

解説

包除積分数理モデルを用いた多変量データ解析†

本田 あおい*

1. 非加法的な測度による非線形な積分

1 + 1 が 2 にならない, いわゆる非加法的な測度の世界では従来のルベーグ式の積分論を適用することができず, 新しい理論が必要となる. ショケ積分や菅野積分が提案されたのを契機に色々な積分が提案されており, これらは線形性を持たず, またそれぞれに長所短所合わせた特有の性質を持っている. 包除積分は包除原理に基づく積分でファジィ測度と多項演算の 2 つを用いて定義される. 測度だけでなく演算も相互作用を表現することができるため柔軟な高い記述力を持つ積分であるが, その反面扱いにくいという面も持つ. 本稿では包除積分を利用した多変量データ解析手法を紹介する. 包除積分の自由度の高さを最大限に活用したもので, また既存の統計ソフトウェアを用いることで誰にでも簡単に利用できる手法である. そして, 構築した数理モデルによって新しいデータから目的変数を算出できるだけでなく, 積分型の数理モデルから目的変数の決定プロセスを読み取ることができるという利点を併せ持っている.

2. 準備

本論文を通して $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ は有限集合とする. $|A|$ は有限集合 A の要素の個数を, $\mathcal{P}(\Omega)$ は Ω の部分集合全体からなる集合, つまり Ω のべき集合を表す.

2.1 包除積分の定義

定義 1 (ファジィ測度 [1, 2]) Ω 上の集合関数 $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ は

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
 - (ii) $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$
- を満たすとき, Ω 上のファジィ測度 (fuzzy measure)

という. 非加法的な測度 (nonadditive measure), 単調測度 (monotone measure), 容量 (capacity) などとも呼ばれる.

定義 2 (t-ノルム) $[0, K]$ 上の二項演算 $\otimes : [0, K]^2 \rightarrow [0, K]$ は $x, y, z \in [0, K]$ に対して,

- (i) $0 \otimes 0 = 0, x \otimes K = x$,
- (ii) $x \leq y$ implies $x \otimes z \leq y \otimes z$,
- (iii) $x \otimes y = y \otimes x$,
- (iv) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

を満たすとき t-ノルムという.

通常, t-ノルムは $[0, 1]$ 上に定義されるのが一般的であるが本質的な違いはない. 実際, $[0, 1]$ 上の t-ノルム \otimes は

$$x \otimes^G y := \left(\frac{x}{K} \otimes \frac{y}{K} \right) K$$

とすることで簡単に $[0, K]$ 上の t-ノルムになり, このとき K が単位元となる. 次に示す論理積, 代数積, 限界積 (Łukasiewicz の t-norm), Hamacher 積, Dubois-Prade の t-norm, Sugeno-Weber の t-norm の他にも多くの t-norm が提案されている ([3] 参照).

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \min(x, y), \\ x \otimes^P y &:= \frac{xy}{K}, \\ x \otimes^L y &:= \max(x + y - K, 0), \\ x \otimes^H y &:= \frac{xy}{K(x + y) - xy}, \\ x \otimes_\lambda^{DP} y &:= \frac{xy}{\max(x, y, \lambda)}, \quad 0 \leq \lambda \leq K, \\ x \otimes_\lambda^{SW} y &:= \max\left(\frac{x + y - K + \lambda xy / K}{1 + \lambda}, 0\right), \quad \lambda > -1. \end{aligned}$$

性質 (iv) により t-ノルムは自然に多項演算に拡張できる. 例えば Dubois-Prade の t-ノルムは

$$\bigotimes_{i \in A}^{DP} x_i = \begin{cases} K, & A = \emptyset, \\ \bigwedge_{i \in A} x_i, & x_i > \lambda, i \in A, \\ \prod_{i: x_i < \lambda} x_i / \lambda^{| \{i: x_i < \lambda\} | - 1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

† Multivariate Analysis Using Inclusion-Exclusion Integral Mathematical Model
Aoi HONDA
* 九州工業大学
Kyushu Institute of Technology

この掛け算型の演算, t -ノルムを用いて包除積分を定義する. 被積分関数 f は Ω 上に定義された $[0, K]$ に値をとる非負有界関数である. 今, Ω は n 個の要素から成る有限集合なので, Ω 上の関数は n 次元の数ベクトルで表せる. これを $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, K]^n$ と書くことにする.

定義 3 (包除積分 [4]) μ をファジィ測度, \otimes を $[0, K]$ 上の t -ノルムとする. Ω 上の非負有界関数 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, K]^n$ の μ と \otimes による包除積分は次で定義される.

$$\otimes \int f d\mu := \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}} M^{\otimes}(f | A) \mu(A),$$

ただし,

$$M^{\otimes}(f | A) := \sum_{B \in \mathcal{P}(\Omega), B \supset A} (-1)^{|B \setminus A|} \bigotimes_{i \in B} x_i.$$

定義式に現れる足したり引いたり項がたくさん出てくる $M^{\otimes}(f | A)$ の計算は包除原理に基づくもので, これが包除積分の名前の由来である. $\Omega = \{1, 2, 3\}$ のときの包除積分を書き下すと

$$\begin{aligned} \otimes \int f d\mu := & (x_1 - x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_3 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{1\}) \\ & + (x_2 - x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_3 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{2\}) \\ & + (x_3 - x_1 \otimes x_3 - x_2 \otimes x_3 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{3\}) \\ & + (x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{1, 2\}) \\ & + (x_1 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{1, 3\}) \\ & + (x_2 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{2, 3\}) \\ & + (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \mu(\{1, 2, 3\}). \end{aligned}$$

メビウスの反転公式を用いると包除積分は次のように別表現できる.

$$\otimes \int f d\mu = \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}} \left(\bigotimes_{i \in A} x_i \right) m^{\mu}(A),$$

