独立一様分布オークションについての考察

大　石　英　貴

1．はじめに

複数の買い手の中から1人を選んで品物を売るときに、オークション（競売）が用いられる。ここでは、オークションの種類の差によって何が異なり、何が同じなのかを確認したい。簡単な設定のもとで代数的に答えを導き出し、グラフで理解を深めることにする。Riley and Samuelson（1981）と Steiglitz（2007）の手法を参考に、解きやすさのために一様分布に限って説明する。

2．オークションと均衡

売り手が1人いて1つの品物を売ろうとしている。売り手の品物に対する評価を0とする。買い手は n 人いる。品物に対する評価 v は $[0,1]$ 上に独立に一様分布している。これらの仮定は、売り手の評価が正であってもそれ以上の評価を持つ買い手が必ず n 人いる場合に容易に一般化できる。

ここで考慮するオークションとは、買い手が同時に金額を入札し、最高金額を入札した買い手が勝って品物を得る仕組みである。各入札の組に対して誰がいくら払うかを決めるのが個別のオークションのルールとなる。通常は勝者のみが支払うが、より一般化した支払いを含めて考慮する。

評価 v の買い手が入札関数 $b(v)$ に従って入札する対称的ベイジアンナッシュ均衡を見つけよう。対称的とは入札戦略が評価 v のみで決定されることを言う。ベイジアンナッシュ均衡とは、各買い手が他の買い手の入札を所与として期待利得を最大化する入札を行う状態である。

$b(v)$ を厳密な増加関数としよう。このことで最も評価の高い買い手が落札できる。評価 v の買い手が勝つ確率は v^{n-1} となる。均衡において x を入札した買い手の期待支払い関数を $P(x)$ とする。

他の買い手が均衡入札関数に従っている時、評価 v の買い手が評価 x の買い手のように入札するとしよう。落札できる確率は、他の $n-1$ 人が x 以下の評価を持つ場合、すなわち x^{n-1} となる。そして評価 v の品物を入手できる。したがって期待利得は、

$$U(v,\ x) = vx^{n-1} - P(x)$$

となる。正直に評価 v を入札したときを

$$U(v) = v^n - P(v)$$

と表記する。

入札関数が対称的ベイジアンナッシュ均衡であるためには、期待利得 $U(v, x)$ が $x=v$ で最大になる必要がある。すなわち、

$$\frac{d}{dx} U(v,\ x)\Big|_{x=v} = 0$$

$$P'(v) = (n-1)\, v^{n-1}$$

が得られる。この条件は誘引両立条件とも呼ばれる。

3．効率的オークション

3.1　収入同値定理

誘引両立条件を満たすオークションは無数にある。買い手は期待利得 $U(v)$ が負になるオークションには参加しないものとしよう。これを参加条件と呼ぶ。

参加条件を満たすオークションも無数にあるが、この節では効率的なオークションを考える。効率的とは評価の高い側、すなわち買い手が品物を所有することである。確率 1 で効率的になるためには、すべての買い手の期待利得を非負にしなければならない。

ここでは特に、均衡での期待利得 $U(v)$ は厳密な増加関数と仮定し、評価 0 の買い手の期待利得を 0 とする。

$$U(0)=0$$

これは

$$P(0)=0$$

となる。この条件のもとで $P'(v)$ を 0 から v まで積分すると

$$P(v)=\frac{n-1}{n}v^n$$

となる。買い手の期待利得は、

$$U(v)=\frac{1}{n}v^n$$

となる。売り手の期待収入 R は $P(v)$ を v について平均し n 倍すればよいので、

$$\begin{aligned} R &= n\int_0^1 P(x)\,dx \\ &= \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

以上で得られた買い手の期待支払い $P(v)$ と期待利得 $U(v)$、売り手の期待収入 R は、オークションの細かいルールに依存しない。とくに売り手の期待収入 R が同一であることを収入同値定理と呼ぶ。最高入札者（最高評価者）が品物を得て、かつ最低評価者の期待利得を 0 とするすべてのオークションで、完全ベイジアン均衡の結果は、売り手と買い手のそれぞれで同値となる。なお、期待支払い $P(v)$ は同一だが、個々のオークションルール毎に個別の支払いルールは異なる。

