする．このとき，適応コントローラ (2.29), (2.30) を用いた閉ループ系は安定となり，誤差信号 $\mathbf{x}_e(t)$ は零に収束する． \square

証明： 式 (2.13), (2.29), (2.30) より，追従誤差方程式は次式であらわされる．

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_e(t) = -\alpha^2 \hat{\mathbf{x}}_e(t) + \bar{\mathbf{A}}_e \hat{\mathbf{x}}_e(t) - b_m \bar{\mathbf{b}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + b_m \bar{\mathbf{b}} \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(u) = f(u) - u(t) \quad (2.33)$$

このとき，式 (2.14) で定義される $V(t)$ の時間微分は次式を満足する．

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\alpha^5 \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_e(t) - \frac{\rho_e \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \hat{\mathbf{x}}_e(t) \\ &\quad + 2b_m \alpha^3 \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \tilde{f}(u) + 2b_m (g(t) - 1) \alpha^3 \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ここで，補題 2.1 の関係を用いると

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\alpha^5 \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_e(t) - \frac{\rho_e \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \hat{\mathbf{x}}_e(t) \\ &\quad - 2b_m \alpha^3 (1 - \delta_{\tilde{e}f}(t)) \left| \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \right| \left\{ \sigma - \bar{\rho}_{M1} - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3} V(t) \right\} \\ &\quad + 2b_m \alpha^3 \left| \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \right| \|\boldsymbol{\theta}_e\| \|\hat{\mathbf{x}}_e\| \end{aligned} \quad (2.35)$$

が得られる．このとき，

$$\begin{aligned} 2b_m \left| \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \right| \|\boldsymbol{\theta}_e\| \|\hat{\mathbf{x}}_e\| &\leq 2b_m \bar{\rho}_e \left| \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}} \right| \left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{x}}_e(t) \right\| \\ &\leq 2b_m \bar{\rho}_e \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}} \right\| \left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} \right\| \left\| \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \right\| \left\| \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{x}}_e(t) \right\| \\ &\leq 2b_m \bar{\rho}_e \sqrt{\bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \lambda_{\min}[\mathbf{P}^{-1}]} \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_e(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

の関係が成り立つことより，式 (2.32) から次式が満足される．

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\alpha^3(\alpha^2 - \underline{\alpha}^2)\tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P}\tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_{\hat{e}}\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2}\hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \\ & - 2b_m\alpha^3(1 - \delta_{\hat{e}f}(t))\left|\tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P}\bar{\mathbf{b}}\right|\left\{\sigma - \bar{\rho}_{M1} - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3}V(t)\right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

さらに，方程式

$$\beta\rho_{u3}V(0) + (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(0)^{\frac{1}{2}} - (\sigma - \bar{\rho}_{M1}) = 0 \quad (2.38)$$

の $V(0)^{\frac{1}{2}}$ に関する根が

$$\frac{1}{2\beta\rho_{u3}}\left\{- (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) \pm \sqrt{(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})^2 + 4(\sigma - \bar{\rho}_{M1})\beta\rho_{u3}}\right\} \quad (2.39)$$

となることから，式 (2.31) が満足される場合，つぎの不等式

$$(\sigma - \bar{\rho}_{M1}) - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3}V(t) \geq 0 \quad (2.40)$$

が $t = 0$ において満足される．これより，式 (2.40) の関係を用いることにより，つぎの関係

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha^3(\alpha^2 - \underline{\alpha}^2)\tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P}\tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_{\hat{e}}\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2}\hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \quad (2.41)$$

が満足されることを示すことができる．Lasalle-Yoshizawa theorem[22] に従えば，式 (2.41) より，追従誤差 $x_e(t)$ の零への収束性，ならびに閉ループ系の全信号の有界性が保証される．

よって，以上示した信号の有界性より，すべての内部信号が有界となり，閉ループ系の安定性が示される． ■

定理 2.3 より，以下の事実がわかる．式 (2.31) より，設計パラメータ β を小さくすることによって ρ_v は大きくなり，

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_v = \frac{\sigma - \bar{\rho}_{M1}}{\rho_{u1}} \quad (2.42)$$

となる．ここで，設計パラメータ β を $\beta = \varepsilon\sqrt{\lambda_{\min}[\Gamma^{-1}]} < 1$ であたえることを考えてみる． ε は正定数の設計パラメータである．このとき，式 (2.25) から $\beta\rho_{u2}, \beta\rho_{u3}$ は Γ と無関係に定まる正定値になることがわかる．よって，式 (2.31) より ρ_v が Γ と無関係に定まる正定値になることもわかる．また，この状況において設計パラメータ ε を小さくすることで β は小さくなり， ρ_v は式 (2.42) を上界として大きくできる．この事実より，制約条件

$$\left(\frac{\sigma - \bar{\rho}_{M1}}{\bar{\rho}_e}\right)^2 \lambda_{\min}[\mathbf{P}] > \mathbf{x}_e(0)^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) \quad (2.43)$$

が満足されるとき，式 (2.31) を満足する Γ および ε の値が必ず存在することがわかる．

入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ を $\tilde{q}(t) = q(t) - \hat{q}(t) = \tilde{\theta}(t)^\top \omega(t)$ で定義する．このとき，図 2.2 の閉ループ系は，つぎの特性をもつ．

[定理 2.4] 不等式 (2.31), (2.32) が満足されているとする． α 以外の設計パラメータを固定したとき，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ は零に収束する．さらに， $\tilde{q}(t)$ に関し，

$$\tilde{q}(t)^2 \leq \exp(-\alpha \bar{\rho}_{q1} t) \tilde{q}(0)^2 + \alpha^{-1} \bar{\rho}_{q2} \quad (2.44)$$

を満足する α に無関係に定まる正定値 $\bar{\rho}_{qi}$, $i = 1, 2$ が存在する． □

証明： 最初に， $\tilde{q}(t)$ が零に収束することを示す． $\dot{\hat{x}}_e(t)$ が零に収束するとき， $\tilde{x}_e(t)$ の零への収束性によって，式 (2.6) より $f(u) - q(t)$ が零に収束することが示される．このとき，追従誤差 $x_e(t)$ も零に収束することから， $q(t)^2$ は領域 $q(t)^2 < \sigma^2$ に収束する．この事実より， $\dot{\hat{x}}_e(t)$ が零に収束すれば， $\tilde{q}(t)$ の零への収束性を示すことができる．以下では， $\dot{\hat{x}}_e(t)$ の零への収束性を Barbalat's Lemma [23] を用いて示す．定理 2.3 の証明において示される閉ループ系の全信号の有界性より， $\dot{\omega}(t) \in \mathcal{L}^\infty$ がわかり， $\ddot{\hat{x}}_e(t) \in \mathcal{L}^\infty$ となることを簡単に確かめることができる．このこと，ならびに $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\hat{x}}_e(\tau) d\tau = -\tilde{x}_e(0)$ の関係を用いれば，Barbalat's Lemma [23] に従い $\dot{\hat{x}}_e(t)$ の零への収束性が保証される．

つぎに，式 (2.44) が満足されることを示す．式 (2.14) より， $V(0)$ は α と無関係に有界となることがわかる．これより， $\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\theta$, $\|\omega(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\omega$, $\|\dot{\omega}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{\dot{\omega}}$, $|u(t)|^2 \leq \bar{\rho}_u$ の関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_*$ が存在することが示される．この事実，ならびに $\tilde{e}(0) = \mathbf{0}$ より，つぎの関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{ei}$, $i = 1, 2, 3$ が存在することがわかる (付録 C 参照)．

$$\|\tilde{x}_e(t)\|^2 \leq \alpha^{-4} \bar{\rho}_{e1} \quad (2.45)$$

$$\|\dot{\hat{x}}_e(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{e2} \exp(-\alpha^2 t) + \alpha^{-2} \bar{\rho}_{e3} \quad (2.46)$$

以上の関係を用いて正定値関数 $V_q(t) = \tilde{q}(t)^2$ を解析することにより，誤差信号 $\tilde{q}(t)$ の収束性能を調べる． $\alpha^2 \tilde{x}_e(t) = -\dot{\hat{x}}_e(t) + \bar{\mathbf{A}}_e \tilde{x}_e(t) - b_m \bar{\mathbf{b}} \tilde{q}(t) + b_m \bar{\mathbf{b}} \tilde{f}(u)$ の関係を用いると， $V_q(t)$ の時間微分は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\dot{V}_q(t) &= 2\tilde{q}(t) \left(\alpha^3 g(t) \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \omega^\top \Gamma \omega(t) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \dot{\omega}(t) \right) \\
&= -2\alpha g(t) b_m \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\omega}}(t)^\top \Gamma \omega(t) \left(\tilde{q}(t)^2 - \tilde{q}(t) \tilde{f}(u) \right) - 2\tilde{q}(t) \alpha g(t) b_m \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) \\
&\quad + 2\tilde{q}(t) \alpha g(t) b_m \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_e \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) + 2\tilde{q}(t) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \dot{\omega}(t)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

ここで，補題 2.1 の事実，および式 (2.40) よりつぎの関係が満足されることがわかる．

$$\tilde{q}(t) \tilde{f}(u) \leq (1 - \beta)(1 - \delta_{\tilde{q}f}) \tilde{q}(t)^2 + |\tilde{q}(t)| \|\boldsymbol{\theta}_e\| \|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\| \tag{2.48}$$

よって，閉ループ系の全信号の有界性，ならびに式 (2.45), (2.46), (2.48), $1 \geq g(t) > 0$, $\|\omega(t)\|^2 = \omega(t)^\top \omega(t) \geq 1$ の関係より，次式を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{qi}$, $i = 3, 4, 5$ が存在することがわかる．

$$\dot{V}_q(t) \leq -\alpha \bar{\rho}_{q3} V_q(t) + \alpha \exp(-\alpha^2 t) \bar{\rho}_{q4} + \bar{\rho}_{q5} \tag{2.49}$$

以上より，式 (2.49) から，式 (2.44) の関係式を満足する正定値 $\bar{\rho}_{qi}$ が存在することがわかる．

■

定理 2.4 より， α を大きくすることにより $\tilde{q}(t)^2$ が素早く零に近づくことが理論的に保証される．このとき，制御入力 (2.29) は理想入力 $u_d(t) = q(t)$ に素早く近づくことになる．ここで，理想入力 $u_d(t)$ は未知パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ の影響を受けない信号である．したがって，未知パラメータ推定推定器に起因する高周波振動現象が制御入力に発生しにくくなる．この状況において，提案手法によって生成される制御入力信号をスムーズな入力と呼ぶ．

さらに，追従誤差 $x_e(t)$ の零への収束性から，仮定 A2.3, A2.4 より， $|q(t)| \leq \sigma$, $\forall t \geq t_1$ を満足する時刻 $t_1 \geq 0$ が存在することがわかる．これらの事実より， $(q(t) - f(u))^2 \leq \exp(-\alpha \bar{\rho}_{q1} t) \tilde{q}(t_2) + \alpha^{-1} \bar{\rho}_{q2}$, $\forall t \geq t_2$ を満足する時刻 $t_2 \geq t_1$ が存在することを示すことができる．これより， $t \geq t_2$ においては，追従誤差 $x_e(t)$ は $\bar{\mathbf{A}}_e$ によって指定された収束速度で零に収束するが示される．

設計パラメータ α の値を大きくすると， $\|x_e(t)\|^2$ の上界はつぎの不等式に近づく (付録 D 参照)．

$$\|x_e(t)\|^2 \leq \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2\lambda_{\max}[\mathbf{P}]} t\right) \frac{\lambda_{\max}[\mathbf{P}]}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}]} \|x_e(0)\|^2 \tag{2.50}$$

式 (2.50) より，追従誤差の初期値 $x_e(0)$ が零，かつ設計パラメータ α の値が十分大きい場合， $x_e(t)$ がほぼ零となることがわかる．このとき，制御入力 $u(t)$ は，制御対象の状態を規範モデルの状態に完全に一致させるために必要な入力信号 $\theta_M^T \omega_M(t)$ に素早く近づく．この状況においては，仮定 A2.3, A2.4 より，初期時刻において入力飽和が発生する場合でも，入力飽和は瞬時に消えてなくなる．

2.4 数値シミュレーションによる制御性能の検証

本節では，前節で提案した適応コントローラの有効性を示すために行った数値シミュレーション結果を示す．

式 (2.1) に対する制御対象を次のように与えた．

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\bar{A} - b_m \bar{b} k^T) x(t) + b_m \bar{b} f(u) \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_m = 1, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ k^T &= [0, \quad 1] \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

ここで，入力制限値は $\sigma = 10$ とした．このとき，式 (2.51) の制御対象は漸近安定ではない．そのため，1.2 節で示したように，従来の適応コントローラ [25]–[38] を用いた場合には，出力追従誤差の漸近安定性は保証されない．

式 (2.4) の規範モデルは次式で与えた．

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= \bar{A}_M x_M(t) + \bar{b} r_M(t) \\ \bar{A}_M &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ r_M(t) &= 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ x_M(0) &= [0, 0]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

ここで， $\rho_{\bar{b}} = 0.9$, $\rho_{\bar{e}} = 1.5$, $\rho_{M1} = 6$, $\rho_{M2} = 2.8$ と設定した．このとき，仮定 A2.3 は満足される．図 2.3 および図 2.4 に規範モデルの出力 $x_M(t)$ の応答を示す．

α および $\underline{\alpha}$ 以外の設計パラメータは次式で与えた．

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_e = \bar{A}_M, \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Gamma} &= 20\mathbf{I} \\ \beta &= 0.001 \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 3]^\top \quad (2.54)$$

式 (2.53) の設計パラメータ，および式 (2.54) の初期値を用いたとき， $\alpha \geq 1.3$ に対し，式 (2.31) 第 1 行目の不等式および式 (2.32) は満足される．式 (2.54) の初期値を用いた場合， $u(0) = 18$ となり，初期時刻において必ず入力飽和が発生する状況であることがわかる．

まず，追従誤差の初期値を $x_e(0) = x(0) = \mathbf{0}$ とした場合のシミュレーション結果を示す．図 2.5 – 図 2.8 に設計パラメータ α を変化させたときの閉ループ系の応答を示す．図 2.7 において，太い実線は入力制限値を示したものである． $\alpha = 1.3$ の場合，図 2.8(a) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ に未知パラメータの推定に起因した高周波振動が発生していることがわかる．同様に，図 2.7(a) より，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生し， $0 \sim 0.5[\text{sec}]$ 付近で入力飽和が発生していることがわかる．これによって，図 2.5(a) および図 2.6(a) に示すように，追従誤差 $x_e(t)$ にも振動が発生していることがわかる． $\alpha = 3$ の場合，図 2.8(b) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の振動の周期は図 2.8(a) に比べ速くなっていることがわかる．しかし，その振幅の減衰は速くなり， $1[\text{sec}]$ 付近で $\tilde{q}(t)$ はほぼ零となっていることがわかる．これより，図 2.7(b) において，制御入力 $u(t)$ の高周波振動も図 2.7(a) に比べ減衰が速くなっており，入力飽和が発生している区間も短くなっていることがわかる．そして，図 2.5(b) お