ただし m^{μ} は μ のメビウス変換:

$$m^{\mu}(A) := \sum_{B \subset A} (-1)^{|B-A|} \mu(B).$$

この別表現を 3 点集合 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ の場合で書き下すと

$$\begin{aligned} \otimes \int f d\mu := & x_1 m^{\mu}(\{1\}) + x_2 m^{\mu}(\{2\}) + x_3 m^{\mu}(\{3\}) \\ & + (x_1 \otimes x_2) m^{\mu}(\{1, 2\}) + (x_1 \otimes x_3) m^{\mu}(\{1, 3\}) \\ & + (x_2 \otimes x_3) m^{\mu}(\{2, 3\}) \end{aligned}$$

$$+ (x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) m^{\mu}(\{1, 2, 3\}).$$

定義式に比べてすっきりとして見えるのは足したり引いたり部分の部分がメビウス変換に含まれているためであり, メビウス変換も書き下してしまうと定義式と同程度に煩雑な式となる. こちらを定義として採用しなかったのは非加法的測度 μ がそのままの形で表れている方が, より自然であると考えたためである.

2.2 包除積分の性質

積分と呼ぶからには, 積分としての性質を備えている必要がある. 次の 2 つの性質を満たす汎関数が積分汎関数と呼ばれる.

(i) 任意のファジィ測度 μ に対して

$$\int 0 d\mu = 0,$$

(ii) 任意の非積分関数 f, g と任意のファジィ測度 μ に対して, $f \leq g$ ならば

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

包除積分において (i) は常に成り立つが, (ii) の単調増加性は無条件には成り立たない. 次の 2 つの概念を導入する.

定義 4 (準全射的 t -ノルム) $[0, K]$ 上の t -ノルム \otimes が次の性質を満たすとき, 準全射的という:

任意の $x \in (0, K]$ と $a \in [0, x]$ に対して, ある $y \in [0, K]$ が存在して $x \otimes y = a$.

定義 5 (k 次単調 t -ノルム) k を自然数とする. $[0, K]$ 上の t -ノルム \otimes が k 以下の任意の自然数 m , 任意の $(x_1, \dots, x_m) \in [0, K]^m$ と $x_0 \in [0, K]$ に対して

$$\sum_{A \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|A|} x_0 \otimes \left(\bigotimes_{i \in A} x_i \right) \geq 0$$

を満たすとき, k 次単調 t -ノルムという.

命題 6 \otimes を $[0, K]$ 上の準全射的で $n+1$ 次単調な t -ノルムとする. このときファジィ測度 μ と \otimes による包除積分は積分汎関数となる.

論理積, 代数積, Dubois-Prade の t -ノルムは準全射的, かつ任意の自然数 k に対して k 次単調であり, これらを用いて定義した包除積分は積分汎関数となる [5]. 同じ性質を持つ t -ノルムが他にも多く存在すると思われる.

他に包除積分について次の基本的な性質が成り立つ. まず t -ノルムの単位元 K を用いて関数 χ_A^K を次の

ように定義する.

$$\chi_A^K(i) := \begin{cases} K, & i \in A, \\ 0, & i \notin A. \end{cases}$$

命題 7 μ を Ω 上のファジィ測度, \otimes を $[0, K]$ 上の t -ノルムとする. このとき

$$\otimes \int \chi_A^K d\mu = K\mu(A).$$

命題 8 (i) μ が加法的なとき, 任意の t -ノルム \otimes に対して,

$$\otimes \int f d\mu = \int f d\mu.$$

(ii) 包除積分に基づく t -ノルムが論理積ならばショケ積分に一致する. すなわち

$$\wedge \int f d\mu = (C) \int f d\mu.$$

ただしショケ積分とは $f = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \geq x_2, \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} := 0$ に対して

$$(C) \int f d\mu := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) \mu(\{1, 2, \dots, i\})$$

で定義される [6].

2.3 包除積分のイメージ

Ω を 2 点集合, つまり $\Omega = \{1, 2\}$ とする. 被積分関数を図 1(a) の $f = (x_1, x_2), x_1 > x_2$ とするとルベグ積分とショケ積分は f のグラフを縦切り, あるいは横切りにした 2 つの矩形の面積の和を計算している (図 1 (b), (c)). 包除積分はグラフの領域を 3 つに分割し 3 つの矩形の面積の和を計算している (図 1(d)). 矩形の縦の長さは定義式に現れる M^\otimes に相当し, それぞれ

$$M^\otimes(f | \{1\}) := x_1 - x_1 \otimes x_2,$$

$$M^\otimes(f | \{2\}) := x_2 - x_1 \otimes x_2,$$

$$M^\otimes(f | \{1, 2\}) := x_1 \otimes x_2,$$

つまり縦の長さは演算 \otimes に依存する. 例えば論理積 \wedge を採用すると $x_1 > x_2$ のとき

$$M^\wedge(f | \{1\}) = x_1 - x_1 \wedge x_2 = x_1 - x_2,$$

$$M^\wedge(f | \{2\}) = x_2 - x_1 \wedge x_2 = 0$$

$$M^\wedge(f | \{1, 2\}) = x_1 \wedge x_2 = x_2$$

である. ショケ積分と一致することがここでもわかる. ちなみに矩形の横の長さはファジィ測度 μ に対応する. 図 2 は Ω が 3 点集合の場合の分割の様子である. このように包除積分は関数 f に対して $\mathcal{P}(\Omega)$ の各要素に対応させた分割を施し, 分割した領域の面積の総和