ここで $n=1$ の場合を説明する。オークションは複数の売り手が競るので $n\geq 2$ が想定されているが、以上の結果は $n=1$ でも通用する。1 人の買い手が必ず勝って入手できるので、何も支払う必要はない。つまり、$P(v)=0$、$R=0$ となり、売り手に一切の交渉力のない場合となる。

期待収入と期待利得をグラフで見てみよう。図1で示したが、売り手の期待収入は買い手の数 n の増加関数である。競争が熾烈になれば収入も増え、1に漸近する。図2に示したが、買い手の期待利得は v の増加関数で n の減少関数となる。買い手が増えて競争が熾烈になると利得も減る。

3.2 入札関数

実際のオークションでは入札後の支払いルールが決まっている。以下でルールごとの入札関数 $b(v)$ を検討しよう。

第1価格オークションとは、勝った買い手が自分の入札額 $b(v)$ を支払うルールである。自分が最高になる確率は v^{n-1} なので、

$$P(v) = v^{n-1} b(v)$$

より

$$b(v) = \frac{n-1}{n} v$$

となる。

第2価格オークションとは、勝った買い手が2番めに高い入札額を支払うルールである。ここでは、評価 v の買い手が評価と同じ額を入札するのが支配戦略となることが知られている。すなわち入札関数が

$$b(v) = v$$

となる。これを証明しよう。当該の買い手以外の入札の最高額を x とする。まず $v<x$ のとき、x より大きい金額を入札して勝つと x を払うので利得は $v-x<0$ となるが、x 未満を入札すると負けて利得は0となる。ゆえに v は最適となる。次に $x<v$ のとき、x より小さな金額を入札して負けると利得は0だが、x より大きい金額を入札して勝つと x を払うので利得は $v-x>0$ となる。ゆえに v は最適となる。