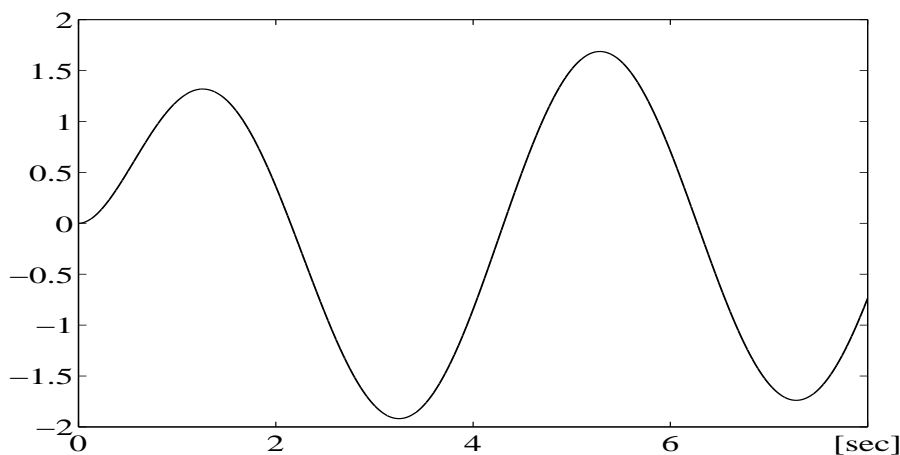


Fig. 2.3 Responses $x_{M1}(t) = [1, 0]\mathbf{x}_M(t)$ of the reference model

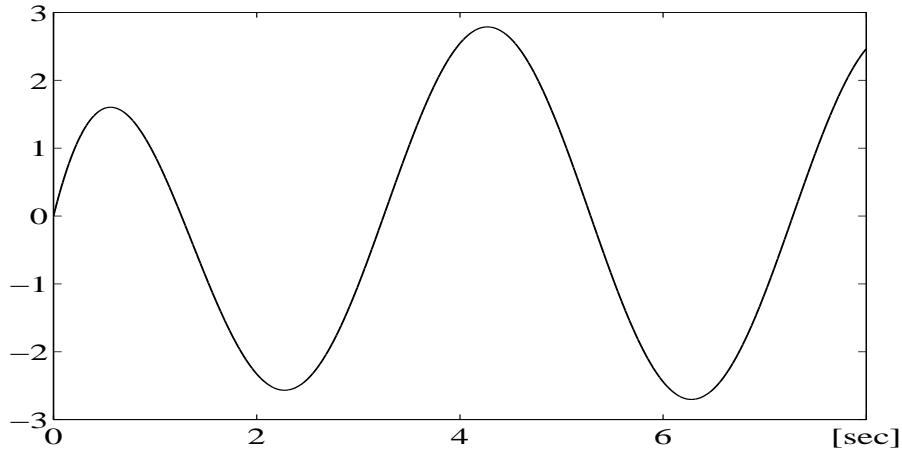
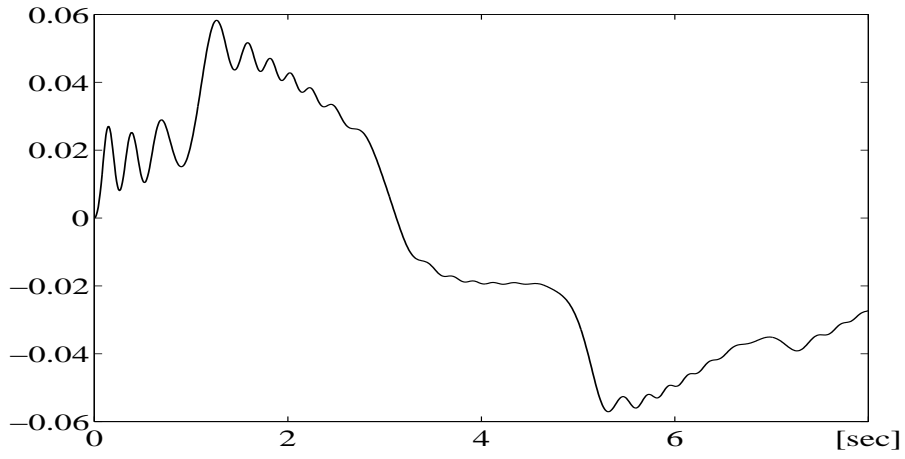


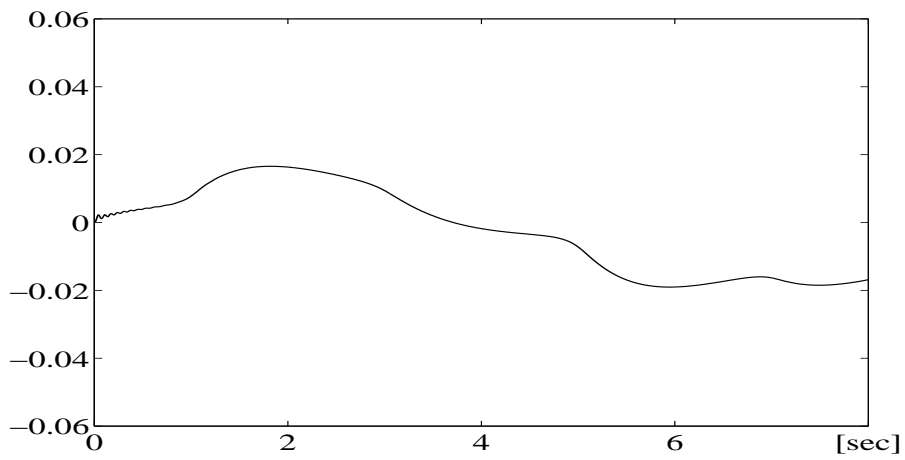
Fig. 2.4 Responses $x_{M2}(t) = [0, 1]x_M(t)$ of the reference model

よび図 2.6(b) に示すように，追従誤差 $x_e(t)$ に発生している振動も図 2.5(a) および図 2.6(a) に比べ減衰が速くなり，そのノルムも小さくなっていることがわかる． $\alpha = 200$ の場合，図 2.8(c) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ は瞬時にほぼ零となっていることがわかる．よって，制御入力 $u(t)$ が，制御対象の状態を規範モデルの状態に完全に一致させるために必要な入力信号 $\theta_M^T \omega_M(t)$ に素早く近づいていることがわかる．このことより，図 2.7(c) において，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生しなくなり，初期時刻において発生している入力飽和が瞬時に解消されていることがわかる．また，図 2.5(c) および図 2.6(c) より，式 (2.50) で示したように出力追従誤差 $x_e(t)$ はほぼ零となっていることがわかる．以上の結果より，設計パラメータ α の値を大きくする設定することによって，式 (3.22) に示されるように，推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の零への素早い収束が実現され，高周波振動が発生しにくくなることが確認できる．さらに，入力飽和も瞬時に発生しなくなり，追従誤差もほぼ零に維持されることが確認できる．

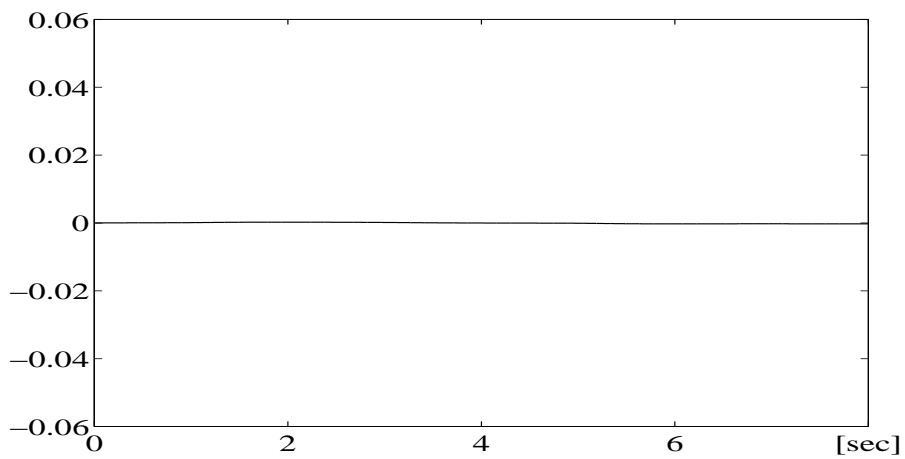
つぎに，追従誤差の初期値を $x_e(0) = x(0) = [0.5, 0]^T$ とした場合のシミュレーション結果を示す．この場合においても，式 (2.53) の設計パラメータ，および式 (2.54) の初期値を用い， $\underline{\alpha} \geq 1.3$ とすると，式 (2.31) 第 1 行目の不等式は満足される．図 2.9 – 図 2.12 に設計パラメータ α を変化させたときの対象の閉ループ系の応答を示す．図 2.11 において，太い実線は入力制限値を示したものである． $\alpha = 1.3$ の場合，図 2.12(a) より， $x_e(0) = \mathbf{0}$ の場合と同様に入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ に未知パラメータの推定に起因した高周波振動が発生していることがわかる．そして，図 2.11(a) より，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生し， $0 \sim 0.5[\text{sec}]$ 付近で入力飽和が発生していることがわかる．これによって，図 2.9(a) および



(a) $\alpha = 1.3$

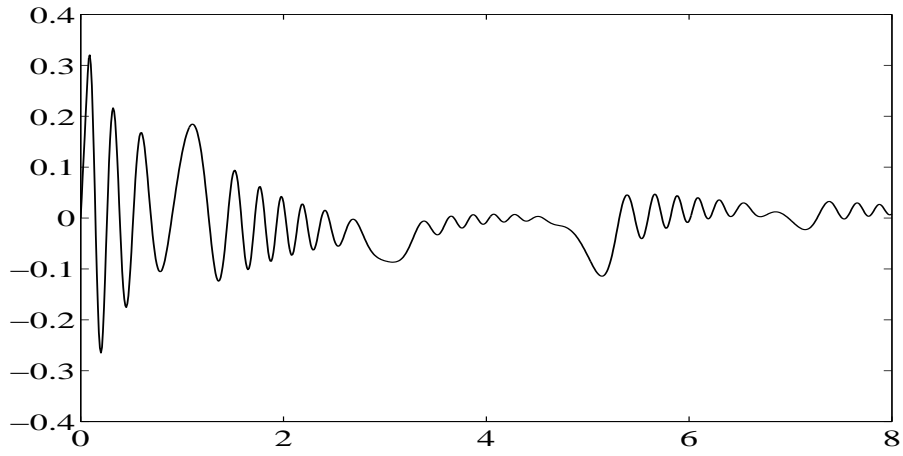


(b) $\alpha = 3$

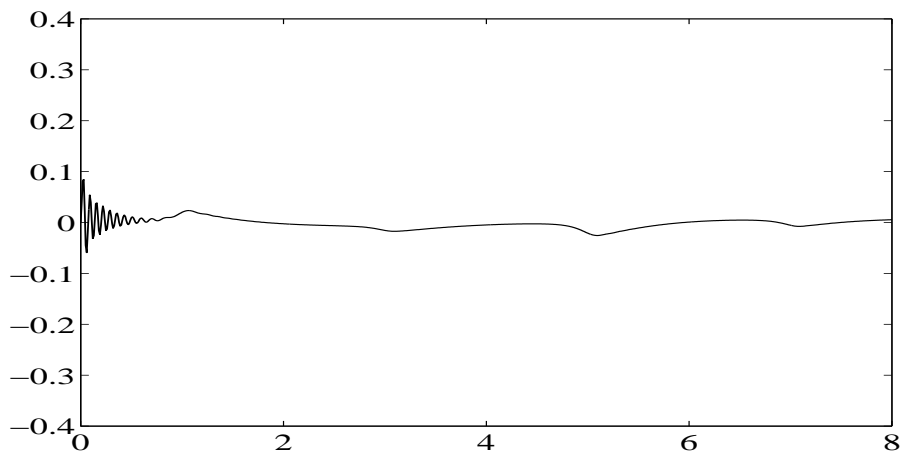


(c) $\alpha = 200$

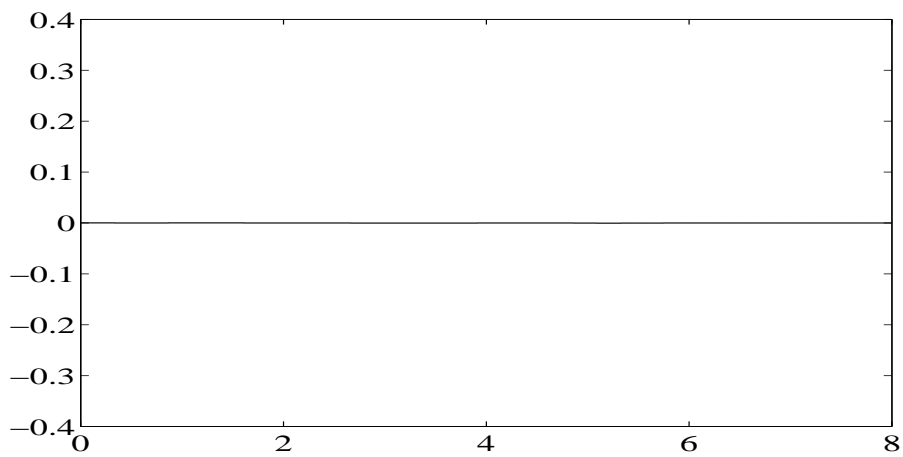
Fig. 2.5 Responses of the tracking error $x_{e1}(t) = [1, 0]x_e(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = \mathbf{0}$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

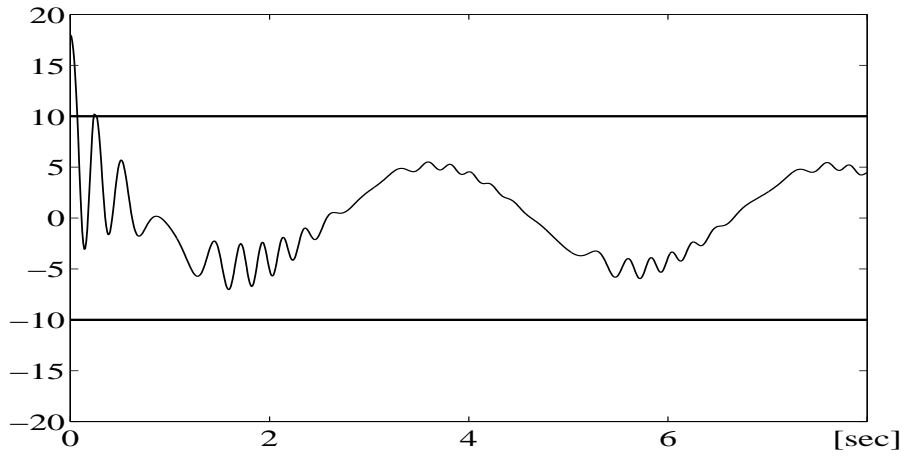


(b) $\alpha = 3$

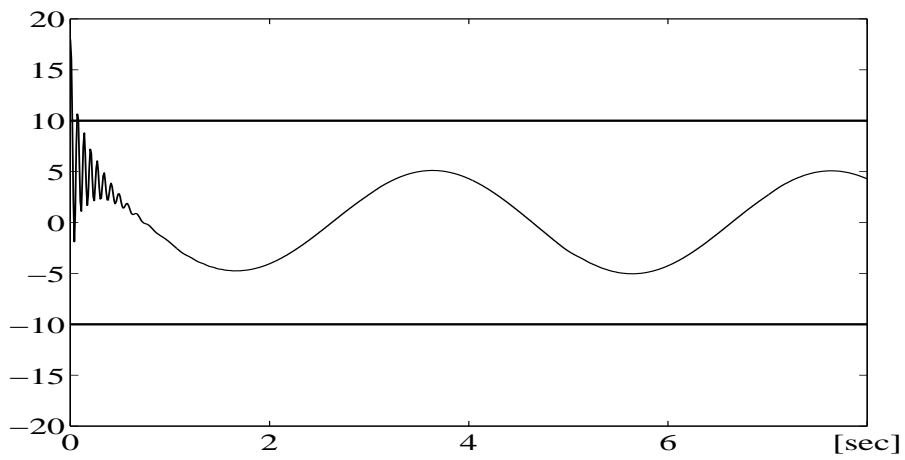


(c) $\alpha = 200$

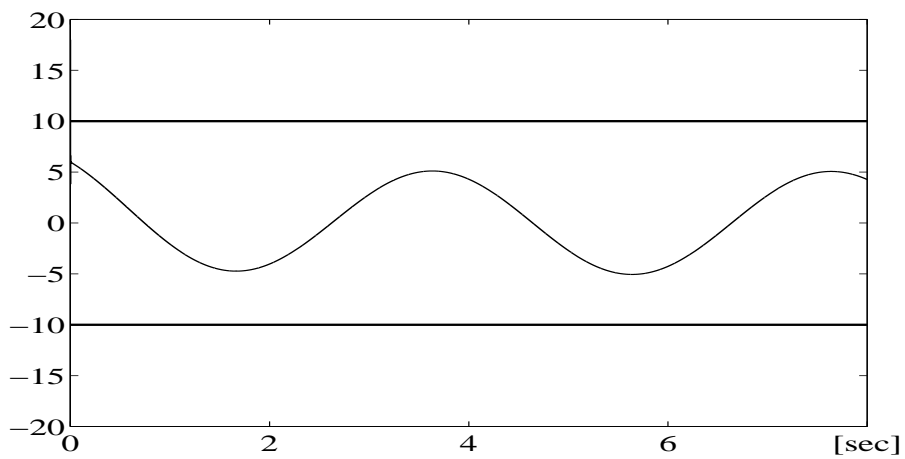
Fig. 2.6 Responses of the tracking error $x_{e2}(t) = [0, 1]x_e(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = \mathbf{0}$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

