

# 3次元異材接合体の界面端角部に生じる特異応力場の 簡便で効率的な評価法について

宮崎 達二郎<sup>\*1</sup>, 井上 卓真<sup>\*2</sup>, 野田 尚昭<sup>\*3</sup>, 佐野 義一<sup>\*4</sup>

## A precise and efficient method for evaluating singular stress field at the vertex in three dimensional bonded body

Tatsujiro MIYAZAKI<sup>\*1</sup>, Takuma INOUE<sup>\*2</sup>, Nao-Aki NODA<sup>\*3</sup> and Yoshikazu SANNO<sup>\*4</sup>

<sup>\*1</sup> Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of the Ryukyus  
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan

<sup>\*2</sup> Department of Mechanical Systems Engineering, Graduate School of Engineering and Science, University of the Ryukyus  
1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213, Japan

<sup>\*3,\*4</sup> Department of Engineering, Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka 804-8550, Japan

Received

2017

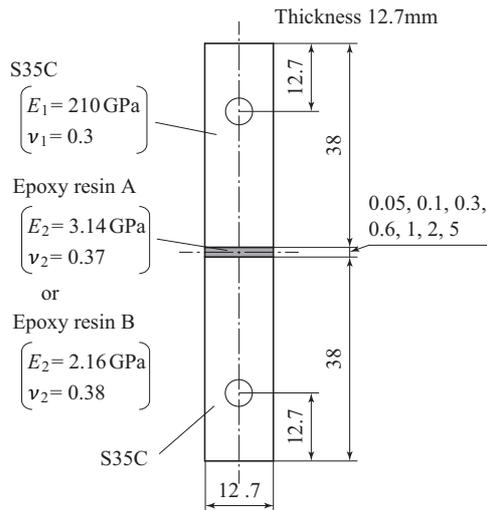
### Abstract

In this paper, convenient analysis methods are proposed for analyzing the singular index and the intensity of singular stress field (ISSF) at the vertex on the interface in the three dimensional (3D) bonded body. The analysis methods focus on FEM stresses at and around the vertex. The singular index is determined from the FEM stress ratio at the vertex obtained by performing FEM analyses for the finely and coarsely meshed models. Then, the ISSF is determined from the average FEM stresses around the vertex obtained for the reference and unknown models by applying the similar mesh pattern. The validity of the present methods is examined by comparing the results of 3D bonded models with/without fixed free surfaces. It is found that the obtained singular index has the same accuracy as the FEM eigenvalue analysis. The asymptotic solutions with the singular index and ISSF obtained by the present method correspond to FEM stress distributions. Since the ISSF obtained by the body force method (BFM) is used as the reference solution, the present method for ISSF has the same accuracy as BFM. Moreover, the critical ISSF values are calculated from the experimental results of the butt joints under various adhesive thicknesses. The critical ISSF at the side of 3D butt joint is in good agreement with the critical ISSF of 2D butt joint model. It is shown that the critical ISSF at the vertex of 3D joint is constant as well as the critical 2D ISSF independent of the adhesive thickness.

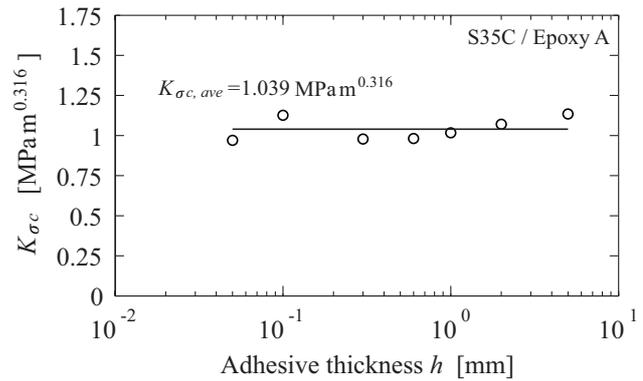
**Keywords** : Bi-materials, Interface, Finite element method, Singular index, Intensity of singular stress field, Bonded body

## 1. 結 言

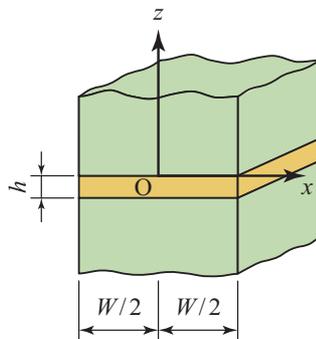
近年,自動車,航空機,鉄道など輸送機器は,炭素繊維複合材料(CFRP)や軽量金属合金を導入することによって軽量化が図られている。異種材料の接合に適している接着は,そのようなマルチマテリアル化を実現するための重要な技術として注目されている(Barnes and Pashby, 2000; 佐藤, 2011; 氷室他, 2012; 崎山他, 2012)。被着材と



(a) Butt joint used in the tensile experiment.



(b) Critical ISSF  $K_{\sigma_c}$  by 2D model (Noda et al., 2014; Noda et al., 2015).



(c) Critical ISSF  $K_{\sigma_c}$  distribution along the interface end by 3D model.

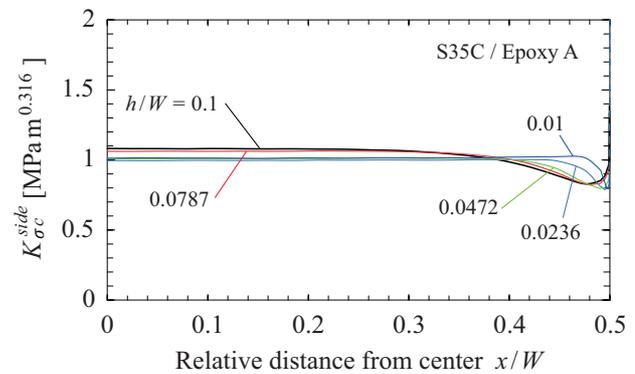


Fig. 1 Critical ISSF  $K_{\sigma_c}$  distribution of butt joints. (a) Butt joint used in the tensile experiment, (b) critical ISSF  $K_{\sigma_c}$  by 2D model (Noda et al., 2014; Noda et al., 2015), (c) critical ISSF  $K_{\sigma_c}$  distribution along the interface end by 3D model (Noda et al., 2017, Noda et al. to be submitted).

接着剤の界面端部には、多くの場合で変形の不マッチに起因した特異応力が生じる．そして、その特異応力ははく離を引き起こし、接着剤の理想強度に達する前に接着接合部を破壊に至らしめる．接着接合部のはく離破壊を防ぐには、界面端部の特異応力場の評価は重要である（沢, 2009）．

接着接合部のはく離強度の評価には、特異応力場の強さ（Intensity of singular stress field, 以下ではISSFと呼ぶ）を用いた破壊力学的手法が有効である（Qian and Akisanya, 1998; Akisanya and Meng, 2003; Mintzas and Nowell, 2012）．著者らも、接着層厚さ  $h$  を種々に変化させながら行われた突合わせ継手 [ 図 1(a) ] の引張試験の結果を破壊時のISSF（記号  $K_{\sigma_c}$ ）で整理し、 $K_{\sigma_c}$  が  $h$  に関係なく一定となることを示した [ 図 1(b) ]（野田他, 2014; Noda et al., 2015）．これまでの研究では、2次元モデルがよく用いられてきた．しかしながら、実際の継手は3次元形状を有しており、2次元ではモデル化できない角部がある．そこで、著者らは突合わせ継手の3次元解析を行い、継手破壊時の界面端部でのISSF（記号  $K_{\sigma_c}^{side}$ ）の分布を考察した [ 図 1(c) ]（野田他, 2017; 野田他, 2018）． $K_{\sigma_c}^{side}$  の分布は  $h$  に関係なくほぼ1つの曲線で表され、界面端直線部の中央から角部に向けて約90%の範囲で一定となる．そして、その一定の範囲から外れて角部に近づくと、 $K_{\sigma_c}^{side}$  は一端減少した後、急激に増加する．これは、角部近傍が直線部中央に比べて力学的に非常に厳しい状態にあることを意味する．また、Suzuki（1987）は突合わせ継手の破壊が界面端角部を起点に起きていることを報告している．界面端角部の特異応力場の研究については、古口ら（1998; 2005; 2016）、倉橋ら（2014）および古賀ら（2017）などによって精力的に行われている．ISSFの解析法もAkinの特異要素を用いた方法（倉橋他, 2014）、保存積分を用いた方法（古口他, 2016; 古賀他, 2017）などいく

つか提案されている．しかしながら，それらの解析法は複雑で簡便に ISSF を得ることができず，界面端角部の重要性は認識されているが，そこでの ISSF によるはく離強度の議論は十分になされていない．

そこで本研究では，3次元接合体の界面端角部での ISSF を簡便に効率良く求める方法を提案する．3次元特異応力場解析では2次元解析に比べて一般的に膨大な手間を要することが多く，簡便で効率良い解析手法が常に望まれる．先の研究で，著者らは市販の有限要素法（FEM）コードを利用して2次元接合板の ISSF を簡便かつ高精度を決定する方法を提案した（野田他, 2014; Zhang et al., 2015a; Zhang et al., 2015b）．その解析法は，ISSF を求めたい問題（未知問題）に対して，それと同じ特異性指数を有し，ISSF が既に得られている問題（基本問題）を設定する．2つの問題を材料組合せ，界面端部周辺のメッシュサイズおよびメッシュパターンを揃えて FEM 解析すると，界面端部付近のある点での応力の比は ISSF の比に一致する．未知問題の ISSF は，その FEM 解析によって得られた応力（実応力と区別して，FEM 応力と呼ぶ）の比と基本問題の ISSF を掛け合わせることで求められる．本研究も同じように FEM 応力を用いて比例的に ISSF を決定する．基本問題については，先の研究（Zhang et al., 2015a; Zhang et al., 2015b）と同じようにすべての材料組合せで ISSF が精度良く求められている2次元接合板（陳, 西谷, 1993; 野田他, 2006）を利用する．応力については，未知問題が3次元であり，同一界面上であっても注目する座標軸の方向によって応力分布が異なることから界面端部とその隣に位置する節点までの平均に注目する．未知問題とは異なる特異性指数を有する基本問題を設定し，平均応力を用いることから，未知問題の ISSF を得るには2つの問題の特異性指数が必要となる．2次元接合板の特異性指数は Bogy（1968; 1971）の特性方程式を解くだけで得られるが，3次元接合体の特異性指数は FEM による固有値解析（Pageau et al., 1994; Pageau and Biggers, 1995; 古口他, 1998）を行わなければならない．この不便さを解消するために，本研究では FEM 応力から特異性指数を簡便に求める方法についても提案する．そして，平面ひずみ条件下の2次元接合板に対応するように2つの自由表面を拘束した3次元接合体および古口らの過去の研究（2016）と同じモデルの解析を行い，本解析法の精度および実用性について検討を行う．さらに，図 1(a) の突合わせ継手の破断時の ISSF を3次元モデルで求め，2次元モデルで得た結果と比較し，はく離強度について議論する．

