

# 繊維の引抜きにおける特異応力場の強さの解析

野田 尚昭\* 陳 棟\*\* 高木 怜\*\*  
井上 紅音\*\*\* 張 国偉\*\* 佐野 義一\*\*

## Intensity of Singular Stress Fields of an Embedded Fiber under Pull-Out Force

by

Nao-Aki NODA\*, Dong CHEN\*\*, Rei TAKAKI\*\*,  
Akane INOUE\*\*\*, Guowei ZHANG\*\* and Yoshikazu SANO\*\*

In this study, an embedded fiber is considered in matrix under pull-out force. Then, two intensities of singular stress fields (ISSF) are discussed appearing at the fiber end A and the intersection point E of the fiber and the surface. The analysis method focuses on the FEM stress at points A and E by applying the same FEM mesh pattern to the unknown and reference 2D models. To analyze the ISSF at A, the body force method solution is used as the reference model. To analyze the ISSF at E, the reciprocal work contour integral method (RWCIM) solution is used as the reference model. Then, the two ISSFs are compared by varying the fiber bonded length  $l_{in}$ . When  $l_{in}$  is shorter, the singular stress at A is larger than the singular stress at E. When  $l_{in}$  is longer, the singular stress at E is larger than the singular stress at A.

### Key words:

Elasticity, Composite material, Fiber-pullout, Body force method, Singular integral equation, Intensity of singular stress field

### 1 緒 言

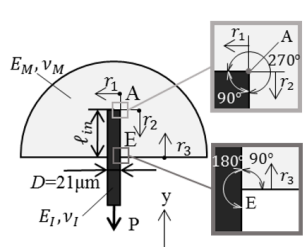
繊維強化複合材料は今日、建設、海洋産業、航空宇宙技術、輸送分野、産業機器などにおいて一般的に広く用いられている。繊維強化複合材料は金属と比べて比重に対する強度（比強度）がより高く、コストも低いため、一般に強化繊維として、近年カーボン、ガラスおよびアラミドのような非金属強化材料がよく用いられている。中でも、ガラス繊維ポリマー複合材料（GFRP）は、優れた剛性と比強度をもつため、コスト等を総合して、より性能が優れたCFRPよりも広く使用されている複合材料であり、重要な工業材料として位置づけられている。

繊維強化複合材料中で、繊維は主に母材中の応力およびひずみを減少させることで破断強度を高めるのに用いられている。ここで強化繊維が用いられる場合、繊維の接着強度を知ることが重要であり、標準的な試験方法としてFig.1に示すような繊維の引抜き試験が用いられている。

繊維の引抜きの実験については多くの研究が行われており、例えば、Zhandarovらは、繊維の引抜き力を調べている。また、Scheerらは、エネルギー解放率に注目して、強化繊維の界面はく離について実験的に調べている<sup>2)</sup>。さらに、Tsaiらは、引張力と繊維の引抜きの過程をはく離と摩擦すべりに注目して調べている<sup>3)</sup>。これらの繊維の引抜き実験において、強化繊維と母材間の界面強度を議論する際、その界面の応力分布にはあまり注意が払われていないようである。しかし、引抜きの際ではFig.1に示すように、繊維端縁界面（点A）と繊維の母材表面交差部（点E）とに特異応力場が生じ、初期破壊の起点になると想定される。よって繊維強化複合材料の機械的強度を評価するためには、これらの特異応力場の強さ ISSF (Intensity of

Singular Stress Fields) を知る必要がある。しかし、点Aと点Eに生じる2つの特異応力場の強さを求め比較した研究は見当たらない。そこで、本研究ではまず2次元モデルを用いて点A、点Eに生じる特異応力場の強さISSFを求め議論する。なお、接着層のせん断応力分布を議論するのにシアラグ理論<sup>4-6)</sup>が広く用いられているが、シアラグ理論は接着層がせん断応力のみを伝達するという単純化した1次元モデルによる仮定に基づくものであるため弾性力学の特異応力場を取り扱うことはできない。

先の研究で著者らは接着層の幾何学的形状を変化させてISSF(記号 $K_{\sigma}$ で表す)に与える影響を考察し、種々の接着継手のはく離強度がISSF  $K_{\sigma c}$  =一定で表現することができることを示している<sup>7-12)</sup>。

$$\begin{cases} \sigma_y^A(r_1) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^A}}{r_1^{1-\lambda_1^A}} + \frac{K_{\sigma, \lambda_2^A}}{r_1^{1-\lambda_2^A}} \\ \tau_{xy}^A(r_1) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^A}}{r_1^{1-\lambda_1^A}} + \frac{K_{\tau, \lambda_2^A}}{r_1^{1-\lambda_2^A}} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x^E(r_2) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^E}}{r_2^{1-\lambda_1^E}} - \frac{K_{\sigma, \lambda_2^E}}{r_2^{1-\lambda_2^E}} \\ \tau_{xy}^E(r_2) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^E}}{r_2^{1-\lambda_1^E}} - \frac{K_{\tau, \lambda_2^E}}{r_2^{1-\lambda_2^E}} \end{cases}$$


$$\begin{cases} \sigma_x^E(r_3) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^E}}{r_3^{1-\lambda_1^E}} + \frac{K_{\sigma, \lambda_2^E}}{r_3^{1-\lambda_2^E}} \\ \tau_{xy}^E(r_3) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^E}}{r_3^{1-\lambda_1^E}} + \frac{K_{\tau, \lambda_2^E}}{r_3^{1-\lambda_2^E}} \end{cases}$$

Fig. 1 Two-dimensional pull-out model for partially embedded fiber.

† 原稿受理 平成30年 2月16日 Received Feb. 16, 2018 ©2018 The Society of Materials Science, Japan

\* 正 会 員 九州工業大学 大学院工学研究院 機械知能工学研究系 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町  
Department of Mechanical Engineering, Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu 804-8550.

\*\* 九州工業大学大学院 工学府 機械知能工学専攻 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町

Department of Mechanical Engineering, Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu 804-8550.

\*\*\* 九州工業大学 工学部 機械知能工学科 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町

Department of Mechanical Engineering, Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu 804-8550.

Table 1 Mechanical properties.

