

異種材料接合丸棒の特異応力場の強さの解析と 異種材料接合板との比較について

宮崎 達二郎^{*1}, 野田 尚昭^{*2}
王 澤鋒^{*3}, 佐野 義一^{*4}

Analysis of intensity of singular stress field for bonded cylinder in comparison with bonded plate

Tatsujiro MIYAZAKI^{*1}, Nao-Aki NODA^{*2}, Zefeng WANG^{*3} and Yoshikazu SANO^{*4}

^{*1} Department of Mechanical Systems Engineering, University of the Ryukyus,
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan
^{*2,*3,*4} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka 804-8550, Japan

Received 14 April 2015

Abstract

In this paper, an intensity of singular stress field for a bonded cylinder is compared with the one for a bonded plate, which was obtained in the previous studies accurately. The analytical method focuses on the stress values at the interface corner edge obtained by performing FE analyses on the unknown and reference models which are subdivided by the same mesh pattern. It is found that this analytical method which is useful for analyzing the bonded plate cannot be directly applied to the bonded cylinder because the strain in the circumferential direction causes non-singular stress component affecting singular stress evaluation. In order to eliminate the non-singular terms, they are expressed explicitly from the interfacial continuity conditions and the stress-free boundary conditions at the interface corner edge. Since the intensity of singular stress field for the bonded cylinder cannot be controlled by Dundurs' parameter uniquely, the maximum and minimum values of the intensities of singular stress field are shown in the table and the chart according to Dundurs' parameter. There are cases where the intensity of singular stress field for the bonded cylinder is one and a half times as large as that for the bonded plate even if the practical materials are combined.

Key words : Bi-materials, Interface, Finite element method, Intensity of singular stress field, Bonded cylinder, Bonded plate

1. 緒 言

著者らは、先の研究で板状の突合せ継手（図1）の特異応力場の強さ K_{σ} を正確に求める方法を提案した（張他, 2011a; 張他, 2011b）。その方法では、異種材料接合板（図2）を基準問題として、メッシュパターンおよび材料組合せを同一に揃えた有限要素法（FEM）解析を行い（西谷他, 1999; 西谷他, 2003; 小田他, 2009）、応力値の比から K_{σ} を求める。特に、陳と西谷（1993）、野田ら（2006）の体積力法による解析で得られた接合板の解を用いたことで、 K_{σ} の高精度な解析が実現している。実際の突合せ継手の引張試験結果の整理に K_{σ} を適用し、接着強度が $K_{\sigma} = \text{一定}$ で表されることを明らかにした（宮崎他, 2013; 野田他, 2014; Noda, et al., 2015）。その一例として、炭

論文 No.15-00210 [DOI: 10.1299/transjsme.15-00210]

^{*1} 正員, 琉球大学工学部機械システム工学科 (〒 903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1)

^{*2} 正員, フェロー, 九州工業大学大学院工学研究院機械知能工学研究系 (〒 804-8550 福岡県北九州市戸畑区仙水町 1-1)

^{*3} 九州工業大学大学院工学府機械知能工学専攻

^{*4} 正員, 九州工業大学大学院工学研究院機械知能工学研究系

E-mail of corresponding author: t-miya@tec.u-ryukyu.ac.jp

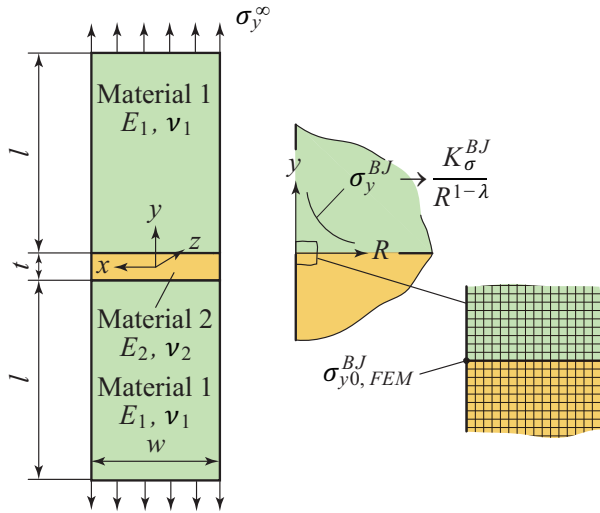


Fig. 1 Butt joint used as the unknown model.

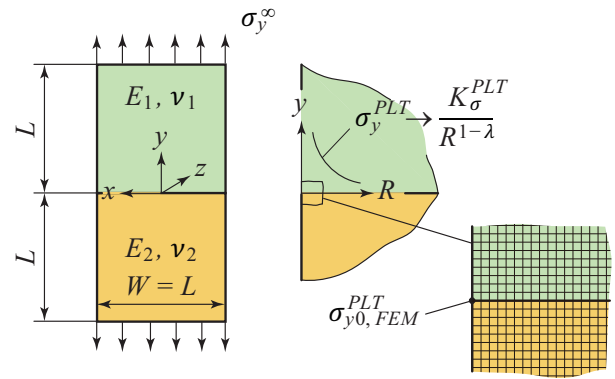
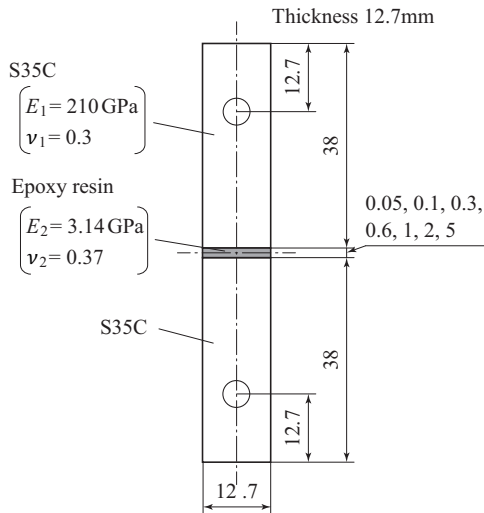
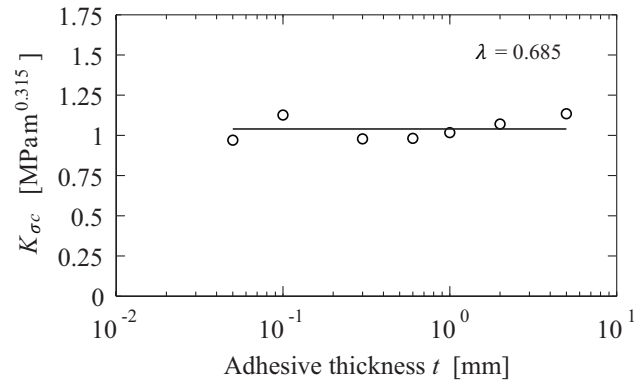


Fig. 2 Bonded plate used as the reference model.



(a) Butt joint used in the tensile experiment.



(b) Critical K_{σ} values plotted against adhesive thickness t .

Fig. 3 Critical K_{σ} values of butt joints (Miyazaki, et al., 2013; Noda, et al., 2014). (a) Butt joint used in the tensile experiment, (b) critical K_{σ} values plotted against adhesive thickness t .