## 2. FEM 応力のメッシュ依存性を利用した特異性指数の解析

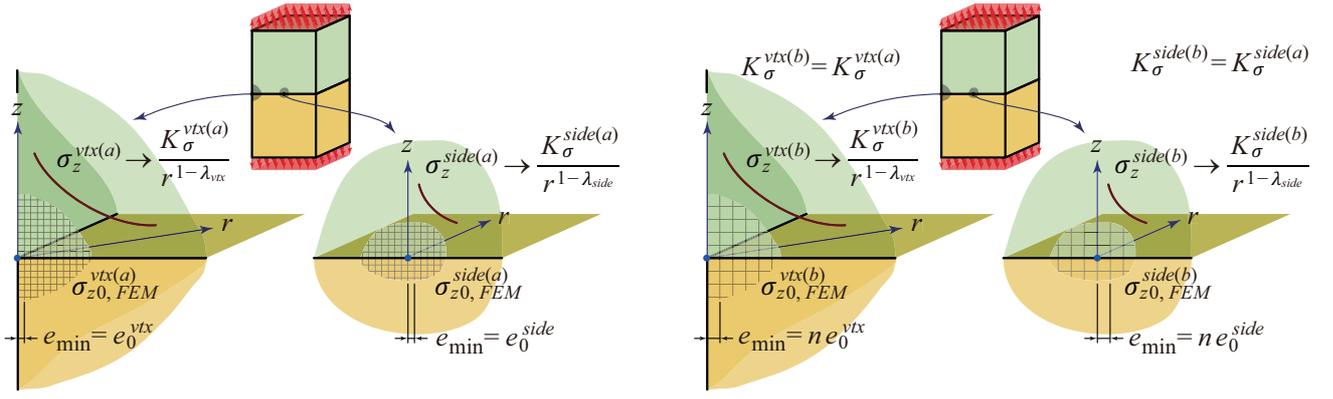
3次元接合体（図 2）の界面端直線部上の点あるいは角部の頂点からある距離  $r$  だけ離れた界面上の点に生じる実応力  $\sigma_z$  は，次のように表される（古口他, 2016）．

$$\sigma_z(r) = \frac{K_\sigma}{r^{1-\lambda}}, K_\sigma = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_z(r) \quad (1)$$

ここで， $K_\sigma$  は ISSF， $\lambda$  は特異性指数である．3次元接合体の場合，界面端直線部と界面端角部で  $\lambda$  は異なる．界面端直線部での特異性指数  $\lambda_{side}$  は，平面ひずみ下での2次元接合板の特異性指数  $\lambda_{2D}$  と対応づけられる．しかしながら，界面端角部での特異性指数  $\lambda_{vtx}$  は  $\lambda_{side}$  のように対応するものがない．そこで本章では，FEM 応力（FEM 解析によって得られた応力）から  $\lambda_{vtx}$  を求める方法について述べる．

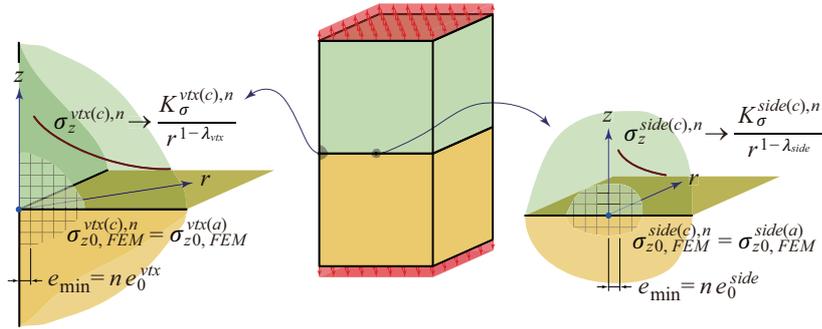
図 2 に3次元接合体の模式図を示す．(a) は界面端角部を一辺の長さ  $e_{\min} = e_0^{vtx}$  の立方体の形状の要素で分割したモデルで，界面端角部の FEM 応力を  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(a)}|_{e_{\min}=e_0^{vtx}}$ ，ISSF を  $K_\sigma^{vtx(a)}$  とする．(b) は (a) と同じモデルを一辺の長さ  $e_{\min} = ne_0^{vtx}$  の立方体の形状の要素で分割したもので，界面端角部での FEM 応力を  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(b)}|_{e_{\min}=ne_0^{vtx}}$  とする．モデル (b) はモデル (a) と同じ寸法であるので，ISSF は  $K_\sigma^{vtx(b)} = K_\sigma^{vtx(a)}$  となる．モデル (c) はメッシュを含めてモデル (a) を  $n$  倍だけ相似的に拡大したのもので，界面端角部の FEM 応力を  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(c),n}|_{e_{\min}=ne_0^{vtx}}$ ，ISSF を  $K_\sigma^{vtx(c),n}$  とする．モデル (c) の最小要素寸法は  $e_{\min} = ne_0^{vtx}$  となるが，モデルも  $n$  倍大きくしているので，要素の相対的寸法はモデル (a) と等しい．そのため，モデル (a) とモデル (c) では同じ誤差が生じ， $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(c),n}|_{e_{\min}=ne_0^{vtx}} = \sigma_{z0,FEM}^{vtx(a)}|_{e_{\min}=e_0^{vtx}}$  となる．モデル (c) は後述の式を導くための補助的なモデルであり， $\lambda_{vtx}$  を求める際に解析するのはモデル (a)，(b) の2つである．

モデル (c) はモデル (a) を  $n$  倍大きくしたものであるため，モデル (a) において界面端角部より距離  $r_0$  だけ離れた位置での実応力  $\sigma_z^{vtx(a)}(r_0)$  は，モデル (c) において  $nr_0$  だけ離れた位置での実応力  $\sigma_z^{vtx(c),n}(nr_0)$  と等しいので，式 (1) より次のような関係が得られる．



(a) Fine mesh model with minimum element size  $e_{\min} = e_0^{vtx}$ .

(b) Coarse mesh model with  $e_{\min} = n e_0^{vtx}$ .



(c)  $n$  times enlarged model of the fine mesh model (a).

Fig. 2 Schematic illustration of 3D bonded body models for analyzing the singular index.

$$\frac{K_{\sigma}^{vtx(a)}}{(r_0)^{1-\lambda_{vtx}}} = \frac{K_{\sigma}^{vtx(c),n}}{(nr_0)^{1-\lambda_{vtx}}} \quad (2)$$

したがって、式(2)より次のような関係が得られる。

$$\frac{K_{\sigma}^{vtx(c),n}}{K_{\sigma}^{vtx(a)}} = n^{1-\lambda_{vtx}} \quad (3)$$

モデル (b) とモデル (c) の界面端角部は同じ寸法  $e_{\min} = n e_0^{vtx}$  および形状の要素で分割されているので、界面端角部での FEM 応力と ISSF の間には次のような関係が成り立つ。

$$\frac{K_{\sigma}^{vtx(c),n}}{K_{\sigma}^{vtx(b)}} = \frac{\sigma_{z0, FEM}^{vtx(c),n} |_{e_{\min} = n e_0^{vtx}}}{\sigma_{z0, FEM}^{vtx(b)} |_{e_{\min} = n e_0^{vtx}}} \quad (4)$$

式(3)を式(4)に代入し、 $\sigma_{z0, FEM}^{vtx(c),n} |_{e_{\min} = n e_0^{vtx}} = \sigma_{z0, FEM}^{vtx(a)} |_{e_{\min} = e_0^{vtx}}$  の関係を用いると、モデル (a) とモデル (b) の FEM 応力の関係がモデル (c) を介して次のように得られる。

$$\sigma_{z0, FEM}^{vtx(b)} |_{e_{\min} = n e_0^{vtx}} = \frac{\sigma_{z0, FEM}^{vtx(a)} |_{e_{\min} = e_0^{vtx}}}{n^{1-\lambda_{vtx}}} \quad (5)$$

式(5)の両辺に  $(e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$  を掛けて整理すると、次のような関係が得られる。

$$\sigma_{z0, FEM}^{vtx(a)} |_{e_{\min} = e_0^{vtx}} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}} = \sigma_{z0, FEM}^{vtx(b)} |_{e_{\min} = n e_0^{vtx}} \cdot (n e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}} = \text{constant} \quad (6)$$

式 (6) は、要素の形状が相似であれば  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (e_{\min})^{1-\lambda_{vtx}}$  の値はその大きさに関係なく一定となることを意味する。なお、界面端角部近傍の FEM 応力も同じ  $\lambda_{vtx}$  に支配されているので、式 (6) のように  $(e_{\min})^{1-\lambda_{vtx}}$  を乗じることによってその FEM 応力に含まれる要素寸法依存性を打ち消すことができる。それについては、後述の計算結果で示す。式 (6) を  $\lambda_{vtx}$  について解くと、次式が得られる。

$$\lambda_{vtx} = 1 - \frac{\ln\left(\sigma_{z0,FEM}^{vtx(a)}|_{e_{\min}=e_0^{vtx}} / \sigma_{z0,FEM}^{vtx(b)}|_{e_{\min}=ne_0^{vtx}}\right)}{\ln n} \quad (7)$$