	Matrix Epon 828	Fiber E-Glass
Young's Modulus	$E_M=3.3$ GPa	$E_I=75$ GPa
Poisson's Ratio	$\nu_M=0.35$	$\nu_I=0.17$
Dundurs parameter $\alpha$		-0.9071
Dundurs parameter $\beta$		-0.2016

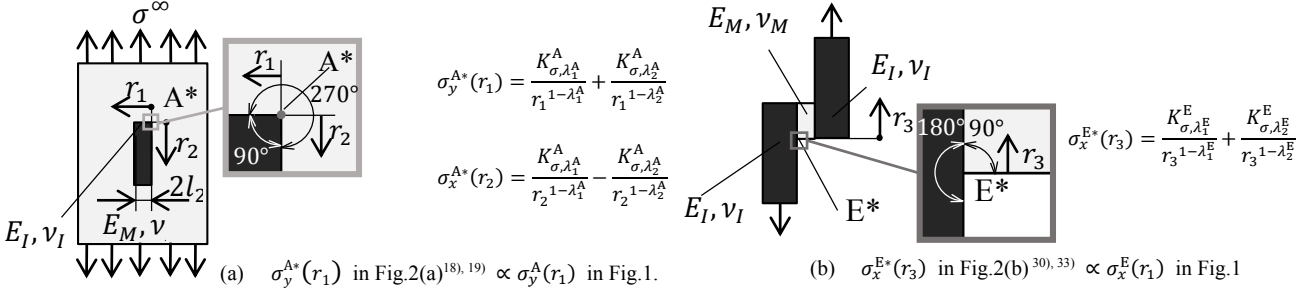


Fig. 2 Similar singular stress fields used as reference solutions.

## 2 繊維端縁界面における特異応力場について

本研究では、有限要素法 (Finite Element Method, FEM) を用いるが、FEM 応力値は通常メッシュサイズに影響するため、特異応力場の強さ ISSF を正確に求める工夫を行っている。すなわち、著者らは先の研究で<sup>13)~16)</sup>、未知問題と基準問題を界面端部周辺でのメッシュパターンを揃えて FEM 解析し、未知問題と基準問題の FEM 応力の比に注目すれば、それが ISSF の比に一致することを明らかにした。ここで FEM 応力の比の値に注目するのは、解析上の誤差が打ち消され FEM 応力の比の値がメッシュの大小に依らず値が一致する<sup>13), 14)</sup>ためである (後述の Table 2 参照)。未知問題の ISSF は、FEM 応力の比と厳密解のある基準問題の ISSF を掛け合わせることで求められる。FEM 応力の比については界面端部 (第ゼロ節点)<sup>17)~19)</sup>でなくともよい (後述の Table 2 参照) ことから、本研究で用いる解析法は第ゼロ節点法<sup>17)</sup>を包含する比例法<sup>18), 19)</sup>と呼ぶことができる。

Fig.1 に本論文で考察する繊維の引ききの 2 次元モデルを示す。強化繊維の表現としてここではまず 2 次元長方形モデル<sup>20)~25)</sup>を用いて点 A と点 E の特異応力場を議論する。実際の強化繊維に近いモデルとして円柱状モデル<sup>24)~27)</sup>も有用であるが、その解析には、周方向ひずみが有限となることに起因する非特異項の除去に解析上の工夫が必要となる<sup>11), 12), 20)~27)</sup>。ここでは、母材は Epon828、繊維はガラス繊維とし<sup>2)</sup>、繊維の全長  $l$ 、繊維埋込部長さを  $l_{in}$ 、繊維幅  $D = 21 \mu\text{m}$ 、母材は半無限体とする。ここで、母材の Epon828 はビスフェノール A 型液状エポキシ樹脂を、m-フェニレンジアミンで硬化させたものである。用いた母材と強化繊維の機械的性質を Table 1 に示す。本研究では、Fig.1 の問題において、繊維埋込部長さ  $l_{in}$  を変化させ、点 A、点 E における ISSF を議論する。

本研究では Fig.1 に示すような  $xy$  座標系を用いる。  $y$  方向は繊維の軸方向に相当し、  $x$  方向は繊維の横方向に相当する。  $r_1$  は点 A からの  $x$  方向距離、  $r_2$  は点 A からの  $y$  方向距離、  $r_3$  は点 E からの  $y$  方向距離である。

ここで、Fig.1 の点 A の特異応力場は、Fig.2(a) に示す母材中にある強化繊維の角部  $A^*$  の特異応力場と同じである。ここでは Fig.2(a) の問題の特異応力場の強さ ISSF は、体積力法で計算して基準問題の解として用いる<sup>20)</sup>。

点 A における特異性指数  $\lambda_1^A$ 、  $\lambda_2^A$  は以下の特性方程式を解くことで得られる<sup>21), 28)</sup>。ここでは、  $\gamma = \pi/2$  である。

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \beta)^2 (\lambda_1^A)^2 [1 - \cos(2\gamma)] \\
& + 2\lambda_1^A (\alpha - \beta) \sin(\gamma) \{ \sin(\lambda_1^A \gamma) + \sin[\lambda_1^A (2\pi - \gamma)] \} \\
& + 2\lambda_1^A (\alpha - \beta) \beta \cdot \sin(\gamma) \{ \sin[\lambda_1^A (2\pi - \gamma)] - \sin(\lambda_1^A \gamma) \} \\
& + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos(2\lambda_1^A \pi) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2) \cos[2\lambda_1^A (\gamma - \pi)] = 0
\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \beta)^2 (\lambda_2^A)^2 [1 - \cos(2\gamma)] \\
& - 2\lambda_2^A (\alpha - \beta) \sin(\gamma) \{ \sin(\lambda_2^A \gamma) + \sin[\lambda_2^A (2\pi - \gamma)] \} \\
& + 2\lambda_2^A (\alpha - \beta) \beta \cdot \sin(\gamma) \{ \sin[\lambda_2^A (2\pi - \gamma)] - \sin(\lambda_2^A \gamma) \} \\
& + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos(2\lambda_2^A \pi) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2) \cos[2\lambda_2^A (\gamma - \pi)] = 0
\end{aligned} \quad (2)$$

ここで、  $\alpha$ 、  $\beta$  は Dundurs の複合材料パラメータでありポアソン比と横弾性係数  $G$  により決定され式 (3) により与えられる。添え字の  $M$ 、  $I$  は母材と強化繊維を意味する。本研究では平面ひずみモデルを用いて解析を行った。Table 1 における材料組合せ ( $\alpha = -0.9071$ 、  $\beta = -0.2016$ ) では、  $\lambda_1^A = 0.7632$ 、  $\lambda_2^A = 0.6218$  となる。

