

第2章 流体潤滑の逆問題

往復動用シールには柔軟な材料が広く用いられている。これが軸に挿入されると弾性変形による接触圧力分布を生ずる。この接触面へ粘性流体がしゅう動とともに導入され流体圧力が発生すると、これに従って、圧力分布や面の変形も影響を受ける。このような弾性変形を考慮した潤滑理論が弾性流体潤滑 (EHL) 理論であり、往復動用シールの基礎理論はEHL理論によって取り扱われるのが妥当である。ところで、滑り軸受などでは、受圧面が広く、接触圧力が必然的に低くなるので接触面の変形は無視できる。このように潤滑面が剛体と見なしうる場合には、流体膜の形状は判明しているので、この流体膜形状に相当する圧力分布をReynoldsの潤滑基礎式を用いて求めることができ、トライボ特性の評価が可能である。このような取扱いが可能な問題は古典的流体潤滑問題と呼ばれる。

往復動用シールのように、ゴムや高分子などの柔軟材料が使用される場合においては、前述したように接触面の変形は無視できず、流体の運動と接触面の変形を同時に考慮せねばならない。しかし、材料の変形が発生した油膜厚さに比較して大きい場合には、油膜厚さが圧力分布へ与える影響は無視できると考えられる。すなわち、流体力学的に発生した圧力分布は、接触域入口側のブースト域を除けば、予圧により弾性力学的に発生した接触圧力分布とほとんど等しいとみなすことができる。接触圧力分布は、光弾性法⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾、圧力平衡法 (Müller⁽¹⁶⁾の方法)、圧電法などによって測定可能である。したがって、変形しやすい面の解析には、圧力分布が既知のものとして流体力学的に流体膜厚を求めるという手法によってトライボ問題を論じることが可能となる。この場合の取扱いは、古典的流体潤滑問題とはまったく逆になるので、流体潤滑の逆問題と呼ばれる。つまり、古典的流体潤滑問題と流体潤滑の逆問題は、EHL理論の両極端に位置するといえる。

Navier-Stokesの方程式を狭い隙間の流れに適用したReynoldsの流体潤滑の基礎式は、

1. 潤滑面における流体の運動は層流である。
2. 密封流体は非圧縮性ニュートン流体である。
3. 流体膜の厚さは潤滑面の大きさに比して非常に小さいため、流体膜の曲率の影響を無視する。
4. 慣性項および体積力の項は、粘性項に比して無視する。

5. 流体は潤滑壁面ですべりを生じない。

の仮定のもとに次のように記述できる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{u}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-1)$$

x : 運動方向の座標、 y : 運動方向と直角方向の座標

h : 膜厚、 μ : 粘度、 p : 圧力、

u : 潤滑面の相対すべり速度、 t : 時間

本研究で対象とする往復動用シールは軸対称であるので、しゅう動方向に直角な円周方向に沿う圧力は一定で、流れの円周方向成分はないと見なすことができる。したがって、式(2-1)は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{u}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2-2)$$

となる。

逆問題では、圧力こう配 $\partial p/\partial x$ は既知であるので、膜厚 h の空間的、時間的変化は式(2-2)を解くことによって得られる。スクイズ項 $\partial h/\partial t$ を無視した場合を静的逆問題、考慮した場合を動的逆問題と呼んでいる。ここでは、膜厚 h が時間遅れなしに定まる静的逆問題によって逆問題の往復動用シールへの適用方法を説明する。静的逆問題では、潤滑面における流体圧力、すなわち、接触圧力 p は時間 t に無関係であるので $\partial p/\partial x = dp/dx$ となる。

式(2-2)を積分すれば、

$$h^3 \left(\frac{dp}{dx} \right) = 6 \mu u (h - h_m) \quad (2-3)$$

となる。ただし、積分定数 h_m は $dp/dx=0$ の位置、すなわち、圧力 p の極大または極小値に対応する油膜厚さである。 q を単位幅当たりの流量とすると、式 (2-3) は

$$h_m = 2q/u = h - \frac{h^3}{6\mu u} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (2-4)$$