$\lambda_{vtx}$  を得るには、FEM による固有値解析 (Pageau et al., 1994; Pageau and Biggers, 1995; 古口他, 1998) といった難しく複雑な計算を必要とする。しかしながら、式 (7) を用いれば要素寸法を相似的に変化させた FEM 解析を行うだけで容易に求めることができる。また、 $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(a)}|_{e_{\min}=e_0^{vtx}}$  の代わりに  $\sigma_{z0,FEM}^{side(a)}|_{e_{\min}=e_0^{side}}$ 、 $\sigma_{z0,FEM}^{vtx(b)}|_{e_{\min}=ne_0^{vtx}}$  の代わりに  $\sigma_{z0,FEM}^{side(b)}|_{e_{\min}=ne_0^{side}}$  を用いれば、次のように界面端直線部での特異性指数  $\lambda_{side}$  を求めることができる。

$$\lambda_{side} = 1 - \frac{\ln\left(\sigma_{z0,FEM}^{side(a)}|_{e_{\min}=e_0^{side}} / \sigma_{z0,FEM}^{side(b)}|_{e_{\min}=ne_0^{side}}\right)}{\ln n} \quad (8)$$

### 3. 比例法による特異応力場の強さ ISSF の解析

図 3(a) に未知問題の 3 次元接合体、(b) に基本問題の 2 次元接合板の模式図を示す。本章では、2 次元接合板の ISSF  $K_{\sigma}^{2D}$  を用いて 3 次元接合体の界面端角部の頂点 A [例えば、 $(x,y,z) = (-W/2, -W/2, 0)$ ] での ISSF  $K_{\sigma}^{vtx}$  および界面端直線部のある点 B [例えば、 $y = -W/2$  ( $|x| < W/2$ ) 上の中心点  $(x,y,z) = (0, -W/2, 0)$ ] での ISSF  $K_{\sigma}^{side}$  を求める方法について述べる。本解析法は基本問題および未知問題の FEM 応力を用いるが、それらは 1 次要素で得たものとする。FEM 応力は比で用いることから、1 次要素でも十分に精度の良い ISSF を得ることができる。3 次元接合体の FEM 解析は計算量が膨大となるので、1 次要素が使えることは大きな利点と言える。

界面端角部の点  $A(x,y,z) = (-W/2, -W/2, 0)$  を原点とし、界面上 ( $z=0$ ) に局所極座標  $(r, \phi)$  を設定する。 $r$  軸上の  $z$  方向応力  $\sigma_z^{vtx}$  は次のように表される。

$$\sigma_z^{vtx}(r, \phi) = \frac{K_{\sigma}^{vtx}}{r^{1-\lambda_{vtx}}} \quad (9)$$

ここで、 $r$  は点 A からの距離、 $\phi$  は界面端  $y = -W/2$  と  $r$  軸のなす角、 $\lambda_{vtx}$  は特異性指数、 $K_{\sigma}^{vtx}$  は ISSF である。 $\phi = \pi/4$  とするとき、点 A から  $\sqrt{2}e_0^{vtx}$  までの平均応力  $\bar{\sigma}_z^{vtx}$  は、次式のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_z^{vtx} = \frac{1}{\sqrt{2}e_0^{vtx}} \int_0^{\sqrt{2}e_0^{vtx}} \sigma_z^{vtx}(r, \phi = \pi/4) dr = \frac{1}{\sqrt{2}e_0^{vtx}} \int_0^{\sqrt{2}e_0^{vtx}} \frac{K_{\sigma}^{vtx}|_{\phi=\pi/4}}{r^{1-\lambda_{vtx}}} dr = \frac{K_{\sigma}^{vtx}|_{\phi=\pi/4}}{\lambda_{vtx}} (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{\lambda_{vtx}-1} \quad (10)$$

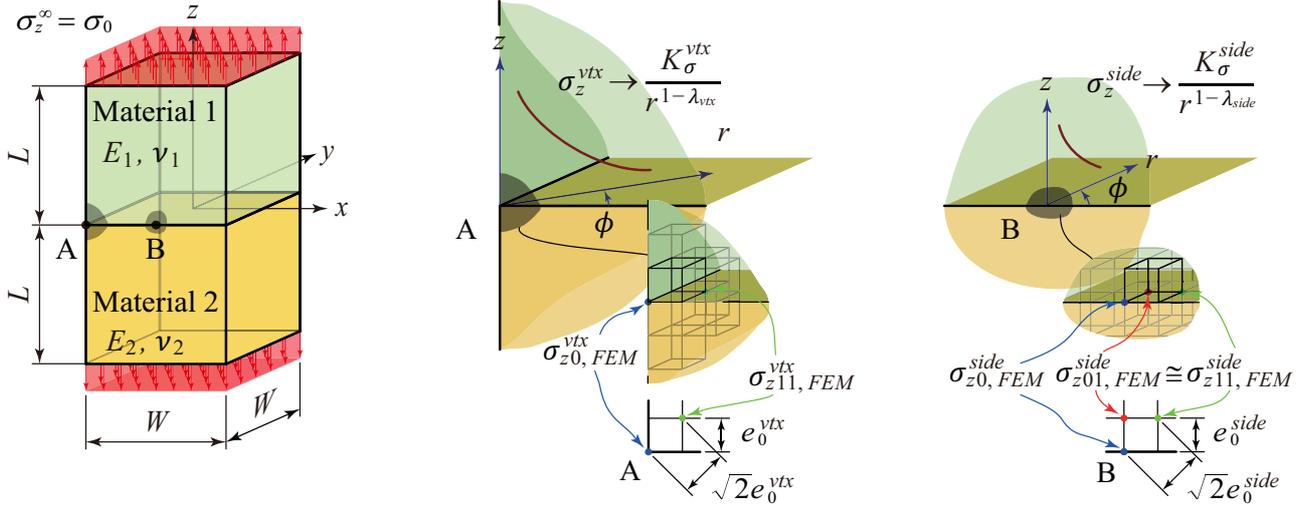
界面端直線部  $y = -W/2$  上の点  $B(x,y,z) = (0, -W/2, 0)$  を原点とし、界面上 ( $z=0$ ) に局所極座標  $(r, \phi)$  を設定する。 $r$  軸上の  $z$  方向応力  $\sigma_z^{side}$  は次のように表される。

$$\sigma_z^{side}(r, \phi) = \frac{K_{\sigma}^{side}}{r^{1-\lambda_{side}}} \quad (11)$$

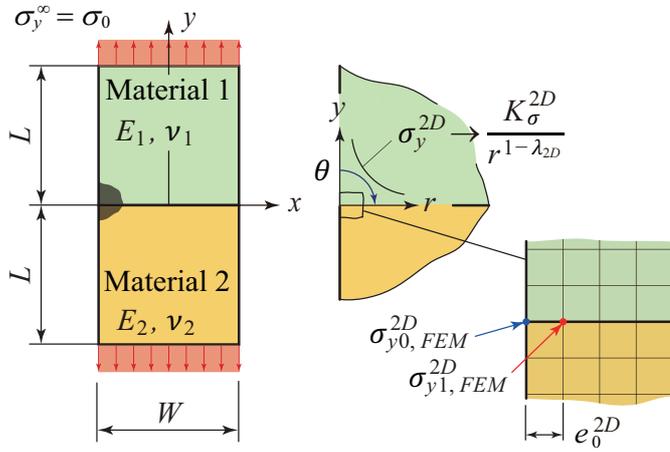
ここで、 $r$  は点 B からの距離、 $\phi$  は界面端  $y = -W/2$  と  $r$  軸のなす角、 $\lambda_{side}$  は特異性指数、 $K_{\sigma}^{side}$  は ISSF である。 $\phi = \pi/4$  とするとき、点 B から  $\sqrt{2}e_0^{side}$  までの平均応力  $\bar{\sigma}_z^{side}$  は、次式のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_z^{side} = \frac{1}{\sqrt{2}e_0^{side}} \int_0^{\sqrt{2}e_0^{side}} \sigma_z^{side}(r, \phi = \pi/4) dr = \frac{K_{\sigma}^{side}|_{\phi=\pi/4}}{\lambda_{side}} (\sqrt{2}e_0^{side})^{\lambda_{side}-1} \quad (12)$$

要素の形状が等しいことから、 $\bar{\sigma}_z^{vtx}$  と  $\bar{\sigma}_z^{side}$  には同じ誤差が含まれると考えられる。その誤差を相殺するために、次のように  $\bar{\sigma}_z^{vtx}$  と  $\bar{\sigma}_z^{side}$  で比をとる。



(a) 3D bonded body model.



(b) 2D bonded plate model.

Fig. 3 Schematic illustration of 2D bonded plate and 3D bonded body models.

$$\bar{\sigma}_z^{vtx} = \frac{K_\sigma^{vtx} |_{\phi=\pi/4} (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{\lambda_{vtx}-1}}{\lambda_{vtx}} = \frac{\sigma_{z0,FEM}^{vtx} + \sigma_{z11,FEM}^{vtx}}{2}$$

$$\bar{\sigma}_z^{side} = \frac{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/4} (\sqrt{2}e_0^{side})^{\lambda_{side}-1}}{\lambda_{side}} = \frac{\sigma_{z0,FEM}^{side} + \sigma_{z11,FEM}^{side}}{2} \quad (13)$$

ここで、 $\sigma_{z0,FEM}^{vtx}$  および  $\sigma_{z11,FEM}^{vtx}$  はそれぞれ 3次元接合体の  $(r, \phi) = (0, \pi/4)$ 、 $(\sqrt{2}e_0^{vtx}, \pi/4)$  に位置する節点の FEM 応力、 $\sigma_{z0,FEM}^{side}$  および  $\sigma_{z11,FEM}^{side}$  はそれぞれ 3次元接合体の  $(r, \phi) = (0, \pi/4)$ 、 $(\sqrt{2}e_0^{side}, \pi/4)$  に位置する節点の FEM 応力である。式 (13) を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{K_\sigma^{vtx} |_{\phi=\pi/4}}{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/4}} = \frac{\lambda_{vtx}}{\lambda_{side}} \cdot \frac{\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}} + \sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}}{\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (\sqrt{2}e_0^{side})^{1-\lambda_{side}} + \sigma_{z11,FEM}^{side} \cdot (\sqrt{2}e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}} \quad (14)$$

$\sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$  は  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$ 、 $\sigma_{z11,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$  は  $\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$  と同様に要素寸法に依存しないので、式 (14) の右辺は要素寸法に依存しない。