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{G_M(\kappa_I + 1) - G_I(\kappa_M + 1)}{G_M(\kappa_I + 1) + G_I(\kappa_M + 1)}, \\
\beta &= \frac{G_M(\kappa_I - 1) - G_I(\kappa_M - 1)}{G_M(\kappa_I + 1) + G_I(\kappa_M + 1)}, \\
\kappa_i &= \begin{cases} \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & (\text{plane stress}) \quad (i = M, I) \\ \frac{3 - 4\nu_i}{3 - 4\nu_i} & (\text{plane strain}) \end{cases}
\end{aligned} \quad (3)$$

Fig.2(a) における点  $A^*$  の特異応力場の強さは、文献<sup>20), 21)</sup>によって議論されている。点 A 近傍の接合界面の応力分布は以下の式で表現される。式 (4) で示されるように、2 つの特異応力場が存在し、多くの材料の組み合わせで特異性指数  $\lambda$  は 2 実根となる ( $r_1, r_2$  は Fig.1 参照)。

$$\begin{cases} \sigma_y^A(r_1) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^A}^A}{r_1^{1-\lambda_1^A}} + \frac{K_{\sigma, \lambda_2^A}^A}{r_1^{1-\lambda_2^A}} \\ \tau_{xy}^A(r_1) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^A}^A}{r_1^{1-\lambda_1^A}} + \frac{K_{\tau, \lambda_2^A}^A}{r_1^{1-\lambda_2^A}} \\ \sigma_x^A(r_2) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^A}^A}{r_2^{1-\lambda_1^A}} - \frac{K_{\sigma, \lambda_2^A}^A}{r_2^{1-\lambda_2^A}} \\ \tau_{xy}^A(r_2) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^A}^A}{r_2^{1-\lambda_1^A}} - \frac{K_{\tau, \lambda_2^A}^A}{r_2^{1-\lambda_2^A}} \end{cases} \quad (4)$$

点 A の特異応力場について、異なる材料の境界角部では、モード I とモード II の変形による応力特異場の指数は異なる。したがって、このような特異応力場の強さを求めるためには、指数が異なる二つの特異応力を同時に考慮する必要がある。なお、強化繊維界面に生じるせん断応力分布をシアラグ理論<sup>4)6)</sup>を用いて広く議論されているが、これは単純な 1 次元モデルに基づいているため弾性論で取り扱うべき特異応力場を考察できない。これは、後述する点 E においても同様である。

点 A の頂角近傍では、モード I の変形に対して  $1/r^{1-\lambda_1^A}$ 、モード II の変形に対して  $1/r^{1-\lambda_2^A}$  の特異性を持つ 2 つの特異応力場が同時に混在しており (Fig.1 参照)、それぞれの強さ ISSF はパラメータ  $K_{I, \lambda_1^A}^A$  と  $K_{II, \lambda_2^A}^A$  として一義的に定義できる。 $K_{I, \lambda_1^A}^A$  と  $K_{II, \lambda_2^A}^A$  は以下の式で表現される。式 (5) では、 $r = r_1 = r_2$  としている。

$$\begin{cases} K_{I, \lambda_1^A}^A = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_I^A(r) \cdot r^{1-\lambda_1^A}] \\ K_{II, \lambda_2^A}^A = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_{II}^A(r) \cdot r^{1-\lambda_2^A}] \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $\sigma_I^A(r)$  は点 A におけるモード I の応力分布、 $\sigma_{II}^A(r)$  はモード II の応力分布である。 $\sigma_I^A(r)$ 、 $\sigma_{II}^A(r)$  は、 $r = r_1 = r_2$  の場合、式 (6) のように、点 A 近傍における  $r_1$  方向の応力分布  $\sigma_y^A(r_1)$  と、 $r_2$  方向の応力分布  $\sigma_x^A(r_2)$  を用いて、その対称成分と逆対称成分として表現される。 $\sigma_y^A(r_1)$  と  $\sigma_x^A(r_2)$  は FEM 解析で求めることができる。

$$\begin{cases} 2\sigma_{I, FEM}^A(r) = \sigma_{y, FEM}^A(r_1) + \sigma_{x, FEM}^A(r_2) \\ 2\sigma_{II, FEM}^A(r) = \sigma_{y, FEM}^A(r_1) - \sigma_{x, FEM}^A(r_2) \end{cases} \quad (6)$$

また、無次元化された応力拡大係数は体積法によって得られる<sup>20)</sup>。Fig.2(a)に示すような基準問題における点 A\* の応力拡大係数  $F_I^*$ 、 $F_{II}^*$  は以下の式で表現される。ここで、 $K_{I, \lambda_1^A}^A$ 、 $K_{II, \lambda_2^A}^A$  はそれぞれ点 A\* におけるモード I、モード II の ISSF である。式(7)で  $l_2$  は Fig.2(a)の繊維の横幅で、ここでは  $l_2 = D/2$  とする。また、 $\sigma^\infty$  は Fig.2 の無限板の引張応力で  $\sigma^\infty = 1$  である。

$$\begin{cases} F_I^* = K_{I, \lambda_1^A}^A / (\sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_1^A}) \\ F_{II}^* = K_{II, \lambda_2^A}^A / (\sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2^A}) \end{cases} \quad (7)$$

さらに、Fig.1 に示すような繊維引抜きの問題における点 A の無次元化された応力拡大係数  $F_I$ 、 $F_{II}$  は以下の式で表現される。

$$F_I = K_{I, \lambda_1^A}^A / [(P/2l_2) \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_1^A}] \quad (8)$$

$$F_{II} = K_{II, \lambda_2^A}^A / [(P/2l_2) \sqrt{\pi} l_2^{1-\lambda_2^A}]$$

式 (9) に示すように、FEM 解析によって求められる応力分布の比は、体積法によって求められる基準問題における点 A\* の無次元化された応力拡大係数と、未知問題における点 A の無次元化された応力拡大係数の比で求めることができる。ここで、 $\sigma_{I, FEM}^A(r)$  と  $\sigma_{II, FEM}^A(r)$  はそれぞれ FEM 解析で求めた基準問題における点 A\* のモード I、モード II の応力分布である。また、 $\sigma_{I, FEM}^A(r)$  と  $\sigma_{II, FEM}^A(r)$  はそれぞれ FEM 解析で求めた未知問題における点 A のモード I、モード II の応力分布である。

$$\frac{F_I}{F_I^*} = \frac{\sigma_{I, FEM}^A(r)}{\sigma_{I, FEM}^{A*}(r)}, \quad \frac{F_{II}}{F_{II}^*} = \frac{\sigma_{II, FEM}^A(r)}{\sigma_{II, FEM}^{A*}(r)} \quad (9)$$