となる。ここで、

$$K(x) = \frac{h_m^2}{6\mu u} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{2q^2}{3\mu u^3} \left(\frac{dp}{dx} \right), \quad (2-5)$$

$$H = h/h_m \quad (2-6)$$

で与えられる無次元量を導入すれば、式 (2-4) は

$$KH^3 - H + 1 = 0 \quad (2-7)$$

と書き換えられる。つまり、静的逆問題の解は H に関する 3 次元方程式の解として与えられる。

式 (2-7) を図示すれば図 2.1 のようになる。図 2.1 の C 点は K の H に対する解析的的最大値であるから、C 点では

$$\frac{dK}{dH} = 0 \quad \frac{d^2K}{dH^2} < 0 \quad (2-8)$$

が成立する。したがって、C 点での値に添字 c を付して表現すれば、

$$K_c - \frac{h_m^2}{6\mu u} \left(\frac{dp}{dx} \right)_c = \frac{4}{27}, \quad H_c = \frac{h_c}{h_m} = \frac{3}{2} \quad (2-9)$$

となる。

3次方程式、式(2-7)の実根は次のように区別される。

(1) $K \leq 0$ の場合

すなわち、 $dp/dx \leq 0$ の場合には1個の正の実根が存在する。

(2) $0 < K \leq 4/27$ の場合

すなわち、 $dp/dx > 0$ で、 $h_m < (8\mu u / 9|dp/dx|)^{1/2}$ の場合には、3実根が存在し、そのうち2根は正 ($H > 0$) で他根は負である。膜厚 h は正であるので、負根は $h_m < 0$ を意味する。これは式(2-4)から流量 q が負、すなわち、流体が全体として相対すべり速度の方向と逆方向に流れることを示している。このような現象は圧力分布が流体の接触域への入口側から出口側に向かって増加する場合に発生するが、密封面を持つシールでは、このような状態は考えられない。すなわち、この領域で物理的な意味を持つ解は、図2.1の1象限に存在する。