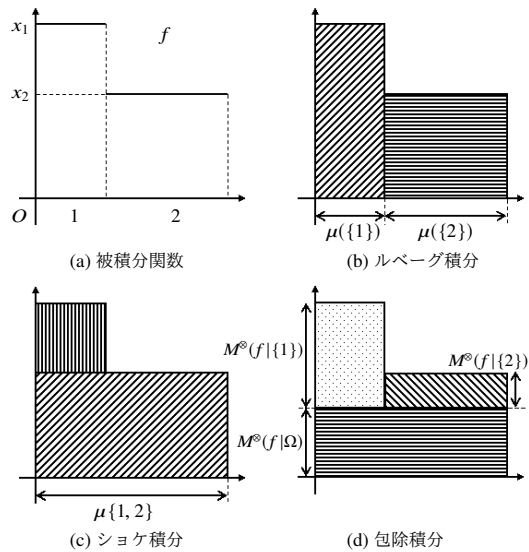


図 1 $\Omega = \{1, 2\}$ の場合の積分のイメージ

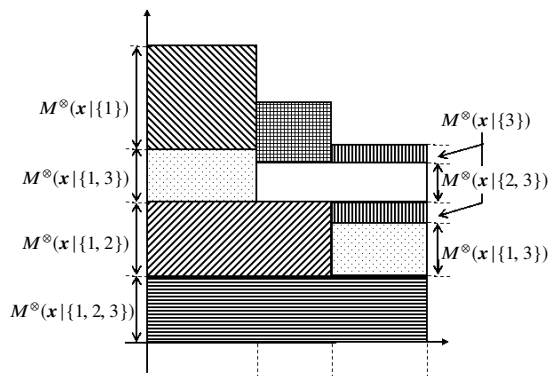


図 2 $\Omega = \{1, 2, 3\}$ の場合の包除積分のイメージ

をとったものであると捉えることができる. 分割は演算 \otimes で調節できるので, 問題に応じて t -ノルムを選ぶことで適切な積分を定義できる. $M^\otimes(f | A)$ が f の分割を表していることは

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} M^\otimes(f | A) \chi_A = f$$

が成り立つことからわかる. ただし χ_A は通常の設定定数. パラメトリック t -ノルムを用いると, パラメータを変化させることでさらに細やかな調節が可能である.

3. 包除積分を用いた多変量データ解析

多変量データ解析とはデータの組に対してデータ間の関係性を統計的手法を用いて明らかにすることであり, 大雑把に言えば説明変数と

呼ばれるデータの組から目的変数の値を得ることである。最もよく使われる手法は重回帰分析法である。データセットとして、 n 個の説明変数 (x_1, x_2, \dots, x_n) と 1 つの目的変数 y からなる組データが M 組与えられているとする。つまりデータは $(x_1^1, \dots, x_n^1, y^1), (x_1^2, \dots, x_n^2, y^2), \dots, (x_1^M, \dots, x_n^M, y^M)$ という形式になっている。以後、この説明変数を要因、要因の数を要因数と呼ぶことにする。そして Ω は要因から成る集合で要因数は n とする。重回帰モデルは目的変数は n 個の要因の値の線形結合：

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i + a_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0$$

で表わされる。この数理モデルで表現できる事象は多数存在し古典的な手法であるが現在でも広く用いられている。パラメータ a_0, a_1, \dots, a_n は算出される目的変数の予測値とデータとして与えられている目的変数の実測値の差の二乗和を最小にするもの、つまり最小二乗法により決定する。これは連立一次方程式の解として決定でき、しかもこの最小二乗法により決定した係数は、推定誤差が正規分布に従うと仮定したときの最尤推定量とも一致する。このように扱いやすく理論的にも整っており、一般的な統計ソフトや統計ツールに標準的に実装されている。

説明変数の実測値を Ω 上の関数、 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とみなすと重回帰モデルは f の加法的測度によるルベグ積分とみなすことができる。包除積分モデルによる回帰分析はこのルベグ積分を包除積分に拡張したものである。モデル式は

$$\begin{aligned} y &= \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}} \left(\sum_{\substack{B \in \mathcal{P}(\Omega) \\ B \supseteq A}} (-1)^{|B \setminus A|} \bigotimes_{i \in B} x_i \right) a_A + a_0 \\ &= a_{\{1\}}(x_1 - x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_3 + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + \dots \\ &\quad + a_{\{1,2\}}(x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + \dots \\ &\quad + a_{\{1,2,\dots,n\}} x_1 \otimes \dots \otimes x_n + a_0 \end{aligned}$$

または、別表現を用いたメビウス型包除積分モデル、

$$\begin{aligned} y &= \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}} \left(\bigotimes_{i \in A} x_i \right) a_A + a_0 \\ &= a_{\{1\}} x_1 + a_{\{2\}} x_2 + \dots + a_{\{n\}} x_n \\ &\quad + a_{\{1,2\}} x_1 \otimes x_2 + a_{\{1,3\}} x_1 \otimes x_3 + \dots \\ &\quad + a_{\{n-1,n\}} x_{n-1} x_n + \dots \\ &\quad + a_{\{1,2,\dots,n\}} x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n + a_0 \end{aligned}$$

である。係数 $a_A, A \in \mathcal{P}(\Omega)$ はそれぞれファジィ測度 $\mu(A)$ 、ファジィ測度のメビウス変換 $m^\mu(A)$ に対応している。従来の重回帰モデルでは表現できない項目間の相互作用を表現することが可能となり、より柔軟な数理モデルを構築できる。どちらの数理モデルを使ってもよいが、どちらかというメビウス型包除積分モデルの方が利点が多い。具体的には

1. メビウス型包除積分モデルでは、 $n+1$ 番目以降の項が重回帰モデルの拡張として既に提案されている「複要因の交互作用項」に類似した形をしており、重回帰分析の拡張として捉えやすいものになっている。
2. ファジィ測度を k 加法的測度と仮定することで簡単に項数を減らすことができる。 k 加法的測度とは $|A| > k$ なる A についてメビウス変換 $m^\mu(A) = 0$ となるファジィ測度である。
3. $M^\otimes(f | A)$ と比べると $\bigotimes_{i \in A} x_i$ の計算の方がシンプルである。計算回数が少ない分、2 進誤差や丸め誤差も小さいかもしれない。