よって、式 (7) ~ (9) より、FEM 解析によって求められる応力分布の比は、式 (10) のように、点 A\* と点 A の ISSF の比で表現される。

$$\begin{cases} \frac{K_{I, \lambda_1^A}^A}{K_{I, \lambda_1^A}^{A*}} = \frac{F_I}{F_I^*} = \frac{\sigma_{I, FEM}^A(r)}{\sigma_{I, FEM}^{A*}(r)} \\ \frac{K_{II, \lambda_2^A}^A}{K_{II, \lambda_2^A}^{A*}} = \frac{F_{II}}{F_{II}^*} = \frac{\sigma_{II, FEM}^A(r)}{\sigma_{II, FEM}^{A*}(r)} \end{cases} \quad (10)$$

Table 2 に、大小 2 種類の FEM メッシュを用いて求めた未知問題における点 A の応力分布を示す。(a) はモード I の FEM 応力分布  $\sigma_{I, FEM}^A(r)$ 、(b) はモード II の FEM 応力分布  $\sigma_{II, FEM}^A(r)$  を示している。また、Fig.2(a) に示す母材中の強化繊維を基準問題として解析して両者の繊維端角部にはたらく FEM 応力比  $\sigma_{I, FEM}^A(r) / \sigma_{I, FEM}^{A*}(r)$ 、 $\sigma_{II, FEM}^A(r) / \sigma_{II, FEM}^{A*}(r)$  を求めたものを示す。

Table 2 Mesh independency of the present analysis method.

(a) Symmetrical type.					
Smallest mesh size $e_{min} = 3.8 \times 10^{-8}$			Smallest mesh size $e_{min} = 1.27 \times 10^{-8}$		
$r/e_{min}$	$\sigma_{I, FEM}^A(r)$ [MPa]	$\frac{\sigma_{I, FEM}^A(r)}{\sigma_{I, FEM}^{A*}(r)}$	$r/e_{min}$	$\sigma_{I, FEM}^A(r)$ [MPa]	$\frac{\sigma_{I, FEM}^A(r)}{\sigma_{I, FEM}^{A*}(r)}$
0.0	13.20	1.136	0.0	16.53	1.136
0.5	10.88	1.135	0.5	13.62	1.136
1.0	8.383	1.135	1.0	10.49	1.135
1.5	7.741	1.134	1.5	9.681	1.135
2.0	7.603	1.134	2.0	9.507	1.135
(b) Skew-Symmetrical type.					
Smallest mesh size $e_{min} = 3.8 \times 10^{-8}$			Smallest mesh size $e_{min} = 1.27 \times 10^{-8}$		
$r/e_{min}$	$\sigma_{II, FEM}^A(r)$ [MPa]	$\frac{\sigma_{II, FEM}^A(r)}{\sigma_{II, FEM}^{A*}(r)}$	$r/e_{min}$	$\sigma_{II, FEM}^A(r)$ [MPa]	$\frac{\sigma_{II, FEM}^A(r)}{\sigma_{II, FEM}^{A*}(r)}$
0.0	57.1	1.093	0.0	80.01	1.093
0.5	37.9	1.093	0.5	53.09	1.093
1.0	20.4	1.093	1.0	28.55	1.093
1.5	23.9	1.093	1.5	33.43	1.093
2.0	24.2	1.093	2.0	33.89	1.093

Table 2 より, 未知問題における応力分布の比  $\sigma_{I,FEM}^A(r)$ ,  $\sigma_{II,FEM}^A(r)$  の値は, メッシュサイズによって値が大きく違うことがわかる. 一方, 未知問題の FEM 応力比  $\sigma_{I,FEM}^A(r)/\sigma_{I,FEM}^{A*}(r)$ ,  $\sigma_{II,FEM}^A(r)/\sigma_{II,FEM}^{A*}(r)$  はメッシュサイズに依存せず 4 けた一致することが確認できる. すなわち, 応力の値は界面端部で実際の応力は無限大となるため, メッシュサイズに大きく依存する. しかし, Table 2 より基準問題との応力の比は正確に求めることができ, メッシュサイズに依存しないことがわかった. よって, 未知問題と基準問題における応力分布の比を取ることによって, 未知問題の ISSF を求めることができた.

### 3 繊維の母材表面交差部における特異応力場について

Fig.1 における点 E の特異応力場は, Fig.2(b) に示す単純重ね合わせ継手における強化繊維の接着面隅部 E\* の特異応力場と同じである. この場合の ISSF は相反仕事経路積分法(RWCIM 法)で計算して基準問題の解として用いる<sup>29), 30)</sup>

点 E における  $\lambda_1^E$ ,  $\lambda_2^E$  は以下の特性方程式を解くことで得られる<sup>31), 32)</sup>.

$$\begin{aligned} & 4\sin^2(\pi\lambda^E)[\sin^2(\lambda^E\pi/2) - (\lambda^E)^2]\beta^2 \\ & + 4(\lambda^E)^2\sin^2(\pi\lambda^E)\alpha\beta + [\sin^2(\lambda^E\pi/2) - (\lambda^E)^2]\alpha^2 \\ & - 4(\lambda^E)^2\sin^2(\pi\lambda^E)\beta \\ & - 2[(\lambda^E)^2\cos^2(2\pi\lambda^E) + \sin^2(\lambda^E\pi/2)\cos(\pi\lambda^E) \\ & \quad + (1/2)\sin^2(\pi\lambda^E)]\alpha \\ & + \sin^2(3\lambda^E\pi/2) - (\lambda^E)^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Table 1 における材料組合せでは,  $\lambda_1^E = 0.6591$ ,  $\lambda_2^E = 0.9992$  である. 但し,  $\lambda_2^E$  は 1 に近い値であり, その場合特異応力分布にはほとんど影響しない.