(3) $K > 4/27$ の場合

負の1実根を持つが、上記(2)で説明したように物理的な意味をもたない。

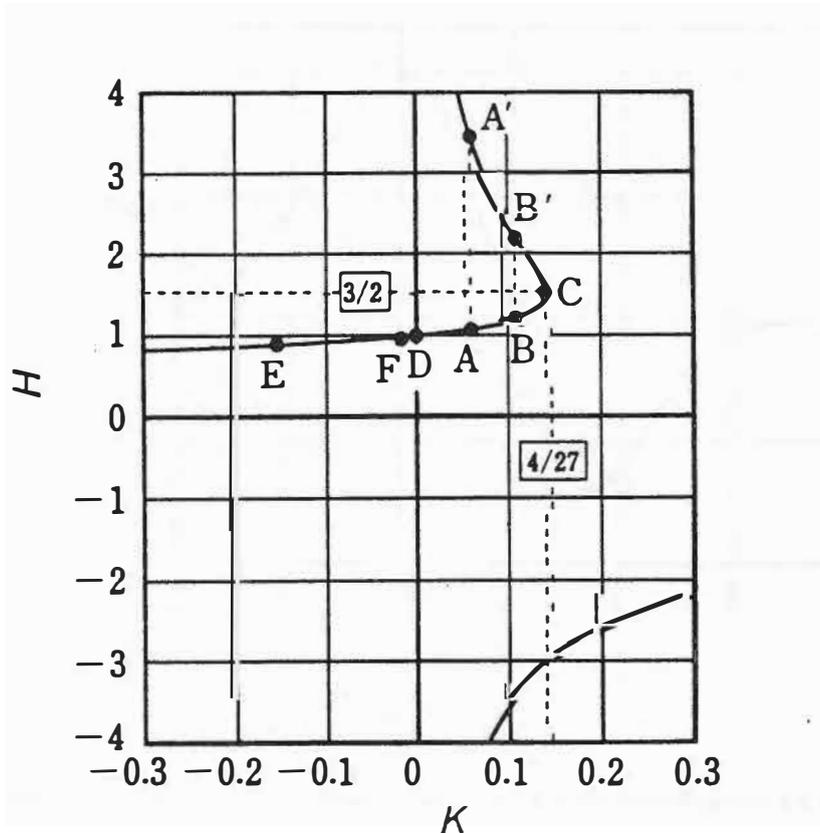
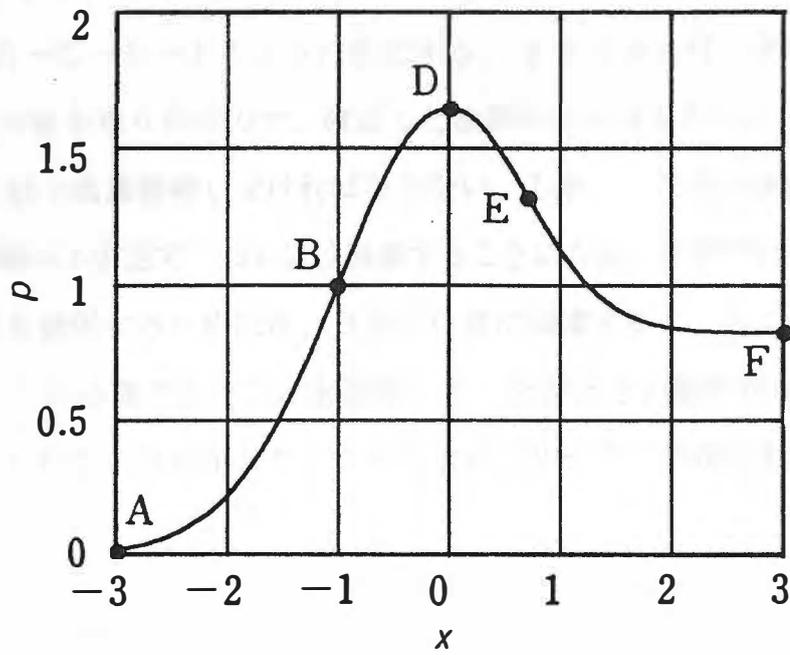
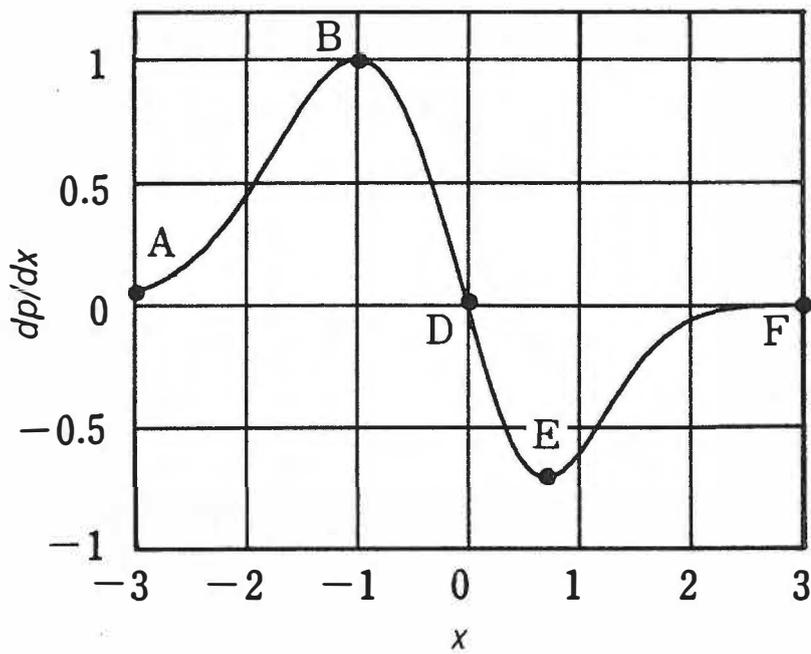