2次元接合板の界面端部の点  $(x, y) = (-W/2, 0)$  を原点とし、局所極座標  $(r, \theta)$  を設定する。角度  $\theta$  は自由表面  $x = -W/2$  と  $r$  軸のなす角であり、界面上 ( $y = 0$ ) の  $y$  方向応力  $\sigma_y^{2D}$  は  $\theta = \pi/2$  とすることで式 (11) と同様に次のように表される。

$$\sigma_y^{2D}(r, \theta = \pi/2) = \frac{K_\sigma^{2D}}{r^{1-\lambda_{2D}}} \quad (15)$$

ここで、 $r$  は界面端部からの距離、 $\lambda_{2D}$  は特異性指数、 $K_\sigma^{2D}$  は ISSF である。2次元モデルの界面端部は、3次元モデルに合わせて一辺の長さ  $e_0^{2D}$  の正方形の形状の要素で分割する。界面端部から  $e_0^{2D}$  までの平均応力は、次式のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_y^{2D} = \frac{1}{e_0^{2D}} \int_0^{e_0^{2D}} \sigma_y^{2D} dr = \frac{K_\sigma^{2D}}{\lambda_{2D}} (e_0^{2D})^{\lambda_{2D}-1} \quad (16)$$

3次元接合体において、点 B から  $e_0^{side}$  までの平均応力  $\bar{\sigma}_z^{side}$  は  $\phi = \pi/2$  として式 (12) と同様に次式のように与えられる。

$$\bar{\sigma}_z^{side} = \frac{1}{e_0^{side}} \int_0^{e_0^{side}} \sigma_z^{side} dr = \frac{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/2}}{\lambda_{side}} (e_0^{side})^{\lambda_{side}-1} \quad (17)$$

式 (16) の  $\bar{\sigma}_y^{2D}$  と式 (17) の  $\bar{\sigma}_z^{side}$  で比をとり、整理すると、次式が得られる。

$$\frac{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/2}}{K_\sigma^{2D}} = \frac{\lambda_{side}}{\lambda_{2D}} \cdot \frac{\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}} + \sigma_{z01,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}}{\sigma_{y0,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}} + \sigma_{y1,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}} \quad (18)$$

ここで、 $\sigma_{z01,FEM}^{side}$  は 3次元接合体の  $(r, \phi) = (e_0^{side}, \pi/2)$  に位置する節点の FEM 応力、 $\sigma_{y0,FEM}^{2D}$  および  $\sigma_{y1,FEM}^{2D}$  はそれぞれ 2次元接合板の  $(r, \theta) = (0, \pi/2)$ 、 $(e_0^{2D}, \pi/2)$  に位置する節点の FEM 応力である。式 (6) に示すように  $\sigma_{y0,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$ 、 $\sigma_{y1,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$ 、 $\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$ 、 $\sigma_{z01,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$  は要素寸法に依存しないので、式 (18) の右辺は要素寸法に依存しない。

$\phi = \pi/4$  の場合の点 B から距離  $r_0$  だけ離れた位置での応力  $\sigma_z^{side}(r = r_0, \phi = \pi/4)$  は、 $\phi = \pi/2$  の場合の点 B から距離  $r_0/\sqrt{2}$  だけ離れた位置での応力  $\sigma_z^{side}(r = r_0/\sqrt{2}, \phi = \pi/2)$  とほぼ等しくなるので、実応力に関して次の関係がある。

$$\frac{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/2}}{(r_0/\sqrt{2})^{1-\lambda_{side}}} \simeq \frac{K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/4}}{(r_0)^{1-\lambda_{side}}} \quad (19)$$

また同様に、FEM 応力に関しても次のような関係がある。

$$\sigma_{z01,FEM}^{side} \simeq \sigma_{z11,FEM}^{side} \quad (20)$$

式 (14)、(18)、(19) および (20) より、次式が得られる。

$$\frac{K_\sigma^{vtx} |_{\phi=\pi/4}}{K_\sigma^{2D}} = \frac{\lambda_{vtx}}{\lambda_{2D}} \cdot \frac{\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}} + \sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}}{\sigma_{y0,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}} + \sigma_{y1,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}} \quad (21)$$

$\sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$  は  $\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$ 、 $\sigma_{y1,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$  は  $\sigma_{y0,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$  と同様に要素寸法に依存しないので、式 (21) の右辺は要素寸法に依存しない。

界面端直線部の ISSF  $K_\sigma^{side} |_{\phi=\pi/2}$  は式 (18)、界面端角部の ISSF  $K_\sigma^{vtx} |_{\phi=\pi/4}$  は式 (21) で求めることができる。FEM 応力を用いて比例的に ISSF を求める点で、本解析法も比例法と言える。

#### 4. 本解析法の妥当性および精度についての検討

古口ら (2016) の研究を参考にして、シリコン (材料 1) と樹脂 (材料 2) からなる 3次元接合体の解析を行う。図 4(a) に基本問題の解析モデルを示す。本研究では、すべての材料組合せに対して厳密解が得られている  $L/W = 1$

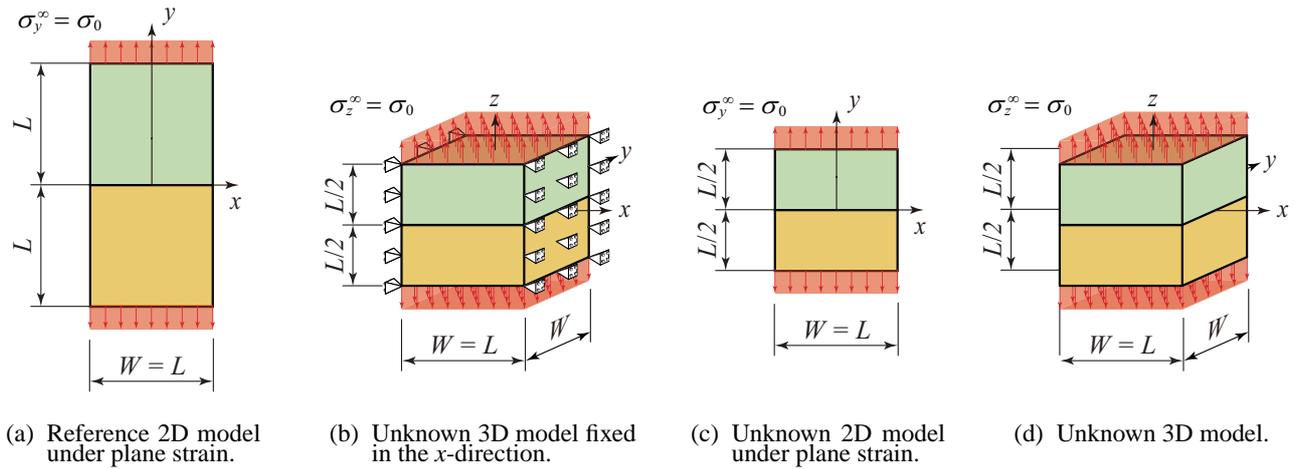


Fig. 4 Schematic illustration of analysis models.

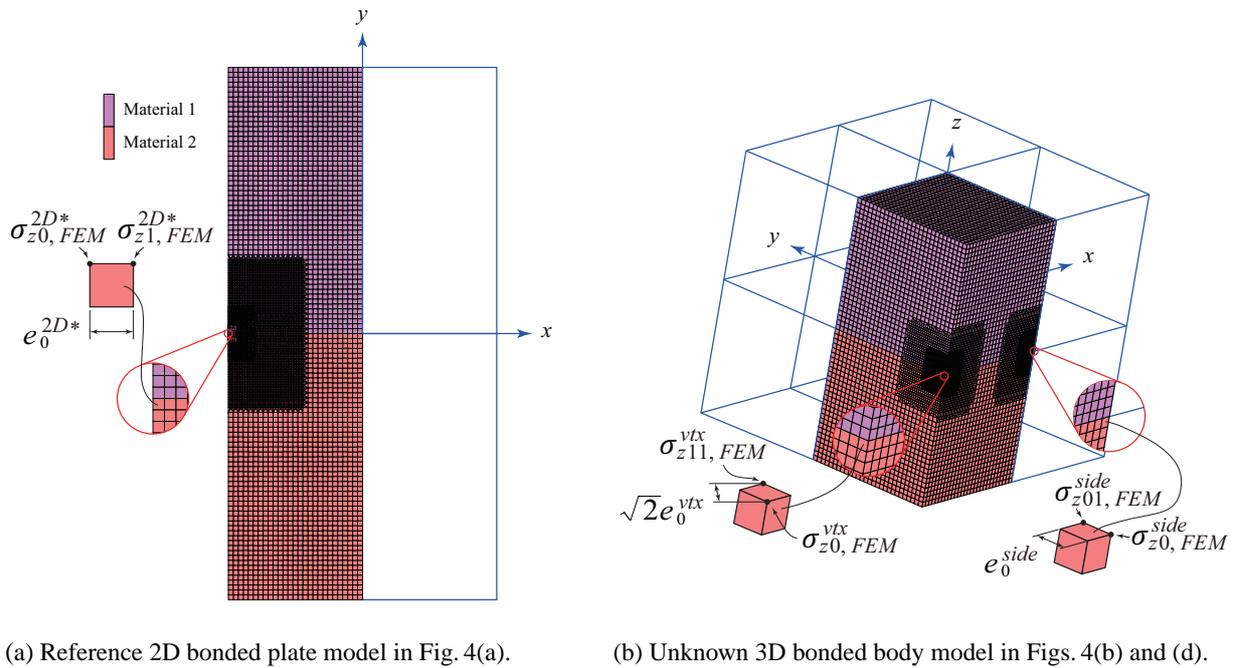


Fig. 5 Examples of meshed reference and unknown models.