Fig.2(b) における点 E\* の特異応力場の強さは文献<sup>30), 33)</sup>によって議論されている. 点 E 近傍の接合界面の特異応力場は, 以下の式で表現される. 式 (12) で示されるように, この場合も 2 つの特異応力場が存在し, 多くの材料の組み合わせで特異指数  $\lambda$  は 2 実根となる ( $r_3$  は Fig.1 参照) が, 前述の通り  $\lambda_2^E$  は 1 に近い値であり, その場合特異応力分布にはほとんど影響しないため, 式 (12) の右辺第 2 項の影響は無視できる.

$$\begin{cases} \sigma_x^E(r_3) = \frac{K_{\sigma, \lambda_1^E}^E}{r_3^{1-\lambda_1^E}} + \frac{K_{\sigma, \lambda_2^E}^E}{r_3^{1-\lambda_2^E}} \cong \frac{K_{\sigma, \lambda_1^E}^E}{r_3^{1-\lambda_1^E}} \\ \tau_{xy}^E(r_3) = \frac{K_{\tau, \lambda_1^E}^E}{r_3^{1-\lambda_1^E}} + \frac{K_{\tau, \lambda_2^E}^E}{r_3^{1-\lambda_2^E}} \cong \frac{K_{\tau, \lambda_1^E}^E}{r_3^{1-\lambda_1^E}} \end{cases} \quad (12)$$

Table 3 ISSF at point A  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A, K_{\sigma, \lambda_2^A}^A, K_{\tau, \lambda_1^A}^A, K_{\tau, \lambda_2^A}^A$ .

$l_{in}$ [μm]	$K_{\sigma, \lambda_1^A}^A$ [MPa · m <sup>1-λ<sub>1</sub><sup>A</sup></sup> ]	$K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$ [MPa · m <sup>1-λ<sub>2</sub><sup>A</sup></sup> ]	$K_{\tau, \lambda_1^A}^A$ [MPa · m <sup>1-λ<sub>1</sub><sup>A</sup></sup> ]	$K_{\tau, \lambda_2^A}^A$ [MPa · m <sup>1-λ<sub>2</sub><sup>A</sup></sup> ]
50	0.04280	0.02518	0.04280	0.02518
100	0.02969	0.01892	0.02969	0.01892
150	0.02334	0.01519	0.02334	0.01519
200	0.01962	0.01302	0.01962	0.01302
250	0.01701	0.01145	0.01701	0.01145
300	0.01494	0.01017	0.01494	0.01017
350	0.01343	0.009227	0.01343	0.009227
400	0.01221	0.008443	0.01221	0.008443
450	0.01110	0.007745	0.01110	0.007745
500	0.01029	0.007189	0.01029	0.007189
1000	0.005767	0.004148	0.005767	0.004148

## 4 解析結果および考察

短繊維強化複合材料において, 短繊維は, そのアスペクト比  $l/D = 30$  程度のものである<sup>27)</sup>. このとき, 本研究では 2 次元モデルで繊維の幅  $D = 21 \mu\text{m}$ , 繊維の全長  $l = 600 \mu\text{m}$  程度である. よって Fig.1 で繊維の半分の長さを埋め込むときの繊維埋込部長さは  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  程度となる.

### 4.1 点 A の特異応力場の強さの解析結果

Table 3 と Fig.3 に点 A の 2 つの特異応力場の強さ ISSF  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A, K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  を繊維埋込部長さ  $l_{in}$  との関係で示す. これらに示すように,  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A$  は  $K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  より大きく, 繊維埋込部長さ  $l_{in}$  を増加させると, 双方とも小さくなる. この解析結果は過去の実験<sup>2), 34)</sup>とも一致している.

例えば, 全長  $l = 600 \mu\text{m}$  の繊維において, この約 1/4 長が埋め込まれている場合  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  と, 約 1/2 長が埋め込まれている場合  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  について,  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A, K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  を比較する.

まず, モード I の ISSF  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A$  に注目すると,  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  で  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A = 0.02334$  であるのに対し  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  では  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A = 0.01494$  となる. すなわち,  $l_{in}$  が繊維の約 1/4 長の場合に比べて, 約 1/2 長の場合では, 値は 36.0% 減少した.

次に, モード II の ISSF  $K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  に注目すると,  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  で  $K_{\sigma, \lambda_2^A}^A = 0.01519$  であるのに対し  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  では  $K_{\sigma, \lambda_2^A}^A = 0.01017$  となる. すなわち,  $l_{in}$  が繊維の約 1/4 長の場合に比べて, 約 1/2 長の場合では, 値は 33.0% 減少した.

以上をまとめると, 点 A におけるモード I, モード II の特異応力場の強さ ISSF は繊維埋込部長さ  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  に比べて,  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  では, 約 35% 減少する. ここで Fig.3 に示すように  $K_{\tau, \lambda_1^A}^A, K_{\tau, \lambda_2^A}^A$  はそれぞれ  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A, K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  より埋込部長さ  $l_{in}$  に依らず常に 30% 程度小さいのでここでは  $K_{\sigma, \lambda_1^A}^A, K_{\sigma, \lambda_2^A}^A$  を考察する.

### 4.2 点 E の特異応力場の強さの解析結果

Table 4 と Fig.4 に点 E の ISSF  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$  を繊維埋込部長さ  $l_{in}$  との関係で示す. 例えば, 全長  $l = 600 \mu\text{m}$  の繊維において, この約 1/4 長が埋め込まれている場合  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  と, 約 1/2 長が埋め込まれている場合  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  について,  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$  の値を比較する.

式 (12) の第 1 項  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$  に注目すると,  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  で

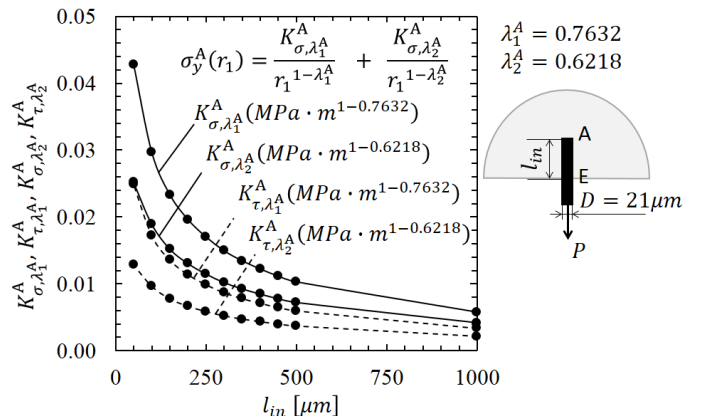


Fig. 3 Relationship between ISSF at Point A and bonding length.



Table 4 ISSF at point E  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E, K_{\tau, \lambda_1^E}^E$ .