1 に補足するとメビウス型包除積分モデルに現れる最初の n 項の係数は各一点集合のメビウス変換値に相当する。そして一点集合に関しては $m^\mu(\{i\}) = \mu(\{i\})$ が成り立つことから、どちらの数理モデルも先頭の n 項、および切片は重回帰モデルに現れる項であり、これに他の項が追加された形になっている。 n 個の要因、つまり説明変数が相互に独立なものであればこれらの演算の結果である $M^\otimes(f | A)$ も $\bigotimes_{i \in A} x_i$ もどちらも、やはりそれぞれ相互に独立なものであると考えられる。つまり包除積分モデルは n 個の要因ではなく $2^n - 1$ 個の説明変数から成る重回帰モデルである、とも見なすことができる。このように考えればあとは重回帰モデルと全く同じ理論を適用することが可能である。以降はメビウス型包除積分モデルのみを扱うが、ほとんどの議論が包除積分モデル、メビウス型包除積分モデルの両方に同じように適用できる。

データ解析の流れは大まかに次のようになっている。

ステップ 1 生データを包除積分モデルに適用可能な形にするため、数値化、正規化などの前処理を行う。

ステップ 2 包除積分に使用する演算を決定し、残りのデータを作成する。

ステップ 3 最小二乗法を用いて数理モデルのパラメータを決定する。

ステップ 4 得られた数理モデルを利用して必要な解

表 1 目的変数と要因の値

特徴量	特徴量の取る値	数値データ化
総合評価	unacc,acc,good,vgood	0, 1/3, 2/3, 1
価格	vhigh,high,medium, low	0, 0.1, 0.7, 1
メンテナンスコスト	vhigh,high,medium, low	0, 0.1, 0.9, 1
ドアの数	2,3,4,5more	0, 0.7, 0.9, 1
乗車定員	2,4,more	0, 0.8, 1
トランクの大きさ	big,med,small	1, 0.7, 0
安全性	high, med,low	1, 0.6, 0

析を行う。

ステップ 4 における解析とは、未知データからの目的変数の推定や、数理モデルの解釈などである。

3.1 ステップ 1 — データの前処理 —

実際のデータを使って具体的に説明する。データはオープンアクセスの UCI 機械学習用データリポジトリの“Car Evaluation”を利用する [7]。このデータセットは車の評価項目に相当する 6 つの特徴量と、車の総合評価が組となった 1728 組から成る。6 つの特徴量をそれぞれ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} := \{\text{価格, メンテナンスコスト, ドアの数, 乗車定員, トランクの大きさ, 安全性}\}$ と対応させる。各項目の取る値は表 1 の通りで全て順序カテゴリーデータとなっているので包除積分モデルの入出力に対応させるため前処理を行う。このとき従来の重回帰モデルと違って全ての要因の値のスケールと、大小の方向の 2 つをそれぞれ揃える必要がある。スケールについては適当な正規化を行う。大小の方向については説明変数と要因の値の相関係数が正になるように、必要であれば大小を反転させる。数値は大小の順序さえ合っていれば $[0, K]$ 区間にどのように配置してもよいが、今回は $K = 1$ で表 3 の数値とした。これは目的変数は等間隔に数値化し、次に要因の値は各要因毎に目的変数との相関係数が最大となるような 0.1 刻みの数値を総当たりで調べて変換したものである。例えば、価格では (vhigh, high, medium, low) について (0, 0.1, 2, 1), (0, 0.1, 0.3, 1), ..., (0, 0.2, 0.3, 1), ..., (0, 0.8, 0.9, 1) の全ての数値化について目的変数との相関係数が最大となる (0, 0.1, 0.7, 1) を採用する。この前処理が最良の数値化であるとの保証はないが、経験的にはどのような解析手法に対しても等間隔に数値化したときよりも概して良い結果が得られる。

3.2 ステップ 2 — 演算の決定 —

次に、包除積分で使用する演算を定め、この演算を用いて残りのデータを作成する。例えば演算を代数積、 \otimes^P とした場合、作成されるデータは表 4 の通りで

表 2 Car Evaluation の生データ

No.	総合評価	価格	メンテ	ドア数	定員数	トランク	安全性
1	unacc	vhigh	vhigh	2	2	small	low
2	unacc	vhigh	vhigh	2	2	small	med
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
401	acc	vhigh	low	4	more	med	med
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1728	vgood	low	low	5more	more	big	high

表 3 Car Evaluation の前処理後のデータ

No.	y	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0.6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
600	1/3	0.1	0.1	0.9	0	0.7	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1728	1	1	1	1	1	1	1

表 4 作成した追加データ

No.	x ₁ ⊗x ₂	x ₁ ⊗x ₃	...	x ₁ ⊗x ₂ ⊗x ₃	...	x ₁ ⊗x ₂ ⊗x ₃ ⊗...⊗x ₆
1	0	0	...	0	...	0
2	0	0	...	0	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
600	0.01	0.9	...	0.009	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1728	1	1	1	1	1	1

ある。

3.3 ステップ 3 — パラメータの決定 —

目的変数の推定値と実測値の誤差が最小になるよう、最小二乗法を用いてパラメータを決定する。すなわち

$$\sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \otimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2 \quad (1)$$

を最小にする $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ を決定する。 M はデータの個数であり今回は $M = 1728$ である。包除積分モデルやメビウス型包除積分モデルは説明変数が $2^n - 1$ 個の重回帰モデルとみなせるのでパラメータの算出方法は重回帰分析に帰着でき、既存の統計ソフトを利用すれば手軽に解析が可能である。例えば Microsoft 社の表計算ソフト Excel を使用する場合はアドインの分析ツールに含まれる「回帰分析」を使用する。ただし Excel の「回帰分析」は説明変数は 16 個が上限であるため、今回は目的変数との相関の低い“トランクのサイズ”を除外し、さらにファジィ測度を 2-加法的測度に制限することにする。こうすれば、1 点集合と 2 点集合の計 15 個以外のパラメータの値は 0 であるので説

明変数は $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_3, \dots, x_4 \otimes x_6\}$ となり Excel が利用可能である. Excel により表 5, 6 に示す結果を得た. 比較のため x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 のみを用いた通常重回帰分析の結果も載せている.