全員支払いオークションとは、勝敗にかかわらず自分の入札額を必ず支払う

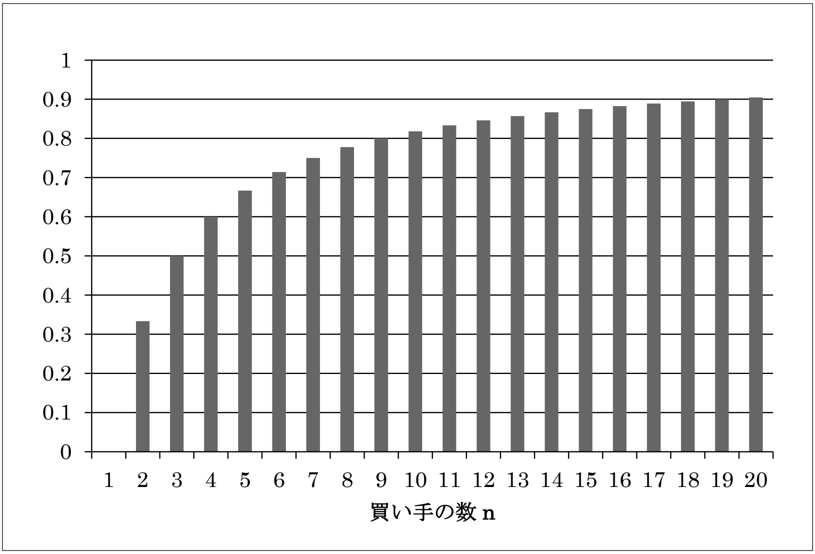

図１：売り手の期待収入

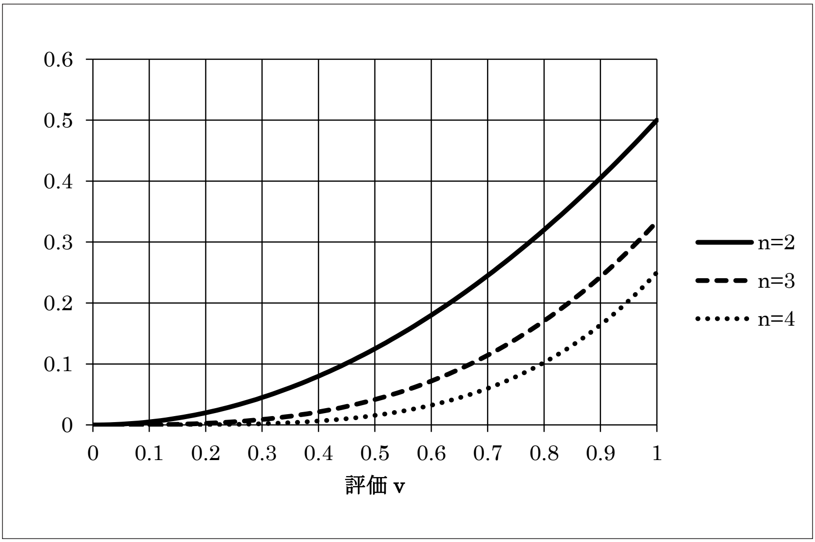

図２：買い手の期待利得

ルールである。確率 1 で $b(v)$ を払うので、

$$P(v)=b(v)$$

より

$$b(v)=\frac{n-1}{n}v^n$$

となる。

敗者支払いオークションとは、負けた買い手のみが自分の入札額 $b(v)$ を払うルールである。負ける確率は自分の評価が最高とならない確率 $1-v^{n-1}$ であり、

$$P(v)=(1-v^{n-1})\,b(v)$$

より、

$$b(v)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{v^n}{1-v^{n-1}}$$

となる。

最下位支払いオークションとは、入札額が最下位となった買い手のみが支払うルールである。最下位になる確率は $(1-v)^{n-1}$ なので、

$$P(v)=(1-v)^{n-1}\,b(v)$$

より、

$$b(v)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{v^n}{(1-v)^{n-1}}$$

サンタクロース・オークションとは、買い手が入札額に応じた参加報酬を受け取り、かつ勝った買い手のみが入札額を払うルールである。この複雑なオークションは以下のように式の変形から考案された。$P(v)$ を変形すると、

$$P(v)=v^{n-1}\cdot v-\frac{1}{n}v^n$$

となる。ここで、x を入札すると参加報酬

$$s(x)=\frac{1}{n}x^n$$

を受け取り、かつ勝った時のみ x を払うとすると、最適な入札関数は

$$b(v)=v$$

となる。

これ以外にも、勝ったものに1位と2位の入札額の平均を支払わせるものや、最上位と最下位に中位の入札額を支払わせるなど、オークションのルールは自由にいくらでも設定可能である。しかし、収入同値定理が示すのは、ルール変更は入札関数を変えるが、買い手の期待利得と売り手の期待収入は変えないことである。

入札関数をグラフで見てみよう。

第1価格では、競う人数が増えれば入札額は高くなる。(図3)

全員支払いでは、低評価の場合は人数が増えると入札額を減らし、高評価では人数が増えると入札額を増やす。この二極化は意外な結果であろう。(図4)

敗者支払いでは、競う人数が増えれば入札額は低くなる。評価が1に近い買い手は非常に大きな入札をすることとなる。(図5)

最下位支払いでは、競う人数が増えれば入札額は高くなる。評価が1に近い買い手はさらに大きな入札をすることとなる。(図6)