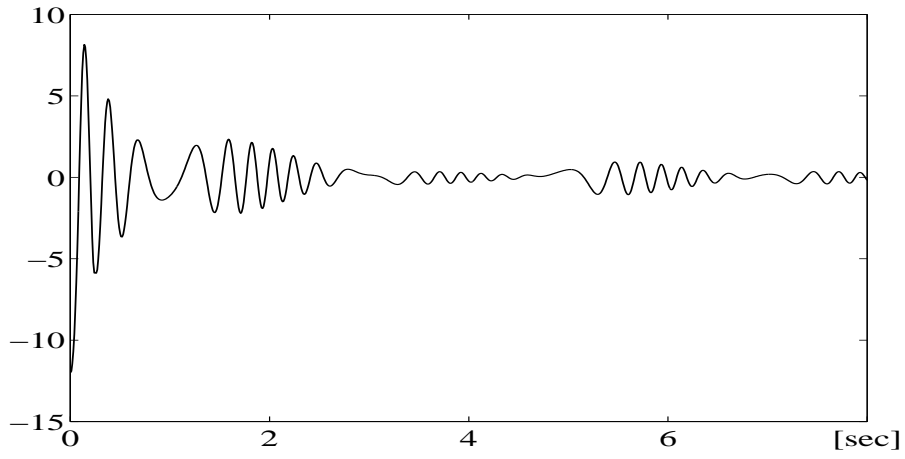


(b) $\alpha = 3$

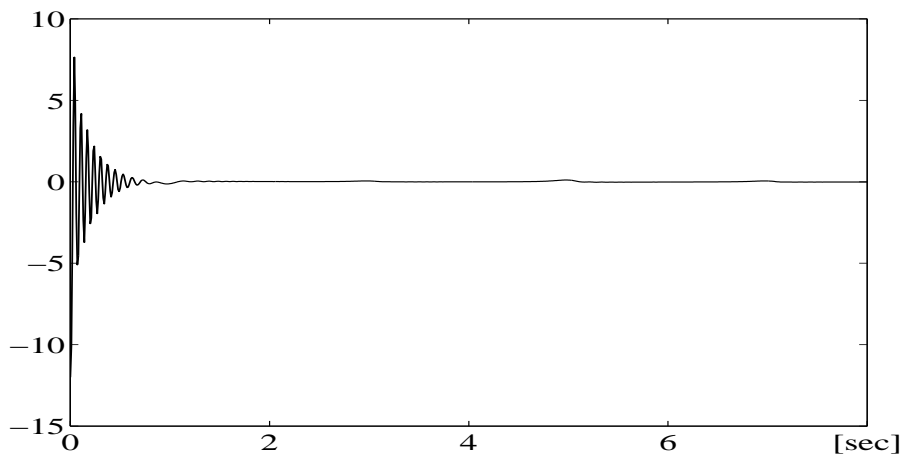


(c) $\alpha = 200$

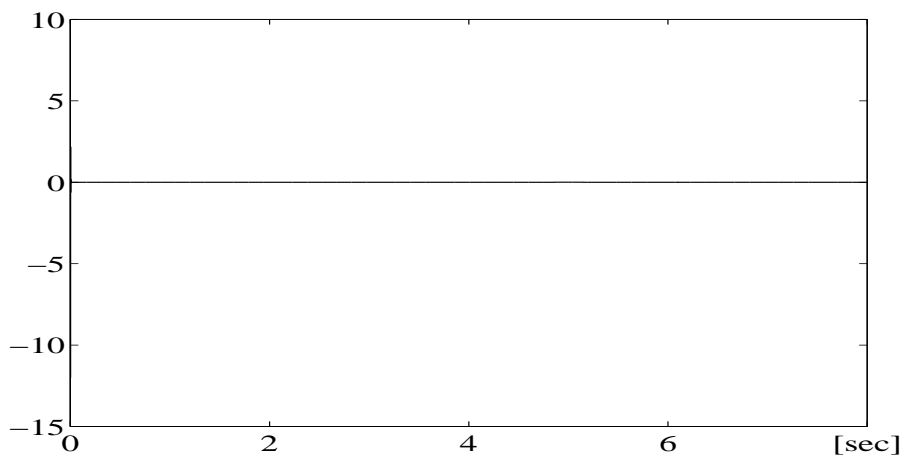
Fig. 2.7 Responses of the control input $u(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = \mathbf{0}$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

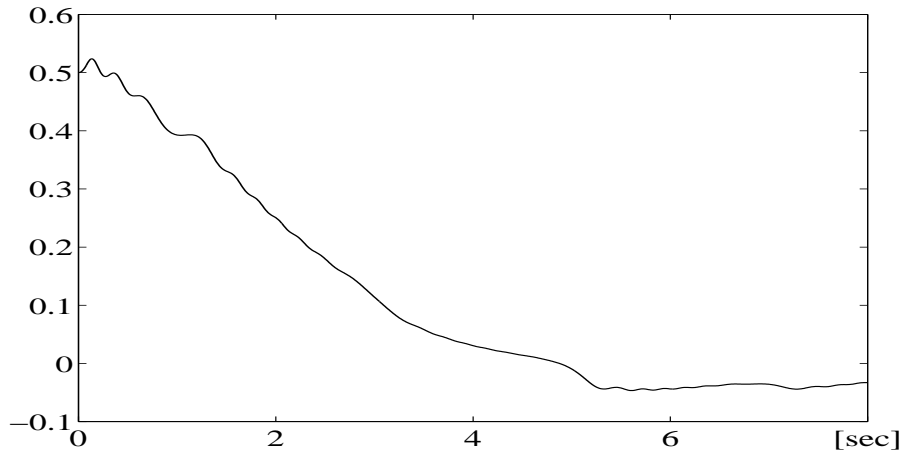


(b) $\alpha = 3$

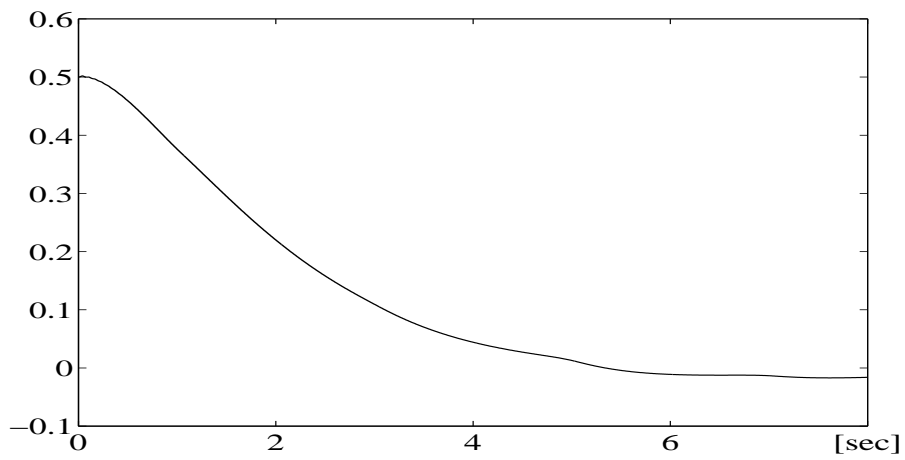


(c) $\alpha = 200$

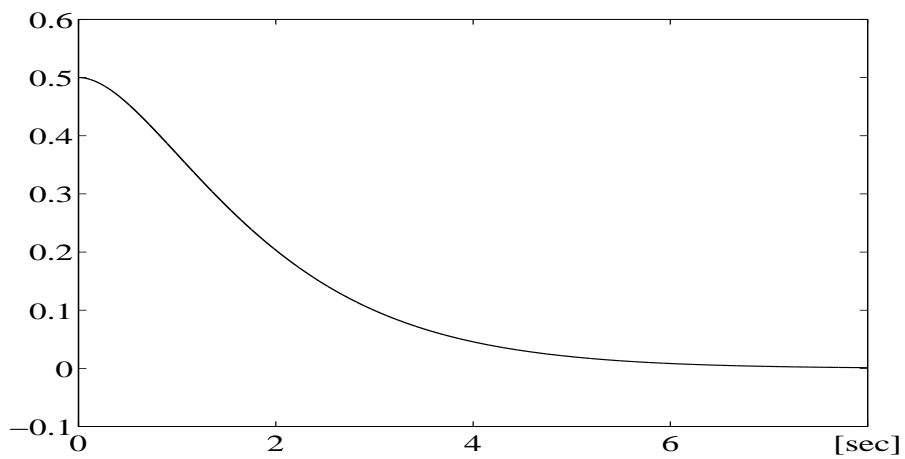
Fig. 2.8 Responses of the estimated input error $\tilde{q}(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{0}$ and $\alpha = 1, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

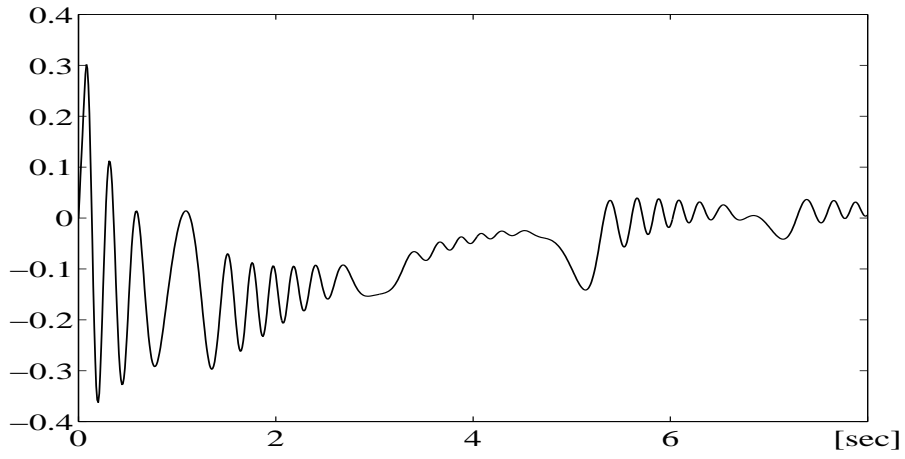


(b) $\alpha = 3$

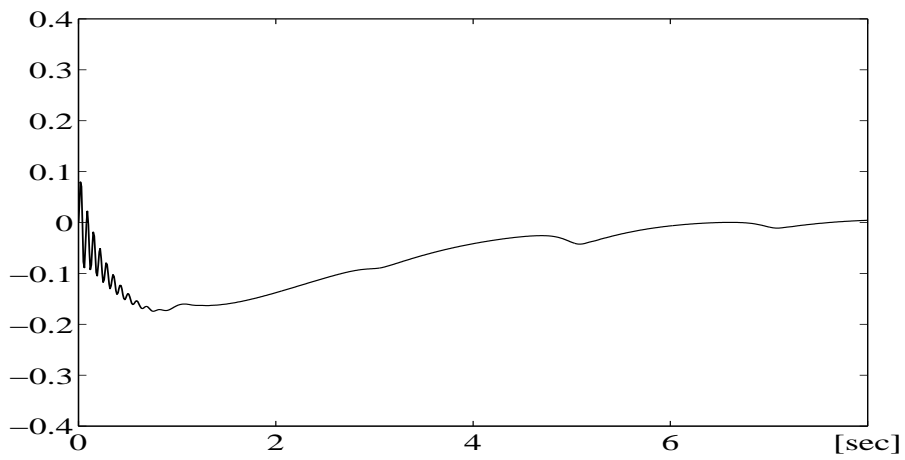


(c) $\alpha = 200$

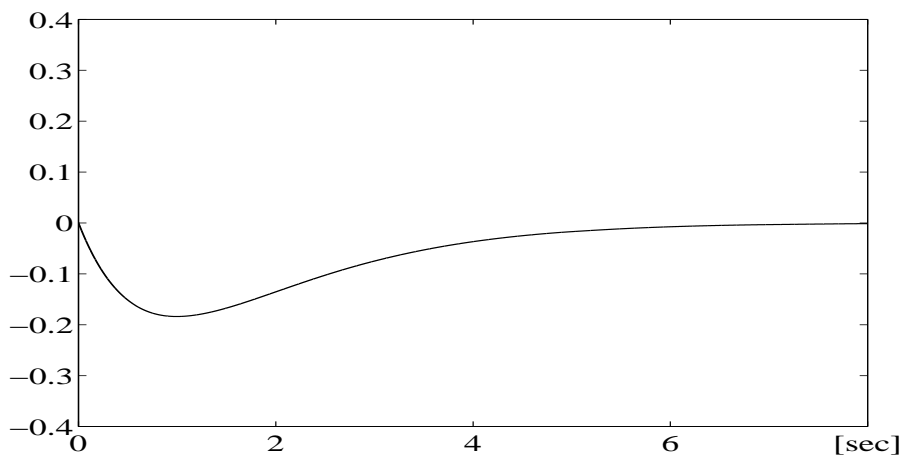
Fig. 2.9 Responses of the tracking error $x_{e1}(t) = [1, 0]x_e(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = [0.5, 0]$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

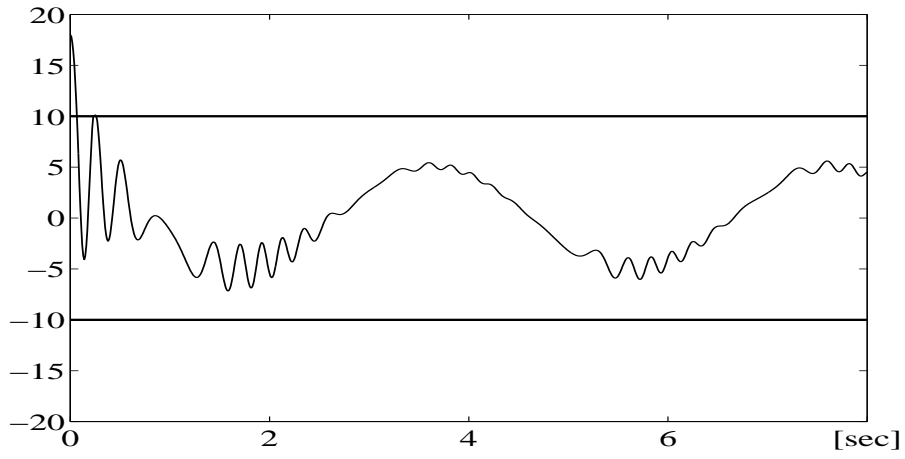


(b) $\alpha = 3$

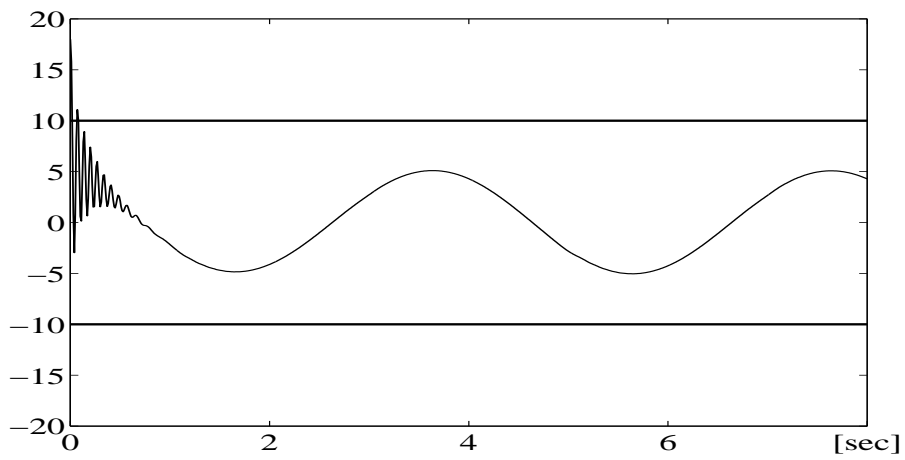


(c) $\alpha = 200$

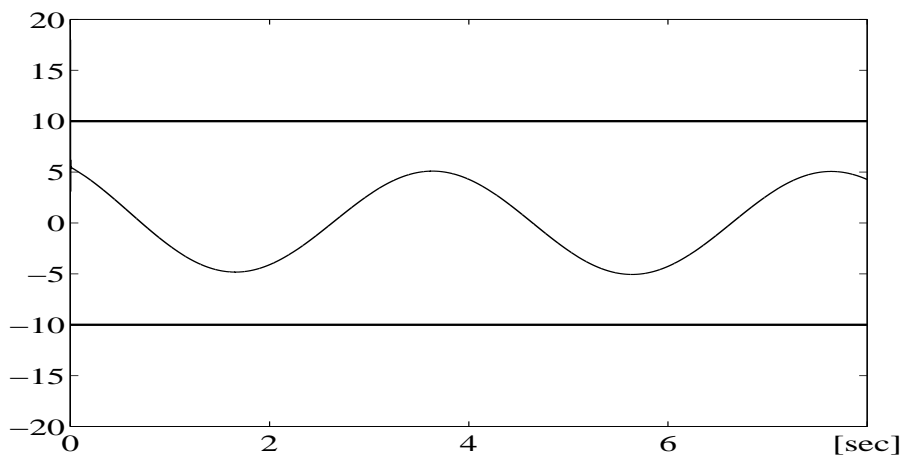
Fig. 2.10 Responses of the tracking error $x_{e2}(t) = [0, 1]x_e(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = [0.5, 0]$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$