表中の補正 R^2 とはデータの変動と回帰の変動をそれぞれの自由度, $M-1, M-K-1$, ただし K は説明変数の項数, で割り

$$\text{補正 } R^2 := 1 - (1 - R^2) \left(\frac{M-1}{M-K-1} \right)$$

として R 値を補正したもので, 自由度調整済み決定係数と呼ばれる. 重回帰モデルは項数が多いほど精度は上がり R 値が高くなるので, 説明変数の個数の違う重回帰分析の精度を比較するときにはこのように補正を行う. 赤池情報量基準など他の補正方法を用いてもよい. 包除積分モデルは重相関係数 R , 補正 R^2 とともに 1 に近い値をとっており, 精度の高いモデル式が得られたことがわかる. 有意 F 値確率も 0 であり, この数理モデル:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & -0.23x_1 - 0.17x_2 - 0.09x_3 - 0.28x_4 - 0.30x_6 \\ & + 0.06x_1 \otimes^P x_2 + 0.05x_1 \otimes^P x_3 + 0.27x_1 \otimes^P x_4 \\ & + 0.33x_1 \otimes^P x_6 + 0.04x_2 \otimes^P x_3 + 0.20x_2 \otimes^P x_4 \\ & + 0.23x_2 \otimes^P x_6 + 0.08x_3 \otimes^P x_4 + 0.08x_3 \otimes^P x_6 \\ & + 0.42x_4 \otimes^P x_6 + 0.21 \end{aligned}$$

は意味があると言える. $\mu(\{1\})$ に相当するパラメータが -0.23 と負の値になっているなど, ここで得られたメビウス型包除積分モデルの測度は単調性を満たしていないのでファジィ測度にはなっていない.

3.4 ステップ 4 — モデル式を利用した解析

ステップ 3 で得られたモデル式を用いて解析を行う. 新しい要因の値のデータから目的変数の値を推定できる他, このモデルが包除積分を表していることを利用して目的変数の決定プロセスを読み取ることができる. メビウス型包除積分モデルで得られたパラメータ a_A は積分に用いるファジィ測度のメビウス変換である. ファジィ測度はメビウス逆変換:

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m^\mu(B)$$

で算出できる. この値によりどの項目をどのくらい重視しているかがわかる. 例えば $\mu(\{1, 2\})$ の値は要因 1 と要因 2 を合わせたものの重視度を意味している.

$$\mu(\{\text{要因 1, 要因 2}\}) > \mu(\{\text{要因 1}\}) + \mu(\{\text{要因 2}\})$$

の場合は 2 つの要因間に相乗効果があり両方がよいものは相乗的に評価が増すことを意味する. 不等号が逆

表 5 Excel 分析ツールの回帰分析を用いて得られた結果

数理モデル	重相関係数 R	補正 R^2	有意 F 値
重回帰	0.697	0.486	1.0×10^{-245}
包除積分モデル	0.857	0.736	0

表 6 最小二乗法で得られたパラメータの値

切片	$a_{\{1\}}$	$a_{\{2\}}$	$a_{\{3\}}$	$a_{\{4\}}$	$a_{\{6\}}$	$a_{\{1,2\}}$	$a_{\{1,3\}}$
0.21	-0.23	-0.17	-0.09	-0.28	-0.30	0.06	0.05
$a_{\{1,4\}}$	$a_{\{1,6\}}$	$a_{\{2,3\}}$	$a_{\{2,4\}}$	$a_{\{2,6\}}$	$a_{\{3,4\}}$	$a_{\{3,6\}}$	$a_{\{4,6\}}$
0.27	0.33	0.04	0.20	0.23	0.08	0.08	0.42

向きの場合は, どちらか片方だけでもよければ全体の評価が高くなるという相殺効果, あるいは補完的效果を意味している.

論理積を採用した場合の係数 a_A はメビウス変換 $m^\mu(A)$ は従来の重回帰分析の「複数要因における交互作用項」のパラメータに一致する. 重回帰分析では交互作用項の意味は解釈しづらいものであったが, メビウス型包除積分モデルと見なすことで値の解釈が可能になった. またファジィ測度の値は単独での重視度や複数項目を合わせたものの重視度がそれぞれに得られるので各要因の重視度の比較が行いにくい. これは次式で示すシャプレイ値を計算することにより比較が可能になる:

$$\phi_i(\mu) = \sum_{A \in \Omega \setminus \{i\}} \frac{|A|!(n-|A|-1)!}{n!} (\mu(A \cup \{i\}) - \mu(A)).$$

$\Phi(\mu) = (\phi_1(\mu), \phi_2(\mu), \dots, \phi_n(\mu))$ の ϕ_i が項目 i の重視度であり

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mu) = \mu(\Omega)$$

が成り立つ. なお, 単調性を満たしていない集合関数についてもシャプレイ値は計算可能である.

4. 精度のよいモデル決定のための工夫

前節でメビウス型包除積分モデルを用いたデータ分析の大まかな流れを説明した. さらに随所に色々な工夫を施して分析の精度を高めることができる.

4.1 データの前処理

今回は順序カテゴリーデータであったが, 数値データなど他の種類のデータの場合もデータに応じた適切な処理を施し数理モデルに適用可能な形に変換しなければならない. データの最大値, 最小値の間で $[0, K]$ に正規化したり, (平均 $\pm 2 \times$ 標準偏差) で上下を打ち切る, あるいはノンパラメトリックにデータの上下を

それぞれ個数の数%に当たる値で打ち切る, 等が考えられる. 説明変数の取る値が互いに独立である必要があるのは重回帰分析と同様であるが, さらに追加する変数のことを考慮して適切に正規化を行い各データのスケールを揃える必要がある. 極端な話, もしも要因の値 i と要因の値 j の値に $x_i < x_j$ が常に成り立つような場合, 演算に論理積を用いた場合, $x_i \wedge x_j = x_i$ となってしまう.