$n=3$ の場合の5つのルールの入札関数の比較をしておく。これらはルールご

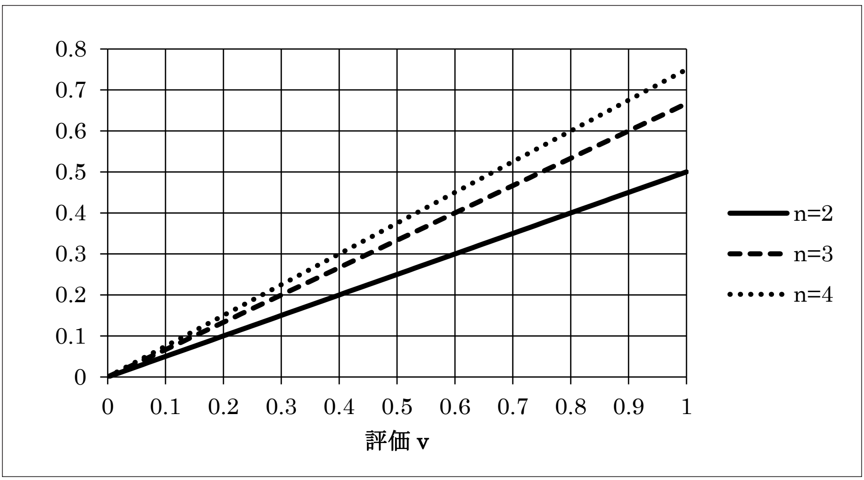

図3：第1価格オークションの入札関数

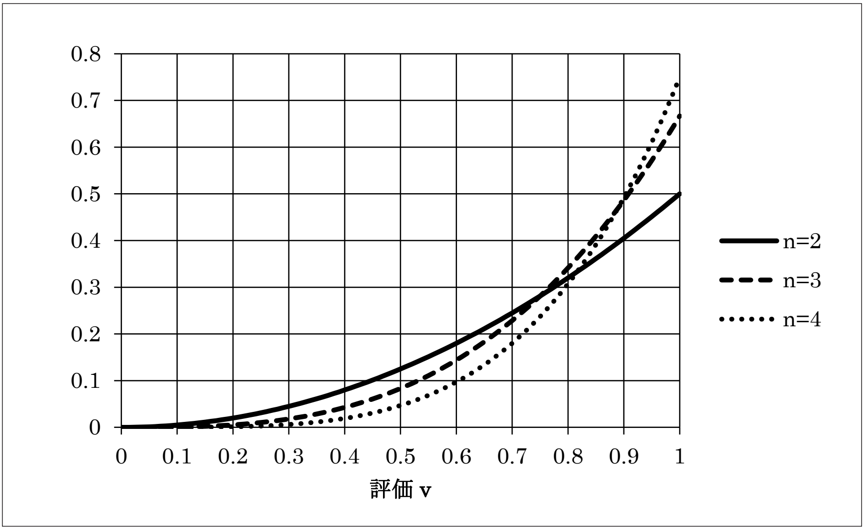

図４：全員支払いオークションの入札関数

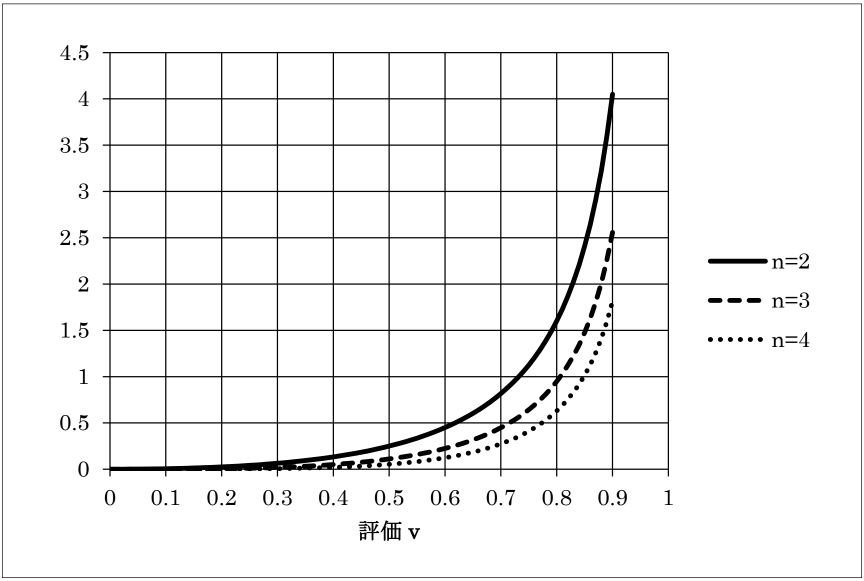

図５：敗者支払いオークションの入札関数

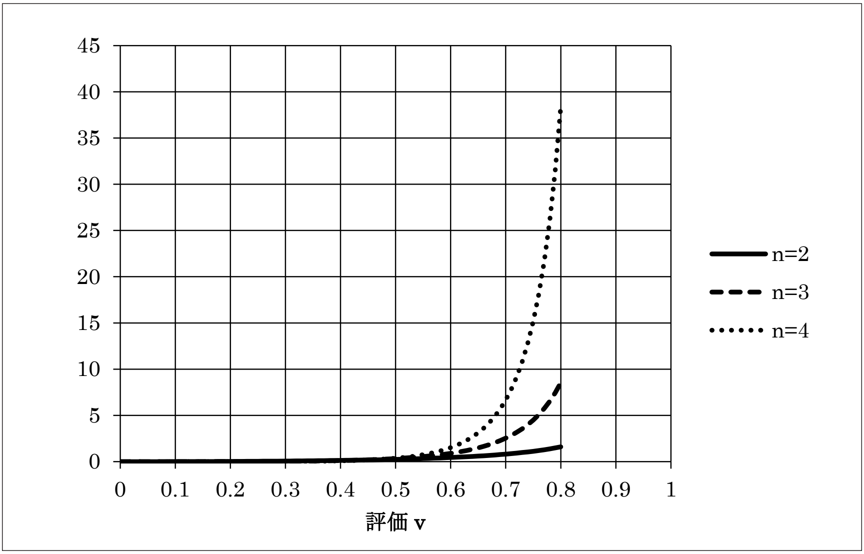

図６：最下位支払いオークションの入札関数

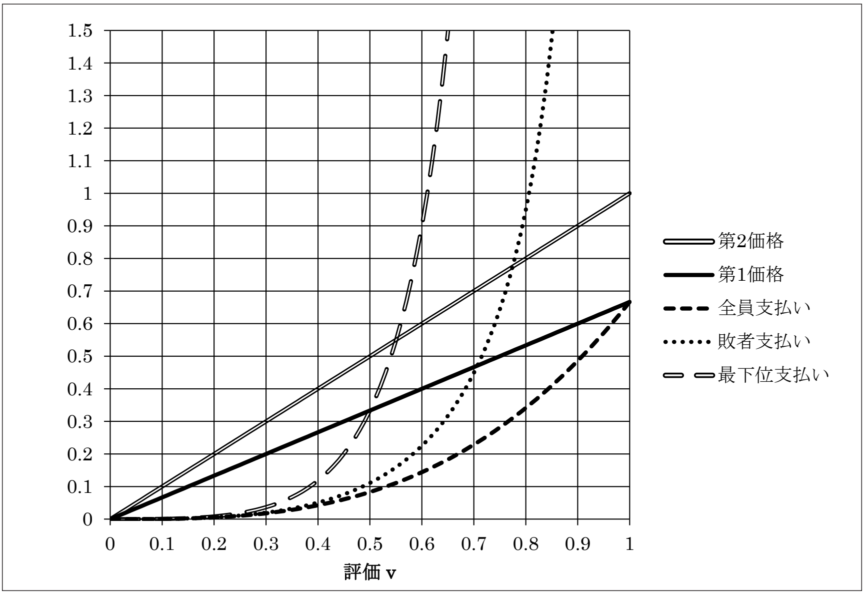

図７：入札関数の比較（n = 3）

とに全て異なる。（図 7）

４．収入最大オークション

4.1　期待支払い関数の変更

期待支払い関数 $P(x)$ を変更することで売り手の期待収入を最大化することを考えよう。なお、売り手の品物に対する評価は 0 と仮定しているので、期待収入の最大化は売り手の期待利得の最大化である。

前の節では最低評価の買い手の期待利得を 0 としたが、ここでは境界条件として評価 a の買い手の期待利得を 0 としよう。

$$U(a)=0$$

すなわち

$$P(a)=a^n$$

となる。評価 a 未満の買い手は参加せず、評価 a 以上の買い手のみで競う。

$$P'(v)=(n-1)\,v^{n-1}$$

を a から v まで積分すると

$$P(v)=a^n+\left[\frac{n-1}{n}x^n\right]_a^v=\frac{n-1}{n}v^n+\frac{1}{n}a^n$$

となる。売り手の期待収入は、これを a から 1 まで積分して

$$R(a)=n\int_a^1 P(x)\,dx=\left[\frac{n-1}{n+1}x^{n+1}+a^n x\right]_a^1=\frac{n-1}{n+1}+a^n-\frac{2n}{n+1}a^{n+1}$$

となる。

期待収入を最大化する最適な a は、$R'(a)=0$ より

$$na^{n-1}-2na^n=0$$

$$a=\frac{1}{2}$$

となる。これを代入すると、売り手の期待収入を最大化するオークションでは、

$$R=\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$$

であり、

$$P(v)=\frac{n-1}{n}v^n+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{(n-1)v^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

であり、

$$U(v)=v^n-P(v)=\frac{1}{n}v^n-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{v^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

となる。これらの値はいずれも以前と同様に、オークションのルールには依存しない。このオークションを期待収入最大オークションとよぶ。

以上をグラフで示す。図 8 と図 9 は効率的オークションとの売り手の期待収入の比較である。評価$\frac{1}{2}$以下の買い手に参加させず、参加する買い手からの支払額を増やすほうが売り手にとって期待収入を大きくすることができた。期待収入の増加は$\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$であり、買い手の人数が増えるとともに急激に減少する。