素鋼とエポキシ系接着剤からなる板状突合せ継手の接着強度を K_{σ} で整理した結果を図 3 に示す (宮崎他, 2013; 野田他, 2014)。単純重合わせ継手においても良好な結果を得ており (宮崎他, 2013; 宮崎他, 2014)。板状試験片は実際には 3 次元形状を有しているが、2 次元モデルによる解析によって簡便に強度評価が可能であると言える。しかしながら、基本的な形状、負荷形式でありながら、3 次元モデルで取り扱わざるを得ないものも数多く存在する。

本研究では、最も基本的な 3 次元接合体と考えられる接合丸棒 (図 4) の一様引張り問題を取り扱う。一般に、界面端部での開き角、材料の組合せが同じであれば、軸対称接合体は平面ひずみ状態の 2 次元接合体と同じ特異性指数 λ を有する (野田, 辻, 1992)。一方で、軸対称接合体の界面端部では特異応力に加えて特有の応力集中が生じることが指摘されており (胡他, 1999; 胡, 渡邊, 2003)、その特異応力場に含まれる半径方向変位に比例した特異性のない応力項が議論されている (Li, et al., 1998; Li, et al., 2000)。このように、接合丸棒 (図 4) においては前報と同じ手順で特異応力場の強さを求められるか否かについては不明である。

そこで本論文では、接合丸棒および接合板を材料組合せ、メッシュパターンを揃えて FEM 解析を行い、それらの相違点を解析結果から検討する。そして、接合丸棒に先の研究での解析法を適用する際に生じる問題を明らかにし、特異応力場の強さを求める方法を提案する。接合丸棒には前述した非特異応力が生じるので、特異応力場の強さは界面端部の力学状態を代表しておらず、接合板のように界面端部の力学的な厳しさを支配する因子として強度評価に用いるのに十分とは言えない。そこで実用的な観点から界面端部の力学状態を代表し、接合板とも

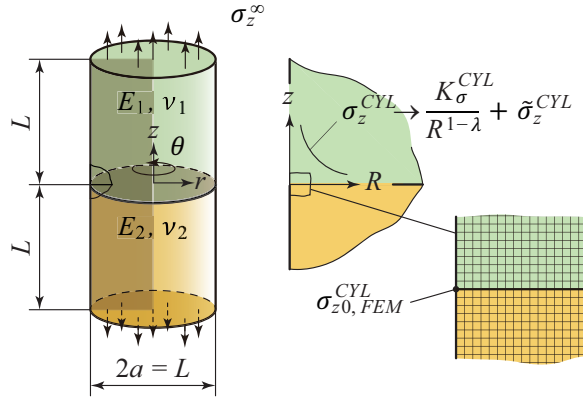


Fig. 4 Bonded cylinder used as the unknown model.

Table 1 Material properties used in the present analyses.

Material 1		Material 2		α	β	λ
E_1	ν_1	E_2	ν_2			
1.0	0.2555	0.1138	0.2066	0.8	0.3	0.8655

直接比較することができるような特異応力場の強さについても検討を行う．種々の Dundurs の複合材料パラメータ (α, β) (Dundurs, 1969) に対して材料組合せを変化させながら解析を行い，その特異応力場の強さがどの程度変化するか調べる．

2. FEM 解析で得られる接合丸棒界面の応力とひずみについての問題点

比較に用いる接合板は図 2 のモデルで $L = W$ ，接着丸棒は図 4 のモデルで $L = 2a$ とした．表 1 に 2 つの材料の縦弾性係数 E_m ，ポアソン比 ν_m ($m = 1$ は材料 1，2 は材料 2 を表す)，Dundurs の複合材料パラメータ (α, β) および特異性指数 λ を示す．ここで， (α, β) は横弾性係数 G_m および ν_m で次のように定義され (Dundurs, 1969)，以下の議論では代表例として実用的な材料組合せの範囲 $0 \leq \beta \leq 0.3$ (結城他, 1992) の Bad pair 域にある $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.3)$ の結果を用いて説明する．

$$\alpha = \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \kappa_m = 3 - 4\nu_m \quad (1)$$

また， λ は次の特性方程式を解くことで得た (Bogy, 1968; Bogy, 1971; 野田, 辻, 1992) ．

$$\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - \lambda^2 \right]^2 \beta^2 + 2\lambda^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - \lambda^2 \right] \alpha \beta + \lambda^2(\lambda^2 - 1)\alpha^2 + \frac{\sin^2(\pi\lambda)}{4} = 0 \quad (2)$$

解析では，市販の FEM コード MSC Marc 2008 R1 を用いた．2 つの材料を線形弾性体で仮定し，メッシュパターンおよび材料組み合わせを揃え，接合丸棒は軸対称，接合板は平面ひずみの条件の下で静的弾性応力解析を行った．接合丸棒には 4 節点四角形断面軸対称体要素，接合板には 4 節点四角形要素を用いた．図 5 に界面端部近傍での要素分割の様子を示す．界面端部近傍の要素は正形状とし，その寸法は先の研究 (張他, 2011a; 張他, 2011b; 宮崎他, 2013; 野田他, 2014; 宮崎他, 2014) を参考に $e_{\min}/(W/2) = e_{\min}/a = 3^{-9}, 3^{-12}$ とした． e_{\min} を変化させることで，解析結果のメッシュ依存性および解析精度について検討を行った．

表 2 に接合丸棒の材料 1, 2 側の界面端部 (以下では第ゼロ節点と呼ぶ) での応力 $\sigma_{j0,FEM}^{CYL}$ ($j = r, z, \theta$)， $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$ ，ひずみ $\varepsilon_{j0,FEM}^{CYL}$ ， $\gamma_{rz0,FEM}^{CYL}$ ，接合板の材料 1, 2 側の第ゼロ節点での応力 $\sigma_{i0,FEM}^{PLT}$ ($i = x, y, z$)， $\tau_{xy0,FEM}^{PLT}$ ，ひずみ $\varepsilon_{i0,FEM}^{PLT}$ ， $\gamma_{xy0,FEM}^{PLT}$ をそれぞれ示す (以下では上付き添字の CYL は接合丸棒，PLT は接合板を表す)．本来，接合丸棒の σ_z^{CYL} ， τ_{rz}^{CYL} ， ε_r^{CYL} ， ε_θ^{CYL} ，接合板の σ_y^{PLT} ， τ_{xy}^{PLT} ， ε_x^{PLT} ， ε_z^{PLT} は界面で連続となる．しかしながら，一般に FEM 解析では材料 1 側と 2 側で異なる値として求まるので，本論文では材料 1 側と 2 側の平均値でそれらを示している．

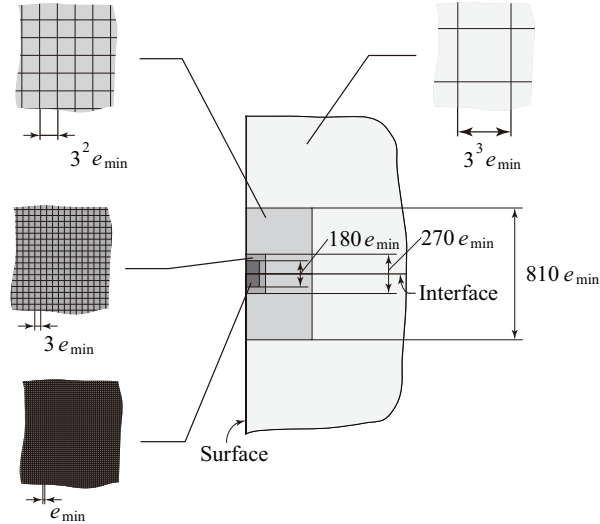


Fig. 5 FE mesh pattern at interface corner edge. e_{\min} is the minimum element size.

$\sigma_{z0,FEM}^{CYL}$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$, $\varepsilon_{r0,FEM}^{CYL}$ は e_{\min} によって値が異なっており、界面端部での応力特異性の影響が確認される。また、材料1側と2側で値が異なり、連続性も満たしていなかった。しかしながら、 $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ については、 e_{\min} によっても値は等しく、応力特異性の影響は認められなかった。さらに、 $(\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2} = -0.5137$ と材料1側と2側で値は等しく、連続性も満たしていた。このように、FEM解析では $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ を除いた $\sigma_{z0,FEM}^{CYL}$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$, $\varepsilon_{r0,FEM}^{CYL}$ はいずれも界面で連続とはならない。また本来、特異性を有するので、それらはメッシュパターンにも依存して変化する。接合板についても同様で、 $\varepsilon_{z0,FEM}^{PLT}$ 以外は連続性を満たしておらず、メッシュパターンにも依存していた。

ここで、 $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ のみ連続となる理由は以下のように考えられる。軸対称体では z 軸から距離 r だけ離れた位置での θ 方向のひずみ ε_{θ} は、そこでの r 方向の変位 u_r を用いて次のように表される (Timoshenko and Goodier, 1970)。