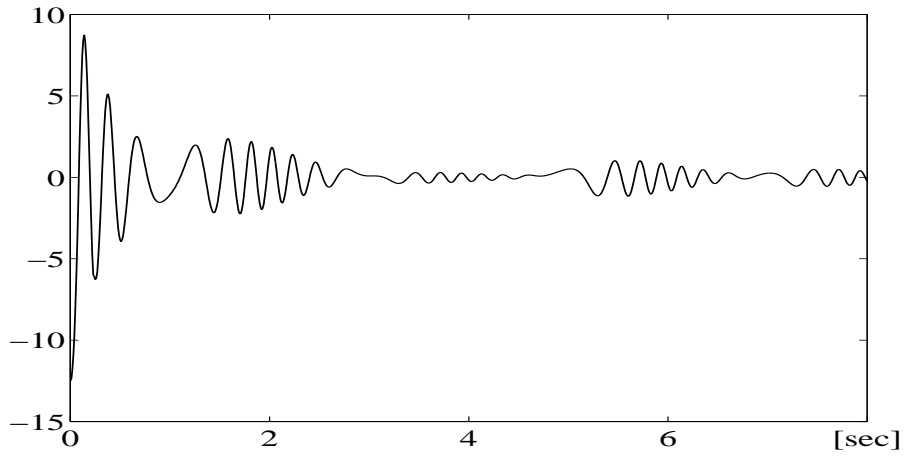


(b) $\alpha = 3$

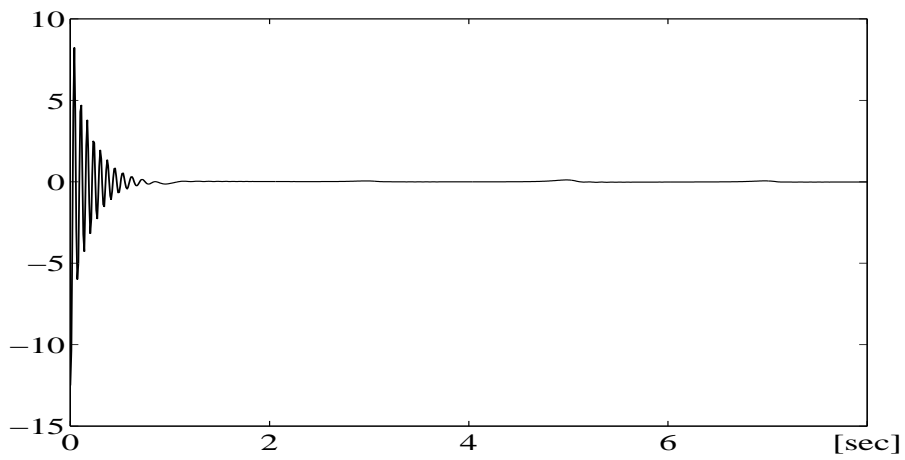


(c) $\alpha = 200$

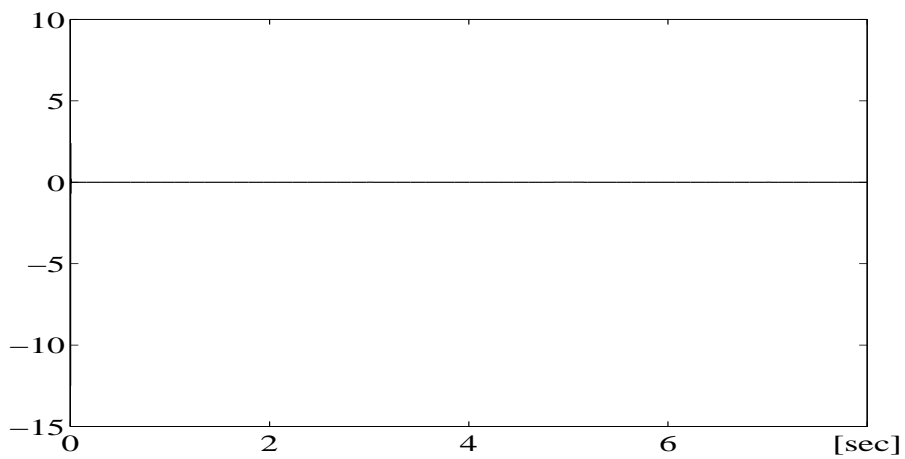
Fig. 2.11 Responses of the control input $u(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = [0.5, 0]$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$



(a) $\alpha = 1.3$



(b) $\alpha = 3$



(c) $\alpha = 200$

Fig. 2.12 Responses of the estimated input error $\tilde{q}(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $x_e(0) = [0.5, 0]$ and $\alpha = 1.3, 3, 200$

図 2.10(a) に示すように，追従誤差 $x_e(t)$ にも振動が発生していることがわかる． $\alpha = 3$ の場合，図 2.12(b) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の振動の周期は図 2.12(a) に比べ速くなっていることがわかる．しかし，その振幅の減衰は速くなり，1[sec] 付近で $\tilde{q}(t)$ はほぼ零となっていることがわかる．これより，図 2.11(b) において，制御入力 $u(t)$ の高周波振動も図 2.7(a) に比べ減衰が速くなっており，入力飽和が発生している区間も短くなっていることがわかる．そして，図 2.9(b) および図 2.10(b) に示すように，追従誤差 $x_e(t)$ に発生している振動も図 2.5(a) および図 2.10(a) に比べ減衰が速くなっていることがわかる． $\alpha = 200$ の場合，図 2.12(c) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ は瞬時にほぼ零となっていることがわかる．よって，制御入力 $u(t)$ が理想入力 $u_d(t)$ に素早く近づいていることがわかる．このことより，図 2.11(c) において，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生しなくなり，初期時刻において発生している入力飽和が瞬時に解消されていることがわかる．これより，図 2.9(c) および図 2.10(c) に示す応答が， $\dot{x}_e(t) = \bar{A}_e x_e(t)$ で生成される応答に素早く近づき，零に収束していることがわかる．以上の結果より，出力追従誤差の初期値 $x_e(0)$ が零でない場合でも，設計パラメータ α の値を大きくする設定することによって，式 (3.22) に示されるように，推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の零への素早い収束が実現され，高周波振動が発生しにくくなることが確認できる．さらに，入力飽和も瞬時に発生しなくなり，追従誤差もスムーズに零に収束していることが確認できる．

これらのシミュレーション結果より，入力飽和が発生するような状況においても，設計パラメータ α の値を大きく設定するだけで，制御性能が改善できていることがわかる．

2.5 おわりに

本章では，全状態が利用可能な場合において，入力飽和が存在する 1 入出力線形時不変系に対する適応制御手法を提案した．提案手法では，ある初期値集合に対する制約が満足される場合に，以下の特徴をもつことが理論的に保証される．

- (1) 制御対象の安定性にかかわらず，追従誤差の漸近安定性が保証される．
- (2) ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，未知パラメータ推定器に起因する高周波振動現象が発生しにくくなる．

- (3) 追従誤差の初期値が零の場合，初期時刻において入力飽和が発生する場合でも，この飽和現象は瞬時に発生しなくなり，出力追従誤差が指定された速度で零に収束する．

さらに，これらの事実を，数値シミュレーションを用いて検証し，その有効性を確認した．

第3章 相対次数までの出力の微分値が利用可能な場合の適応制御系設計

3.1 はじめに

前章で提案した適応コントローラでは，制御対象の全状態の観測が必要である．この場合，制御対象の出力をある軌道に追従させるだけの場合でも，制御対象の次数と同数の計測器を必要とするという問題がある．本章では，前節で示した適応コントローラと同等の制御性能を持ち，かつ観測すべき状態数が緩和される手法を提案する．すなわち，出力の相対次数までの微分信号が利用可能な場合において，入力飽和が存在する1入出力線形時不変系に対する適応制御手法を提案する [67, 68]．3.2節では，問題設定を行う．制御対象，規範モデル，および制御対象出力と規範モデル出力との追従誤差を定義する．適応コントローラを設計するために，出力の相対次数までの微分信号からなる状態を定義する．そして，この状態を用いた出力追従誤差方程式の状態空間表現を示す．3.3節では，導出された追従誤差方程式を基に，入力飽和を考慮した適応コントローラの設計法を提案する．そして，提案する適応コントローラが，前章で提案したものと同等の制御性能をもつことを示す．3.4節では，数値シミュレーションにより，提案する手法の有効性を検証する．

3.2 問題設定

3.2.1 制御対象

制御対象は，次式で与えられるものとする．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p(t) &= \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}_p f(u) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}_p^\top \boldsymbol{x}_p(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$\boldsymbol{x}_p(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態， $y(t) \in \mathbb{R}$ は出力， $u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力であり， $\boldsymbol{A}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\boldsymbol{b}_p, \boldsymbol{c}_p \in \mathbb{R}^n$ である． $f(u) \in \mathbb{R}$ は次式で与えられる飽和関数である．

$$f(u) = \begin{cases} \sigma & \text{for } u(t) > \sigma \\ u(t) & \text{for } |u(t)| \leq \sigma \\ -\sigma & \text{for } u(t) < -\sigma \end{cases} \quad (3.2)$$

$\sigma \in \mathbb{R}$ はアクチュエータの入力制限値を示す正定数である．ラプラス演算子 s および $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $F(s) = \mathcal{L}[f(u)]$ を用いて，制御対象 (3.1) の入出力関係は

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= \frac{b_m B_p(s)}{A_p(s)} F(s) + \frac{C_p(s)}{A_p(s)} \\ A_p(s) &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ B_p(s) &= s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ C_p(s) &= c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

と表現される．ここで $A_p(s)$ および $B_p(s)$ は既約であり， b_m は高周波ゲインである．

3.2.2 規範モデル

つぎの規範モデルを考える．

$$\left. \begin{aligned} Y_M(s) &= \frac{B_M(s)}{A_M(s)} r \\ A_M(s) &= s^{n_M} + a_{M(n_M-1)} s^{n_M-1} + \cdots + a_{M1} s + a_{M0} \\ B_M(s) &= b_{Mm_M} s^{m_M} + \cdots + b_{M1} s + b_{M0} \\ n_M - m_M &\geq n - m \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$A_M(s)$ はフルビッツ多項式であり， $y_M(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_M(s)]$ は規範モデル出力， $r \in \mathbb{R}$ は規範モデル入力で定数である．

3.2.3 追従誤差方程式

追従誤差を $y_e(t) = y(t) - y_M(t)$ で定義する．このとき，以下の多項式

$$\left. \begin{aligned} A_p(s) &= A_{pq}(s)B_p(s) + A_{pr}(s) \\ A_{pq}(s) &= s^{n-m} + a_{q(n-m-1)} s^{n-m-1} + \cdots + a_{q1} s + a_{q0} \\ A_{pr}(s) &= a_{r(m-1)} s^{m-1} + \cdots + a_{r1} s + a_{r0} \\ C_p(s) &= C_{pq}(s)B_p(s) + C_{pr}(s) \\ C_{pq}(s) &= c_{q(n-m-1)} s^{n-m-1} + \cdots + c_{q1} s + c_{q0} \\ C_{pr}(s) &= c_{r(m-1)} s^{m-1} + \cdots + c_{r1} s + c_{r0} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

を用いると，次式を得る．

$$A_{pq}(s)Y_e(s) - C_{pq}(s) = b_m F(s) - \frac{A_{pr}(s)}{B_p(s)}Y_e(s) + \frac{C_{pr}(s)}{B_p(s)} - \frac{A_p(s)B_M(s)r}{B_p(s)A_M(s)s} \quad (3.6)$$

ここで， $Y_e(s) = \mathcal{L}[y_e(t)]$ であり， $A_{pq}(s)$ と $A_{pr}(s)$ はそれぞれ $A_p(s)$ を $B_p(s)$ で割った商と余りである．式 (3.6) よりつぎの状態空間表現が導出できる．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_e(t) + b_m \mathbf{b} \left(f(u) - \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t) - \theta_r r + \phi(t) \right) \\ \mathbf{x}_e(t) &= [y_e(t), \dot{y}_e(t), \dots, y_e(t)^{(n-m-1)}]^\top \\ \mathbf{A} &= \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{b}\mathbf{a}_q^\top, \quad \mathbf{b}^\top = [0, \dots, 0, 1] \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_q^\top = [a_{q0}, a_{q1}, \dots, a_{q(n-m-1)}] \\ \mathbf{c}_z^\top &= [a_{r0}, a_{r1}, \dots, a_{r(m-1)}] \\ \theta_r &= \frac{a_0 b_{M0}}{b_m b_0 a_{M0}} \\ \phi(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{pr}(s)}{b_m B_p(s)} - \frac{r D_p(s)}{b_m B_p(s) A_M(s)} \right] \\ s D_p(s) &= A_p(s) B_M(s) - \frac{A_p(0) B_M(0)}{B_p(0) A_M(0)} B_p(s) A_M(s) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_z \mathbf{z}(t) + \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top \mathbf{x}_e(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -b_0 & -b_1 \dots -b_{m-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}^\top &= [0, \dots, 0, 1/b_m], \quad \mathbf{c}_x^\top = [1, 0, \dots, 0] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

なお，式 (3.7) および式 (3.8) の導出においては， $\mathcal{L}[A_{pq}(p)y_e(t)] = A_{pq}(s)Y_e(s) - C_{pq}(s)$ ， $p = d/dt$ の関係を用いている．

既知の定数ベクトル $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n-m}$ を用いて，安定行列 \mathbf{A}_e を $\mathbf{A}_e = \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{b}\mathbf{d}^\top$ で定義する．そして，信号 $\ell(t) = \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t)$ を定義すると，追従誤差方程式 (3.7) は次式に書き換えられる．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e(t) &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e(t) + b_m \mathbf{b} (f(u) - q(t)) \\ q(t) &= \boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + \ell(t), \quad \ell(t) = \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t)^\top &= \left[\frac{1}{\varepsilon} \phi(t), \boldsymbol{\theta}_e^\top, \theta_r \right], \quad \varepsilon \geq 1 \\ \boldsymbol{\omega}(t)^\top &= [-\varepsilon, \mathbf{x}_e(t), r] \\ \boldsymbol{\theta}_e &= \frac{1}{b_m} (\mathbf{a}_q - \mathbf{d}) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

ここで $\theta(t)$ および $\ell(t)$ は未知の信号であり, ε は正定値の設計パラメータである. $\omega(t)$ の第 1 要素が $-\varepsilon$ となっているので, $\|\omega(t)\|^2 \geq 1$ の関係が満足される. この関係は, 次節の定理 3 の証明において用いられる. 設計パラメータ ε は $\theta(0)$ に関する初期条件を調節するのに用いる.

本章における設計目的は, 制御対象の安定性にかかわらず, 追従誤差 $y_e(t)$ が零に収束する適応コントローラを設計することである. この目的を達成するために, 以下の仮定を設ける.

A3.1: 多項式 $A_p(s), B_p(s), C_p(s)$ の係数および b_m は未知である.

A3.2: 制御対象は最小位相系である.

A3.3: b_m の符号は既知である. 以下では $b_m > 0$ として議論する.

A3.4: 相対次数 $n - m$ は既知である.

A3.5: $y(t)^{(i)}, i = 0, \dots, n - m - 1$ が利用可能である.

A3.6: $\bar{A}_z = A_z + \delta_z I$ が安定行列となるような正定数 δ_z が存在する.

A3.7: $|\theta_r - \phi(t)| \leq \bar{\rho}_{M1}$ の関係を満足する正定数 $\bar{\rho}_{M1}$ が存在し, $\sigma - \bar{\rho}_{M1} > 0$ の関係が満足される.

A3.8: 正定数 σ は既知である.

仮定 A3.1 ~ A3.4 は従来の適応制御における仮定である. 仮定 A3.2 から, A_z は安定行列となり, $\phi(t)$ は指数減衰関数となることがわかる. これより, $\|\dot{\phi}(t)\| \leq \rho_\phi \exp(-\delta_\phi t)$ の関係を満足する正定数 ρ_ϕ, δ_ϕ が存在する. 仮定 A3.5 ~ 3.8 は次節に示す適応コントローラを開発するために導入した仮定である. 仮定 A3.5 より, $x_e(t)$ は利用可能な信号となる.