Fig. 2.1 Solution of static inverse problem⁽⁶⁰⁾



(a)



(b)

Fig. 2.2 Typical example of contact pressure distribution⁽⁶⁰⁾

いま、接触圧力分布が図 2.2 のように与えられて、圧力こう配 dp/dx の値が、 x の負側（流体の入口側）から正側（流体の出口側）へ向かって、 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ のように変化するとする。流量 q が小さく、 K が図 2.1 の C 点に到達しない場合には、膜形状を規定する H は、 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ のように変化する。 q が定まれば一義的に膜形状が確定するが、 q は任意の値を取り得るので、確定した油膜形状を得るためには、 q を常に一定にするように入口部で流量制御しなければならない。しかし、これは実際上不可能である。すなわち、流体膜は不安定で、ついには崩壊することになる。平野⁽²⁴⁾は、動的逆問題を解き、安定な膜形状を確保するためには、B 点が C 点に到達するとともに流体膜が入口でくさび形状をもつことが必要であることを証明して、そのときの膜形状は、 $A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ で与えられることを示した。C 点では式 (2-8) が成立するが、これはこの点で

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 p}{dx^3} < 0 \quad (2-10)$$

すなわち、圧力こう配の分布が最大値 $(dp/dx)_{max}$ を持つことを意味する。つまり、安定な膜形状存在の必要条件は、圧力分布が上昇変曲点を持つことであるといえる。この条件のもとで形成される一様速度 $u = u_0$ 下での確定膜形状は、

$$h_m = \sqrt[3]{\frac{8 \mu u_0}{9 |dp/dx|_{max}}}$$

$$q = \frac{m}{2} = u \sqrt{\frac{2 \mu u_0}{9 |dp/dx|_{max}}}, \quad (2-11)$$

$$h = \frac{1}{2} h_m = \sqrt[3]{\frac{2 \mu u_0}{9 |dp/dx|_{max}}}$$

で規定される流量 q と膜厚 h_c を特有量として持つことになる。

さて、往復動用シールが往復両行程で安定な確定膜形状を確保するためには、各行程で圧力分布が上昇変曲点を持たねばならない。接触圧力分布形状が相対すべり運動によって

その分布をほとんど変えないことを前提にすれば、ある行程における下降変曲点が次行程での上昇変曲点に対応することになる。すなわち、往復しゅう動面で安定な油膜が確保されるための必要条件は、圧力分布が上昇および下降変曲点を持つことである⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾。

摩擦係数 f は、 τ 、 P_r 、 L 、 B をそれぞれせん断応力、緊迫力、軸周長（ $= \pi D$ 、 D ：軸径）、接触幅とすると、

$$f = \left(L \int_0^B \tau dx \right) / P_r \quad (2-12)$$

で与えられる。ここで、

$$\tau = \frac{\mu u}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (2-13)$$

の関係を表式 (2-12) に代入すれば、

$$f = \left(\frac{L}{P_r} \right) \int_0^B \left\{ \frac{\mu u}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right) \right\} dx \quad (2-14)$$

となる。さらに、式 (2-3) を変形し、

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu u \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h}{h_m} \right)$$

を表式 (2-14) に代入すると

$$f = \left(\frac{\mu u L}{P_r} \right) \left(\frac{1}{h_m} \right) \int_0^B \left\{ 4 \left(\frac{h_m}{h} \right) - 3 \left(\frac{h_m}{h} \right) \right\} dx$$

が得られるが、平均面圧を $p_a = Pr / (LB)$ とすると、

$$f = \left(\frac{\mu u L}{P_r} \right) \left(\frac{B}{h_m} \right) J \quad (2-15)$$

$$J = \int_0^1 \left\{ 4 \left(\frac{h_m}{h} \right) - 3 \left(\frac{h_m}{h} \right)^2 \right\} d \left(\frac{x}{B} \right)$$