の2次元接合板を基本問題に用いる．図4(b)~(d)に未知問題の解析モデルを示す．図4(b)および(d)は3次元接合体，(c)は2次元接合板であり， $L/W = 1/2$ とした．図4(b)は(d)の3次元接合体の2つの自由表面  $x = \pm W/2$  の  $x$  方向を拘束したものであり，(c)の2次元接合板に対応する．板幅  $W$  および遠方応力  $\sigma_0$  については，図4(a)~(d)のすべてのモデルで  $W = 2 \text{ mm}$ ， $\sigma_0 (= \sigma_z^\infty = \sigma_y^\infty) = 1 \text{ MPa}$  とした．3次元接合体の特異性指数および ISSF を求める点については，図4(b)は界面端直線部  $y = -W/2$  ( $|x| < W/2$ ) 上の中心点  $(x, y, z) = (0, -W/2, 0)$ ，(d)は界面端角部の頂点  $A(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$  および直線部  $y = -W/2$  ( $|x| < W/2$ ) 上の中心点  $B(0, -W/2, 0)$  とした．基本問題および未知問題の FEM 応力解析は，市販の汎用コード MSC Marc 2008 R1 で行われた．図5に基本問題の2次元接合板 [図4(a)]，未知問題の3次元接合体 [図4(b), (d)] の要素分割の様子を示す．なお，図4(c)の2次元接合板も図5(a)と同じように要素分割を行った．3次元接合体には8節点六面体要素，2次元接合板には4節点四角形要素といずれも1次要素を用いた．要素寸法については，解析結果がそれに依存しないことを確認するため，3次元接合体では  $e_0^{vtx}/(W/2) = e_0^{side}/(W/2) = 4.360 \times 10^{-6}$ ， $1.744 \times 10^{-5}$ ，2次元接合板では  $e_0^{2D}/(W/2) = 3^{-12}$ ， $3^{-9}$  とした．表1にシリコンおよび樹脂の材料定数，Dundurs (1969) の複合材料パラメータ ( $\alpha, \beta$ )，基本問題の  $L/W = 1$  の2次元接合板 [図4(a)] の特異性指数  $\lambda_{2D}$  および無次元化した ISSF  $F_\sigma^{2D*} = K_\sigma^{2D*}/(\sigma_0 W^{1-\lambda_{2D}})$  を示す．

Table 1 Material properties used in the present analyses.

Material 1		Material 2		$\alpha$	$\beta$	$\lambda_{2D}$	$F_{\sigma}^{2D*}$
$E_1$ [GPa]	$\nu_1$	$E_2$ [GPa]	$\nu_2$				
166.0	0.26	2.74	0.38	0.9647	0.1844	0.6805	0.407

Table 2 Comparison between singular indexes  $\lambda_{side}$  of 3D bonded body model fixed in the  $x$ -direction in Fig. 4(b) by Eq. (8) and  $\lambda_{2D}$  of 2D bonded plate model under plane strain in Fig. 4(c) by Eq. (23) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = \sigma_0 = 1$  MPa.

Fine mesh model		Coarse mesh model		$\lambda_{side}$	$\lambda_{2D}$
$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{side}$	$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,side}^{side}$		
$4.360 \times 10^{-6}$	40.63	$1.744 \times 10^{-5}$	26.10	0.6809	0.6805

Table 3 Mesh-dependent FEM stresses of unknown 3D bonded body model fixed in the  $x$ -direction in Fig. 4(b) and 2D bonded plate model under plane strain in Fig. 4(c) and reference 2D bonded plate model under plane strain in Fig. 4(a) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = \sigma_0 = 1$  MPa.

(a) Unknown 3D bonded body model in Fig. 4(b).

$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{side}$	$\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$	$\sigma_{z01,FEM}^{side}$	$\sigma_{z01,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$
$4.360 \times 10^{-6}$	40.63	0.7907	31.63	0.6157
$1.744 \times 10^{-5}$	26.10	0.7907	20.32	0.6157

(b) Unknown 2D bonded plate model in Fig. 4(c).

$e_0^{2D}/(W/2)$	$\sigma_{y0,FEM}^{2D}$	$\sigma_{y0,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$	$\sigma_{y1,FEM}^{2D}$	$\sigma_{y1,FEM}^{2D} \cdot (e_0^{2D})^{1-\lambda_{2D}}$
$3^{-12}$	53.32	0.7898	41.51	0.6150
$3^{-9}$	18.60	0.7898	14.48	0.6149

(c) Reference 2D bonded plate model in Fig. 4(a).

$e_0^{2D*}/(W/2)$	$\sigma_{y0,FEM}^{2D*}$	$\sigma_{y0,FEM}^{2D*} \cdot (e_0^{2D*})^{1-\lambda_{2D}}$	$\sigma_{y1,FEM}^{2D*}$	$\sigma_{y1,FEM}^{2D*} \cdot (e_0^{2D*})^{1-\lambda_{2D}}$
$3^{-12}$	52.79	0.7821	41.11	0.6090
$3^{-9}$	18.42	0.7820	14.34	0.6089

ここで，Dundurs の複合材料パラメータ  $(\alpha, \beta)$  は横弾性係数  $G_m$  および  $\nu_m$  で次のように定義される．

$$\alpha = \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \kappa_m = 3 - 4\nu_m \text{ (Plane strain)} \quad (22)$$

また， $\lambda_{2D}$  は次の特性方程式 (Bogy, 1968; Bogy, 1971) を解くことで得た．

$$\left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - \lambda^2 \right]^2 \beta^2 + 2\lambda^2 \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - \lambda^2 \right] \alpha\beta + \lambda^2[\lambda^2 - 1]\alpha^2 + \frac{\sin^2(\pi\lambda)}{4} = 0 \quad (23)$$

まず，2つの自由表面  $x = \pm W/2$  を  $x$  方向変位が0となるように拘束した3次元接合体とそれに対応する平面ひずみ条件下の2次元接合板の解析結果について述べる．表2に式(8)によって得られた3次元モデルにおける特異性指数  $\lambda_{side}$  および式(23)によって得られた2次元モデルにおける特異性指数  $\lambda_{2D}$  を示す． $\lambda_{side}$  は  $\lambda_{2D}$  とほぼ等しく，誤差は0.05%程度である． $\lambda_{side}$  が精度良く求められていることから，式(6)，(7)および(8)の妥当性が確認される．表3に基本問題および未知問題のFEM応力を示す． $\sigma_{z01,FEM}^{side}$  に注目すると，要素寸法  $e_0^{side}$  を  $4.360 \times 10^{-6}$  から  $1.744 \times 10^{-5}$  に変化させると，その値も26.10から20.32にと要素寸法で変化するのが確認される．一方， $\sigma_{z01,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$  の値は  $e_0^{side}$  に関係なく0.6157と一定であり，特異点近傍のFEM応力についても式(6)のように  $(e_{min})^{1-\lambda}$  を乗じることで要素寸法に依存しなくなることが確認される．その他の応力値についても同様であ

Table 4 ISSFs for 3D bonded body fixed in the  $x$ -direction in Fig. 4(b) and 2D bonded plate under plane strain in Fig. 4(c) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

(a) 3D bonded body in Fig. 4(b).			(b) 2D bonded plate in Fig. 4(c).		
$e_0^{2D*}/(W/2)$	$e_0^{side}/(W/2)$	$K_\sigma^{side}$	$e_0^{2D*}/(W/2)$	$e_0^{2D}/(W/2)$	$K_\sigma^{2D}$
$3^{-12}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.514	$3^{-12}$	$3^{-12}$	0.513
$3^{-12}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.514	$3^{-12}$	$3^{-9}$	0.513
$3^{-9}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.514	$3^{-9}$	$3^{-12}$	0.513
$3^{-9}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.514	$3^{-9}$	$3^{-9}$	0.513

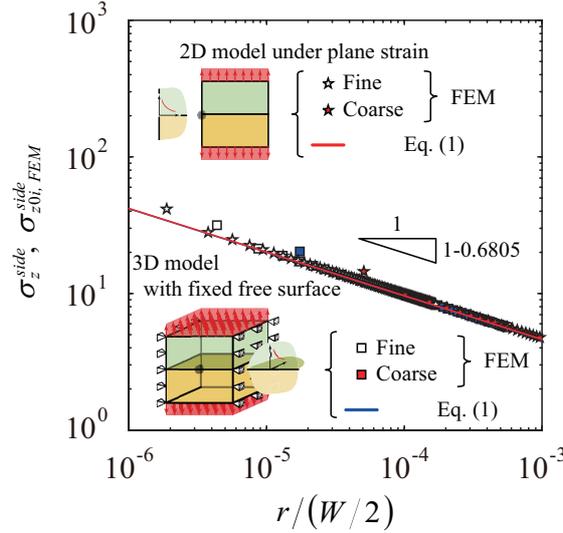


Fig. 6 Singular stress distributions at interface ends in 3D bonded body model fixed in the  $x$ -direction in Fig. 4(b) and 2D bonded plate model under plane strain in Fig. 4(c) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

Table 5 Singular indexes at corner point A  $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$  and point B  $(0, -W/2, 0)$  in unknown 3D bonded body model in Fig. 4(d),  $\lambda_{side}$  and  $\lambda_{vtx}$  when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

(a) $\lambda_{vtx}$ at corner point A $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$ .						(b) $\lambda_{side}$ at point B $(x, y, z) = (0, -W/2, 0)$ .					
Fine mesh model		Coarse mesh model		$\lambda_{vtx}$		Fine mesh model		Coarse mesh model		$\lambda_{side}$	$\lambda_{2D}$
$e_0^{vtx}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{vtx}$	$e_0^{vtx}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{vtx}$	Eq. (7)	Ref.	$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{side}$	$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{side}$		
$4.360 \times 10^{-6}$	104.9	$1.744 \times 10^{-5}$	60.64	0.6050	0.605	$4.360 \times 10^{-6}$	34.73	$1.744 \times 10^{-5}$	22.32	0.6809	0.6805

る。これより、式 (18), (21) が要素寸法に依存しないことがわかる。表 4 に表 3 の FEM 応力より式 (18) で得た  $K_\sigma^{side}$  を示す。粗と密のメッシュの組合せを様々に変化させているが、それに関係なく  $K_\sigma^{side} = 0.514$  と同じ値になっている。また、 $K_\sigma^{side}$  は  $K_\sigma^{2D}$  とほぼ等しく、誤差は 0.17% 程度である。図 6 に FEM で得た応力分布および本解析で得た  $\lambda_{side} = 0.6809$ ,  $K_\sigma^{side} = 0.514$  を用いた漸近解を示す。3 次元モデルは要素寸法に関係なく 2 次元モデルの応力分布と重なっており、図 4(b) の 3 次元接合体は図 4(c) の 2 次元接合板と対応することが確認される。また、漸近解は FEM 応力分布と重なっていることから、精度良く  $K_\sigma^{side}$  が求められていることが確認される。

次に、2 つの自由表面  $x = \pm W/2$  が拘束されていない場合の結果について述べる。表 5 に式 (7) および古口らが FEM に基づいた固有値解析で求めた  $\lambda_{vtx}$ 、式 (8) で得た  $\lambda_{side}$  および式 (23) で得た  $\lambda_{2D}$  をそれぞれ示す。 $\lambda_{vtx}$  は式 (7) による値と古口らの値、 $\lambda_{side}$  は  $\lambda_{2D}$  とほぼ一致している。 $\lambda_{vtx}$  および  $\lambda_{side}$  が精度良く求められていることから、式 (6), (7) および (8) が成り立つことが確認される。表 6 に基本問題および未知問題の FEM 応力を示す。 $\sigma_{z11,FEM}^{vtx}$  に注目すると、要素寸法  $e_0^{vtx}$  を  $4.360 \times 10^{-6}$  から  $1.744 \times 10^{-5}$  に変化させると、その値も 76.58 から 44.29 にと要素寸法で変化するのが確認される。一方、 $\sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$  の値は  $e_0^{vtx}$  に関係なく 0.6699 と一定であり、特異点近傍の FEM 応力についても式 (6) のように  $(e_{min})^{1-\lambda}$  を乗じることで要素寸法に依存しなくなることが確認さ

Table 6 Mesh-dependent FEM stress of unknown 3D bonded body model in Fig. 4(d) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

(a) FEM stress at corner point A  $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$ .