3.3 入力飽和が存在する場合においてスムーズな 入力を生成する適応コントローラ

3.3.1 適応コントローラの構成

仮定 A3.1~A3.8 に基づき, 入力飽和を考慮したつぎの適応コントローラを提案する.

$$\left. \begin{aligned} u(t) = \hat{q}(t) = \hat{\theta}(t)^\top \omega(t) + \hat{\ell}(t) \\ \hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_\phi(t), \hat{\theta}_e(t)^\top, \hat{\theta}_r(t)]^\top \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\hat{\theta}}(t) &= -\alpha^3 g(t) \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \Gamma \omega(t), \Gamma > 0 \\
\dot{\hat{\ell}}(t) &= -\delta_z \hat{\ell}(t) - \frac{1}{\rho_\ell} \alpha^3 g(t) \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b}, \hat{\ell}(0) = 0 \\
\tilde{\mathbf{x}}_e(t) &= \mathbf{x}_e(t) - \hat{\mathbf{x}}_e(t) \\
\dot{\hat{\mathbf{x}}}_e(t) &= \mathbf{A}_e \hat{\mathbf{x}}_e(t) + \alpha^2 \tilde{\mathbf{x}}_e(t), \hat{\mathbf{x}}_e(0) = \mathbf{x}_e(0) \\
g(t) &= 1 - (1 - \beta)(1 - \delta_{\tilde{e}f}(t)), 1 \geq \beta > 0 \\
\delta_{\tilde{e}f}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{for } \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \tilde{f}(u) \leq 0 \\ 0 & \text{for } \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \tilde{f}(u) > 0 \end{cases} \\
\tilde{f}(u) &= f(u) - u(t)
\end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

ただし, $\hat{\theta}_\phi(t)$ および $\hat{\theta}_e(t), \hat{\theta}_r(t)$ はそれぞれ未知信号 $\phi(t)$ および未知定数 θ_e, θ_r の推定値であり, $\hat{\mathbf{x}}_e(t)$ および $\hat{\ell}(t)$ はそれぞれ信号 $\mathbf{x}_e(t)$ および $\ell(t)$ の推定値である. α, β は正定値の設計パラメータであり, Γ は正定対称行列の設計パラメータである. また, ρ_ℓ は以下の不等式を満足する正定値の設計パラメータである.

$$\left. \begin{aligned}
\rho_\ell &\leq \frac{\delta_z}{b_m} \left\{ \frac{\|\mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top\|^2}{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]} \left(\frac{4}{\underline{\alpha}} + \frac{6}{\rho_{\hat{e}}} \right) + \frac{4\|\mathbf{c}_z^\top \bar{\mathbf{A}}_z\|^2}{\rho_z \lambda_{\min}[\mathbf{Q}_z]} \right\}^{-1} \\
\rho_z &= \frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}_z]}{4} \frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{\|\mathbf{P}_z \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top\|^2} \left(\frac{4}{\underline{\alpha}} + \frac{6}{\rho_{\hat{e}}} \right)^{-1} \\
\rho_{\hat{e}} &= \frac{\lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{4} \left(\frac{\|\mathbf{P}\|}{\underline{\alpha}} \right)^{-1}
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここで $\underline{\alpha}$ は $\alpha \geq \underline{\alpha} > 0$ となる設計パラメータ α の下限であり, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_z は正定対称行列の設計パラメータ, \mathbf{P}, \mathbf{P}_z はつぎのリアプノフ方程式を満足する正定対称行列である.

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{A}_e^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_e &= -\mathbf{Q}, \mathbf{Q} > 0 \\
\mathbf{A}_z^\top \mathbf{P}_z + \mathbf{P}_z \mathbf{A}_z &= -\mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_z > 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

推定信号 $\hat{\mathbf{x}}_e(t)$ および設計パラメータ α は $\hat{\theta}(t)$ および $\hat{\ell}(t)$ の推定性能を改善するために導入したものである. 設計パラメータ β は制御入力 $\hat{q}(t)$ と理想入力 $q_d(t) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + \ell(t)$ との追従性能を保証するために導入している. 切り換え関数 $\delta_{\tilde{e}f}(t)$ は入力飽和を有する閉ループ系の安定性を確保するために導入している. 提案する適応コントローラ (3.10), (3.11) を用いた閉ループ系の構成を図 3.1 に示す.

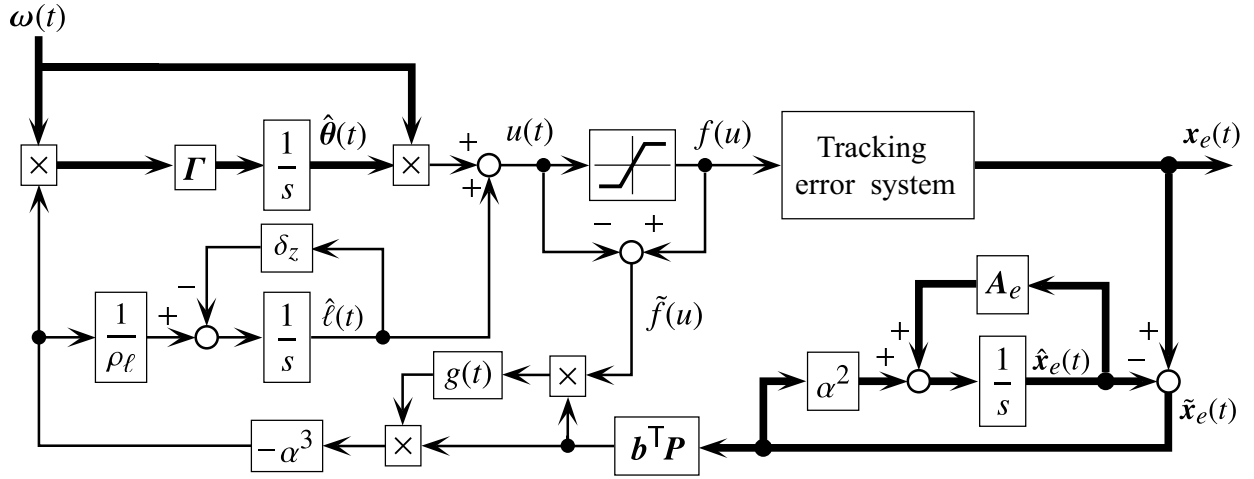


Fig. 3.1 Block diagram of the closed-loop system using the proposed controller (3.10), (3.11)

3.3.2 適応制御系の安定解析

提案する適応コントローラ (3.10), (3.11) を用いた閉ループ系の性質を示すために, つぎのリアプノフ関数の候補を定義する .

$$\left. \begin{aligned}
 V(t) &= V_1(t) + \rho_{v2} V_2(t) \\
 V_1(t) &= \alpha^3 \tilde{x}_e(t)^\top P \tilde{x}_e(t) + \rho_e \hat{x}_e(t)^\top P \hat{x}_e(t) + \rho_z z(t)^\top P_z z(t) + b_m \rho_\ell \tilde{\ell}(t)^2 \\
 &\quad + b_m \tilde{\theta}(t)^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) \\
 V_2(t) &= \frac{2\rho_\phi \sqrt{b_m} \left\| \Gamma^{-\frac{1}{2}} \right\|}{\varepsilon \delta_\phi} \exp(-\delta_\phi t) \\
 \rho_{v2} &= \frac{V_2(0) + \sqrt{V_2(0)^2 + 4V_1(0)}}{2} + 1 \\
 \tilde{\ell}(t) &= \ell(t) - \hat{\ell}(t) \\
 \tilde{\theta}(t) &= [\tilde{\theta}_\phi(t), \tilde{\theta}_e(t)^\top, \tilde{\theta}_r(t)]^\top \\
 \tilde{\theta}_\phi(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi(t) - \hat{\theta}_\phi(t) \\
 \tilde{\theta}_e(t) &= \theta_e - \hat{\theta}_e(t) \\
 \tilde{\theta}_r(t) &= \theta_r - \hat{\theta}_r(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ここで $\tilde{\theta}(t)$ および $\tilde{\ell}(t)$ はパラメータ推定誤差である .

前章と同様に, 制御系の安定性を示すため, つぎの補題を用いる .

[補題 3.1] 任意の信号 $a(t) \in \mathbb{R}$ に関して，切り換え関数 $\delta_{af}(t)$ を

$$\delta_{af}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } a(t)\tilde{f}(u) \leq 0 \\ 0 & \text{for } a(t)\tilde{f}(u) > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

で定義する．このとき，任意の定数 $1 \geq \beta > 0$ に対しつぎの関係が満足される．

$$\begin{aligned} a(t)\tilde{f}(u) \leq & -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)| \left\{ \sigma - \bar{\rho}_{M1} - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3}V(t) \right\} \\ & + (1 - \beta)(1 - \delta_{af}(t))a(t) \left\{ \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + \tilde{\ell}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで， ρ_{ui} ， $i = 1, 2, 3$ は次式で与えられる．

$$\left. \begin{aligned} \rho_{u1} &= \sqrt{\max \left\{ \frac{2\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2}{\underline{\alpha}^3 \lambda_{\min}[\mathbf{P}]}, \frac{2\|\boldsymbol{\theta}_e\|^2}{\rho_{\hat{e}} \lambda_{\min}[\mathbf{P}]}, \frac{\|\mathbf{c}_z\|^2}{\rho_z \lambda_{\min}[\mathbf{P}_z]} \right\}} \\ \rho_{u2} &= \frac{1}{\sqrt{b_m}} \max \left\{ \frac{|r| + \varepsilon}{\lambda_{\min}[\boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}]}, \frac{1}{\sqrt{\rho_{\ell}}} \right\} \\ \rho_{u3} &= \sqrt{\frac{2}{b_m \lambda_{\min}[\boldsymbol{\Gamma}^{-1}] \lambda_{\min}[\mathbf{P}]} \max \left\{ \frac{1}{\underline{\alpha}^3}, \frac{1}{\rho_{\hat{e}}} \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

□

証明： $a(t)\tilde{f}(u) > 0$ のとき， $\tilde{f}(u) \neq 0$ であり， $|f(u)| = \sigma$ ， $|u(t)| > \sigma$ ， $a(t)f(u) = -|a(t)|\sigma < 0$ の関係が成り立つ．この事実より，任意の定数 $1 \geq \beta > 0$ に対し，つぎの関係が得られる．

$$\begin{aligned} a(t)\tilde{f}(u) &= -\delta_{af}(t)|a(t)\tilde{f}(u)| + (1 - \delta_{af}(t))a(t)\tilde{f}(u) \\ &\leq -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)|\sigma - (1 - \delta_{af}(t))a(t) \left\{ (\boldsymbol{\theta}(t) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t))^\top \boldsymbol{\omega}(t) + (\ell(t) - \tilde{\ell}(t)) \right\} \\ &\leq -(1 - \delta_{af}(t))|a(t)| \left(\sigma - |\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\omega}(t)| - |\ell(t)| - \beta |\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t)| - \beta |\tilde{\ell}(t)| \right) \\ &\quad + (1 - \beta)(1 - \delta_{af}(t))a(t) \left\{ \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + \tilde{\ell}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで， $(1 - \delta_{af}(t)) \leq 1$ および

$$|\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\omega}(t)| + |\ell(t)| \leq \rho_{u1}V(t)^{\frac{1}{2}} + \bar{\rho}_{M1} \quad (3.19)$$

$$|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t)| + |\tilde{\ell}(t)| \leq \rho_{u2}V(t)^{\frac{1}{2}} + \rho_{u3}V(t) \quad (3.20)$$

の関係が満足されることより（付録 E 参照），式 (3.16) が導出される． ■

このとき，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ を $\tilde{q}(t) = q_d(t) - \hat{q}(t) = \tilde{\theta}(t)^\top \omega(t) + \tilde{\ell}(t)$ と定義すると，つぎの定理が成り立つ．

[定理 3.1] システムの初期値に関し，

$$\left. \begin{aligned} \rho_v^2 &\geq V(0) \\ &= \rho_e \mathbf{x}_e(0)^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) + b_m \tilde{\theta}(0)^\top \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(0) + \rho_{v2} V_2(0) \\ \rho_v &= \frac{1}{2\beta\rho_{u3}} \left(-(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) + \sqrt{(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})^2 + 4(\sigma - \bar{\rho}_{M1})\beta\rho_{u3}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

が満足されているものとする．このとき，適応コントローラ式 (3.10), 式 (3.11) を用いた閉ループ系は安定となり，誤差信号 $x_e(t)$, $\tilde{x}_e(t)$, $\hat{x}_e(t)$, $z(t)$, $\tilde{\ell}(t)$, $\tilde{q}(t)$ は零に収束する．さらに， α 以外の設計パラメータを固定したとき，

$$\tilde{q}(t)^2 \leq \exp(-\alpha\bar{\rho}_{q1}t) \tilde{q}(0)^2 + \alpha^{-1}\bar{\rho}_{q2} \quad (3.22)$$

を満足する α に無関係に定まる正定値 $\bar{\rho}_{qi}$, $i = 1, 2$ が存在する． \square

証明： まず最初に閉ループ系の安定性，ならびに， $x_e(t)$, $\tilde{x}_e(t)$, $\hat{x}_e(t)$, $z(t)$, $\tilde{\ell}(t)$ が零に収束することを示す．式 (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) より，つぎの追従誤差方程式を得る．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_e(t) &= -\alpha^2 \tilde{x}_e(t) + \mathbf{A}_e \tilde{x}_e(t) - b_m \mathbf{b} \tilde{q}(t) + b_m \mathbf{b} \tilde{f}(u), \quad \tilde{f}(u) = f(u) - u(t) \\ \dot{\tilde{\ell}}(t) &= -\delta_z \tilde{\ell}(t) + \mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top \mathbf{x}_e(t) + \mathbf{c}_z^\top \bar{\mathbf{A}}_z z(t) + \frac{1}{\rho_\ell} \alpha^3 g(t) \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

このとき，式 (3.14) で定義される $V(t)$ の時間微分は次式を満足する．

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) - \frac{\alpha^3 \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \tilde{x}_e(t)^\top \tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_e \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \\ &\quad - \frac{\rho_z \lambda_{\min}[\mathbf{Q}_z]}{2} z(t)^\top z(t) - b_m \delta_z \rho_\ell \tilde{\ell}(t)^2 \\ &\quad + 2b_m \alpha^3 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \tilde{f}(u) + 2b_m (g(t) - 1) \alpha^3 \tilde{\theta}(t)^\top \omega(t) \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \\ &\quad - 2\sqrt{b_m} \left\| \Gamma^{-\frac{1}{2}} \right\| \frac{\rho_\phi}{\varepsilon} \exp(-\delta_\phi t) (\rho_{v2} - V^{\frac{1}{2}}(t)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで，補題 3.1 の関係を用いると

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) - \frac{\alpha^3 \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \tilde{x}_e(t)^\top \tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_e \lambda_{\min}[\mathbf{Q}]}{2} \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) \\ &\quad - \frac{\rho_z \lambda_{\min}[\mathbf{Q}_z]}{2} z(t)^\top z(t) - b_m \delta_z \rho_\ell \tilde{\ell}(t)^2 \\ &\quad - 2b_m \alpha^3 (1 - \delta_{ef}(t)) |\tilde{x}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b}| \left(\sigma - \bar{\rho}_{M1} - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3} V(t) \right) \\ &\quad - 2\sqrt{b_m} \left\| \Gamma^{-\frac{1}{2}} \right\| \frac{\rho_\phi}{\varepsilon} \exp(-\delta_\phi t) (\rho_{v2} - V^{\frac{1}{2}}(t)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

が得られる．このとき，方程式

$$\rho_{v2}^2 - V(0) = \rho_{v2}^2 - V_1(0) - \rho_{v2}V_2(0) = 0 \quad (3.26)$$

の ρ_{v2} に関する根が

$$\left(V_2(0) \pm \sqrt{V_2(0)^2 + 4V_1(0)} \right) / 2 \quad (3.27)$$

となるので，つぎの不等式

$$\rho_{v2} - V^{\frac{1}{2}}(t) \geq 0 \quad (3.28)$$

が $t = 0$ において満足される．さらに，方程式

$$\beta\rho_{u3}V(0) + (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(0)^{\frac{1}{2}} - (\sigma - \bar{\rho}_{M1}) = 0 \quad (3.29)$$

の $V(0)^{\frac{1}{2}}$ に関する根が

$$\frac{1}{2\beta\rho_{u3}} \left\{ -(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2}) \pm \sqrt{(\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})^2 + 4(\sigma - \bar{\rho}_{M1})\beta\rho_{u3}} \right\} \quad (3.30)$$

となることから，式 (3.21) の関係が満足される場合，つぎの不等式

$$(\sigma - \bar{\rho}_{M1}) - (\rho_{u1} + \beta\rho_{u2})V(t)^{\frac{1}{2}} - \beta\rho_{u3}V(t) \geq 0 \quad (3.31)$$

が $t = 0$ において満足される．式 (3.28), 式 (3.31) の関係を用いることにより，次の関係

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha^5 \tilde{x}_e(t)^\top P \tilde{x}_e(t) - \frac{\rho_e \lambda_{\min}[Q]}{2} \hat{x}_e(t)^\top \hat{x}_e(t) - \frac{\rho_z \lambda_{\min}[Q_z]}{2} z(t)^\top z(t) - b_m \delta_z \rho_\ell \tilde{\ell}(t)^2 \quad (3.32)$$

が満足されることを示すことができる．Lasalle-Yoshizawa theorem[22] に従えば，式 (3.32) より， $\tilde{x}_e(t)$, $\hat{x}_e(t)$, $z(t)$, $\tilde{\ell}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$, $\hat{\theta}(t) \in \mathcal{L}^\infty$ および信号 $\tilde{x}_e(t)$, $\hat{x}_e(t)$, $z(t)$, $\tilde{\ell}(t)$ の零への収束性が示される．これより， $x_e(t)$ の零への収束性も示される．さらに，この事実より， $\omega(t)$, $u(t) \in \mathcal{L}^\infty$ が示される．したがって，以上に示した信号の有界性より，すべての内部信号が有界となり，閉ループ系の安定性が示される．