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (3)$$

接合丸棒の界面端部での θ 方向のひずみ $\varepsilon_{\theta0}^{CYL}$ は、式 (3) より界面端部での r 方向の変位 u_{r0}^{CYL} および丸棒半径 a を用いて次のように表される。

$$\varepsilon_{\theta0}^{CYL} = \frac{u_{r0}^{CYL}}{a} \quad (4)$$

表3に第ゼロ節点の r 方向の変位 u_{r0}^{CYL} および式 (4) より求めた θ 方向のひずみ $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ を示す。 r 方向の変位 u_{r0}^{CYL} から求めた $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ は、 e_{\min} にも関係せず -0.5137 となっている。この値は、表2の応力から求めたひずみと等しい。これらのことから、 $\varepsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ のみは界面端部での応力特異性の影響を受けず、FEM解析においても正確に求められると考えられる。

以上の解析結果より、接合板と接合丸棒の大きな違いは、接合板の z 方向のひずみ ε_z^{CYL} に対応する θ 方向のひずみ $\varepsilon_{\theta}^{CYL}$ が0とならず、有限の値をとる点にあると言える。すなわち、接合丸棒には θ 方向のひずみを生じさせる特異ではない応力が生じ、特異点となる界面端部においてもそれを無視できないと考えられる。FEM解析での第ゼロ節点の応力については、特異応力と非特異応力が合わさったものが応力値として現れる (非特異応力の評価方法については4章で述べるが、表2,3の括弧内に特異成分と非特異成分を分離した応力、ひずみを付記する)。ひずみについては、 θ 方向のみが特異応力の影響を受けず、正確に求められる。

3. FEMで接合丸棒の特異応力場を解析する上での応力 $\sigma_{j0,FEM}^{CYL}$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$ の問題点

先の論文 (張他, 2011a; 張他, 2011b) では図1の特異応力場の強さを正確に解析、議論したが、本章では図4の接合丸棒を解析する上での問題点を明らかにする。図1に示すような突合せ継手の特異応力場の強さは、図2の

Table 2 Stress and strain components of bonded cylinder and bonded plate. (a) Bonded cylinder, (b) bonded plate.

(a) Bonded cylinder.

Stress components (= singular stress + non-singular stress)								
$\frac{e_{\min}}{a}$	$\sigma_{r0,FEM}^{CYL}$		$\sigma_{z0,FEM}^{CYL}$		$\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL}$		$\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$	
	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2
3^{-9}	-0.6785 (= -0.6785 + 0.0)	0.6515 (= 0.6515 + 0.0)	3.561 (= 3.575 - 0.01344)		0.2803 (= 0.7974 - 0.5171)	0.7653 (= 0.8265 - 0.06124)	0.3210 (= 0.3210 + 0.0)	
3^{-12}	-1.057 (= -1.057 + 0.0)	1.015 (= 1.015 + 0.0)	5.555 (= 5.569 - 0.01344)		0.7251 (= 1.242 - 0.5172)	1.226 (= 1.288 - 0.06124)	0.5000 (= 0.5000 + 0.0)	
Strain components (= singular strain + non-singular strain)								
$\frac{e_{\min}}{a}$	$\epsilon_{r0,FEM}^{CYL}$		$\epsilon_{z0,FEM}^{CYL}$		$\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$		$\gamma_{rz0,FEM}^{CYL}$	
	$\left[= \frac{\sigma_{r0,FEM}^{CYL} - \nu(\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} + \sigma_{z0,FEM}^{CYL})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\sigma_{z0,FEM}^{CYL} - \nu(\sigma_{r0,FEM}^{CYL} + \sigma_{\theta0,FEM}^{CYL})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} - \nu(\sigma_{z0,FEM}^{CYL} + \sigma_{r0,FEM}^{CYL})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\tau_{rz0,FEM}^{CYL}}{G} \right]$	
3^{-9}	-1.719 (= -1.854 + 0.1356)		3.888 (= 3.769 + 0.1187)	26.75 (= 26.75 - 0.006950)	-0.5137 (= 0.0 - 0.5137)		0.2105 (= 0.2105 + 0.0)	11.83 (= 11.83 + 0.0)
3^{-12}	-2.753 (= -2.889 + 0.1356)		5.991 (= 5.872 + 0.1187)	41.67 (= 41.67 - 0.006950)	-0.5137 (= 0.0 - 0.5137)		0.3282 (= 0.3282 + 0.0)	18.43 (= 18.43 + 0.0)

$\sigma_{z0,FEM}^{CYL} = \{(\sigma_{z0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1} + (\sigma_{z0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}\}/2$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL} = \{(\tau_{rz0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1} + (\tau_{rz0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}\}/2$ for continuity of stress.
 $\epsilon_{r0,FEM}^{CYL} = \{(\epsilon_{r0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1} + (\epsilon_{r0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}\}/2$, $\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL} = \{(\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1} + (\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}\}/2$ for continuity of displacement.

(b) Bonded plate.

Stress components [= singular stress + non-singular stress (= 0)]								
$\frac{e_{\min}}{a}$	$\sigma_{x0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{y0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{z0,FEM}^{PLT}$		$\tau_{xy0,FEM}^{PLT}$	
	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2
3^{-9}	-0.6821 (= -0.6821 + 0.0)	0.6549 (= 0.6549 + 0.0)	3.593 (= 3.593 + 0.0)		0.8016 (= 0.8016 + 0.0)	0.8308 (= 0.8308 + 0.0)	0.3226 (= 0.3226 + 0.0)	
3^{-12}	-1.063 (= -1.063 + 0.0)	1.020 (= 1.020 + 0.0)	5.598 (= 5.598 + 0.0)		1.249 (= 1.249 + 0.0)	1.294 (= 1.294 + 0.0)	0.5026 (= 0.5026 + 0.0)	
Strain components [= singular strain + non-singular strain (= 0)]								
$\frac{e_{\min}}{a}$	$\epsilon_{x0,FEM}^{PLT}$		$\epsilon_{y0,FEM}^{PLT}$		$\epsilon_{z0,FEM}^{PLT}$		$\gamma_{xy0,FEM}^{PLT}$	
	$\left[= \frac{\sigma_{x0,FEM}^{PLT} - \nu(\sigma_{y0,FEM}^{PLT} + \sigma_{z0,FEM}^{PLT})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\sigma_{y0,FEM}^{PLT} - \nu(\sigma_{x0,FEM}^{PLT} + \sigma_{z0,FEM}^{PLT})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\sigma_{z0,FEM}^{PLT} - \nu(\sigma_{x0,FEM}^{PLT} + \sigma_{y0,FEM}^{PLT})}{E} \right]$		$\left[= \frac{\tau_{xy0,FEM}^{PLT}}{G} \right]$	
3^{-9}	-1.864 (= -1.864 + 0.0)		3.789 (= 3.789 + 0.0)	4.347 (= 4.347 + 0.0)	0.0 (= 0.0 + 0.0)		0.2118 (= 0.2118 + 0.0)	11.90 (= 11.90 + 0.0)
3^{-12}	-2.904 (= -2.904 + 0.0)		5.903 (= 5.903 + 0.0)	6.772 (= 6.772 + 0.0)	0.0 (= 0.0 + 0.0)		0.3299 (= 0.3299 + 0.0)	18.53 (= 18.53 + 0.0)

$\sigma_{y0,FEM}^{PLT} = \{(\sigma_{y0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}1} + (\sigma_{y0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}2}\}/2$, $\tau_{xy0,FEM}^{PLT} = \{(\tau_{xy0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}1} + (\tau_{xy0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}2}\}/2$ for continuity of stress.
 $\epsilon_{x0,FEM}^{PLT} = \{(\epsilon_{x0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}1} + (\epsilon_{x0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}2}\}/2$, $\epsilon_{z0,FEM}^{PLT} = \{(\epsilon_{z0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}1} + (\epsilon_{z0,FEM}^{PLT})^{\text{mat}2}\}/2$ for continuity of displacement.

Table 3 $\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL}$ values by $u_{r0,FEM}^{CYL}$ and $\sigma_{j0,FEM}^{CYL}$ (= singular strain + non-singular strain).