$l_{in}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$ [ $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1-\lambda_1^E}$ ]	$K_{\tau, \lambda_1^E}^E$ [ $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1-\lambda_1^E}$ ]
50	0.05030	0.01870
100	0.04115	0.01530
150	0.03689	0.01372
200	0.03457	0.01285
250	0.03316	0.01233
300	0.03219	0.01197
350	0.03150	0.01171
400	0.03099	0.01152
450	0.03061	0.01138
500	0.03032	0.01127
1000	0.02962	0.01101

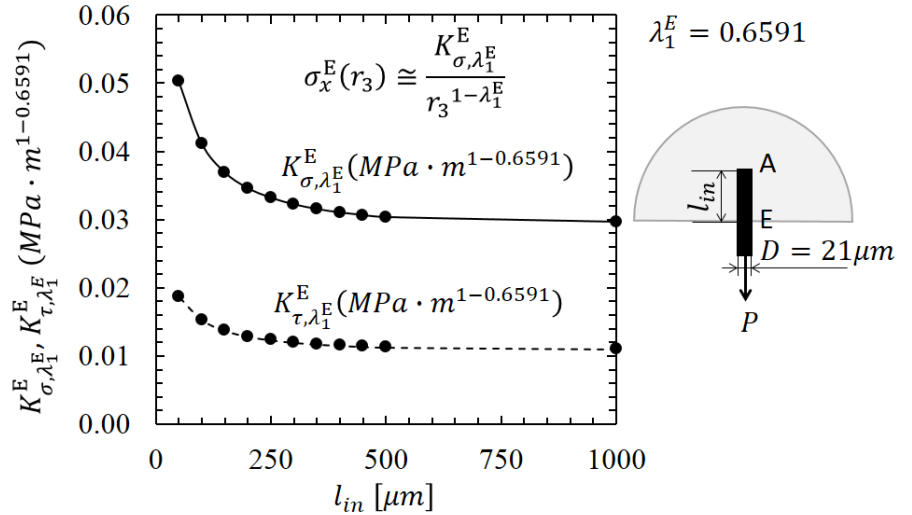


Fig. 4 Relationship between ISSF at Point E and bonding length.

$K_{\sigma, \lambda_1^E}^E = 0.03689$  であるのに対し  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  では  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E = 0.03219$  となる. すなわち,  $l_{in}$  が繊維の約 1/4 長の場合に比べて, 約 1/2 長の場合では, 値は 12.7% 減少した.

以上をまとめると, 点 E の特異応力場の強さ ISSF は繊維埋込部長さ  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  に比べて,  $l_{in} = 300 \mu\text{m}$  では, 約 10% 減少する. ここで Fig.4 に示すように  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$  は  $K_{\tau, \lambda_1^E}^E$  より繊維埋込部長さ  $l_{in}$  に依らず常に 70% 程度小さいのでここでは  $K_{\sigma, \lambda_1^E}^E$  を考察する.

#### 4.3 点 A と点 E 近傍の応力分布の比較

特に本論文では点 A と点 E の ISSF を比較するが両者の特異応力場は性質が異なるので ISSF のみで直接比較することはできない. よってここでは繊維のはく離に最も影響すると考えられる特異点近傍の異材接合界面の法線方向の垂直応力分布に注目する. なお, このような応力分布をシアラグ理論<sup>4-6)</sup>を用いて広く議論されているが, これは単純な 1 次元モデルに基づいているため弾性論で取り扱うべき特異応力場を考察できない.

繊維埋込部長さ  $l_{in} = 100 \mu\text{m}$ ,  $1000 \mu\text{m}$  に対して, 点 A, E における応力で壊れやすさを比較する. これは点 A と点 E で特異指数 ( $\lambda_1^A, \lambda_2^A$ ), ( $\lambda_1^E, \lambda_2^E$ ) が異なるので ISSF のみで壊れやすさを比較することができないためである.

Fig.5, Fig.6 に  $l_{in}$  に対する点 A の応力  $\sigma_y^A(r_1)$ ,  $\sigma_x^A(r_2)$ , 点 E の応力  $\sigma_x^E(r_3)$  を示す. ここで, 点 A における x 方向の応力  $\sigma_x^A(r_2)$  については常に圧縮となり繊維のはく離には影響しないため, 以下の考察では無視する.

$l_{in} = 100 \mu\text{m}$  のときは, 点 A の応力  $\sigma_y^A(r_1)$  が点 E の応力  $\sigma_x^E(r_3)$  より大きいため, 点 A からはく離が生じると考えられる. 一方,  $l_{in} = 1000 \mu\text{m}$  のときは点 E の応力  $\sigma_x^E(r_3)$  が点 A の応力  $\sigma_y^A(r_1)$  より大きいため, 点 E からはく離が生じると考えられる.

Fig.5 および Fig.6 より繊維埋込部長さ  $l_{in} = 100 \mu\text{m}$  では点 A のほうが大きい応力が発生し,  $l_{in} = 1000 \mu\text{m}$  では点 E のほうが大きい応力が発生することが示された. 以降では, 点 A と点 E の壊れやすさの違いを, 繊維埋込部長さ  $l_{in}$  との関係で調べ, 点 A と点 E で同じ応力が発生する  $l_{in}$  について明らかにする. Fig.7 は, 応力の強さを特異点から  $1 \mu\text{m}$  の位置で代表させ, 点 A の応力  $\sigma_y^A(r_1)|_{r_1=1\mu\text{m}}$ ,  $\sigma_x^A(r_2)|_{r_2=1\mu\text{m}}$  と, 点 E の応力  $\sigma_x^E(r_3)|_{r_3=1\mu\text{m}}$  に注目して繊維埋込部長さ  $l_{in}$  の影響を調べたものである. Fig.7 より,

$\sigma_y^A(r_1)|_{r_1=1\mu\text{m}}$  と  $\sigma_x^E(r_3)|_{r_3=1\mu\text{m}}$  は, 交差して大きさが逆転し,  $l_{in} = 150 \mu\text{m}$  程度で点 A と点 E 両方の厳しさがほぼ等しくなる. なお, 本研究では  $r = 1 \mu\text{m}$  の場合について議論したが  $r \neq 1 \mu\text{m}$  では異なる結果が得られ, 例えば  $r = 5 \mu\text{m}$  のときは応力が同じになる繊維埋込部長さは  $l_{in} = 250 \mu\text{m}$  程度である.