つぎに， $\tilde{q}(t)$ が零に収束することを示す． $\dot{x}_e(t)$ が零に収束することが示されれば，式 (3.23) より， $-\tilde{q}(t) + \tilde{f}(u)$ の零への収束性を示すことができる．ここで，追従誤差 $x_e(t)$ は零に収束することから， $q(t)^2$ は領域 $q(t)^2 < \sigma^2$ に収束し， $\tilde{f}(u)$ も零に収束する．これより， $\dot{x}_e(t)$ が零に収束すれば， $\tilde{q}(t)$ も零に収束することがわかる．以上の事実より，以下で

$\dot{\tilde{x}}_e(t)$ の零への収束性を示す．上述の信号の有界性より $\dot{\omega}(t) \in \mathcal{L}^\infty$ がわかり， $\tilde{x}_e(t) \in \mathcal{L}^\infty$ なることを簡単に確かめることができる．このこと，ならびに $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\tilde{x}}_e(\tau) d\tau = -\tilde{x}_e(0)$ の関係を用いれば，Barbalat's Lemma[23] より， $\dot{\tilde{x}}_e(t)$ の零への収束性が保証される．

最後に，式 (3.22) が満足されることを示す．式 (3.14) より， $V(0)$ は α と無関係に有界となることがわかる．閉ループ系の全信号が有界であることより， $\|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\theta$ ， $\|\omega(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_\omega$ ， $\|\dot{\omega}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{\dot{\omega}}$ ， $\|\tilde{\ell}(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{\tilde{\ell}}$ ， $|u(t)|^2 \leq \bar{\rho}_u$ の関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_\bullet$ が存在する．この事実，ならびに $\tilde{x}_e(0) = \mathbf{0}$ より，正定値関数 $V_{e1}(t) = \tilde{x}(t)_e^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t)$ および $V_{e2}(t) = \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\tilde{x}}_e(t)$ を解析することで，つぎの関係を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{ei}$ ， $i = 1, 2, 3$ が存在することがわかる（付録 F 参照）．

$$\|\tilde{x}_e(t)\|^2 \leq \alpha^{-4} \bar{\rho}_{e1} \quad (3.33)$$

$$\|\dot{\tilde{x}}_e(t)\|^2 \leq \bar{\rho}_{e2} \exp(-\alpha^2 t) + \alpha^{-2} \bar{\rho}_{e3} \quad (3.34)$$

以上の関係を用いて正定値関数 $V_q(t) = \tilde{q}(t)^2$ を解析することにより，誤差信号 $\tilde{q}(t)$ の収束性能を調べる． $\alpha^2 \tilde{x}_e(t) = -\dot{\tilde{x}}_e(t) + \mathbf{A}_e \tilde{x}_e(t) - b_m \mathbf{b} \tilde{q}(t) + b_m \mathbf{b} \tilde{f}(u)$ の関係を用いると， $V_q(t)$ の時間微分は次式で与えられる．

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_q(t) &= 2\tilde{q}(t) \left(\dot{\phi}(t) + \alpha^3 g(t) \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \tilde{x}_e(t) \omega^\top \Gamma \omega(t) + \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) + \dot{\tilde{\ell}}(t) \right) \\ &= -2\alpha g(t) b_m \mathbf{b}^\top \mathbf{P} b w_1(t) \left(\tilde{q}(t)^2 - \tilde{q}(t) \tilde{f}(u) \right) \\ &\quad - 2\tilde{q}(t) \alpha g(t) \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \dot{\tilde{x}}_e(t) w_1(t) + 2\tilde{q}(t) \alpha g(t) \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \mathbf{A}_e \tilde{x}_e(t) w_1(t) \\ &\quad + 2\tilde{q}(t) \mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top \tilde{x}_e(t) + 2\tilde{q}(t) w_2(t) \\ w_1(t) &= \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) + \frac{1}{\rho_\ell} \\ w_2(t) &= \dot{\phi}(t) + \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) - \delta_z \tilde{\ell}(t) + \mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top \tilde{x}_e(t) + \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

ここで，補題 2.1 の事実，および式 (3.31) よりつぎの関係が満足されることがわかる．

$$\tilde{q}(t) \tilde{f}(u) \leq (1 - \beta)(1 - \delta_{\tilde{q}f}) \tilde{q}(t)^2 \quad (3.36)$$

よって，閉ループ系の全信号の有界性，ならびに式 (3.33)，(3.34)，(3.36)， $1 \geq g(t) > 0$ ， $\|\omega(t)\|^2 = \omega(t)^\top \omega(t) \geq 1$ の関係より，次式を満足する α と無関係な正定値 $\bar{\rho}_{qi}$ ， $i = 3, 4, 5$ が存在することがわかる．

$$\dot{V}_q(t) \leq -\alpha \bar{\rho}_{q3} V_q(t) + \alpha \exp(-\alpha^2 t) \bar{\rho}_{q4} + \bar{\rho}_{q5} \quad (3.37)$$

以上より,式(3.37)から,式(3.22)の関係式を満足する正定値 $\bar{\rho}_{qi}$ が存在することがわかる. ■

定理 3.1 より, α 以外の設計パラメータが固定され, システムの初期値が式 (3.21) を満足するとき, α を大きくすることにより $\tilde{q}(t)$ が素早く小さな値に到達することが保証される. このとき, 制御入力式 (3.10) は理想入力 $u(t) = q_d(t)$ に素早く近づくことになる. したがって, 未知パラメータ推定器に起因する高周波振動現象が制御入力に発生しにくくなる.

つぎに, $\tilde{q}(t)$ が素早く零に収束する場合を考える. このとき, $x_e(t)$ が零に収束するので, 仮定 A3.7 より $|q(t)| \leq \sigma$, $t_1 \geq t$ となる時刻 $t_1 \geq 0$ が存在することがわかる. よって, $t \geq t_1$ において $x_e(t)$ は行列 A_e で指定される収束速度で零に収束する.

式 (3.21) より設計パラメータ β を小さくすることにより ρ_v は大きくなり,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_v = \frac{\sigma - \bar{\rho}_{M1}}{\rho_{u1}} \quad (3.38)$$

となることがわかる. この事実より, 制約条件

$$\rho_v^2 > \rho_2 \mathbf{x}_e(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_e(0) \quad (3.39)$$

が満足されるとき, 任意の $\tilde{\theta}(0)$ および $V_2(0)$ について, 式 (3.21) を満足する設計パラメータ $\varepsilon, \Gamma, \beta$ の値が存在することがわかる.

3.4 数値シミュレーションによる制御性能の検証

本節では, 前節で提案した適応コントローラの有効性を示すために行った数値シミュレーション結果を示す.

制御対象式 (3.1), 式 (3.2) の各パラメータをつぎのように与えた.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_p &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{x}_p(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \sigma = 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

このとき，相対次数は $n - m = 2$ となる．さらに，規範モデル式 (3.4) の各パラメータを

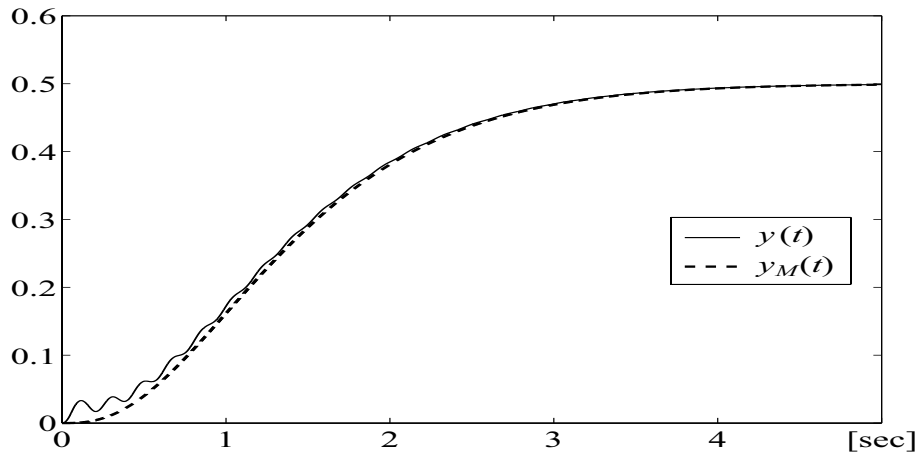
$$A_M(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8, B_M(s) = 8, r = 0.5 \quad (3.41)$$

とした．また， α および $\underline{\alpha}$ 以外の設計パラメータは次式で与えた．

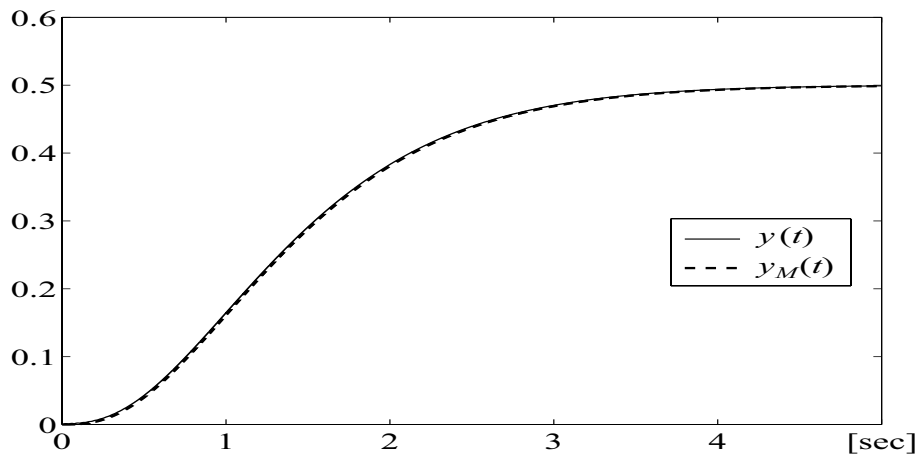
$$\left. \begin{aligned} A_e &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_z = 1 \\ \delta_z &= 0.8, \rho_\ell = 0.2, \varepsilon = 3, \Gamma = 50I \\ \beta &= 1 \times 10^{-4} \\ \hat{\theta}(0) &= \begin{bmatrix} -4/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

このとき， $\underline{\alpha} = 1$ とすると，条件式 (3.12) および式 (3.21) が満足されていることを確かめることができる．

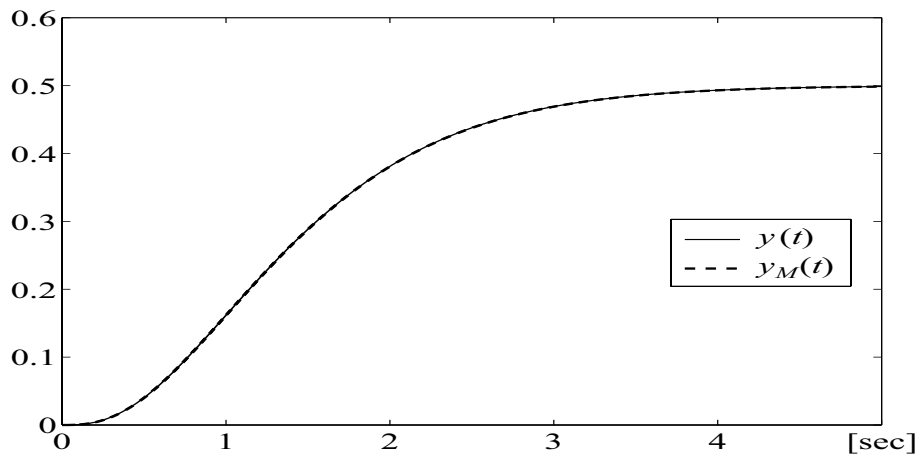
図 3.2 – 図 3.4 に設計パラメータ α を変化させたときの対象の閉ループ系の応答を示す．図 3.2 において，実線および点線は，それぞれ出力 $y(t)$ および規範モデル出力 $y_M(t)$ の応答を示したものである．また，図 3.3 において，点線は，入力の制限値を示したものである．図 3.3 において，制御入力の初期値が $u(0) = 4$ となるため，初期時刻において入力飽和が発生していることが確かめられる．図 3.2 より，出力 $y(t)$ の規範モデル出力 $y_M(t)$ への追従が達成できていることがわかる． $\alpha = 1$ の場合，図 3.4(a) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ に未知パラメータの推定に起因した高周波振動が発生していることがわかる．同様に，図 3.3(a) より，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生し， $0 \sim 0.4$ [sec] 付近で入力飽和が発生していることがわかる．これによって，図 3.2(a) に示すように，出力 $y(t)$ にも振動が発生していることがわかる． $\alpha = 3$ の場合，図 3.4(b) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の振動の周期は図 3.2(a) に比べ速くなっていることがわかる．しかし，その振幅の減衰は速くなり， 2 [sec] 付近で $\tilde{q}(t)$ はほぼ零となっていることがわかる．これより，図 3.3(b) において，制御入力 $u(t)$ の高周波振動も図 3.3(a) に比べ減衰が速くなっており，入力飽和が発生している区間も短くなっていることがわかる．また，図 3.2(b) より，出力 $y(t)$ はほぼ規範モデル出力 $y_M(t)$ に追従し，振動も確認できなくなっていることがわかる． $\alpha = 200$ の場合，図 3.4(c) より，入力推定誤差 $\tilde{q}(t)$ は瞬時にほぼ零となっていることがわかる．よって，制御入力 $u(t)$ が，理想入力信号 $u_d(t)$ に素早く近づいていることがわかる．このことより，図 3.3(c) において，制御入力 $u(t)$ にも高周波振動が発生しなくなり，初期時刻において発生している入力



(a) $\alpha = 1$

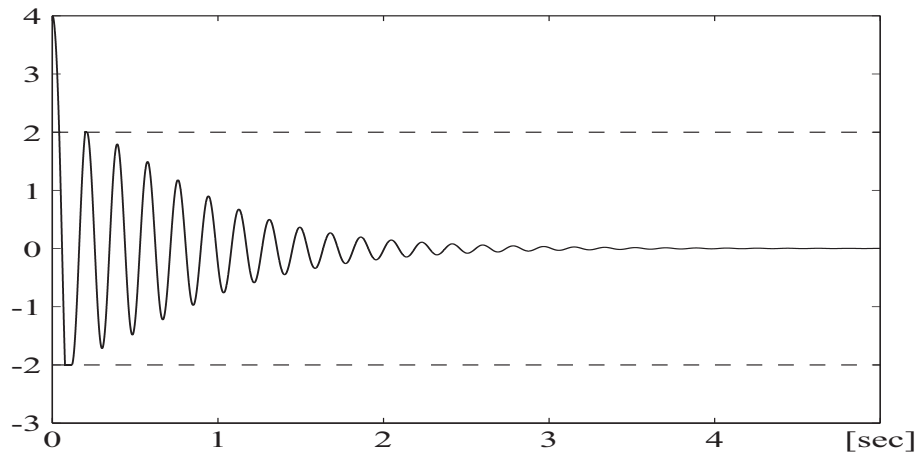


(b) $\alpha = 3$

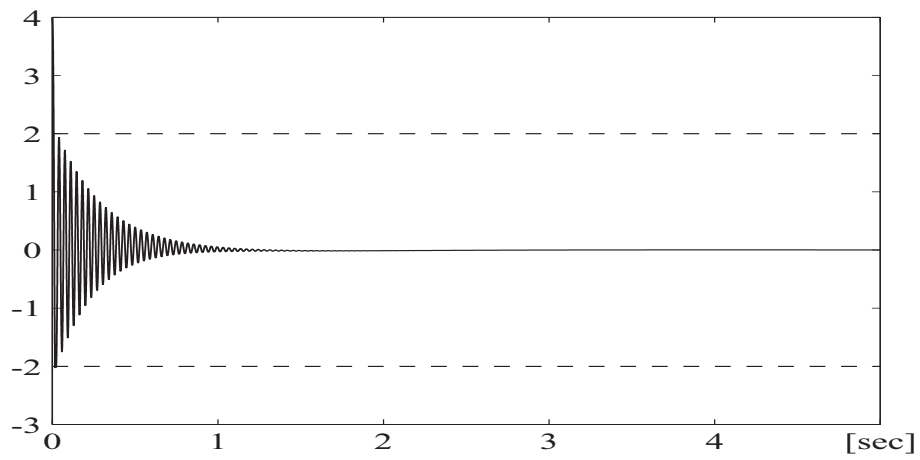


(c) $\alpha = 200$

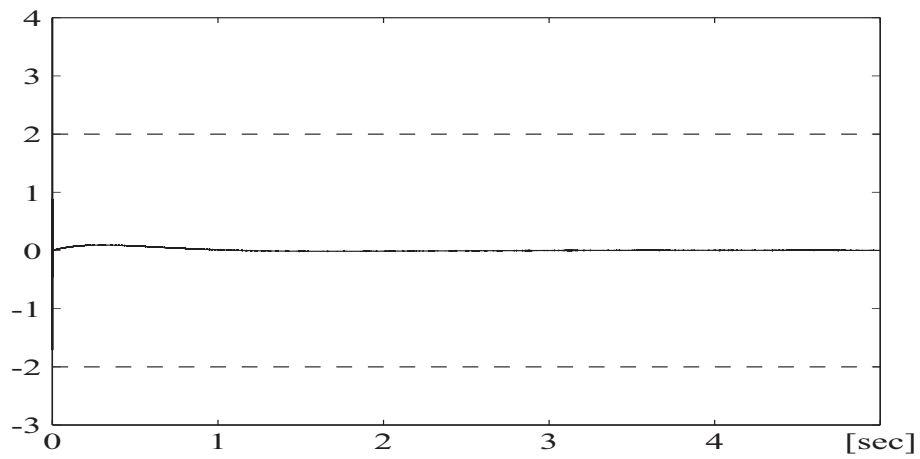
Fig. 3.2 Responses of the output $y(t)$ (and the reference model output $y_M(t)$) in the closed loop system the using proposed controller for $\alpha = 1, 3, 200$.