なお、各買い手の期待利得を図 10 に表す。減少幅は $v>\frac{1}{2}$ の範囲で$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$であり、評価に依存しない額となる。

なお、期待収入を最大化した結果、買い手に品物が渡らない確率が正となるので、もはや効率的ではない。

$n=1$ の場合は、$v\geq\frac{1}{2}$の買い手に $P(v)=\frac{1}{2}$ を払わせ、$R=\frac{1}{4}$ となる。これは独占的価格付けと一致する。

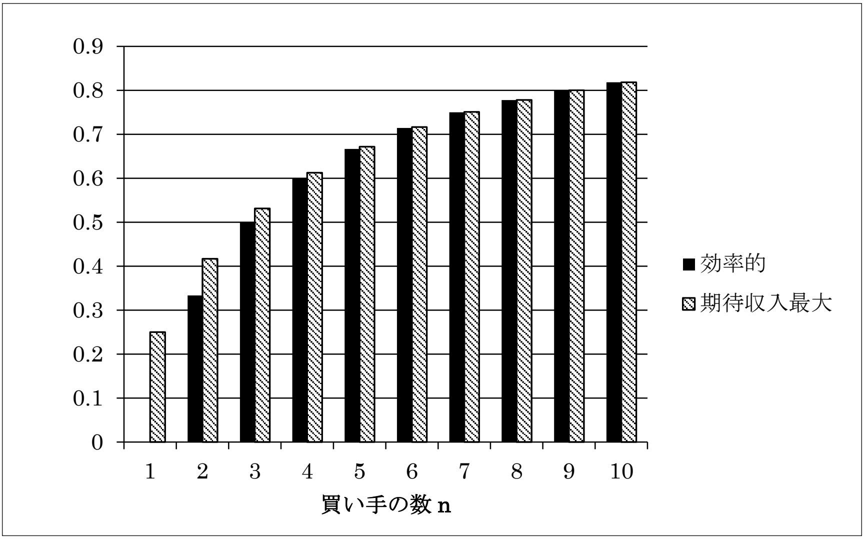

図８：売り手の期待収入

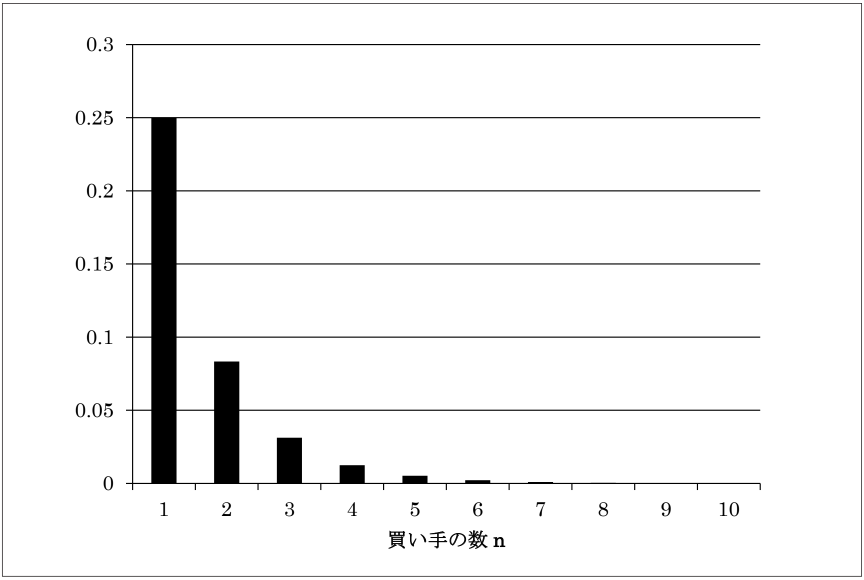

図９：最大化による期待収入の増加

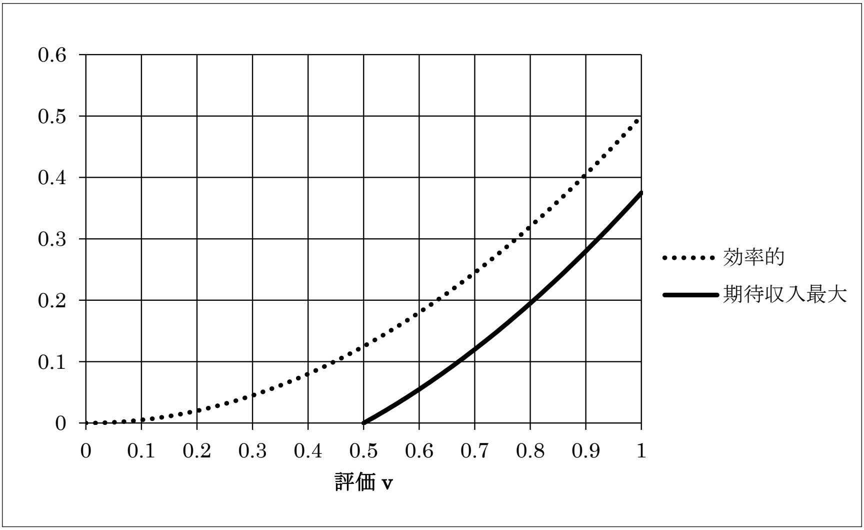

図10：買い手の期待利得（n = 2）

4.2　入札関数の変更

期待支払関数を変えるということは、それぞれのオークションルールで入札関数も変わる。

第1価格では、

$$b(v)=\frac{n-1}{n}v+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}v^{1-n}$$

となる。

第2価格では、以前と同様で

$$b(v)=v$$

となる。

全員払いでは

$$b(v)=\frac{n-1}{n}v^{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

となる。

敗者支払いでは、

$$b(v)=\frac{(n-1)\,v^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n\,(1-v^{n-1})}$$

となる。

最下位支払いでは、

$$b(v)=\frac{(n-1)\,v^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n\,(1-v)^{n-1}}$$