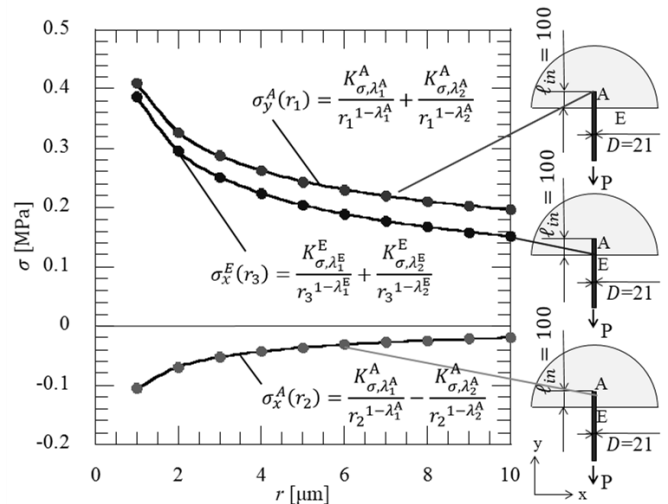


Fig. 5  $\sigma_y^A(r_1)$ ,  $\sigma_x^A(r_2)$ ,  $\sigma_x^E(r_3)$  vs.  $r$  when  $l_{in} = 100 \mu\text{m}$

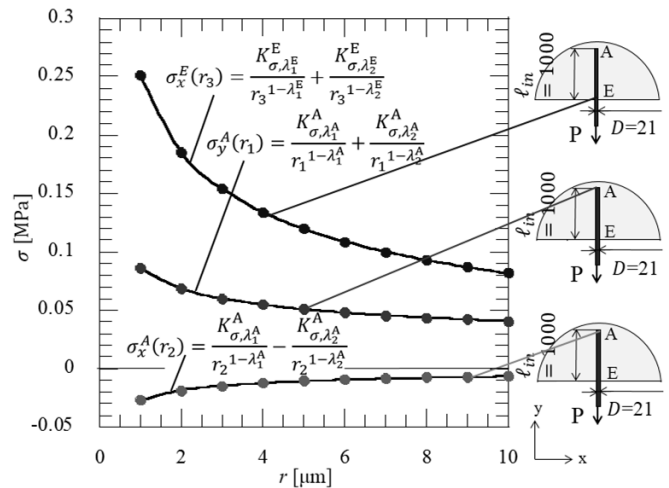


Fig. 6  $\sigma_y^A(r_1)$ ,  $\sigma_x^A(r_2)$ ,  $\sigma_x^E(r_3)$  vs.  $r$  when  $l_{in} = 1000 \mu\text{m}$

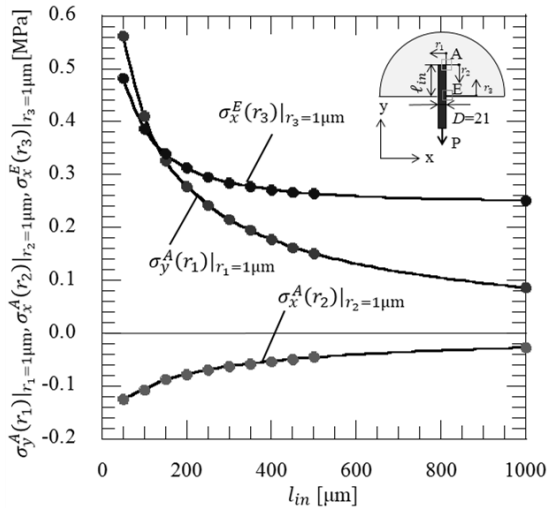


Fig. 7  $\sigma_y^A(r_1)$ ,  $\sigma_x^A(r_2)$ ,  $\sigma_x^E(r_3)$  vs.  $l_{in}$  when  $r_1 = r_2 = r_3 = 1\mu m$ .

## 5 結 言

本研究では、強化繊維の引抜きの際に表面と繊維端の2つの点(Fig.1 端部縁点 A と母材交差点 E)に生じる特異応力場の解析を行い、その大きさを応力で比較した。それらの結果を図表にまとめた他、以下の結論が得られた。

- (1)点 A の特異応力場の大きさは2つあり、 $K_{\sigma, \lambda_1}^A$ ,  $K_{\sigma, \lambda_2}^A$  で表現される。これらは、繊維埋込部長さ  $l_{in}$  が長くなるほど小さくなる。例えば全長  $l = 600 \mu m$  の通常の短繊維において繊維の 1/4 と 1/2 の長さが埋め込まれている場合を比べると、繊維埋込部長さの増加に伴って、約 35% 減少する。
- (2)点 E の特異応力場の大きさも2つあり、 $K_{\sigma, \lambda_1}^E$ ,  $K_{\sigma, \lambda_2}^E$  で表現される。これらも点 A と同様に、繊維埋込部長さ  $l_{in}$  が長くなるほど小さくなる。例えば全長  $l = 600 \mu m$  の通常の短繊維において繊維の 1/4 と 1/2 の長さが埋め込まれている場合を比べると、繊維埋込部長さの増加に伴って約 10% 減少し、端部点 A よりも減少率が小さい。
- (3) 点 A と点 E でのそれぞれの壊れやすさを応力で比較すると、繊維埋込部長さ  $l_{in} = 150 \mu m$  程度で点 A と点 E の応力はほぼ等しくなり、交差して大小が逆転する。よって、繊維埋込部長さ  $l_{in} < 150 \mu m$  の繊維の引抜きでは、点 A よりも離が生じることが考えられる。なお、本研究では  $r=1\mu m$  の場合について議論したが  $r \neq 1\mu m$  では異なる結果が得られ、例えば  $r=5\mu m$  のときは応力が同じになる繊維埋込部長さは  $l_{in}=250\mu m$  程度である。

## 参 考 文 献

- 1) E. Pisanova, S. Zhandarov, E. Mader, I. Ahmad and R.J. Young, "Three Techniques of interfacial bond strength estimation from direct observation of crack initiation and propagation in polymer-fiber systems", Composites : Part A, Vol.32, pp.435-443 (2001).
- 2) R.J. Scheer and J.A. Nairn, "A comparison of several fracture mechanics methods for measuring interfacial toughness with microbond tests", The Journal of Adhesion, Vol.53, pp.45-68 (1995).
- 3) K-H. Tsai and K-S. Kim, "The micromechanics of fiber pull-out", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.44, No.7, pp.1147-1177 (1996).
- 4) K. Goda "Semi-discretization analysis for the shear-lag model with a viscoelastic matrix and its application to creep-rupture simulation using the BIS method",

Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers, Part A, Vol.66, No. 643, pp.480-488.(2000).