(a) $\alpha = 1$

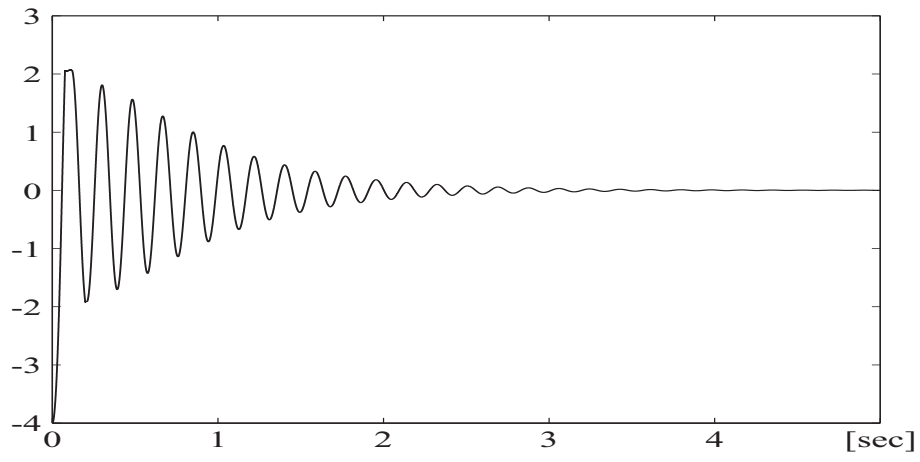


(b) $\alpha = 3$

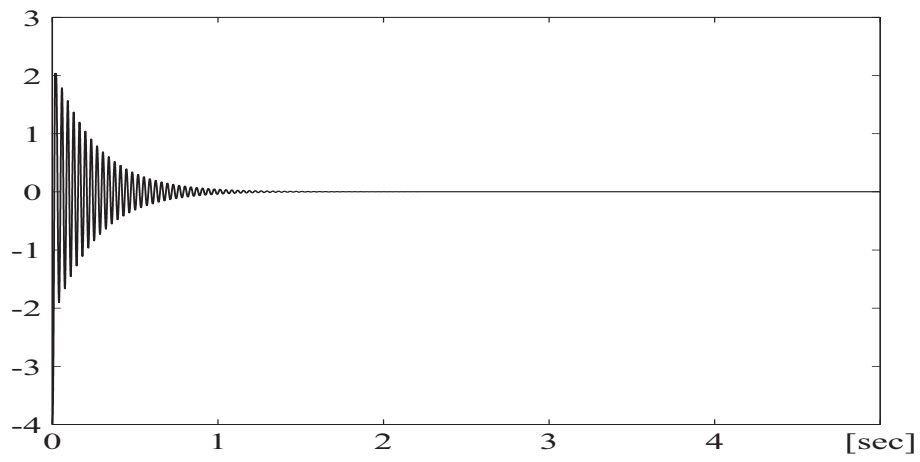


(c) $\alpha = 200$

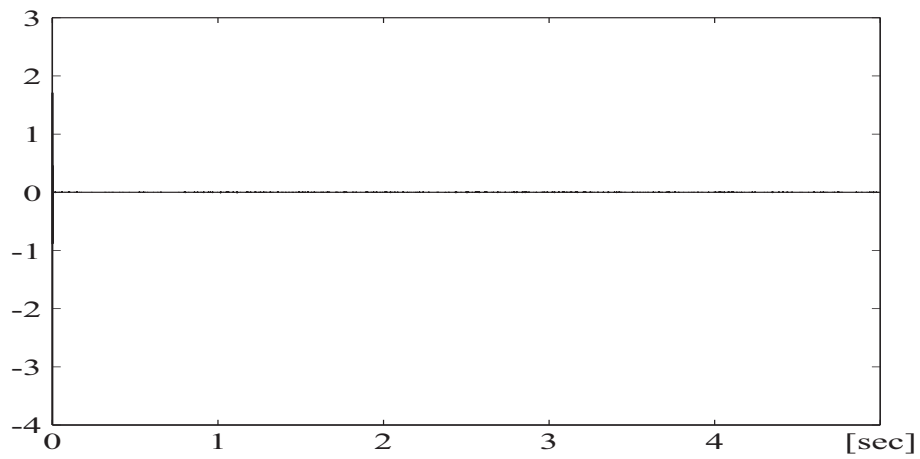
Fig. 3.3 Responses of the control input $u(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $\alpha = 1, 3, 200$.



(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 3$



(c) $\alpha = 200$

Fig. 3.4 Responses of the estimated input error $\tilde{q}(t)$ in the closed loop system using the proposed controller for $\alpha = 1, 3, 200$.

飽和が瞬時に解消されていることがわかる。これらの事実より，図 3.2(c) に示す出力 $y(t)$ の応答が，図 3.2(b) と同様に，規範モデル $y_M(t)$ に追従し，追従誤差 $y_e(t)$ がほぼ零に維持されていることがわかる。以上の結果より，設計パラメータ α の値を大きくする設定することによって，式 (3.22) に示されるように，推定誤差 $\tilde{q}(t)$ の零への素早い収束が実現され，高周波振動が発生しにくくなることが確認できる。さらに，入力飽和も瞬時に発生しなくなり，追従誤差もほぼ零に維持されることが確認できる。

このシミュレーション結果より，入力飽和が発生するような状況においても，設計パラメータ α の値を大きく設定するだけで，制御性能が改善できていることがわかる。

3.5 おわりに

本章では，出力の相対次数までの微分信号が観測可能な場合において，入力飽和が存在する 1 入出力線形時不変系に対する適応制御手法を提案した。提案手法は，前章で提案した適応コントローラと同等の制御性能をもつ。すなわち，ある初期値集合に対する制約が満足される場合に，以下の特徴をもつことが理論的に保証される。

- (1) 制御対象の安定性にかかわらず，追従誤差の漸近安定性が保証される。
- (2) ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，未知パラメータ推定器に起因する高周波振動現象が発生しにくくなる。
- (3) 追従誤差の初期値が零の場合，初期時刻において入力飽和が発生する場合でも，この飽和現象は瞬時に発生しなくなり，出力追従誤差が指定された速度で零に収束する。

さらに，これらの事実を数値シミュレーションを用いて検証し，その有効性を確認した。

第4章 結論

4.1 結論

本論文では，入力飽和を持つ1入出力線形時不変系に対する適応コントローラの設計法を提案した．提案手法では，従来の入力飽和を持つシステムに対する適応コントローラでは解決できていなかった，(1) 制御対象の安定性に依らない追従誤差の漸近安定性の保証，(2) 制御性能の改善，が達成できることを理論的に示した．以下，各章において得られた結果についてその要約を示す．

第2章では，全状態が利用可能な場合に対する適応コントローラを提案した．まず，入力飽和がない場合において，制御性能が簡単に改善できる適応コントローラの設計法を示した．ここでは，ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，制御入力に未知パラメータ推定器に起因する振動現象が発生しにくくなり，かつ追従誤差が指定した収束速度で零に収束することを理論的に示した．つぎに，上記の適応コントローラを基に，入力飽和を考慮した適応コントローラを提案した．そして，ある初期値集合に対する制約が満足される場合，提案する適応コントローラが以下に示す特性をもつことを理論的に示した．

- (1) 制御対象の安定性にかかわらず，追従誤差の漸近安定性が保証される．
- (2) ただ一つの設計パラメータを設定するだけで，未知パラメータ推定器に起因する高周波振動現象が発生しにくくなる．
- (3) 追従誤差の初期値が零の場合，初期時刻において入力飽和が発生する場合でも，入力飽和は瞬時に発生しなくなり，出力追従誤差が指定された速度で零に収束する．

さらに，これらの事実を，数値シミュレーションを用いて確認し，提案する適応コントローラの有効性を示した．

第3章では，出力の相対次数までの微分信号が利用可能な場合に対する適応コントローラを提案した．これによって，第2章で提案した手法と比べ，適応コントローラを構成するために必要となる状態の次元が緩和される．出力の相対次数までの微分信号を用いて適応コントローラを構成するために，まず出力の相対次数までの微分信号からなる状態を定義し，この状態を用いた出力追従誤差方程式の状態空間表現を導出した．つぎに，導出された出力追従誤差方程式に基づき，入力飽和を考慮した適応コントローラを提案した．

そして、提案する適応コントローラが、第2章で提案した適応コントローラと同等の制御性能を持つことを理論的に示した。さらに、この事実を数値シミュレーションを用いて確認し、提案する適応コントローラの有効性を示した。

4.2 今後の課題

本論文で提案する適応コントローラでは、状態および未知パラメータの初期値に関してある制約条件を設けている。これは、出力追従誤差の漸近安定性および特定の制御性能を保証するために導出した十分条件であり、保守的なものとなっている。そのため、現状では、所望の制御性能が理論的に保証できる制御対象のクラスが限定的なものとなっている。今後、実システムへの応用を考える上では、この条件の緩和が必要である。

参考文献

- [1] E. G. Gilbert, “Linear control systems with pointwise-in-time constraints: What do we do about them?,” in *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, p. 2565, 1992.
- [2] D. Bernstein and A. Michel, “A chronological bibliography on saturating actuators,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 604–613, 1995.
- [3] K. Åström and B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: Theory and design*, 2nd edition, Prentice Hall; 1990.
- [4] 須田 信英ら, PID 制御, 朝倉書店; 1992.
- [5] J. C. Doyle, R. S. Smith and D. F. Enns, “Control of plants with input saturation nonlinearities,” in *Proceedings of the 1987 American Control Conference*, pp. 1034–1039, 1987.
- [6] R. Hanus, M. Kinnart and J. -L. Henrotte, “Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method,” *Automatica*, vol. 23, no. 6, pp. 729–739, 1987.
- [7] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari and C. N. Nett, “A unified framework for the study of anti-windup designs,” *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1869–1883, 1994.
- [8] Y. Peng, D. Vrancic and R. Hanus, “Anti-windup, bumpless, and conditioned transfer technique for PID controllers,” *IEEE Control Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 48–57, 1996.
- [9] C. Edwards and I. Postlethwaite, “An anti-windup scheme with closed-loop stability considerations,” *Automatica*, vol. 35, no. 4, pp. 761–765, 1999.
- [10] S. Galeani, A. R. Teel and L. Zaccarian, “Constructive nonlinear anti-windup design for exponentially unstable linear plants,” *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 5, pp. 357–365, 2007.
- [11] P. -O. Gutman and P. Hagander, “A new design of constrained controllers for linear systems ,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, no. 1, pp. 22–33, 1985.
- [12] G. Bitsoris and M. Vassilaki, “Constrained regulation of linear systems,” *Automatica*, vol. 31, no. 2, pp. 223–227, 1995.
- [13] A. Venzaouia and C. Burgat, “The regulator problem for a class of linear systems with constrained control,” *Systems & Control Letters*, vol. 10, pp. 357–363, 1998.
- [14] P. Kapasouris, M. Athans and G. Stein, “Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators,” in *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 469–479, 1988.
- [15] P. Kapasouris, M. Athans and G. Stein, “Design of feedback control systems for unstable plants with saturating actuators,” in *Proceedings of the IFAC Symposium, Nonlinear control system design*, pp. 302–307, 1989.

- [16] P. Kapasouris and M. Athans, "Control systems with rate and magnitude saturation for neutrally stable open loop systems," in *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 469–479, 1990.
- [17] E. G. Bilbert and K. T. Tan, "Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output abmissible sets," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 9, pp. 1008–1020, 1991.
- [18] I. D. Landau, "Adaptive control -The model rerefence approach," Marcel Dekker; 1980.
- [19] A.S. Morse, "Global Stability of Parameter Adaptive Control Systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 25, pp. 433-439, 1980.
- [20] K.S. Narendra, Y.H. Lin and L.S. Valavani, "Stable adaptive controller design – Part II: Proof of stability," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 25, pp. 440–448, 1980.
- [21] K. S. Narendra, et al., Adaptive and learning system, Plenum Press, New York; 1986.
- [22] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, Nonlinear and adaptive control design, Wiley, New York; 1995.
- [23] P. A. Ioannou and J. Sun, Robust adaptive control, Upper Saddle River, NJ; 1996.
- [24] 鈴木 隆 , アダプティブコントロール , コロナ社; 2001.
- [25] R. V. Monopoli, "Adaptive control for systems with hard saturation," in *Proceedings of the 14th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 841–842, 1975.
- [26] G. Feng, C. Zhang, and M. Palaniswami, "Stability analysis of input constrained continuous time indirect adaptive control," *Systems and Control Letters*, vol. 17, no. 3, pp. 209–215, 1991.
- [27] H. Wang and J. Sun, "Modified model reference adaptive control with saturated inputs," in *Proceedings of the 31th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3255–3256, 1992.
- [28] C. Zhang and R. J. Evans, "Continuous direct adaptive control with saturation input constraint," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 8, pp. 1718–1722, 1994.
- [29] S. P. Kárason and A. M. Annaswamy, "Adaptive control in the presence of input constraints," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 11, pp. 2325–2330, 1994.
- [30] A. M. Annaswamy and J. -E. Wong, "Adaptive control in the presence of saturation non-linearity," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 11, no. 1, pp. 3–19, 1997.
- [31] M. De la Sen, "Adaptive stabilization of nonnecessarily inversely stable first-Order continuous-Time systems under saturated input", *Nonlinear Dynamics*, vol. 30, pp. 193–204, 2002.
- [32] B.-J. Yang, A. J. Calise and J. I. Craig, "Adaptive output feedback control with input saturation," in *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pp. 1572–1577, 2003.

- [33] E. Lavretsky and N. Hovakimyan, “Positive μ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints,” in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 2545–2550, 2004.
- [34] M. Kanamori and M. Tomizuka, “Model reference adaptive control of linear systems with input saturation,” *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control and Automation*, pp. 1318–1323, 2004.
- [35] M. De la Sen, “Stabilization of continuous-time adaptive control systems with possible input saturation through a controllable modified estimation model,” *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 9, no. 1, pp. 3–37, 2004.
- [36] M. D. Tandale and J. Valasek, “Adaptive dynamic inversion control of a linear scalar plant with constrained control inputs,” in *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, pp. 2064–2069, 2005.
- [37] E. Lavretsky and N. Hovakimyan, “Positive μ -modification for stable adaptation in dynamic inversion based adaptive control with input saturation,” in *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, pp. 3373–3378, 2005.
- [38] Y.-S. Zhong, “Globally stable adaptive system design for minimum phase SISO plants,” *Automatica*, vol. 41, no. 9, pp. 1539–1547, 2005.
- [39] E. Lavretsky and N. Hovakimyan, “Stable adaptation in the presence of input constraints,” *Systems & Control Letters*, vol. 56, no. 11–12, pp. 722–729, 2007.
- [40] D. E. Miller and E. J. Davison, “An adaptive tracking problem with a control input constraint,” *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 877–887, 1993.
- [41] N. E. Kahveci and P. A. Ioannou, “An indirect adaptive control design with anti-windup compensation: stability analysis,” in *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1294–1299, 2007.
- [42] A. Leonessa, W. M. Haddad and T. Hayakawa, “Adaptive tracking for nonlinear systems with control constraints,” in *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pp. 1292–1297, 2001.
- [43] H. M. Do, T. Basar and J. Y. Choi, “An anti-windup design for single input adaptive control systems in strict feedback form,” in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 2551–2556, 2004.
- [44] J. Farrell, M. Polycarpou and M. Sharma, “On-line approximation based control of uncertain nonlinear systems with magnitude, rate and bandwidth constraints,” in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 2557–2562, 2004.
- [45] B.-J. Yang, A. J. Calise and N. Hovakimyan, “Augmenting adaptive output feedback control of uncertain nonlinear systems with actuator nonlinearities,” in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pp. 4675–4680, 2004.
- [46] K. M. Madani and M. Eslami, “Robust adaptive control for a class of nonlinear systems with uncertainties and input constraints,” in *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, pp. 3725–3730, 2005.