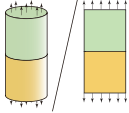
$\frac{e_{\min}}{a}$	$\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL} \left[= \frac{u_{r,FEM}^{CYL}}{r} \Big _{r=a} \right]$	$\epsilon_{\theta0,FEM}^{CYL} \left[= \frac{\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} - \nu(\sigma_{z0,FEM}^{CYL} + \sigma_{r0,FEM}^{CYL})}{E} \right]$
3^{-9}	-0.5137	-0.5137 (= 0.0 - 0.5137)
3^{-12}	-0.5137	-0.5137 (= 0.0 - 0.5137)

接合板を基本問題として用いることで求めることができる。接合板の界面端部から距離 R だけ離れた界面上での応力 σ_i^{PLT} , τ_{xy}^{PLT} は、次のように表される。

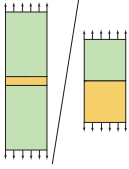
$$\sigma_i^{PLT} = \frac{K_{\sigma_i}^{PLT}}{R^{1-\lambda}} \quad (i = x, y, z), \quad \tau_{xy}^{PLT} = \frac{K_{\tau_{xy}}^{PLT}}{R^{1-\lambda}} \quad (5)$$

Table 4 The ratios of FEM stresses at the interface corner edge [(singular stress + non-singular stress)/singular stress]. (a) Bonded cylinder / bonded plate, (b) butt joint / bonded plate, and (c) stress components of butt joint.

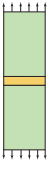
(a) Bonded cylinder / bonded plate.

	e_{\min}	$\sigma_{r0,FEM}^{CYL} / \sigma_{x0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{z0,FEM}^{CYL} / \sigma_{y0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} / \sigma_{z0,FEM}^{PLT}$		$\tau_{rz0,FEM}^{CYL} / \tau_{xy0,FEM}^{PLT}$		
	a	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	
3^{-9}		0.9948 $\left(= \frac{-0.6785 + 0.0}{-0.6821} \right)$	0.9948 $\left(= \frac{0.6515 + 0.0}{0.6549} \right)$	0.9911 $\left(= \frac{3.575 - 0.01344}{3.593} \right)$		0.3497 $\left(= \frac{0.7974 - 0.5171}{0.8016} \right)$		0.9211 $\left(= \frac{0.8265 - 0.06124}{0.8308} \right)$		0.9948 $\left(= \frac{0.3210 + 0.0}{0.3226} \right)$
3^{-12}		0.9948 $\left(= \frac{-1.057 + 0.0}{-1.063} \right)$	0.9948 $\left(= \frac{1.015 + 0.0}{1.020} \right)$	0.9924 $\left(= \frac{5.569 - 0.01344}{5.598} \right)$		0.5807 $\left(= \frac{1.242 - 0.5172}{1.249} \right)$		0.9475 $\left(= \frac{1.288 - 0.06124}{1.294} \right)$		0.9948 $\left(= \frac{0.5000 + 0.0}{0.5026} \right)$

(b) Butt joint / bonded plate.

	e_{\min}	$\sigma_{x0,FEM}^{BJ} / \sigma_{x0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{y0,FEM}^{BJ} / \sigma_{y0,FEM}^{PLT}$		$\sigma_{z0,FEM}^{BJ} / \sigma_{z0,FEM}^{PLT}$		$\tau_{xy0,FEM}^{BJ} / \tau_{xy0,FEM}^{PLT}$		
	a	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	
3^{-9}		0.6745 $\left(= \frac{-0.4601 + 0.0}{-0.6821} \right)$	0.6745 $\left(= \frac{0.4417 + 0.0}{0.6549} \right)$	0.6746 $\left(= \frac{2.424 + 0.0}{3.593} \right)$		0.6747 $\left(= \frac{0.5408 + 0.0}{0.8016} \right)$		0.6746 $\left(= \frac{0.5604 + 0.0}{0.8308} \right)$		0.6750 $\left(= \frac{0.2178 + 0.0}{0.3226} \right)$
3^{-12}		0.6746 $\left(= \frac{-0.7168 + 0.0}{-1.063} \right)$	0.6747 $\left(= \frac{0.6883 + 0.0}{1.020} \right)$	0.6747 $\left(= \frac{3.777 + 0.0}{5.598} \right)$		0.6747 $\left(= \frac{0.8425 + 0.0}{1.249} \right)$		0.6747 $\left(= \frac{0.8732 + 0.0}{1.294} \right)$		0.6747 $\left(= \frac{0.3391 + 0.0}{0.5026} \right)$

(c) Stress components of butt joint [= singular stress + non-singular stress (= 0)].

	e_{\min}	$\sigma_{x0,FEM}^{BJ}$		$\sigma_{y0,FEM}^{BJ}$		$\sigma_{z0,FEM}^{BJ}$		$\tau_{xy0,FEM}^{BJ}$		
	a	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	
3^{-9}		-0.4601 $\left(= -0.4601 + 0.0 \right)$	0.4417 $\left(= 0.4417 + 0.0 \right)$	2.424 $\left(= 2.424 + 0.0 \right)$		0.5408 $\left(= 0.5408 + 0.0 \right)$		0.5604 $\left(= 0.5604 + 0.0 \right)$		0.2178 $\left(= 0.2178 + 0.0 \right)$
3^{-12}		-0.7168 $\left(= -0.7168 + 0.0 \right)$	0.6883 $\left(= 0.6883 + 0.0 \right)$	3.777 $\left(= 3.777 + 0.0 \right)$		0.8425 $\left(= 0.8425 + 0.0 \right)$		0.8732 $\left(= 0.8732 + 0.0 \right)$		0.3391 $\left(= 0.3391 + 0.0 \right)$

同様に，突合せ継手の応力 σ_i^{BJ} ， τ_{xy}^{BJ} は次のように表される（以下では上付き添字の BJ は突合せ継手を表す）．

$$\sigma_i^{BJ} = \frac{K_{\sigma_i}^{BJ}}{R^{1-\lambda}} \quad (i = x, y, z), \quad \tau_{xy}^{BJ} = \frac{K_{\tau_{xy}}^{BJ}}{R^{1-\lambda}} \quad (6)$$

式 (5)，(6) で示すように，接合板および突合せ継手の応力はすべて $1/R^{1-\lambda}$ に比例する．接合板と突合せ継手の特異応力場の強さの比は，FEM 解析で得られる界面端部での第ゼロ節点応力の比と一致する（張他，2011a；張他，2011b）．例えば， y 方向については，次のような関係が成り立つ．

$$\frac{K_{\sigma_y}^{BJ}}{K_{\sigma_y}^{PLT}} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} R^{1-\lambda} \sigma_y^{BJ}}{\lim_{R \rightarrow 0} R^{1-\lambda} \sigma_y^{PLT}} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\sigma_y^{BJ}}{\sigma_y^{PLT}} = \frac{\sigma_{y0,FEM}^{BJ}}{\sigma_{y0,FEM}^{PLT}} \quad (7)$$

式 (7) の関係は他の応力成分についても成り立ち，それらの比はすべての成分で等しくなる．表 4 に突合せ継手の FEM 解析の結果を示す．なお，突合せ継手については， $l = L$ ， $l/w = 1.0$ ， $t/l = 0.1$ とし，接合板と同じメッシュパターン，材料組合せで解析を行った．表 4 に接合板に対する接着丸棒および突合せ継手の第ゼロ節点応力の比をそれぞれ示す．非特異応力の評価については 4 章で述べるが，非特異応力のはっきりと確認できるような括弧内に計算式も付記する．突合せ継手の場合，応力の種類に依存せず比は 0.6747 となり，4 桁程度まで一致する．これは，接合板と突合せ継手に生じる特異応力がすべて $1/R^{1-\lambda}$ に比例するためである．一方，接着丸棒の場合， $\sigma_{r0,FEM}^{CYL} / \sigma_{x0,FEM}^{PLT}$ および $\tau_{rz0,FEM}^{CYL} / \tau_{xy0,FEM}^{PLT}$ は 0.9948 となり，4 桁ほど揃っているが，それら以外の $\sigma_{z0,FEM}^{CYL} / \sigma_{y0,FEM}^{PLT}$ ， $\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} / \sigma_{z0,FEM}^{PLT}$ には違いが見られる．接着丸棒の $(\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1}$ ， $(\sigma_{z0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}1}$ ， $(\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}$ ， $(\sigma_{z0,FEM}^{CYL})^{\text{mat}2}$ の値には，2 章で述べたような特異項以外に無視することのできない非特異項が含まれていると考えられる．