- 5) J.-M. Hedgepeth and P. Van Dyke "Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials", Journal of Composite Materials, Vol.1, No.3, pp.294-309 (1967).
- 6) S.-B. Batdorf "Note on shear interaction between two fibers", Engineering Fracture Mechanics, Vol.18, No.6, pp.1207-1210 (1983).
- 7) N.-A. Noda T. Miyazaki T. Uchikoba R. Li Y. Sano and Y Takase, "Convenient debonding strength evaluation based on the intensity of singular stress for adhesive joint", The Japan Institute of Electronics Packaging, Vol.17, No.2, pp.132-142 (2014).
- 8) N.-A. Noda, T. Miyazaki, R. Li, T. Uchikoba, Y. Sano and Y. Takase, "Debonding strength evaluation in terms of the intensity of singular stress at the interface corner with and without fictitious crack", International Journal of Adhesion and Adhesives Volume, Vol.61, pp.46-64 (2015).
- 9) T. Miyazaki, N.-A. Noda, F. Ren, Z. Wang, Y. Sano and K. Iida, "Analysis of intensity of singular stress field for bonded cylinder and bonded pipe in comparison with bonded plate", International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol.77, pp.118-137 (2014).
- 10) N.-A. Noda, F. Ren, R. Takaki, Z. Wang, K. Oda, T. Miyazaki and Y. Sano, "Intensity of singular stress field over the entire bond line thickness range useful for evaluating the adhesive strength for plate and cylinder butt joints ", International Journal of Adhesion and Adhesives, Vol.85, pp.234-250 (2018) .
- 11) T. Miyazaki, N.-A. Noda, Z. Wang, and Y. Sano, "Analysis of intensity of singular stress field for bonded cylinder in comparison with bonded plate", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.81, No.829, DOI:10.1299/transjsme.15-00210
- 12) N.-A. Noda, F. Ren, R. Takaki, K. Tsuboi, Y. Sano, Y. Takase and T. Miyazaki, "Validity of the adhesive strength evaluation method based on the intensity of singular stress field in two-dimensional modelling", The Japan Institute of Electronics Packaging, Vol.21, No.4, (2018).
- 13) Y. Zhang, N.-A. Noda, K. Takaishi and X. Lan, "Effect of adhesive thickness on the interface of singular stress at the adhesive dissimilar joint", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers A, Vol. 77, No. 774, pp. 360 – 372 (2011).
- 14) Y. Zhang, N.-A. Noda, K. Takaishi and X. Lan, "Effect of adhesive thickness on the intensity of singular strength for the adhesive joint (comparison between bending and tension)", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers A, Vol. 77, No. 784, pp. 2076 – 2086 (2011).
- 15) Y. Zhang, N.-A. Noda, P. Wu and M. Duan, "A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints", International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 57, pp. 105 – 117 (2015).
- 16) Y. Zhang, N.-A. Noda, P. Wu and M. Duan, "A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints", International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 57, pp. 105 – 117 (2015), the corrigendum of authorship is published in International Journal of Adhesion & Adhesives, Vol. 60, p. 130 (2015).
- 17) H. Nisitani, T. Kawamura, W. Fujisaki and T. Fukuda, "Determination of highly accurate values of stress intensity factor or stress concentration factor of plate specimen by FEM", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers A, Vol. 65, No. 629, pp. 26 –

- 31 (1999).
- 18) Y. Murakami, "A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 42, No. 360, pp. 2305 – 2315 (1976).
  - 19) H. Kisu, R. Yuuki and H. Kitagawa, "The analysis of stress intensity factor for surface crack by boundary element method (2<sup>nd</sup> report, The accurate methods to determine the stress intensity factor)", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers A*, Vol. 51, No. 463, pp. 660 – 669 (1985).
  - 20) N-A. Noda, Q. Wang, Y. Uemura, and Y. Kawashima "Singular integral equation method in the analysis of interaction between rectangular inclusions", *the Japan Society of Mechanical Engineers International Journal Series A: Mechanics and Material Engineering*, Vol.41, No.3, pp.303-308 (1998).
  - 21) D.H. Chen and H. Nisitani, "Analysis of intensity of singular stress field at fiber end (2<sup>nd</sup> report, results of calculation)", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.58, No.555, pp.143-148 (1992).
  - 22) N-A. Noda, R. Shirao, J. Li and J-S. Sugimoto, "Intensity of singular stress at the end of a fiber under pull-out force", *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers, Part A*, Vol.72, No. 9, pp.1397-1404.(2006).
  - 23) N.-A. Noda, Y. Takase and M. Chen, "Generalized stress intensity factors in the interaction between two fibers in matrix", *International Journal of Fracture*, Vol.103, pp.19-39 (2000).
  - 24) N.-A. Noda and Y. Takase, "Intensity of singular stress fields at the fiber end in a hexagonal array of fibers", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No.16-17, pp.4890-4908 (2005).
  - 25) N.-A. Noda, T. Genkai and Q. Wang, "Intensity of singular stress fields at the end of a cylindrical inclusion", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.70, No.4, pp.487-495 (2003).
  - 26) N-A. Noda, Q. Wang and T. Morodomi, "Analysis of intensity of singular stress at the end of a cylindrical inclusion", *the Japan Society of Mechanical Engineers International Journal Series A: Mechanics and Material Engineering*, Vol.63, No.612, pp. 1701-1706 (1997).
  - 27) N-A. Noda, Y. Takase, T. Iizuka, "Generalized stress intensity factors at the fiber end in fiber reinforced plastics", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.71, No.708, pp.36-42 (2005).
  - 28) D.H. Chen and H. Nisitani, "Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials", *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol.60, No.3, pp.607-613 (1993).
  - 29) W.C. Carpenter and C. Byers, "A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material", *International Journal of Fracture*, Vol.35, pp.245-268 (1987).
  - 30) T. Miyazaki, N-A. Noda, T. Uchikoba R. Li and Y. Sano, "Proposal of a convenient and accurate method for evaluation of debonding strength", *Society of Automotive Engineers of Japan, Inc. Transaction*, Vol.45, No.5, pp.895-901 (2014).
  - 31) D.B. Bogy, "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading", *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol.35, No.3, pp.460-466 (1968).
  - 32) D.B. Bogy, "Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions", *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol.38, No.2, pp.377-386 (1971).
  - 33) T. Miyazaki, N-A. Noda, R. Li, T. Uchikoba and Y. Sano, "Debonding criterion for single lap joints from the intensity of singular stress field", *Journal of the Japan Institute of Electronics Packaging*, Vol.16, No.2, pp.143-151 (2013).
  - 34) S-L. Gao, E. Mader and S-F. Zhandarow, "Carbon fibers and composites with epoxy resins: Topography, fractography and interphases", *Carbon*, Vol.42, pp.515-529, (2004).