$e_0^{vtx}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{vtx}$	$\sigma_{z0,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$	$\sigma_{z11,FEM}^{vtx}$	$\sigma_{z11,FEM}^{vtx} \cdot (\sqrt{2}e_0^{vtx})^{1-\lambda_{vtx}}$
$4.360 \times 10^{-6}$	104.9	0.9172	76.58	0.6699
$1.744 \times 10^{-5}$	60.64	0.9172	44.29	0.6699

(b) FEM stress at point B  $(x, y, z) = (0, -W/2, 0)$ .

$e_0^{side}/(W/2)$	$\sigma_{z0,FEM}^{side}$	$\sigma_{z0,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$	$\sigma_{z01,FEM}^{side}$	$\sigma_{z01,FEM}^{side} \cdot (e_0^{side})^{1-\lambda_{side}}$
$4.360 \times 10^{-6}$	34.73	0.6764	27.04	0.5267
$1.744 \times 10^{-5}$	22.32	0.6764	17.38	0.5267

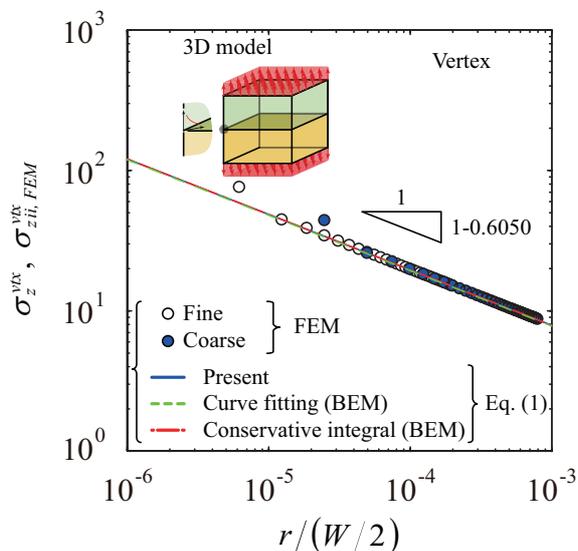
Table 7 ISSFs for the vertex and side of unknown 3D model in Fig. 4(d) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

(a) ISSF at corner point A  $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$ ,  $K_\sigma^{vtx}$ .

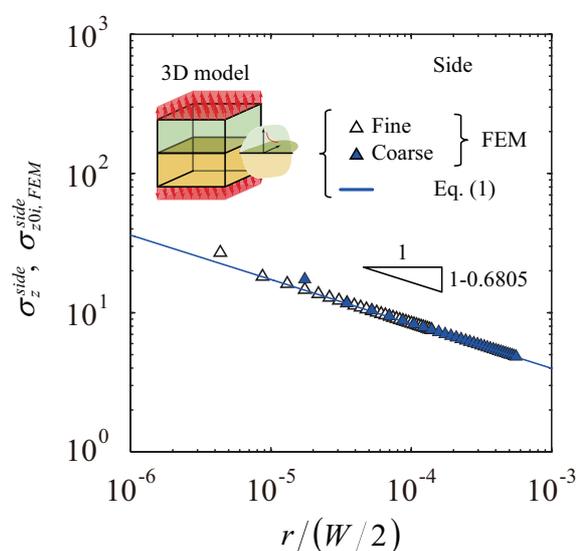
Present method			Ref. (BEM)	
$e_0^{2D^*}/(W/2)$	$e_0^{vtx}/(W/2)$	$K_\sigma^{vtx}$	Curve fitting	Conservative integral
$3^{-12}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.515	0.509	0.515
$3^{-12}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.515		
$3^{-9}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.515		
$3^{-9}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.515		

(b) ISSF at point B  $(0, -W/2, 0)$ ,  $K_\sigma^{side}$ .

Present method		
$e_0^{2D^*}/(W/2)$	$e_0^{side}/(W/2)$	$K_\sigma^{side}$
$3^{-12}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.440
$3^{-12}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.440
$3^{-9}$	$4.360 \times 10^{-6}$	0.440
$3^{-9}$	$1.744 \times 10^{-5}$	0.440



(a) Point A  $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$ .



(b) Point B  $(x, y, z) = (0, -W/2, 0)$ .

Fig. 7 Singular stress distributions at points A  $(x, y, z) = (-W/2, -W/2, 0)$  and B  $(-W/2, -W/2, 0)$  in unknown 3D model in Fig. 4(d) when  $W = 2$  mm and  $\sigma_z^\infty = \sigma_0 = 1$  MPa.

れる．その他の応力値についても同様である．表 7 に表 5 の特異性指数および表 6 の FEM 応力より式 (18) で得た  $K_\sigma^{side}$  および式 (21) で得た  $K_\sigma^{vtx}$  を示す．なお，Curve fitting は BEM で求めた応力分布を式 (1) でカーブフィットして得た値，Conservative integral は保存積分法で得た値である．式 (21) で得た  $K_\sigma^{vtx}$  は基本問題および未知問題の要素寸法  $e_0^{2D}$ ， $e_0^{vtx}$  に関係なく同じ値で，古口らが保存積分法で求めた値とも一致している．体積法で得られた  $K_\sigma^{2D}$  を基本解として用いているので，本解析で得られた  $K_\sigma^{vtx}$  も体積法と同程度の精度を有していると考えられる．図 7(a) に界面端角部の点 A，(b) に直線部中央の点 B の特異応力分布を示す．なお，実線は表 5 の特異性指

Table 8 Material properties used in the present analyses.

Adherend			Adhesive			$\alpha$	$\beta$	$\lambda_{2D}$	$F_{\sigma}^{2D*}$
Material	$E_1$ [GPa]	$\nu_1$	Material	$E_2$ [GPa]	$\nu_2$				
S35C	210.0	0.3	Epoxy resin A	3.14	0.37	0.969	0.199	0.684	0.405
	210.0	0.3	Epoxy resin B	2.16	0.38	0.978	0.188	0.673	0.404

数および表 7 の ISSF を式 (1) に代入して得た漸近解である．図 7(a), (b) のいずれも漸近解は FEM 応力分布と重なっており，表 5 の特異性指数および表 7 の ISSF は精度良く求められていることが確認される．

以上の結果より，2 章で提案した特異性指数の解析法および 3 章で提案した ISSF の解析法の妥当性が確認される．本研究では，3 次元接合体の界面端角部の特異性指数と ISSF を簡便に効率良く求める新しい解析法を提案し，その精度と実用性を検討するため，まず特異性指数が 1 つの実数として知られている場合を取り扱った．接合断面の形状，荷重条件，材料組合せなどによっては特異性指数が複数個の実数あるいは虚数となる場合があることが知られている（古口他, 1998; 古賀他, 2017）．また，任意の角度 ( $\theta, \phi$ ) での ISSF が要求される場合も考えられる．今後は，このような場合にも適用できるように本研究結果を発展させていく予定である．なお，著者らは 2 次元接合板の ISSF の解析において同様な解析手法を特異性指数が 1 実数の場合（Zhang et al., 2015a; Zhang et al., 2015b）に限らず 2 実数の場合（宮崎他, 2013; 宮崎他, 2018）や複素数の場合（野田他, 2014; Noda, et al., 2015）に発展させてきている．特に，本解析法は特別な要素，複雑な計算を必要とせず，数点の FEM 応力のみで精度良く特異性指数および ISSF を簡便に効率良く求めることのできる特徴がある．

### 5. 3 次元モデルを用いて求めた突合わせ継手破断時の ISSF

本章では，3 次元モデルを用いて図 1(a) の突合わせ継手の破断時の ISSF  $K_{\sigma_c}^{vtx}$  および  $K_{\sigma_c}^{side}$  を求める．試験片は炭素鋼 S35C とエポキシ系接着剤からなり，接着層厚さ  $h$  は 0.05 ~ 5 mm である（Suzuki, 1987）．表 8 に被着材および接着剤の材料定数，2 次元モデルにおける特異性指数  $\lambda_{2D}$  および基本解  $F_{\sigma_c}^{2D*}$  を示す（野田他, 2014; Noda et al., 2015）．接着剤 A はぜい性接着剤，接着剤 B は延性接着剤になる（Suzuki, 1987）．