4. 接合丸棒界面に生じる非特異応力の理論的導出

本章では、接合丸棒の弾性力学問題の解として解析的に導かれる応力を議論する（FEM 解析で得られる応力と区別するため、添え字に FEM を付けない）．2 章で述べた非特異応力を $\tilde{\sigma}_j^{CYL}$ ($j = r, z, \theta$) , $\tilde{\tau}_{rz}^{CYL}$ とすると、接合丸棒の界面端部から距離 R だけ離れた界面上での応力 σ_j^{CYL} , τ_{rz}^{CYL} は特異項と非特異項を合わせた次式のように表される．

$$\sigma_j^{CYL} = \frac{K_{\sigma_j 0}^{CYL}}{R^{1-\lambda}} + \tilde{\sigma}_j^{CYL} \quad (j = r, z, \theta), \quad \tau_{rz}^{CYL} = \frac{K_{\tau_{rz} 0}^{CYL}}{R^{1-\lambda}} + \tilde{\tau}_{rz}^{CYL} \quad (8)$$

応力および変形の連続性より、式 (8) は材料 1 と材料 2 の界面 ($z = 0$) で次の境界条件を満たさなければならない．

$$(\sigma_z^{CYL})^{\text{mat}1} = (\sigma_z^{CYL})^{\text{mat}2}, \quad (\tau_{rz}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\tau_{rz}^{CYL})^{\text{mat}2} \quad (9)$$

$$(u_r^{CYL})^{\text{mat}1} = (u_r^{CYL})^{\text{mat}2}, \quad (u_\theta^{CYL})^{\text{mat}1} = (u_\theta^{CYL})^{\text{mat}2} \quad (10)$$

また、 $r = a$ では自由表面となるので、この場合は次の境界条件を満たさなければならない．

$$(\sigma_r^{CYL})^{\text{mat}1} = (\tau_{rz}^{CYL})^{\text{mat}1} = 0 \quad \dots \quad (z \geq 0) \quad (11)$$

$$(\sigma_r^{CYL})^{\text{mat}2} = (\tau_{rz}^{CYL})^{\text{mat}2} = 0 \quad \dots \quad (z \leq 0) \quad (12)$$

式 (8) の右辺の 2 つ項は、独立して境界条件 (9) ~ (12) をすべて満たす必要がある．界面端部での非特異応力 $\tilde{\sigma}_{j0}^{CYL}$, $\tilde{\tau}_{rz0}^{CYL}$ は、Li ら (Li, et al., 1998) によって解析的に求められている．以下に、境界条件 (9) ~ (12) をすべて満たし、界面端部の θ 方向で $\varepsilon_{\theta 0}^{CYL} = u_{r0}^{CYL}/a$ のひずみを生じさせるような非特異応力を導く．

境界条件 (11) , (12) より、界面端部では r 方向応力 $\tilde{\sigma}_{r0}^{CYL}$ およびせん断応力 $\tilde{\tau}_{rz0}^{CYL}$ は材料 1 , 2 の両側で 0 となる．

$$(\tilde{\sigma}_{r0}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\tilde{\tau}_{rz0}^{CYL})^{\text{mat}1} = 0 \quad (13)$$

$$(\tilde{\sigma}_{r0}^{CYL})^{\text{mat}2} = (\tilde{\tau}_{rz0}^{CYL})^{\text{mat}2} = 0 \quad (14)$$

境界条件 (9) より $(\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}2} = \tilde{\sigma}_{z0}^{CYL}$ とすると、境界条件 (10) より $(\varepsilon_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\varepsilon_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}2}$ が成立し、次のような関係が得られる．

$$\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2}\right) \tilde{\sigma}_{z0}^{CYL} = -\frac{(\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}1}}{E_1} + \frac{(\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}2}}{E_2} \quad (15)$$

また同様に、境界条件 (9) より $(\varepsilon_{r0}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\varepsilon_{r0}^{CYL})^{\text{mat}2}$ の関係が成立し、次のような関係が得られる．

$$\left(\frac{v_1}{E_1} - \frac{v_2}{E_2}\right) \tilde{\sigma}_{z0}^{CYL} = \frac{v_1}{E_1} (\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}1} - \frac{v_2}{E_2} (\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}2} \quad (16)$$

式 (4) , (15) および (16) より、 $(\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}1}$ および $(\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}2}$ は次のように得られる．

$$(\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}1} = \frac{(1+v_2)(v_1 E_2 - v_2 E_1) E_1}{(1+v_1)v_1 E_2 - (1+v_2)v_2 E_1} \cdot \frac{u_{r0}^{CYL}}{a}, \quad (\tilde{\sigma}_{\theta 0}^{CYL})^{\text{mat}2} = \frac{(1+v_1)(v_1 E_2 - v_2 E_1) E_2}{(1+v_1)v_1 E_2 - (1+v_2)v_2 E_1} \cdot \frac{u_{r0}^{CYL}}{a} \quad (17)$$

そして、 $(\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}1}$ および $(\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}2}$ は次のように得られる．

$$(\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}1} = (\tilde{\sigma}_{z0}^{CYL})^{\text{mat}2} = -\frac{(v_1 - v_2) E_1 E_2}{(1+v_1)v_1 E_2 - (1+v_2)v_2 E_1} \cdot \frac{u_{r0}^{CYL}}{a} \quad (18)$$

界面端部での非特異応力は、 r 方向の変位 u_{r0}^{CYL} で決まる．

Table 5 Non-singular stresses of bonded cylinder.

e_{\min} a	$\tilde{\sigma}_{r0,FEM}^{CYL}$		$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$		$\tilde{\sigma}_{\theta0,FEM}^{CYL}$		$\tilde{\tau}_{rz0,FEM}^{CYL}$	
	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2
3^{-9}	0.0	0.0	-0.01344	-0.5171	-0.06124	0.0		
3^{-12}	0.0	0.0	-0.01344	-0.5172	-0.06124	0.0		

Table 6 Singular stresses of bonded cylinder.

e_{\min} a	$\sigma_{r0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{r0,FEM}^{CYL}$		$\sigma_{z0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$		$\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{\theta0,FEM}^{CYL}$		$\tau_{rz0,FEM}^{CYL} - \tilde{\tau}_{rz0,FEM}^{CYL}$	
	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2
3^{-9}	-0.6785	0.6515	3.575	0.7974	0.8265	0.3210		
3^{-12}	-1.057	1.015	5.569	1.242	1.288	0.5000		

Table 7 The ratios of singular stresses at the interface corner edge. All ratios correspond to 0.9948 independent of the e_{\min}/a and the material.

e_{\min} a	$\frac{\sigma_{r0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{r0,FEM}^{CYL}}{\sigma_{x0,FEM}^{PLT}}$		$\frac{\sigma_{z0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y0,FEM}^{PLT}}$		$\frac{\sigma_{\theta0,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{\theta0,FEM}^{CYL}}{\sigma_{z0,FEM}^{PLT}}$		$\frac{\tau_{rz0,FEM}^{CYL} - \tilde{\tau}_{rz0,FEM}^{CYL}}{\tau_{xy0,FEM}^{PLT}}$	
	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2	Mat. 1	Mat. 2
3^{-9}	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948
3^{-12}	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948	0.9948

5. 特異応力場の相似性についての検討

前節で導出した非特異応力の妥当性について、2章の解析結果を用いて検討する。表5に式(13),(14),(17),(18)より求めた非特異応力を示す。表6に表2の第ゼロ節点応力から表5の非特異応力を除いたものを示す。表7に表6の非特異応力を除いた第ゼロ節点応力と表2の接合板の第ゼロ節点応力の比を示す。表7と表4(a)を比較してわかるように、第ゼロ節点応力の比はすべて e_{\min} に関係なく 0.9948 となっている。第ゼロ節点の4つの応力成分のうち $\sigma_{r0,FEM}^{CYL}$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$ については、自由表面条件により非特異応力が0となり、非特異応力を除く処理を行う必要がない。これらの応力を用いれば、より簡便に特異応力場の強さを求めることができる。