(J : 流体膜の形状係数)

が得られる。この式に式 (2-11) を代入すると、

$$f = \sqrt{\frac{9}{8} \left(dp/dx \right)_{max} \frac{B}{p_a} \cdot J \cdot \left(\frac{\mu u L}{P_r} \right)^{1/2}} \quad (2-16)$$

となる。すなわち、往復動用シールの摩擦係数も圧力こう配の最大値（上昇変曲点）によって支配されることが分かる。

さて、ここで、往復動シールの接触圧力分布が図 2.3 のように与えられているとし、シールが密封流体側あるいは軸が密封流体と反対側に向かう運動行程を押し行程 (Pumping stroke)、その逆の場合を引き行程 (Motoring stroke) と定義する。以下、

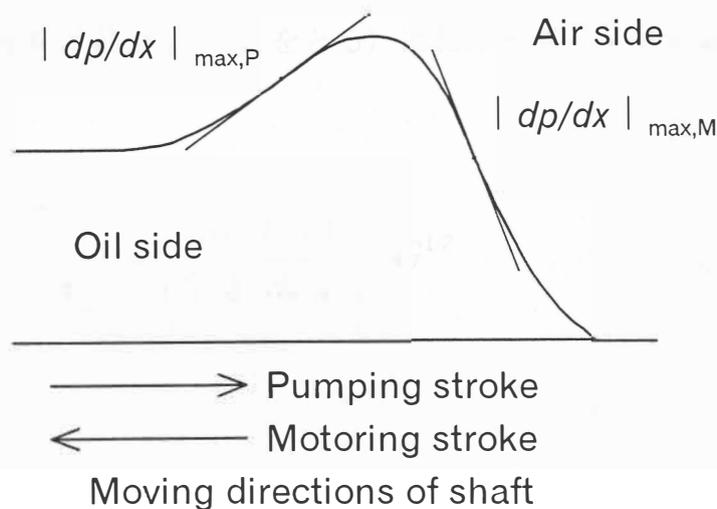


Fig. 2.3 Strokes and pressure distribution in single lip seal

それぞれの行程に対して P および M の添字を付すことにする。図 2.3 は押し・引き行程に対応する兩上昇変曲点における最大圧力こう配 $|dp/dx|_{\max,P}$ 、 $|dp/dx|_{\max,M}$ の大きさに違いがあることを示している。

以下、往復両行程において、 P_r が一定で、平均面圧 P_a も同一とし、 u_{\max} 、 ω 、 ν をそれぞれ最大すべり速度、角速度、周波数として、

$$u = u_{\max} \cos \omega t = u_{\max} \cos 2\pi \nu t \quad (2-17)$$

で、軸とシールが、相対的に往復運動しているとする。

$$\begin{aligned} G &= \mu u D / P_r = \mu u L / (\pi P_r) \\ &= \mu S \nu / (P_r / \pi D) = \mu S \nu / (P_r / L) \end{aligned} \quad (2-18)$$

μ : 粘度

S : ストローク長

ν : 往復サイクル数

P_r : 接触荷重 (緊迫力)

L : しゅう動直角方向長さ (= πD 、 D : 軸径)

なる無次元特性数 G を導入すれば、圧力分布の最大値 ($dp/dx=0$) を与える座標 x での行程中央部 (すべり速度 u は最大値 u_{\max} をとる) における押し・引き両行程の膜厚 h_m は、式 (2-11) より、

$$h_{mP} = \sqrt{\frac{8\mu u_{\max}}{9|dp/dx|_{\max,P}}} = \sqrt{\frac{8(\pi P_r / L)}{9|dp/dx|_{\max,P}}} \cdot G^{1/2} \quad (2-19)$$