4.2 どの演算を利用するか

適切な演算は解析データや前処理に応じて異なるため, 色々な t -ノルムを試すのがよい. パラメトリック t -ノルムを用いると, t -ノルムのパラメータの値を調整することで柔軟にモデル式を変化させることができる. パラメータの値を適当な細かな刻みで変化させしらみつぶし探索を行い最も精度のよいモデル式が得られる t -ノルムパラメータを見つけることができる.

4.3 変数選択について

多くの要因が集まることで相互作用が大きく表れるような場合も考えられるため k -加法性を仮定しない方がよりモデル式の記述能力が高まる. しかしこの場合, 要因数 n では, パラメータが $2^n - 1$ 個と非常に多くなってしまふ. これらを解消するためには $2^n - 1$ 個の全ての変数を使うのではなく適切に変数選択を行うのがよい. これも重回帰分析の手法をそのまま適用することができる. ここでは一般的によく使われるステップワイズ法を利用する, 通常次のようなアルゴリズムで変数を取捨選択する.

ステップ1 変数0個の状態からスタートする.

ステップ2 モデル式に使われていない全ての説明変数の中でモデル式に加えたときの回帰変動と加える前の残差変動の分散比を統計量 F とした分散分析を行い F 値が $F_{SLE} = 3.84$ を越えるものを F 値の高いものから順に全てモデル式に投入する.

ステップ3 投入するものがなくなったら, モデルに投入されている全ての変数に対してその変数を除去したときの回帰変動と除去する前の残差変動の分散比を統計量 F とした分散分析を行い, この F 値が $F_{SLS} = 2.71$ より小さいものを F 値の小さいものから順にすべてモデル式から除去する.

投入と除去が行われなくなるまでステップ2, 3を繰り返す. F_{SLE}, F_{SLS} はそれぞれ自由度 $(1, \infty)$ の F 分布の上側5%点と10%点である. F 値以外にも, 赤池

情報量基準やバイズ情報量基準を使う方法もある. 多重共線性も考慮すべき点である. 何れの場合も変数を加えたことが意味のあるのかどうかを調べ, 意味があれば投入, なければ除去, を繰り返す.

さらに前節で得られた数理モデルではファジィ測度が単調性を満たしていない. パラメータがファジィ測度になるように, つまり単調性を満たすようにしたのでステップ2と3の条件にさらに単調性の条件を加える.

ステップ2' 説明変数を加えたときの F 値が $F_{SLE} = 3.84$ を越え, かつ投入後のモデル式のパラメータがファジィ測度の単調性を満たしているもののうち F 値の高いものから順に全てモデル式に投入する.

ステップ3' 投入するものがなくなったら, 変数を除去したときの F 値が $F_{SLS} = 3.84$ より小さいものうち除去後のモデル式のパラメータがファジィ測度の単調性を満たすものを F 値の小さいものから順にすべてモデル式から除去する.

単調性のチェックは例えば, 全ての $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ について, 全ての $i \in A$ に対して

$$m^{\mu}(A) \geq - \sum_{B \subseteq A, B \ni i} m^{\mu}(B)$$

が成り立つことを確認すればよい. さらに今回は多重共線性を考慮しステップ2'でVIF統計量が10を超える場合は投入しないこととした. このアルゴリズムより得られるモデル式における非加法的測度は単調性を満たす. 6つの要因を全て使用し, 色々な t -ノルムについてステップワイズ法を適用した結果, 得られた決定係数などを表7に, このときの選択された説明変数を表8に示す. パラメトリック t -ノルムのパラメータは細かい刻みでパラメータを変化させるしらみつぶし法で補正 R^2 が最も高い値となったときのパラメータ値である. どの包除積分モデルも重回帰モデルより R 値, 補正 R^2 値が高く精度のよい数理モデルであると言える. さらにパラメトリック t -ノルムが最も高い値となっている. ただし, どのパラメトリック t -ノルムでもそれほど大きな違いではなく, 表にない他のパラメトリック t -ノルムでもほぼ同程度の数値となった. 選択された変数や変数の数に若干の相違はあるものの, シャプレイ値はどれも同程度であった, 具体的なモデル式の例として Dubois-Prade の t -ノルムを使用した場合を式(2)に示す.

表7 ステップワイズ法による結果

t-ノルム	決定係数 R	補正 R^2	選択された変数の数
重回帰モデル	0.715	0.510	6
論理積	0.920	0.846	13
代数積	0.928	0.861	8
Hamacher 積	0.928	0.861	9
Dubois らの t-ノルム	0.930	0.864	11
Schweizer の t-ノルム	0.930	0.864	11

表8 ステップワイズ法で選択された変数

t-norm	選択された変数
論理積	{3},{5},{6},{1,4,6},{2,4,6},{3,4,6},{1,4,5,6},{2,3,4,6}, {2,4,5,6},{1,3,4,5,6},{1,2,3,4,6},{1,2,4,5,6}, Ω
代数積	{4,6},{1,4,6},{1,2,4,6},{1,3,4,6},{1,4,5,6},{2,3,4,6}, {2,4,5,6},{2,3,4,5,6}
Hamacher 積	{6},{4,5},{1,2,3},{1,3,6},{1,4,6},{2,4,6}, {1,4,6}, {1,4,6},{2,3,6},{2,4,6},{3,4,6},{1,3,4,6},{1,4,5,6}, {2,4,5,6},{1,2,3,4,6},{2,3,4,5,6}
Dubois らの $\lambda = 0.95$	{6},{4,5},{1,4,6},{2,4,6},{1,3,4,6},{1,4,5,6},{2,3,4,6}, {2,4,5,6},{1,2,3,4,6},{1,2,4,5,6}, Ω
Schweizer の $p = 1.3$	{6},{1,4,6},{2,4,6},{3,4,5},{1,3,4,6},{1,4,5,6}, {2,3,4,6},{2,4,5,6},{1,2,3,4,6},{1,2,4,5,6}, Ω