- [47] A. Leonessa, W. M. Haddad, T. Hayakawa and Y. Morel, "Adaptive control for nonlinear uncertain systems with actuator amplitude and rate saturation constraints," *International Journal of Adaptive Control Signal Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 73–96, 2009.
- [48] E. Lavretsky and N. Hovakimyan, "Stable adaptation in the presence of actuator constraints with flight control applications," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 30, no. 2, pp. 337–345, 2007.
- [49] N. E. Kahveci, P. A. Ioannou and M. D. Mirmirani, "Adaptive LQ control with anti-windup augmentation to optimize UAV performance in autonomous soaring applications," *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 691–707, 2008.
- [50] L. Wang and D.R. Mudgett, "Improvement of Transient Response in Adaptive Control Using Modified High Order Tuning," in *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, pp. 282-286, 1993.
- [51] J. Sun, "A Modified Model reference Adaptive Control Scheme for Improved Transient Performance," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 38, no. 8, pp. 1255-1259, 1993.
- [52] A. Datta and M.-T. Ho, "On Modifying Model Reference Adaptive Control Schemes for Performance Improvement," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1977–1980, 1994.
- [53] A. Datta and P.A. Ioannou, "Performance analysis and improvement in model reference adaptive control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 12, pp. 2370-2387, 1994.
- [54] I.N.M. Papadakis and S.C.A. Thomopoulos, "Improved Performance Model Reference Adaptive Control with Parameter Mismatch Compensations," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 41, no. 2, pp. 224-228, 1996.
- [55] S. Masuda and A. Inoue, "Transient Performance Improvement in Dynamic Certainty Equivalent Adaptive Controllers by Including a Fixed Compensator," in *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2998-3005, 1996.
- [56] M. Oya, T. Kobayashi and S. Sagara, "Model Reference Adaptive Control with Output Error Feedback," in *Preprints of 11th IAFC Symposium on System Identification*, pp. 333-338 1997.
- [57] R. Ortega, "On Morse's New Adaptive Controller: Parameter Convergence and Transient Performance," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 38, no. 8, pp. 1191-1202 1993.
- [58] F. Ikhouane, A. Rabeh and F. Giri, "Transient performance analysis in robust nonlinear adaptive control," *Systems & Control Letters*, vol. 31, no. 1, pp. 21-31, 1997.
- [59] Y. Zhang, "Stability and Performance of a New Linear Adaptive Controller," *Proceeding of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3028-3033, 1997.
- [60] K.S. Narendra and J. Balakrishnan, "Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1861-1866, 1994.

- [61] J. Kalkkuhl, T. A. Johansen and J. Ludemann, “Improved Transient Performance of Nonlinear Adaptive Backstepping Using Estimator Resetting Based Multiple Models,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 47, no. 1, pp. 136-140, 2002.
- [62] Z. Li. and M. Krstic, “Optimal Design of Adaptive Tracking Controllers for Non-linear Systems,” *Automatica*, vol. 33, no. 8, pp. 1459-1437, 1997.
- [63] Y. Miyasato, “Redesign of Adaptive control Systems Based on the Notion of Optimality,” *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3315-3320, 1999.
- [64] 大屋 勝敬, 小林 敏弘, スムーズな入力信号を生成するモデル規範型適応制御手法, 計測自動制御学会論文集, vol. 42, no. 7, pp. 774-749, 2006.
- [65] 高木 夏樹, 大屋 勝敬, 小林 敏弘, “入力飽和が存在するシステムに対してスムーズな入力信号を生成する適応制御手法,” 第9回 SICE 適応学習制御シンポジウム, pp. 21-26, 2009.
- [66] Natsuki Takagi ,Qiang Wang, Masahiro Oya, and Toshihiro Kobayashi, “Adaptive Control Scheme Achieving Smooth Control Input in the Presence of Input Saturation,” *2009 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, pp. 238-243, 2009.
- [67] 長江 政志, 高木 夏樹, 奥村 克博, 大屋 勝敬, “入力飽和を有するシステムの適応制御 - 相対次数と同じ数の出力微分値が利用可能な場合-,” 第52回自動制御連合講演会, 2009.
- [68] Natsuki Takagi, Masahiro Oya, Qiang Wang and Toshihiro Kobayashi, “Adaptive Control of Systems with Input Saturation - A Scheme Using Output Derivatives of Order up to Relative Degree-,” *2009 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pp. 415-420, 2009.

付録 A 式(2.19)および式(2.20)の導出

まず, 式(2.19)を導出する. 正定値関数 $V_{e1}(t) = \tilde{x}_e(t)^\top P \tilde{x}_e(t)$ を定義する. このとき, 式(2.13)を用いて $V_{e1}(t)$ の時間微分を解析することにより, 次式を得る.

$$\dot{V}_{e1}(t) \leq -\alpha^2 V_{e1}(t) + \alpha^{-2} \|P\| \|b_m \bar{b}\|^2 \tilde{q}(t)^2 \quad (\text{A.1})$$

これより, $\tilde{q}(t)^2$ が有界となることから, 式(2.19)の関係が導出される.

つぎに, 式(2.20)を導出する. 正定値関数 $V_{e2}(t) = \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P \dot{\tilde{x}}_e(t)$ を定義する. 式(2.13)の時間微分を用いて $V_{e2}(t)$ の時間微分を解析することにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e2}(t) = & -2\alpha^2 \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P \dot{\tilde{x}}_e(t) - \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top Q \dot{\tilde{x}}_e(t) \\ & - 2\alpha^3 b_m \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P \bar{b} \bar{b}^\top P \tilde{x}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) - 2b_m \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P \bar{b} \bar{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

このとき,

$$2\dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P z(t) \leq \frac{\alpha^2}{4} \dot{\tilde{x}}_e(t)^\top P \dot{\tilde{x}}_e(t) + \frac{4}{\alpha^2} z(t)^\top P z(t), \quad \forall z(t) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.3})$$

の関係が成り立つこと, および $\tilde{\theta}(t)$, $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$ の有界性を用いると,

$$\dot{V}_{e2}(t) \leq -\alpha^2 V_{e2}(t) + \alpha^4 \|\tilde{x}_e(t)\|^2 \bar{\rho}_{e4} + \alpha^{-2} \bar{\rho}_{e5} \quad (\text{A.4})$$

を得る. ここで, $\bar{\rho}_{ei}$, $i = 4, 5$ は, 設計パラメータ α と無関係に定まる正定数である. これより, 式(2.19)の関係を用いることで式(2.20)の関係が導出される.

付録 B 式(2.27)および式(2.28)の導出

つぎの関係

$$\left. \begin{aligned} |\theta^\top \omega(t)| & \leq |\theta_e^\top x_e(t)| + |\theta_M^\top \omega_M(t)| \\ & \leq \|\theta_e\| \|\tilde{x}_e(t)\| + \|\theta_M\| \|\dot{\tilde{x}}_e(t)\| + \bar{\rho}_{M1} \\ \|\theta_e\|^2 \|\tilde{x}_e(t)\|^2 & \leq \rho_{u1}^2 V(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

が満足されることより, 式(2.27)の関係が導出される.

また, つぎの関係

$$\left. \begin{aligned}
|\tilde{\theta}(t)^\top \omega(t)| &\leq |\tilde{\theta}_e(t)^\top \mathbf{x}_e(t)| + |\tilde{\theta}_M(t)^\top \omega_M(t)| \\
&\leq \|\tilde{\theta}(t)\| (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\| + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|) + \|\tilde{\theta}(t)\| \bar{\rho}_{M2} \\
\bar{\rho}_{M2}^2 \|\tilde{\theta}(t)\|^2 &\leq \rho_{u2}^2 V(t) \\
\|\tilde{\theta}(t)\|^2 (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\| + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|)^2 &\leq 2 \|\tilde{\theta}(t)\|^2 (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\|^2 + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|^2) \\
&\leq \rho_{u3}^2 V(t)^2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

が満足されることより，式 (2.28) の関係が導出される．

付録 C 式 (2.45) および式 (2.46) の導出

まず，式 (2.45) を導出する．正定値関数 $V_{e1}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t)$ を定義する．このとき，式 (2.6) を用いて $V_{e1}(t)$ の時間微分を解析することにより，次式を得る．

$$\dot{V}_{e1}(t) \leq -\alpha^2 V_{e1}(t) + 2\alpha^{-2} \|\mathbf{P}\| \|b_m \bar{\mathbf{b}}\|^2 (\tilde{q}(t)^2 + \tilde{f}(u)^2) \quad (\text{C.1})$$

これより， $\tilde{q}(t)^2$ および $u(t)^2$ が有界となることから，式 (2.45) の関係が導出される．

つぎに，式 (2.46) を導出する．正定値関数 $V_{e2}(t) = \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_e(t)$ を定義する．式 (2.6) の時間微分を用いて $V_{e2}(t)$ の時間微分を解析することにより，次式を得る．

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{e2}(t) &= -2\alpha^2 \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_e(t) - \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\
&\quad - 2\alpha^3 b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) - 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) \\
&\quad + 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{b}} \dot{\tilde{f}}(u)
\end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

このとき，

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\tilde{f}}(u) &= \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \dot{u}(t) \\
&= -\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \alpha^3 g(t) \bar{\mathbf{b}}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \omega(t)^\top \Gamma \omega(t) + \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \tilde{\theta}^\top \dot{\omega}(t) \\
\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} &= \begin{cases} 1 & \text{for } |u(t)| > \sigma \\ 0 & \text{for } |u(t)| \leq \sigma \end{cases}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{C.3})$$

$$2\dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{z}(t) \leq \frac{\alpha^2}{8} \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_e(t) + \frac{8}{\alpha^2} \mathbf{z}(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{z}(t), \quad \forall \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.4})$$

の関係が成り立つこと，および $\hat{\theta}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$, $\omega(t)$, $\hat{\omega}(t)$, $g(t)$ の有界性を用いると，

$$\dot{V}_{e2}(t) \leq -\alpha^2 V_{e2}(t) + \alpha^4 \|\tilde{x}_e(t)\|^2 \bar{\rho}_{e4} + \alpha^{-2} \bar{\rho}_{e5} \quad (\text{C.5})$$

を得る．ここで， $\bar{\rho}_{ei}$, $i = 4, 5$ は，設計パラメータ α と無関係に定まる正定数である．これより，式 (2.45) の関係を用いることで式 (2.46) の関係が導出される．

付録 D 式 (2.50) の導出

正定値関数 $V_e(t) = x_e(t)^\top P x_e(t)$ を定義する．補題 2.1 および式 (2.40) より， $V_e(t)$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(t) &= -x_e(t)^\top Q x_e(t) - 2b_m x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{q}(t) + 2b_m x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{f}(u) \\ &\leq -\lambda_{\min}[Q] x_e(t)^\top x_e(t) - 2b_m x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{q}(t) + 2b_m (1 - \beta) (1 - \delta_{x_e P b \tilde{f}}(t)) x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{q}(t) \\ &\leq -\lambda_{\min}[Q] x_e(t)^\top x_e(t) + 4b_m |x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{q}(t)| \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

となる．このとき，

$$4b_m |x_e(t)^\top P \bar{b} \tilde{q}(t)| \leq \frac{\lambda_{\min}[Q]}{2} x_e(t)^\top x_e(t) + \frac{8b_m^2}{\lambda_{\min}[Q]} \bar{b}^\top P^2 \bar{b} \tilde{q}(t)^2 \quad (\text{D.2})$$

の関係が成り立つことから，

$$\dot{V}_e(t) \leq -\frac{\lambda_{\min}[Q]}{2\lambda_{\max}[P]} V_e(t) + \frac{8b_m^2}{\lambda_{\min}[Q]} \bar{b}^\top P^2 \bar{b} \tilde{q}(t)^2 \quad (\text{D.3})$$

の関係が得られる．よって，式 (2.44) および式 (D.3) より， α を大きく設定することによって，追従誤差の上界 $\|x_e(t)\|^2$ は式 (2.50) の右辺に近づくことがわかる．

付録 E 式 (3.19) および式 (3.20) の導出

つぎの関係

$$\left. \begin{aligned} |\theta^\top \omega(t)| &\leq |\theta_e^\top x_e(t)| + |\theta_r r - \phi(t)| \\ &\leq \|\theta_e\| (\|\tilde{x}_e(t)\| + \|\hat{x}_e(t)\|) + \bar{\rho}_{M1} \\ \|\theta_e\|^2 (\|\tilde{x}_e(t)\| + \|\hat{x}_e(t)\|)^2 &\leq 2\|\theta_e\|^2 (\|\tilde{x}_e(t)\|^2 + \|\hat{x}_e(t)\|^2) \\ &\leq \max \left\{ \frac{2\|\theta_e\|^2}{\underline{\alpha}^3 \lambda_{\min}[P]}, \frac{2\|\theta_e\|^2}{\rho_e \lambda_{\min}[P]} \right\} V(t) \\ |\ell(t)|^2 &\leq \frac{\|c_z\|^2}{\rho_z \lambda_{\min}[P_z]} V(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.1})$$

が満足されることより，式 (3.19) の関係が導出される．

また，つぎの関係

$$\left. \begin{aligned}
 |\tilde{\theta}(t)^\top \omega(t)| &\leq |\tilde{\theta}_\phi(t)| |r| + \|\tilde{\theta}(t)_e\| \|\mathbf{x}_e(t)\| + |\tilde{\theta}_r(t)| \varepsilon \\
 &\leq \|\tilde{\theta}(t)\| (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\| + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|) + \|\tilde{\theta}(t)\| (|r| + \varepsilon) \\
 \|\tilde{\theta}(t)\|^2 &\leq \frac{1}{b_m \lambda_{\min}[\mathbf{\Gamma}^{-1}]} V(t) \\
 (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\| + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|)^2 &\leq 2 (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\|^2 + \|\hat{\mathbf{x}}_e(t)\|^2) \\
 &\leq \frac{2}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}]} \max \left\{ \frac{1}{\underline{\alpha}^3}, \frac{1}{\rho_e} \right\} V(t) \\
 |\tilde{\ell}(t)|^2 &\leq \frac{1}{b_m \rho_\ell} V(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.2})$$

が満足されることより，式 (3.20) の関係が導出される．

付録 F 式 (3.33) および式 (3.34) の導出

まず，式 (3.33) を導出する．正定値関数 $V_{e1}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t)$ を定義する．このとき，式 (3.23) 第 1 行目を用いて $V_{e1}(t)$ の時間微分を解析することにより，次式を得る．

$$\dot{V}_{e1}(t) \leq -\alpha^2 V_{e1}(t) + 2\alpha^{-2} \|\mathbf{P}\| \|b_m \mathbf{b}\|^2 (\tilde{q}(t)^2 + \tilde{f}(u)^2) \quad (\text{F.1})$$

これより， $\tilde{q}(t)^2$ および $u(t)^2$ が有界となることから，式 (3.33) の関係が導出される．

つぎに，式 (3.34) を導出する．正定値関数 $V_{e2}(t) = \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_e(t)$ を定義する．式 (3.23) を用いて $V_{e2}(t)$ の時間微分を解析することにより，次式を得る．

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{e2}(t) &= -2\alpha^2 \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}_e(t) - \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\
 &\quad + 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \dot{\phi}(t) - 2\alpha^3 b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \omega(t)^\top \mathbf{\Gamma} \omega(t) - 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \tilde{\theta}(t)^\top \dot{\omega}(t) \\
 &\quad + 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \delta_z \tilde{\ell}(t) - 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top (\tilde{\mathbf{x}}_e(t) + \hat{\mathbf{x}}_e(t)) - 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t) \\
 &\quad + 2b_m \dot{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{b} \tilde{f}(u)
 \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

このとき，

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\tilde{f}}(u) &= \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \dot{u}(t) \\
&= -\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \alpha^3 g(t) \mathbf{b}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_e(t) \boldsymbol{\omega}(t)^\top \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \hat{\boldsymbol{\theta}}^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \\
&\quad + \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} \left\{ -\delta_z \tilde{\ell}(t) + \mathbf{c}_z^\top \mathbf{h} \mathbf{c}_x^\top (\tilde{\mathbf{x}}_e(t) + \hat{\mathbf{x}}_e(t)) + \mathbf{c}_z^\top \mathbf{z}(t) \right\} \\
\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u} &= \begin{cases} 1 & \text{for } |u(t)| > \sigma \\ 0 & \text{for } |u(t)| \leq \sigma \end{cases}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{F.3})$$

$$2\hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{w}(t) \leq \frac{\alpha^2}{26} \hat{\mathbf{x}}_e(t)^\top \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}_e(t) + \frac{26}{\alpha^2} \mathbf{w}(t)^\top \mathbf{P} \mathbf{w}(t), \quad \forall \mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (\text{F.4})$$

の関係が成り立つこと，および閉ループ系の全信号の有界性を用いると，

$$\dot{V}_{e2}(t) \leq -\alpha^2 V_{e2}(t) + \alpha^4 \|\tilde{\mathbf{x}}_e(t)\|^2 \bar{\rho}_{e4} + \alpha^{-2} \bar{\rho}_{e5} \quad (\text{F.5})$$

を得る．ここで， $\bar{\rho}_{ei}$, $i = 4, 5$ は，設計パラメータ α と無関係に定まる正定数である．これより，式 (3.33) の関係を用いることで式 (3.34) の関係が導出される．