表 9，図 8 に 3 次元モデルおよび 2 次元モデルで得た継手破断時の ISSF  $K_{\sigma_c}^{vtx}$ ， $K_{\sigma_c}^{side}$  および  $K_{\sigma_c}^{2D}$  を示す．なお，界面端角部での特異性指数  $\lambda_{vtx}$  は接着剤 A の場合が 0.608，接着剤 B の場合が 0.596 となった． $K_{\sigma_c}^{vtx}$  および  $K_{\sigma_c}^{side}$  は，接着剤 A, B のいずれの場合も  $K_{\sigma_c}^{2D}$  と同様に  $h$  に関係なくほぼ一定となっている． $K_{\sigma_c}^{side}$  は 2 次元モデルで得た  $K_{\sigma_c}^{2D}$  とほぼ等しく， $K_{\sigma_c}^{side} \simeq K_{\sigma_c}^{2D}$  となっている．図 1(c) に示すように， $K_{\sigma_c}^{side}$  の分布は  $h$  に関係なくほぼ 1 つの曲線で表され，界面端直線部の中央から角部に向けて約 90 % の範囲で一定となる．したがって，2 次元モデルでの評価は，3 次元モデルの界面端直線部での評価に相当することが確認される． $K_{\sigma_c}^{vtx}$  および  $K_{\sigma_c}^{side}$  の平均値に対するばらつきは，接着剤 A の場合は  $K_{\sigma_c}^{side}$  の方が  $K_{\sigma_c}^{vtx}$  よりも小さいが，接着剤 B の場合は  $K_{\sigma_c}^{vtx}$  の方が  $K_{\sigma_c}^{side}$  よりも小さかった．しかしながら，いずれの場合もそれらのばらつきの差はわずかであり，継手破断時の ISSF は界面端直線部および角部のいずれで評価しても接着層厚さに関係なく一定となり，大きな差は見られない． $K_{\sigma_c}^{side} \simeq K_{\sigma_c}^{2D}$  より，はく離強度は 2 次元モデルでも 3 次元モデルと同等な評価が行えると言える．

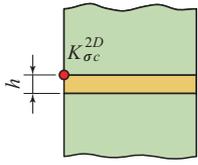
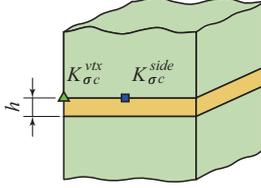
## 6. 結 言

本論文では，3 次元接合体の界面端角部の特異性指数および特異応力場の強さ ISSF を簡便に効率良く求める方法を提案し，その精度および実用性について検討した．また，突合わせ継手の破断時の ISSF を 3 次元モデルで求め，2 次元モデルで得た結果と比較し，はく離強度について議論した．以下に，得られた知見をまとめる．

- (1) 突合わせ継手破断時の ISSF は，3 次元モデルの界面端直線部および角部のいずれで評価しても接着層厚さに関係なく一定となる結果が得られた．また，界面端直線部の ISSF は，2 次元モデルの ISSF と一致した．これらの結果より，はく離強度の評価は 2 次元モデルでも十分可能であることがわかった．
- (2) 本解析法は，特別な要素，複雑な計算を必要とせず，数点の FEM 応力のみで 3 次元接合体の界面端角部での特異性指数および ISSF を簡便に得ることができる．

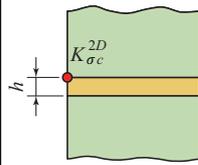
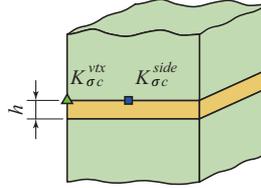
Table 9 Comparison between critical ISSFs at debonding fracture by 2D and 3D models.

(a) S35C / Epoxy resin A.

$h$ [mm]	$\sigma_f$ [MPa]			
		2D model	3D model	
		$K_{\sigma_c}^{2D}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{2D}}$ ]	$K_{\sigma_c}^{vtx}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{vtx}}$ ]	$K_{\sigma_c}^{side}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{side}}$ ]
0.05	57.2	0.970	0.392	0.966
0.1	53.3	1.120	0.482	1.130
0.3	32.5	0.978	0.458	0.989
0.6	25.9	0.981	0.487	0.983
1.0	22.6	1.017	0.532	1.055
2.0	18.4	1.071	0.606	1.138
5.0	13.4	1.135	0.724	1.144
Average $K_{\sigma_c}$		1.039	0.526	1.058

$$\lambda_{2D} = \lambda_{side} = 0.684, \lambda_{vtx} = 0.608.$$

(b) S35C / Epoxy resin B.

$h$ [mm]	$\sigma_f$ [MPa]			
		2D model	3D model	
		$K_{\sigma_c}^{2D}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{2D}}$ ]	$K_{\sigma_c}^{vtx}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{vtx}}$ ]	$K_{\sigma_c}^{side}$ [MPa·m $^{1-\lambda_{side}}$ ]
0.05	76.8	1.147	0.457	1.144
0.1	71.4	1.339	0.565	1.346
0.3	49.7	1.342	0.621	1.361
0.6	41.2	1.411	0.694	1.428
1.0	25.3	1.042	0.539	1.082
2.0	19.7	1.060	0.596	1.132
5.0	13.6	1.085	0.691	1.094
Average $K_{\sigma_c}$		1.204	0.595	1.227

$$\lambda_{2D} = \lambda_{side} = 0.674, \lambda_{vtx} = 0.596.$$

- (3) 相似的に寸法のみを変化させた2つのメッシュパターンでFEM解析し、得られた応力値より特異性指数を求める方法を提案した。2つの自由表面を拘束した3次元接合体を解析した結果、2次元接合板の理論値とほぼ等しい値を得た。また、過去の研究と同じ3次元接合体を解析した結果、本方法はFEMによる固有値解析と同等の精度を有することがわかった。
- (4) 2次元接合板を基本問題に用い、それとのFEM応力の比から3次元接合体のISSFを求める方法を提案した。2つの自由表面を拘束した3次元接合体を解析した結果、平面ひずみ条件下での2次元接合板とほぼ等しい値が得られた。また、過去の研究と同じ3次元接合体を解析を行い、保存積分法とほぼ等しい結果が得られた。体積力法で得られたISSFを基本解に用いていることから、本解析法は体積力法と同程度の精度を有すると考えられる。

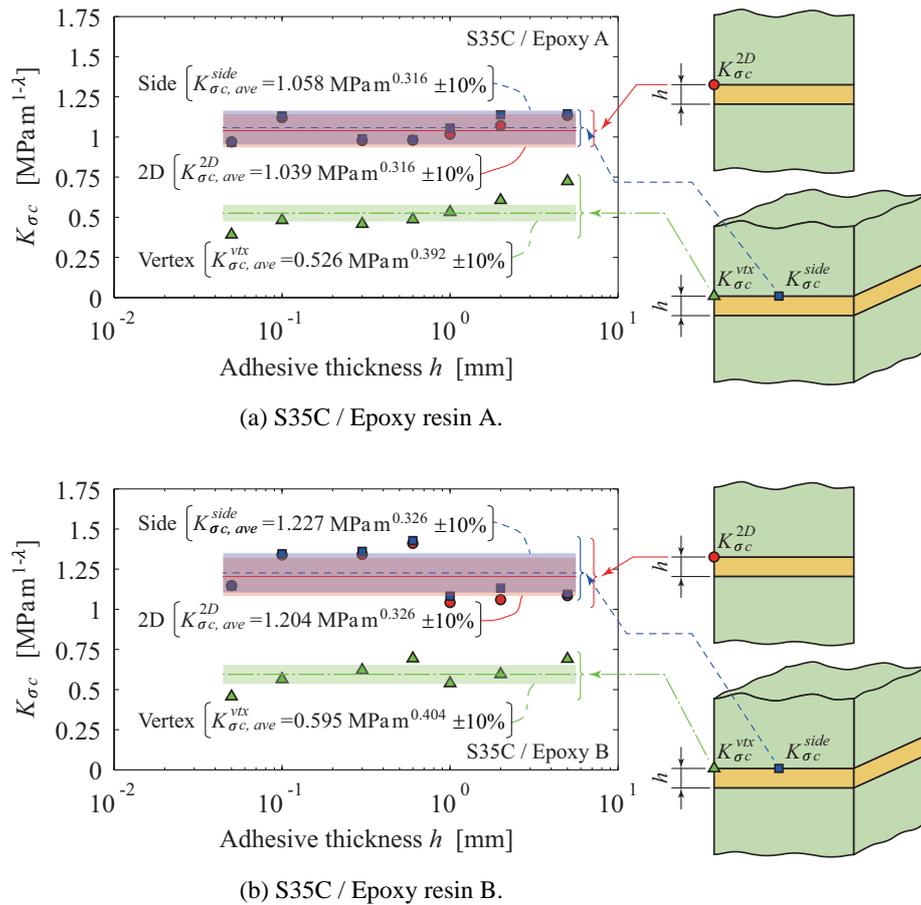


Fig. 8 Relation between critical ISSF  $K_{\sigma c}$  and adhesive layer thickness  $h$ .

## 文 献

- Akisanya, A. R. and Meng, C. S., Initiation of fracture at the interface corner of bi-material joints, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51 (2003), pp. 27 - 46.
- Barnes, T. A. and Pashby, I. R., Joining techniques for aluminium spaceframes used in automobiles: Part II - adhesive bonding and mechanical fasteners, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 99 (2000), pp. 72 - 79.
- Bogy, D. B., Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35 (1968), pp. 460 - 466.
- Bogy, D. B., Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38 (1971), pp. 377 - 386.
- 陳玳珩, 西谷弘信, 板状接合試験片における特異応力場の強さ, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 59, No. 567 (1993), pp. 2682 - 2686.
- Dundurs, J., Discussion of edge-bonded dissimilar orthotropic elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36 (1969), pp. 650 - 652.
- 氷室雄也, 定井麻子, 松井恵子, 住田弘祐, 山本研一, ウェルドボンド用接着剤の市場劣化推定技術の開発, *マツダ技報*, No. 30 (2012), pp. 219 - 223.
- 古賀裕二, 田口陽介, 小金丸正明, 池田徹, 宮崎則幸, 三次元異方性異種材接合角部の特異応力場解析, *日本機械学会論文集*, Vol. 83, No. 845 (2017), DOI: 10.1299/transjsme.16-00382.
- 古口日出男, 村本隆, 井原郁夫, 角部を有する三次元異材接合体の応力特異性, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 64, No. 618 (1998), pp. 480 - 487.
- 古口日出男, 坂井 英孝, Prukvilailert Monchai, 三次元境界要素法を用いた三次元異材接合体の特異応力場解析, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol. 71, No. 703 (2005), pp. 402 - 410.