図2に示すような $L/W = 1$ の接合板の特異応力場の強さの1つ $K_{\sigma_y}^{PLT}$ は、野田ら(2006)によって求められている。また、特異応力場の様式についても明らかにされている(Carpenter and Byers, 1978)。接合丸棒の特異応力場の強さ $K_{\sigma_j0}^{CYL}$ および $K_{\tau_{rz}0}^{CYL}$ は、それらと $K_{\sigma_j0}^{CYL}/K_{\sigma_x}^{PLT} = K_{\sigma_z0}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT} = K_{\sigma_{\theta}0}^{CYL}/K_{\sigma_z}^{PLT} = K_{\tau_{rz}0}^{CYL}/K_{\tau_{xy}}^{PLT} = 0.9948$ の関係から求めることができる。表8に次のように無次元化した接合板および接合丸棒の特異応力場の強さ $F_{\sigma_i}^{PLT}$, $F_{\tau_{xy}}^{PLT}$, $F_{\sigma_j}^{CYL}$, $F_{\tau_{rz}}^{CYL}$ をそれぞれ示す。

$$F_{\sigma_i}^{PLT} = \frac{K_{\sigma_i}^{PLT}}{\sigma_y^\infty W^{1-\lambda}}, F_{\tau_{xy}}^{PLT} = \frac{K_{\tau_{xy}}^{PLT}}{\sigma_y^\infty W^{1-\lambda}} \quad (19)$$

$$F_{\sigma_j0}^{CYL} = \frac{K_{\sigma_j0}^{CYL}}{\sigma_z^\infty (2a)^{1-\lambda}}, F_{\tau_{rz}0}^{CYL} = \frac{K_{\tau_{rz}0}^{CYL}}{\sigma_z^\infty (2a)^{1-\lambda}} \quad (20)$$

接合丸棒の界面端部での特異応力場の漸近解は、次のように表される。

$$\sigma_j^{CYL} = \frac{K_{\sigma_j0}^{CYL}}{R^{1-\lambda}} + \tilde{\sigma}_{j0}^{CYL}, \tau_{rz}^{CYL} = \frac{K_{\tau_{rz}0}^{CYL}}{R^{1-\lambda}} + \tilde{\tau}_{rz0}^{CYL} \quad (21)$$

表9に界面上の端部からの距離 R の位置での接合丸棒の z 方向応力 $\sigma_{z,FEM}^{CYL}$, 接合板の y 方向応力 $\sigma_{y,FEM}^{PLT}$, $\sigma_{z,FEM}^{CYL}$ の特異成分 $(\sigma_{z,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL})$ と $\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ の比 $(\sigma_{z,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL})/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ を示す。応力比は R に関係なく約 0.9948 となっており、特異応力場の強さは正確**1に求められていることが確認される。

**1 表7, 9に示すように応力の比は十分に収束していることから、本解析は基準問題の解(野田他, 2006)と同程度の精度を有すると考えられる。

Table 8 Normalized intensities of the singular stress field. (a) Bonded cylinder, (b) bonded plate.

(a) Bonded cylinder.

Mat.	$F_{\sigma_r}^{CYL}$	$F_{\sigma_z}^{CYL}$	$F_{\sigma_\theta}^{CYL}$	$F_{\tau_{rz}}^{CYL}$
1	-0.269	0.633	0.0929	0.0958
2	0.111		0.154	

(b) Bonded plate (Noda, et al., 2006; Carpenter and Byers, 1978).

Mat.	$F_{\sigma_x}^{PLT}$	$F_{\sigma_y}^{PLT}$	$F_{\sigma_z}^{PLT}$	$F_{\tau_{xy}}^{PLT}$
1	-0.270	0.636	0.0934	0.0963
2	0.111		0.154	

Table 9 The ratios of the singular stresses on the interface from the corner edge. The ratios are constant at 0.9948 independent of the R/e_{\min} .

$\frac{R}{e_{\min}}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL} - \tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$
0	5.555	5.598	0.9948
1	4.064	4.099	0.9948
2	3.754	3.787	0.9948
3	3.571	3.603	0.9948
4	3.449	3.481	0.9948
5	3.356	3.387	0.9948

$$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL} = 0.01344$$

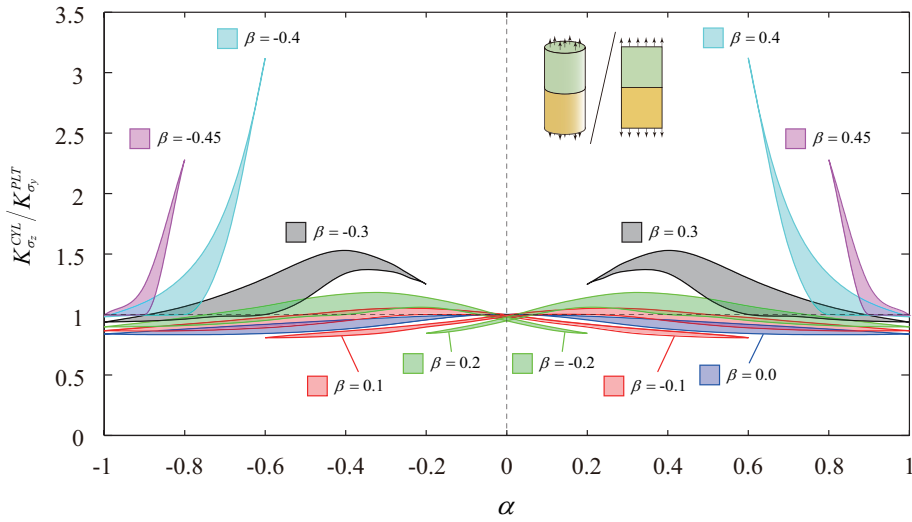


Fig. 6 Relation between $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ and α . The maximum value of the $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ attains about 1.5 when $\beta = 0.3$.

6. 接合板に対する接合丸棒の特異応力場の強さ

5章では、接合丸棒の界面端部での特異応力場の漸近解を明らかにし、特異応力場の強さを正確に求める方法について述べた。数値計算上、漸近解としては式(21)に示すように非特異応力を必要とするが、界面端部の力学状態が特異応力場の強さのみで代表することができなければ、接合丸棒の強度評価はより複雑なものとなり、不便である。そこで本章では、界面端部の力学状態を特異応力場の強さ $K_{\sigma_z}^{CYL}$ のみで代表することを目的とし、 σ_z^{CYL} を次式で表すことができるか検討を行う。

$$\sigma_z^{CYL} = \frac{K_{\sigma_z}^{CYL}}{R^{1-\lambda}} \quad (22)$$

$K_{\sigma_z}^{CYL}$ は、 $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT} = \sigma_{z0,FEM}^{CYL}/\sigma_{y0,FEM}^{PLT}$ の関係式より求められる。表10に $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.3)$ の下で E_2/E_1 , ν_1 および ν_2 を変化させながら求めた界面上の端部からの距離 R の位置での $\sigma_{y,FEM}^{PLT}$, $\sigma_{z,FEM}^{CYL}$, $\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$ および $\sigma_{z,FEM}^{CYL}/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ を示す。 $\sigma_{z,FEM}^{CYL}/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ の値は、(a)~(c)のいずれの場合も R/e_{\min} に関係なくほぼ1%以内で一致している。また、 $e_{\min}/a = 3^{-9}$ と 3^{-12} の結果を比べると、両者の差はわずかであり、 $\sigma_{z,FEM}^{CYL}/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ の値はメッシュにも依存しないことが確認される。その他の (α, β) においても材料組合せを変化させながら同様な計算を行った。Equal pair ($\alpha = 2\beta$) の付近で差が大きくなる傾向が見られたが、それ以外ではすべて同じように概ね1%以内で一致するという結果が得られた。 $\sigma_{z,FEM}^{CYL}/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$ の値は R および e_{\min} に対してほぼ一定であることから、式(22)による σ_z^{CYL} の表現は可能であり、 $K_{\sigma_z}^{CYL}$ も実用上十分な精度で得ることができると言える。

図6に $e_{\min}/a = 3^{-12}$ の $\sigma_{z0,FEM}^{CYL}/\sigma_{y0,FEM}^{PLT}$ で求めた $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ の分布、表11にその最大値 $(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ および最小値 $(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ を示す。実用的な材料組合せの範囲 $0 \leq \beta \leq 0.3$ (結城他, 1992) では、おおよ

Table 10 The ratios of singular stresses on the interface from the corner edge under $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.3)$, $\sigma_{z,FEM}^{CYL}/\sigma_{y,FEM}^{PLT}$. (a) $E_2/E_1 = 0.1074$, $\nu_1 = 0.00001$, $\nu_2 = 0.1818$, (b) $E_2/E_1 = 0.1166$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2125$, and (c) $E_2/E_1 = 0.1389$, $\nu_1 = 0.49999$, $\nu_2 = 0.2500$.