$$\begin{aligned}
 F_{DP}(f) = & 0.025 x_6 + 0.020 \left(\bigotimes_{i \in \{4,5\}} x_i \right) \\
 & + 0.154 \left(\bigotimes_{i \in \{1,4,6\}} x_i \right) + 0.128 \left(\bigotimes_{i \in \{2,4,6\}} x_i \right) \\
 & + 0.170 \left(\bigotimes_{i \in \{1,3,4,6\}} x_i \right) + 0.312 \left(\bigotimes_{i \in \{1,4,5,6\}} x_i \right) \\
 & + 0.111 \left(\bigotimes_{i \in \{2,3,4,6\}} x_i \right) + 0.180 \left(\bigotimes_{i \in \{2,4,5,6\}} x_i \right) \\
 & + 0.194 \left(\bigotimes_{i \in \{1,2,3,4,6\}} x_i \right) + 0.275 \left(\bigotimes_{i \in \{1,2,4,5,6\}} x_i \right) \\
 & - 0.304 \left(\bigotimes_{i \in \{1,2,3,4,5,6\}} x_i \right) - 0.33, \quad (2)
 \end{aligned}$$

⊗ は Dubois-Prade の t-ノルム。

通常のステップワイズ法に測度の単調性条件が加わり、変数の投入と除去の条件が強くなっているので F_{SLE} , F_{SLS} の条件を緩めて投入、除去が頻繁に行われるようにしてもよいかもしれない。どちらにしてもステップワイズ法で得られるのは局所解であり、最良の結果を得るためには、今のところ全てのパラメータの変数選択についてしらみつぶし法で調べるしかない。この場合、要因数が n 個であれば 2^{n-1} 個の変数から選ぶことになるので $2^{(2^n-1)} - 1$ 通りの選び方についてチェックする必要があるが、要因数 2 なら、7 通り、3 の場合、31 通りであり、この程度であれば問題はない

と思われる。

今回はプログラムを作成したが、SPSS や R などを利用することでより少ない手間で実現できる。ちなみにカテゴリー順序データからの数値化を等間隔に行った場合は、若干精度が悪くなり、例えば Dubois-Prade の t-ノルムの場合で決定係数 $R = 0.808$, 補正 $R^2 = 0.651$ であった [8]。

4.4 最尤推定量との関係

重回帰分析では最小二乗法によりパラメータを決定するが、これはデータの誤差が正規分布に従うと仮定したときのパラメータの最尤推定量に一致していることが知られている。これは包除積モデルを用いた重回帰分析でも同様で、最小二乗法で決定したパラメータは最尤推定量と一致する。目的変数の測定値の誤差を e とすると

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i \right) + a_0 + e \\
 &= \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i \right) + e.
 \end{aligned}$$

移項して

$$e = y - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i \right).$$

後の便宜のため $a_{\{\emptyset\}} := a_0/K$ として和の項にまとめた。

誤差 e が $N(0, \sigma^2)$ に従うと仮定すると e の確率密度関数は

$$\begin{aligned}
 f(y, \mathbf{x}; \{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}, \sigma^2) \\
 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \left\{ y - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i \right) \right\}^2 / 2\sigma^2 \right)
 \end{aligned}$$

となる。 M 個の目的変数のデータ y^1, \dots, y^M の誤差は $N(0, \sigma^2)$ に独立に従うと仮定すると $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$, 及び σ^2 をパラメータとする尤度関数は

$$\begin{aligned}
 L(\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}, \sigma^2; (y^1, \mathbf{x}^1), \dots, (y^m, \mathbf{x}^m), \dots, (y^M, \mathbf{x}^M)) \\
 = L(\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}, \sigma^2; (y^m, \mathbf{x}^m (m \in \{1, 2, \dots, M\}))) \\
 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \frac{\{y^1 - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} (a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^1)\}^2}{2\sigma^2} \right) \\
 \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \frac{\{y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} (a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m)\}^2}{2\sigma^2} \right) \\
 \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \frac{\{y^M - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} (a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^M)\}^2}{2\sigma^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{m=1}^M y^m \\ \sum_{m=1}^M x_1^m y^m \\ \sum_{m=1}^M x_2^m y^m \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m y^m \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^M 1 & \sum_{m=1}^M x_1^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \\ \sum_{m=1}^M x_1^m & \sum_{m=1}^M x_1^m x_1^m & \cdots & \sum_{m=1}^M x_1^m \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \cdots & \sum_{m=1}^M x_1^m \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \\ \sum_{m=1}^M x_2^m & \sum_{m=1}^M x_2^m x_1^m & \cdots & \sum_{m=1}^M x_2^m \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \cdots & \sum_{m=1}^M x_2^m \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m x_1^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m x_1^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \bigotimes_{i \in \{1,2\}} x_i^m & \cdots & \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \bigotimes_{i \in \Omega} x_i^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{\{1\}} \\ a_{\{2\}} \\ \vdots \\ a_{\{1,2\}} \\ \vdots \\ a_{\Omega} \end{pmatrix}$$

図3 パラメータを決定する連立方程式

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^M \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(y^1 - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^1 \right) \right)^2 \right) + \\ &\quad \cdots + \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2 + \\ &\quad \cdots + \left\{ y^M - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^M \right) \right\}^2 \Bigg) \\ &\quad \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{M}{2} \frac{1}{\sigma^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2 \\ &\quad = -\frac{1}{2(\sigma^2)^2} \left(M\sigma^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2 \right). \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log L(\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}, \sigma^2; (y^m, \mathbf{x}^m (m \in \{1, 2, \dots, M\}))) \\ = -M \log \sqrt{2\pi}\sigma \\ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2 \end{aligned}$$

これを最大にする $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ は

$$\sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2$$

を最小にする $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ であり、これはデータと推定値の誤差の二乗を最小にする最小二乗法と一致する。