- 古口日出男, 横山洗幾, Luangarpa Chonlada, 保存積分による三次元異材接合体界面端の特異応力場の強さ (積分半径, 要素サイズおよび接合体幅の影響), 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 833 (2016), DOI: 10.1299/transjsme.15-00372.
- 倉橋貴彦, 渡辺裕太郎, 近藤俊美, 古口日出男, 三次元特異性オーダを用いた Akin 特異要素による異材接合体の界面端角部近傍における特異応力場の評価 (四面体要素と特異要素使用時の結果の比較), 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 809 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014cm0017.
- Mintzas, A. and Nowell, D., Validation of an  $H_{cr}$ -based fracture initiation criterion for adhesively, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 80 (2012), pp. 13 - 27.
- 宮崎達二郎, 野田尚昭, 李戎, 内木場卓巳, 佐野義一, 特異応力場の強さに基づく単純重ね合わせ継ぎ手のはく離破壊基準の検討, エレクトロニクス実装学会誌, Vol. 16, No. 2 (2013), pp. 143 - 151.
- 宮崎達二郎, 野田尚昭, 佐野義一, 単純重ね合わせ継手に固有の 2 つの特異応力場の強さを求める実用的解析法について, エレクトロニクス実装学会誌, Vol. 21, No. 2 (2018), pp. 166 - 177.
- 野田尚昭, 白尾亮司, 李俊, 杉本淳典, 強化繊維の引抜きにおける繊維端部の特異応力場の強さ, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 72, No. 721 (2006), pp. 1397 - 1404.
- 野田尚昭, 宮崎達二郎, 内木場卓巳, 李戎, 佐野義一, 高瀬康, 接着接合板における特異応力の強さをを用いた接着強度の簡便な評価法について, エレクトロニクス実装学会誌, Vol. 17, No. 2 (2014), pp. 132 - 142.
- Noda, N. -A., Miyazaki, T., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding strength evaluation in terms of the intensity of singular stress at the interface corner with and without fictitious crack, International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 61 (2015), pp. 46 - 64.
- 野田尚昭, 任飛, 高木怜, 坪井健二, 佐野義一, 3 次元形状を考慮した接着強度評価試験片の特異応力場の強さの分布の解析, 日本材料学会九州支部第 4 回学術講演会講演論文集 (中国・九州支部合同研究会), Vol. 4 (2017), pp. 55 - 56.
- 野田尚昭, 任飛, 高木怜, 坪井健二, 佐野義一, 高瀬康, 宮崎達二郎, 特異応力場の強さの 2 次元解析に基づく接着強度評価の妥当性, エレクトロニクス実装学会誌, Vol. 21, No. 4 (2018), pp. 1 - 12.
- Pageau, S. S., Joseph P. F. and Biggers, S. B. Jr., The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions, International Journal of Solids and Structures, Vol. 31, No. 21 (1994), pp. 2979 - 2997.
- Pageau, S. S. and Biggers, S. B. Jr., Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials, International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol. 38, No. 13 (1995), pp. 2225 - 2239.
- Qian, Z. and Akisanya, A. R., An experimental investigation of failure initiation in bonded joints, Acta Materialia, Vol. 46, No. 14 (1998), pp. 4895 - 4904.
- 崎山達也, 村山元, 内藤恭章, 才田健二, 宮崎康信, 及川初彦, 野瀬哲郎, 自動車ボディにおける鋼板とアルミニウム合金板との異種金属接合技術, 新日鉄技報, No. 393 (2012), pp. 91 - 98.
- 佐藤千明, 自動車構造用接着接合技術の最新動向, 鑄造工学, Vol. 83, No. 12 (2011), pp. 738 - 742.
- 沢俊行, 接着継手の応力解析の現状と今後の課題, 日本接着学会誌, Vol. 45, No. 4 (2009), pp. 145 - 149.
- Suzuki, Y., Adhesive tensile strengths of scarf and butt joints of steel plates (Relation between adhesive layer thicknesses and adhesive strengths of joints), JSME International Journal, Vol. 30, No. 265 (1987), pp. 1042 - 1051.
- Zhang, Y., Noda, N. -A., Wu, P. and Duan, M., A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints, International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 57 (2015a), pp. 105 - 117.
- Zhang, Y., Noda, N. -A., Wu, P. and Duan, M., Corrigendum to "A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints" [International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 57 (2015), pp. 105 - 117], International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol. 60 (2015b), p. 130.

## References

- Akisanya, A. R. and Meng, C. S., Initiation of fracture at the interface corner of bi-material joints, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 51 (2003), pp. 27 - 46.
- Barnes, T. A. and Pashby, I. R., Joining techniques for aluminium spaceframes used in automobiles: Part II - adhesive bonding and mechanical fasteners, Journal of Materials Processing Technology, Vol. 99 (2000), pp. 72 - 79.

- Bogy, D. B., Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35 (1968), pp. 460 - 466.
- Bogy, D. B., Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38 (1971), pp. 377 - 386.
- Chen, D. H. and Nisitani, H., Intensity of singular stress field near the interface edge point of a bonded strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 59, No. 567 (1993), pp. 2682 - 2686 (in Japanese).
- Dundurs, J., Discussion of edge-bonded dissimilar orthotropic elastic wedges under normal and shear loading, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36 (1969), pp. 650 - 652.
- Himuro, K., Sadai, A., Matsui, K., Sumida, H. and Yamamoto, K., Development of technology to estimate deterioration of structural adhesives in market, *Mazda Technical Report*, No. 30 (2012), pp. 219 - 223 (in Japanese).
- Koga, Y., Taguchi, Y., Koganemaru, M., Ikeda, T. and Miyazaki, N., Development of the singular stress analyses for three-dimensional interfacial corners, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol. 83, No. 845 (2017), DOI: 10.1299/transjsme.16-00382.
- Koguchi, H., Muramoto, T. and Ihara, I., Analysis for Stress Singularity Field at a Vertex in Three-Dimensional Bonded Structures, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 64, No. 618 (1998), pp. 480 - 487 (in Japanese).
- Koguchi, H., Sakai, H. and Monchai, P., Analysis of Stress Singularity Field in Three-Dimensional Joints Using Three-Dimensional Boundary Element Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 71, No. 703, (2005), pp. 402 - 410 (in Japanese).
- Koguchi, H., Yokoyama, K. and Luangarpa, C., Determination of the intensity of singularity at the vertex of interface in three-dimensional joints using a conservative integral (Effect of radius of integral domain and size of element), *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol. 82, No. 833 (2016), DOI: 10.1299/transjsme.15-00372.
- Kurahashi, T., Watanabe, Y., Kondo, T. and Koguchi, H., Evaluation of stress singularity field near vertex on interface of dissimilar material joints based on Akin singular element using three-dimensional order of singularity (Comparison of results in case of tetrahedron and singular elements), *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol. 80, No. 809 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014cm0017.
- Mintzas, A. and Nowell, D., Validation of an  $H_{cr}$ -based fracture initiation criterion for adhesively, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 80 (2012), pp. 13 - 27.
- Miyazaki, T., Noda, N. -A., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding criterion for single lap joints from the intensity of singular stress field, *Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging*, Vol. 16, No. 2 (2013), pp. 143 - 151 (in Japanese).
- Miyazaki, T., Noda, N. -A. and Sano, Y., A precise and efficient analytical method to obtain two distinct intensities of singular stress fields for single lap joint, *Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging*, Vol. 21, No. 2 (2018), pp. 166 - 177 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Shirao, R., Li, J. and Sugimoto, J., Intensity of singular stress at the end of a fiber under pull-out force, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 72, No. 721, (2006), pp. 1397 - 1404 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Miyazaki, T., Uchikoba, T., Li, R., Sano, Y. and Takase, Y., Convenient debonding strength evaluation based on the intensity of singular stress for adhesive joints, *Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging*, Vol. 17, No. 2 (2014), pp. 132 - 142 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Miyazaki, T., Li, R., Uchikoba, T. and Sano, Y., Debonding strength evaluation in terms of the intensity of singular stress at the interface corner with and without fictitious crack, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 61 (2015), pp. 46 - 64.
- Noda, N. -A., Ren, F., Takaki, R., Tsuboi, K. and Sano, Y., Intensity of singular stress field distributions along interface for 3D butt joint, *Proceedings of the 4th Meeting of JSMS, Kyushu & Joint Meeting of JSMS, Chugoku and Kyushu*, Vol. 4 (2017), pp. 55 - 56 (in Japanese).
- Noda, N. -A., Ren, F., Takaki, R., Tsuboi, K., , Sano, Y., Takase, Y. and Miyazaki, Validity of the adhesive strength

- evaluation method based on the intensity of singular stress field in two-dimensional modelling, *Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging*, Vol. 21, No. 4 (2018), pp. 1 - 12 (in Japanese).
- Pageau, S. S., Joseph P. F. and Biggers, S. B. Jr., The order of stress singularities for bonded and disbonded three-material junctions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 21 (1994), pp. 2979 - 2997.
- Pageau, S. S. and Biggers, S. B. Jr., Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 38, No. 13 (1995), pp. 2225 - 2239.
- Qian, Z. and Akisanya, A. R., An experimental investigation of failure initiation in bonded joints, *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 14 (1998), pp. 4895 - 4904.
- Sakiyama, T., Murayama, G., Naito, Y., Saita, K., Miyazaki, Y., Oikawa, H. and Nose, T., Dissimilar metal joining technologies for steel sheet and aluminum alloy sheet in auto body, *Shinnittetsu giho*, No. 393 (2012), pp. 91 - 98 (in Japanese).
- Sato, C., Recent trends of adhesive bonding technology for car structures, *Journal of Japan Foundry Engineering Society*, Vol. 83, No. 12 (2011), pp. 738 - 742 (in Japanese).
- Sawa, T., Recent researches on stress analysis of adhesive joints and future issues to be examined, *Journal of The Adhesion Society of Japan*, Vol. 45, No. 4 (2009), pp. 145 - 149.
- Suzuki, Y., Adhesive tensile strengths of scarf and butt joints of steel plates (Relation between adhesive layer thicknesses and adhesive strengths of joints), *JSME International Journal*, Vol. 30, No. 265 (1987), pp. 1042 - 1051.
- Zhang, Y., Noda, N. -A., Wu, P. and Duan, M., A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 57 (2015a), pp. 105 - 117.
- Zhang, Y., Noda, N. -A., Wu, P. and Duan, M., Corrigendum to "A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints" [*International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 57 (2015), pp. 105 - 117], *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 60 (2015b), p. 130.