(a) $E_2/E_1 = 0.1074$, $\nu_1 = 0.00001$, $\nu_2 = 0.1818$.

R/e_{\min}	$e_{\min}/a = 3^{-9}$				$e_{\min}/a = 3^{-12}$			
	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$
0	3.641	3.513	0.02795	0.965	5.672	5.456	0.02795	0.962
1	2.720	2.631		0.967	4.238	4.084		0.964
2	2.491	2.412		0.968	3.881	3.742		0.964
3	2.357	2.283		0.969	3.673	3.543		0.965
4	2.268	2.198		0.969	3.533	3.409		0.965
5	2.200	2.133		0.969	3.428	3.309		0.965

(b) $E_2/E_1 = 0.1166$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2125$.

R/e_{\min}	$e_{\min}/a = 3^{-9}$				$e_{\min}/a = 3^{-12}$			
	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$
0	3.586	3.583	-0.02638	0.999	5.586	5.597	-0.02638	1.002
1	2.601	2.592		0.997	4.052	4.052		1.000
2	2.410	2.400		0.996	3.755	3.754		1.000
3	2.297	2.285		0.995	3.578	3.575		0.999
4	2.222	2.210		0.995	3.462	3.459		0.999
5	2.164	2.152		0.994	3.372	3.368		0.999

(c) $E_2/E_1 = 0.1389$, $\nu_1 = 0.49999$, $\nu_2 = 0.2500$.

R/e_{\min}	$e_{\min}/a = 3^{-9}$				$e_{\min}/a = 3^{-12}$			
	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$	$\sigma_{y,FEM}^{PLT}$	$\sigma_{z,FEM}^{CYL}$	$\tilde{\sigma}_{z0,FEM}^{CYL}$	$\frac{\sigma_{z,FEM}^{CYL}}{\sigma_{y,FEM}^{PLT}}$
0	3.182	3.349	-0.1169	1.053	4.957	5.283	-0.1169	1.066
1	2.874	3.014		1.049	4.477	4.760		1.063
2	2.493	2.598		1.042	3.884	4.114		1.059
3	2.362	2.456		1.040	3.680	3.892		1.058
4	2.268	2.353		1.038	3.533	3.732		1.056
5	2.200	2.280		1.036	3.428	3.617		1.055

そ $0.8 \leq (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max}/K_{\sigma_y}^{PLT} \leq 1.5$ であることがわかる。 $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ の変化の範囲は (α, β) によって異なるが、特異性のない Equal pair となる $\alpha = 2\beta$ 付近ではその範囲は大きく、材料組合せの違いによる影響が強く現れるといった傾向が見られる。しかしながら、 $\alpha = 2\beta$ から遠ざかると $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ の変化の範囲は小さくなり、 $[(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max} - (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}] / [(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max} + (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}] \leq 0.1$ であることがわかった。

7. 結 言

本論文では、異種材料接合丸棒および異種材料接合板を材料組合せ、メッシュパターンを揃えて FEM 解析を行い、それらの相違点を解析結果から検討した。そして、接合丸棒を解析する上での問題を明らかにし、その特異応力場の強さを正確に求める方法を提案した。以下に得られた知見をまとめる。

- (1) 接合丸棒の界面端部の θ 方向のひずみ $\varepsilon_{\theta 0}^{CYL}$ は応力特異性の影響を受けず、FEM 解析においてもメッシュパ

Table 11 Maximum and minimum values of $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$.

		β							
		-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
α	0.0	0.978 0.948	0.997 0.981	1.000	0.997 0.981	0.978 0.948			
	0.1	0.903 0.878	0.956 0.936	0.996 0.989	1.032 1.000	1.065 1.022			
	0.2	0.844	0.920 0.896	0.986 0.955	1.052 1.000	1.145 1.060	1.246		
	0.3		0.889 0.850	0.972 0.914	1.050 0.984	1.184 1.036	1.444 1.358		
	0.4		0.863 0.826	0.955 0.880	1.031 0.948	1.172 1.000	1.525 1.343		
	0.5		0.838 0.812	0.937 0.857	1.000 0.914	1.127 0.983	1.447 1.134		
	0.6		0.808	0.918 0.843	0.975 0.890	1.071 0.951	1.299 1.000	3.117	
	0.7			0.899 0.835	0.946 0.875	1.020 0.925	1.165 0.986	1.862 1.564	
	0.8			0.879 0.833	0.919 0.866	0.974 0.909	1.066 0.962	1.327 1.000	2.276
	0.9			0.859 0.834	0.892 0.864	0.934 0.900	0.993 0.945	1.098 0.994	1.237 1.000
1			0.839	0.866	0.898	0.937	0.981	0.995	

Upper: maximum value, lower: minimum value

Red : bad pair, green : equal pair, blue : good pair

ターンによって異なることなく正確な値が得られる。これは、 $\varepsilon_{\theta 0}^{CYL}$ が FEM 解析においても界面端部の r 方向の変位 u_{r0}^{CYL} を丸棒半径 a で除した u_{r0}^{CYL}/a と一致する特異性を含まない項であるためである。

- (2) 円周方向ひずみ $\varepsilon_{\theta 0}^{CYL} = u_{r0}^{CYL}/a$ が特異性を含まないことより、FEM 解析で得られる端部近傍の応力場に非特異項が含まれる。そこで、界面における応力、変形の連続性および自由表面の境界条件により、界面端部での非特異応力を導いた。FEM 解析で得られる応力分布から非特異応力を差し引けば、平面ひずみ下での接合板を基本問題にして先の接合板の解析法を適用可能であることが明らかとなった。
- (3) 第ゼロ節点の 4 つの応力成分のうち $\sigma_{r0,FEM}^{CYL}$, $\tau_{rz0,FEM}^{CYL}$ については、自由表面条件により非特異応力が 0 となり、非特異応力を除く処理を行う必要がない。これらの応力を用いれば、より簡便に特異応力場の強さを求めることができる。
- (4) 接合丸棒の特異応力場の強さ $K_{\sigma_z}^{CYL}$ と接合板の特異応力場の強さ $K_{\sigma_y}^{PLT}$ の比 $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ を種々の (α, β) に対して材料定数を変化させながら求め、その分布を図に示し (図 6)、最大値 $(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ ・最小値 $(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ を表にまとめた (表 11)。その結果、実用的な材料組合せの範囲 $0 \leq \beta \leq 0.3$ では、およそ $0.8 \leq (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max}/K_{\sigma_y}^{PLT} \leq 1.5$ であることがわかった。また、Equal pair ($\alpha = 2\beta$) の付近を除けば、材料組合せの違いによる $K_{\sigma_z}^{CYL}/K_{\sigma_y}^{PLT}$ の変化の範囲は小さく、 $[(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max} - (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}] / [(K_{\sigma_z}^{CYL})_{\max} + (K_{\sigma_z}^{CYL})_{\min}] \leq 0.1$ であることがわかった。

文 献

- Bogy, D. B., Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35 (1968), pp. 460 - 466.
- Bogy, D. B., Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 38 (1971), pp. 377 - 386.