あとは、対数尤度関数 $\log L$ を $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ と σ^2 で偏微分したものを0として連立方程式の解を解けば、各係数 $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ と σ^2 が定まる。偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial a_A} &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma^2} \left(y^m - \sum_{B \in \mathcal{P}(\Omega)} a_B \bigotimes_{i \in B} x_i^m \right) \bigotimes_{i \in A} x_i^m \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in A} x_i^m y^m \right. \\ &\quad \left. - \sum_{B \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(\sum_{m=1}^M \bigotimes_{i \in A} x_i^m \bigotimes_{i \in B} x_i^m \right) a_B \right\}, \end{aligned}$$

したがって求める最尤推定量 $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ は図3の連立方程式の解であり、これは最小二乗法により求めたパラメータ $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ と一致する。 σ^2 の最尤推定量は

$$\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ y^m - \sum_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \left(a_A \bigotimes_{i \in A} x_i^m \right) \right\}^2$$

に $\{a_A\}_{A \in \mathcal{P}(\Omega)}$ を代入すれば求まる。これは二乗誤差(残差の二乗)の平均と一致する。前述したようにメビウス型包除積分モデルは $\bigotimes_{i \in A} x_i$ を説明変数と見なし、重回帰モデルとみなすことができるので本節の議論は従来の重回帰モデルで説明変数の数が $2^n - 1$ 個の場合と全く同じものである。

5. 終わりに

本稿では包除積分を利用したデータ解析手法を紹介した。色々なt-ノルムを用いたが、本稿に未掲載の分も含めt-ノルムによる明確な違いはそれほど現れなかった。非常にビッグなデータを解析する場合には違いが表れるのかもしれない。積分が単調になるためのt-ノルムの条件もさらにさらに精密な検討が必要である。執筆にあたり非加法的測度になじみのない読者のこと

も意識したつもりであるが説明の不足な部分などがあれば遠慮なくお問い合わせいただきたい。

ファジィ測度のような非加法的な測度の概念は数学の色々な分野に見られ例えば、重みつきハイパーグラフ (グラフ理論), サブモジュラ関数 (関数解析), 凸関数 (凸解析), マトロイド (組み合わせ数学), キャパシティ (ポテンシャル論), 非加法的確率 (ミクロ経済学), 協力ゲーム (ゲーム理論), 無向グラフ上の Markov ランダム場を特徴付けるポテンシャル (統計物理), 確率測度の族の上界/下界包絡 (ロバスト統計) 等, どれも非加法的な測度と同値な概念であり各々の分野で研究がなされてきた。しかしながら非加法性を明確に意識してこの概念を考察したのは 1953 年の Choquet による capacity [6], あるいは 1974 年の菅野道夫氏によるファジィ測度 [1] が端緒であり, これらは独立に導入され合わせて Choquet 積分, 菅野積分も定義された。ファジィ測度による測度論・積分論の理論的考察は 1980–1995 年にかけて菅野および室伏により精力的に研究され, これが非加法的単調測度論の標準理論となり今日に続いている [2]。これらの理論を土台とする非加法的測度論の研究は工学や社会科学分野においてその重要性や利便性が認識され, 多くの研究者らによる精力的な研究により極めて広範な領域で技術開発がなされてきた。これらの精力的な応用分野の研究に対して, 理論面における研究はかなり遅れを取っていたと言えるが測度論の拡張概念として測度の本質を追求するための手段として徐々に測度論の研究者らが研究に取り組み始め, 特に近年の河邊による収束定理の一連の結果など特筆に値する成果が上がっており ([9] 等), これに触発された理論面の整備, またそれを契機とした応用研究の発展という理想的な関係性をもたらす益々の発展を期待したい。

ファジィ測度の応用を考える場合には, 有限集合上の測度で十分であるが, 測度論の立場から連続性や収束性といった議論を行う場合には有限集合では意味がなく実数空間等の一般の集合上に定義された測度とその積分を扱うことになる。包除積分も最近ようやく非離散化を行うことができたので, もしも興味を持ったかたがおられたら是非 [5] をご覧下さい。

参 考 文 献

- [1] M. Sugeno: “Theory of fuzzy integrals and its applications,” 1974.
- [2] 菅野道夫, 室伏俊明: “ファジィ測度,” 講座ファジィ 3, 日刊工業新聞, 1993.
- [3] 中島信之: “t-ノルムの全て,” 日本ファジィ学会ソフトウェア研究会, 三恵社, 2001.
- [4] A. Honda and Y. Okazaki: “Theory of inclusion-

exclusion integral,” *Information Science*, Vol.376, pp. 136-147, 2017.

- [5] A. Honda and Y. Okazaki: “Generalization of inclusion-exclusion integral for nondiscrete monotone measure space,” *Fuzzy Sets and Systems*, 2018.
- [6] G. Choquet: “Theory of capacities,” *Ann. Inst. Fourier*, Vol.5, pp. 131-295, 1953.
- [7] Car Evaluation, *UCI Machine Learning Repository*: <http://archive.ics.uci.edu/ml> [accessed Apr. 1, 2018]
- [8] A. Honda and Y. Okazaki: “Inclusion-exclusion integral and t-norm based data analysis model construction,” *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Communications in Computer and Information Science*, Springer, Vol.853, pp. 65-77, 2016.
- [9] 河邊淳: “非加法的測度と非線形積分,” Vol.68, pp. 266-292, 2016.

(2018 年 7 月 3 日 受付)

[問い合わせ先]

〒820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4

九州工業大学情報工学部

本田 あおい

E-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp

著 者 紹 介



日本人
本田 あおい [正会員]

九州工業大学情報工学研究院准教授。博士 (数理学)。非加法的測度論, 情報数理, 測度論や統計的手法に基づくビッグデータ解析, 及びバナッハ空間の幾何学の研究に従事。日本数学会, 日本応用数理学会, 日本オペレーションズ・リサーチ学会会員。