となる。

以上をグラフで比較する（図 11 ～図 13)。いずれの場合でも期待収入最大オークションのほうが入札額が大きくなる。

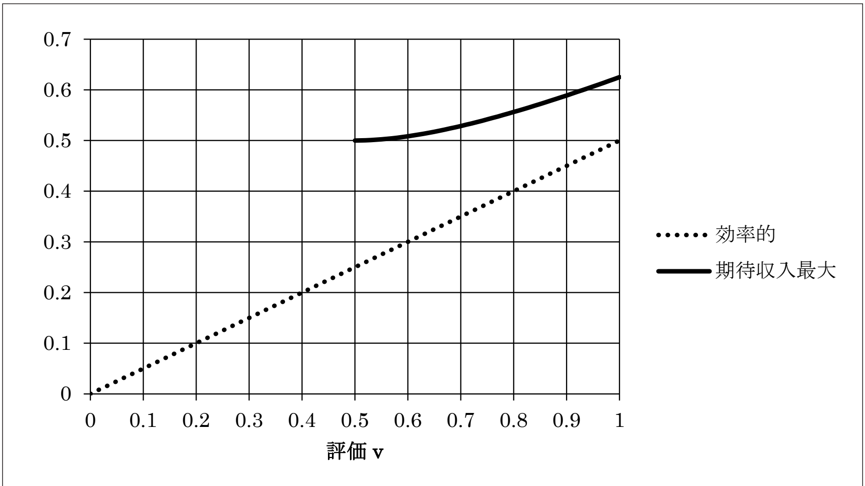

図11：第１価格オークションの入札関数（n＝2）

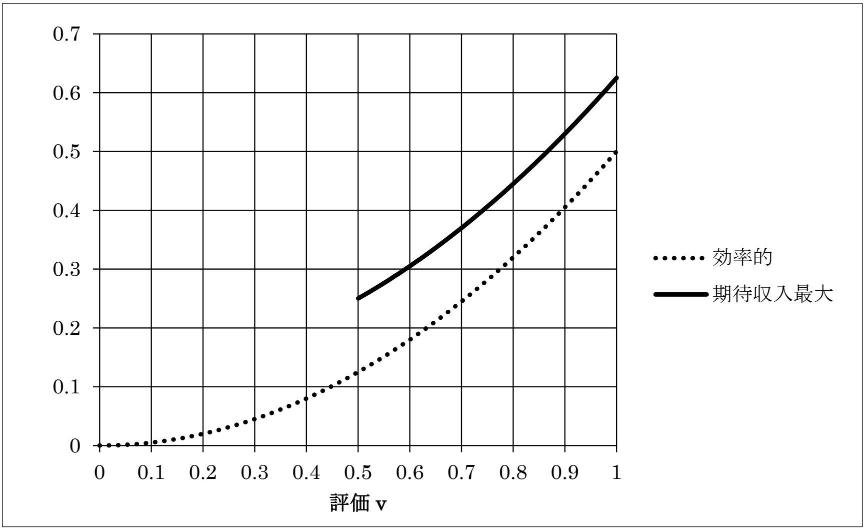

図12：全員支払いオークションの入札関数（n = 2）

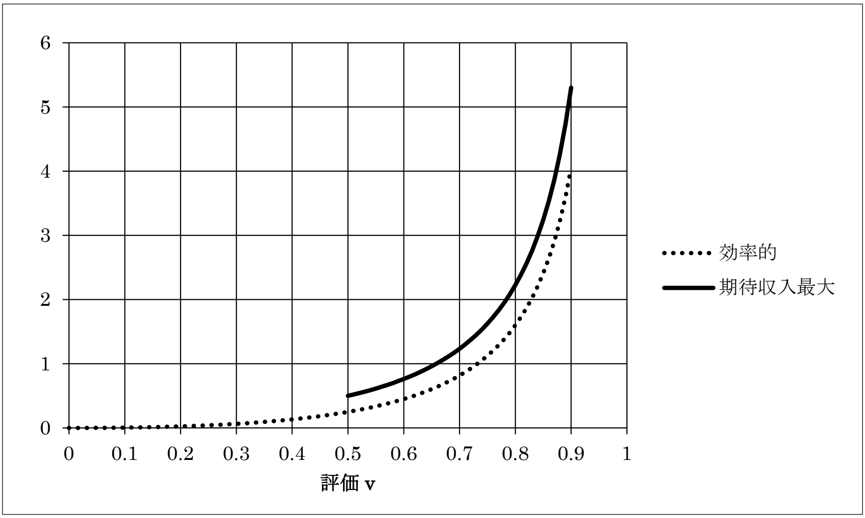

図13：敗者支払いオークションの入札関数（n = 2）

4.3　留保価格

入札関数が変化するのは、評価$\frac{1}{2}$以下の買い手が参加しないため、競争環境が変わることから生じる。買い手の評価が事前に分からない売り手は、評価$\frac{1}{2}$以下の買い手を参加させず、それを買い手の間に周知させるにはどうすればよいだろうか。簡単な方法がある。売り手が留保価格b_0を定め、それ以下の入札額を認めなければよい。境界評価$\frac{1}{2}$の買い手の入札額を留保価格b_0とする。つまり

$$b_0 = b\left(\frac{1}{2}\right)$$

である。第1価格では、

$$b_0 = \frac{1}{2}$$

となる。第2価格では、

$$b_0 = \frac{1}{2}$$

となる。全員払いでは、

$$b_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。敗者支払いでは、

$$b_0 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

となる。最下位支払いでは、

$$b_0 = \frac{1}{2}$$

となる。

第1価格、第2価格、最下位支払いでは、買い手の数nに依存しない留保価格$\frac{1}{2}$を設定できる。もし事前に買い手の数が分からない場合には売り手に取っては都合が良い。