- Carpenter, W. C. and Byers, C., A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material, *International Journal of Fracture*, Vol. 35 (1978), pp. 245 - 268.
- 陳玳珩, 西谷 弘信, 板状接合試験片における特異応力場の強さ, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 59, No. 567 (1993), pp. 2682 - 2686 .
- Dundurs, J., Discussion of edge-bonded dissimilar orthotropic elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36 (1969), pp. 650 - 652.
- 胡秋平, 佐藤裕, 渡邊勝彦, 軸対称接合材料における応力の弾性定数への依存性, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 65, No. 633 (1999), pp. 1010 - 1017 .
- 胡秋平, 渡邊勝彦, 異種接合材料応力場関与弾性パラメータの基本的性質に関する検討, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 69, No. 679 (2003), pp. 594 - 601 .
- Li, Y. L., Hu, S. Y., Munz, D. and Yang, Y. Y., Asymptotic description of the stress field around the bond edge of a cylindrical joint, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 7-8 (1998), pp. 552 - 565 .
- Li, Y. L., Hu, S. Y. and Yang, Y. Y., Stresses around the bond edge of axisymmetric deformation joints, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 66, No. 2 (2000), pp. 153 - 170 .
- 宮崎達二郎, 野田尚昭, 李戎, 内木場卓巳, 佐野義一, 特異応力場の強さに基づく単純重ね合わせ継ぎ手のはく離破壊基準の検討, *エレクトロニクス実装学会誌*, Vol. 16, No. 2 (2013), pp. 143 - 151 .
- 宮崎達二郎, 野田尚昭, 内木場卓巳, 李戎, 佐野義一, はく離強度の便利で正確な評価法の提案, *自動車技術会論文集*, Vol. 45, No. 5 (2014), pp. 895 - 901 .
- 西谷弘信, 川村壮司, 藤崎渉, 福田孝之, FEM による板材の応力拡大係数と応力集中係数の高精度決定法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 65, No. 629 (1999), pp. 26 - 31 .
- 西谷弘信, 寺西高広, 福山慶介, 第ゼロ節点法による異種接合材の応力拡大係数解析, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 69, No. 684 (2003), pp. 1203 - 1208 .
- 野田直剛, 辻知章, 異種材料界面端部の応力特異性 (三次元軸対称弾性問題), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 58, No. 546 (1992), pp. 275 - 278 .
- 野田尚昭, 白尾亮司, 李俊, 杉本淳典, 強化繊維の引抜きにおける繊維端部の特異応力場の強さ, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 72, No. 721 (2006), pp. 1397 - 1404 .
- 野田尚昭, 宮崎達二郎, 内木場卓巳, 李戎, 佐野義一, 高瀬康, 接着接合板における特異応力の強さをを用いた接着強度の簡便な評価法について, *エレクトロニクス実装学会誌*, Vol. 17, No. 2 (2014), pp. 132 - 142 .
- Noda, N., Miyazaki, T., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding strength evaluation in terms of the intensity of singular stress at the interface coner with and without fictitious crack, *International Journal of Adhesion and adhesives*, Vol. 61 (2015), pp. 46 - 64.
- 小田和広, 神杉一吉, 野田尚昭, 比例法による界面き裂の応力拡大係数解析, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 75, No. 752 (2009), pp. 476 - 482 .
- 結城良治, 許金泉, 劉金橋, 異材接合材の界面端応力特異性の解析, *生産研究*, Vol. 44, No. 4 (1992), pp. 206 - 210 .
- Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, Third Edition (1970), pp. 380, McGraw-Hill, New York.
- 張玉, 野田尚昭, 高石謙太郎, 蘭欣, 接着接合板における接着層厚さが特異応力の強さに与える影響, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 77, No. 774 (2011a), pp. 360 - 372 .
- 張玉, 高石謙太郎, 野田尚昭, 蘭欣, 接着接合板における接着層厚さが特異応力場の強さに与える影響 (面内曲げと引張りの比較), *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 77, No. 784 (2011b), pp. 2076 - 2086 .

References

- Bogy, D. B., Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35 (1968), pp. 460 - 466.
- Bogy, D. B., Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38 (1971), pp. 377 - 386.
- Carpenter, W. C. and Byers, C., A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material, *International Journal of Fracture*, Vol. 35 (1978), pp. 245 - 268.

- Chen, D. H. and Nisitani, H., Intensity of singular stress field near the interface edge point of a bonded strip, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 59 , No. 567 (1993) , pp. 2682 - 2686 (in Japanese).
- Dundurs, J., Discussion of edge-bonded dissimilar orthotropic elastic wedges under normal and shear loading, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 36 (1969), pp. 650 - 652.
- Hu, Q., Sato, Y. and Watanabe, K., Dependence of stress state on elastic constants in axisymmetric dissimilar materials, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 65, No. 633 (1999), pp. 1010 - 1017 (in Japanese).
- Hu, Q. and Watanabe, K., A study on fundamental properties of elastic parameters related to stress field for dissimilar materials, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 69, No. 679 (2003), pp. 594 - 601 (in Japanese).
- Li, Y. L., Hu, S. Y., Munz, D. and Yang, Y. Y., Asymptotic description of the stress field around the bond edge of a cylindrical joint, Archive of Applied Mechanics, Vol. 68 , No. 7-8 (1998) , pp. 552 - 565 .
- Li, Y. L., Hu, S. Y. and Yang, Y. Y., Stresses around the bond edge of axisymmetric deformation joints, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 66, No. 2 (2000), pp. 153 - 170 .
- Miyazaki, T., Noda, N. -A., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding criterion for single lap joints from the intensity of singular stress field, Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging, Vol. 16, No. 2 (2013), pp. 143 - 151 (in Japanese).
- Miyazaki, T., Noda, N. -A., Uchikoba, T., Li, R. and Sano, Y., Proposal of a Convenient and Accurate Method for Evaluation of Debonding Strength, Transactions of the Society of Automotive Engineers of Japan, Vol. 45, No. 5 (2014), pp. 895 - 901 (in Japanese).
- Nisitani, H., Kawamura, T., Fujisaki, W. and Fukuda, T., Determination of highly accurate values of stress intensity factor or stress concentration factor of plate specimen by FEM, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 65 , No. 629 (1999) , pp. 26 - 31 (in Japanese).
- Nisitani, H., Teranishi, T. and Fukuyama, K., Stress intensity factor analysis of a bimaterial plate based on the crack tip stress method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 69, No. 684 (2003), pp. 1203 - 1208 (in Japanese).
- Noda, N. and Tsuji, T., Stress singularities in edge-bonded dissimilar wedges : Three dimensional axisymmetrical elastic problems, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 58, No. 546 (1992), pp. 275 - 278 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Shirao, R., Li, J. and Sugimoto, J., Intensity of singular stress at the end of a fiber under pull-out force, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 72, No. 721, (2006), pp. 1397 - 1404 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Miyazaki, T., Uchikoba, T., Li, R., Sano, Y. and Takase, Y., Convenient debonding strength evaluation based on the intensity of singular stress for adhesive joints, Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging, Vol. 17, No. 2 (2014), pp. 132 - 142 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Miyazaki, T., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding strength evaluation in terms of the intensity of singular stress at the interface corner with and without fictitious crack, International Journal of Adhesion and adhesives, Vol. 61 (2015) , pp. 46 - 64.
- Oda, K., Kamisugi, K. and Noda, N. -A., Analysis of stress intensity factor for interface cracks based on proportional method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 75, No. 752 (2009), pp. 476 - 482 (in Japanese).
- Yuuki, R., Xu, J. -Q and Liu, J. -Q. , Analysis of Stress Singularity at Interface Edge in Dissimilar Materials , Seisan Kenkyu , Vol. 44 , No. 4 (1992) , pp. 206 - 210 (in Japanese) .
- Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, Third Edition (1970), pp. 380, McGraw-Hill, New York.
- Zhang, Y., Noda, N. -A., Takaishi, K. and Lan, X., Effect of adhesive thickness on the interface of singular stress at the adhesive dissimilar joint, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 77, No. 774 (2011a), pp. 360 - 372 (in Japanese).

Zhang, Y., Takaishi, K., Noda, N. -A. and Lan, X., Effect of adhesive thickness on the intensity of singular strength for the adhesive joint : Comparison between bending and tension, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 77, No. 784 (2011b), pp. 2076 - 2086 (in Japanese).