摩擦係数 f は、式 (2-16) より、

$$f_{\frac{P}{M}} = \sqrt{\frac{9\pi}{8}} \left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, \frac{P}{M}} \frac{B}{p} \cdot J_P \cdot G^{1/2} \quad (2-20)$$

$$J_{\frac{P}{M}} = \int \left\{ 4 \left(\frac{h_m}{h} \right)_{\frac{P}{M}} - 3 \left(\frac{h_m}{h} \right)_{\frac{P}{M}}^2 \right\} \frac{dx}{B}$$

(p_a : 平均面圧、 B : 接触幅)

と表示される^{(3)~(5)}。

まず、一様平均速度 $u = (2/\pi) u_{\max}$ で往復運動すると考えれば、単位幅当たり、単位時間当たりの漏れ量 q は、式 (2-11) より、

$$q = \frac{2}{3} \left(\frac{u_{\max}}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \mu^{1/2} \cdot \left(\sqrt{\left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, P}} - \sqrt{\frac{1}{\left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, M}}} \right) \quad (2-21)$$

となり、軸径を D とするシールの無次元漏れ量 Q は次のように表示される。

$$\begin{aligned} Q &= \mu q / (P_r B) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\mu u_{\max} D}{P_r} \right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{P_r}{\pi D B^2 \left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, P}}} - \sqrt{\frac{1}{\left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, M}}} \right) \end{aligned} \quad (2-22)$$

これより、次式が導かれる。

$$Q = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{p_a}{B \left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, P}}} - \sqrt{\frac{p_a}{B \left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, M}}} \right) G^{3/2} \quad (2-23)$$

つぎに、各速度 u に膜厚 h_m が瞬間的に対応するとした場合には、単位幅当たり、単位時間当たりの漏れ量 q は、

$$q = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{18} \left(\frac{u_{\max}}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \mu^{1/2} \cdot \left(\sqrt{\left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, P}} - \sqrt{\frac{1}{\left| \frac{dp}{dx} \right|_{\max, M}}} \right) \quad (2-24)$$

となり、軸径を D とするシールの無次元漏れ量は

$$Q = \mu q / (PB)$$

$$= \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{18} \left(\sqrt{\frac{p_a}{B |dp/dx|_{\max,P}}} - \sqrt{\frac{p_a}{B |dp/dx|_{\max,M}}} \right) G^{3/2} \quad (2-25)$$

と表わすことができる。ここで、 $\{\Gamma(1/4)\}^2/18 \doteq 0.73$ であり、一様平均速度として導いた無次元漏れ量の式 (2-23) とほぼ同等である。ただし、動的逆問題に立脚した数値計算結果は、式 (2-23) の方が近い。すなわち、往復運動用シールにおける漏れ量は一様平均速度 $u = (2/\pi)u_{\max}$ で往復運動すると仮定して得られる式で精度良く計算できるといえる。

密封の条件は、式 (2-23)、あるいは、式 (2-25) より、

$$|dp/dx|_{\max,P} < |dp/dx|_{\max,M} : \text{漏れ} \quad (2-26 a)$$

$$|dp/dx|_{\max,P} = |dp/dx|_{\max,M} : \text{密封} \quad (2-26 b)$$

$$|dp/dx|_{\max,P} > |dp/dx|_{\max,M} : \text{負の漏れ} \quad (2-26 c)$$

として与えられる。すなわち、往復両行程で同一の速度条件が与えられたとき、密封を達成させるためには、圧力分布が対称で、密封流体側と大気側との最大圧力こう配が等しいことが必要となる。 $Q < 0$ 、すなわち、負の漏れ条件のもとでは、密封流体側に流体が蓄積され、圧力が上昇したり、大気側に存在する流体が不足して密封面の潤滑が低下するなど作動上問題となる現象が発生する可能性がある。しかしながら、実用されている往復動用シール、特に密封性を重視しているリップシールにおいては、このような接触圧力分布を目標とした設計が行われることが多い。シールの機能の第1は密封である。密封状態を確保した上で、密封と相反すると考えられる摩擦や摩耗の低減を図ることが必要となる。本研究課題の一つはこの問題を達成する設計指針をつくることである。