5．おわりに

オークションの理論は、Vickrey (1961) で第2価格オークションが提案され、

評価額を入札することが支配戦略であることが示されたところから始まった。その後 Riley and Samuelson（1981）および Myerson（1981）で広い範囲のオークションが実は同じ結果をもたらすという収入同値定理が示された。それらの結果は Steiglitz（2007）にも簡単にまとめられており、日本語で読める。

ここでは、簡単に解くために幾つかの仮定をおいて、それらの結果を視覚的に確認した。

なお、最適化の十分条件や関数形の確認は省略した。また、より正確に記述するには、売り手の提案するメカニズムとして定義する必要があるだろう。

参考文献

Myerson, R.（1981）. “Optimal Auction Design.” *Mathematics of Operations Research*, 6:. 58-73.

Riley, J. and Samuelson, F.（1981）. “Optimal Auctions.” *The American Economic Review*, 71: 381-392.

Steiglitz, K.（2007）. *Snipers, Shills, & Sharks: eBay and Human Behavior*. Princeton University Press.（ケン・スティグリッツ（著），川越敏司（訳），佐々木俊一郎（訳），小川一仁（訳）『オークションの人間行動学 最新理論からネットオークション必勝法まで』日経 BP 社、2008年）

Vickrey, W.（1961）. “Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders,” *Journal of Finance*, 16: 8-37.