

## 粒子分散複合材料の構成則モデルとその評価\*

呉 亜 東\*<sup>1</sup>, 中 垣 通 彦\*<sup>1</sup>

## Constitutive Law for Particle Dispersed Composite and its Evaluation

Yadong WU and Michihiko NAKAGAKI

The paper describes the constitutive model for a particle dispersed composite material in elastic regime. Two models, which are EMT model and SCC model, are proposed. The former is based on the Eshelby's equivalent inclusion concept and the Mori-Tanaka's mean field theory, as published other models often practice. EMT assumes that the compliance surrounding the particle is the same as that in the matrix, whereas the SCC does in the averaged composite. In SCC, the final formula of the constitutive law is obtained in a self-consistent form, where the solution is obtained in an iterative fashion. The accuracy of those were checked with a meso-mechanics analysis by FEM performed on a uniaxial tension of an infinite composite domain. The accuracy of the models by EMT and other existing models depends on the volume fraction of the inclusion and also on the rigidity ratio of the two phases, giving satisfactory results only up to about thirty percent of volume fraction. On the other hand, SCC model returns quite a good accuracy over the entire ranges of the volume fraction and the rigidity ratio that includes void inclusions and rigid inclusions as extremes. The paper also discusses the significance of microgeometric effects on the global material performance.

**Key Words:** Particle Dispersed Composite, Mixing Law, Equivalent Inclusion Method, Constitutive Model, Meso-Mechanics Analysis, Self-Consistency

## 1. 緒 言

複合材料に関する技術開発と研究は広く行われている。中でも粒子分散型複合材料は、粒子強化材料として古くからその研究が始められていた。近年、高機能性材料や知的材料の分野の急速な進展と並行して粒子分散複合材料の研究の重要性が認識されている。微粒子分散複合材料の一つとして最近注目されている傾斜機能材料は、均質材が持ち得ない機能特性を発現する事が出来るという点において優れている。例えば、厳しい熱環境に対する超耐熱材料として開発されつつある遮熱型傾斜機能材料は、セラミックス相と金属相とが連続的に組成傾斜する構造を持っており、セラミックスの持つ高い耐熱性、遮熱性と金属の持つ高い強度と破壊靱性を兼ね備えた複合機能を発現し、衝撃や熱衝撃に対処する。

粒子分散複合材料のモデル化にはEshelby<sup>(1)</sup>の等価介在物理論を用いた球状粒子や楕円体粒子モデルが一般に使用されている。Eshelbyの等価介在物理論は、無限均質なマトリックス材料場に単一の等価な仮想粒子を想定し、これに固有ひずみを与えて非均質粒子の応力

とひずみに等価させる事により解を求める弾性理論である。母相中に粒子が多数散在する粒子分散複合材料の介在相と母相の平均応力およびひずみと、複合材の巨視的な応力-ひずみ挙動を定義する弾性構成則に関して、Eshelby<sup>(1)</sup>、Mori-Tanaka<sup>(2)</sup>、Kerner<sup>(3)</sup>、Wakashima<sup>(4)</sup>ら、弾塑性についてはTandon-Weng<sup>(5)</sup>、Tohgo-Weng<sup>(6)</sup>、Wu et.al.<sup>(7)</sup>らの研究がある。中でも母相の応力の干渉を考慮したMori-Tanakaの平均場理論は上記以外にも多くの論文に引用されている。この方法では、単一粒子が無限母相の中にあると仮定するEshelbyの等価介在物理論を多粒子の複合体にも拡張して介在物の応力を求めている。粒子の体積分率が低く、実際系の粒子を取り巻くコンプライアンスが純母相のそれに近い場合は、上記の仮定は妥当であると言えるが、粒子が他の粒子の影響を受ける場合、すなわち粒子の体積分率が大きくなればその仮定は精度を低下させる事がMura<sup>(8)</sup>によって指摘されている。

実際の粒子強化複合材料や繊維強化複合材料などの巨視的材料挙動は、それらの複合構造の微視的なレベルで起きている塑性すべり、損傷、界面はく離などの複雑な非線形現象を反映している。上述の構成則はこれらの非線形領域にまで踏み込んだものがあるが、それ以前の問題である粒子間の干渉がまだ十分に取られていない。線形域内であっても、材料剛性比にもよるが介在物の体積分率が高くなれば精度が低下し、

\* 原稿受付 1997年3月18日。

\*<sup>1</sup> 正員、九州工業大学情報工学部(☎820-8502 飯塚市川津680-4)。

それらの構成則の適用範囲は体積分率が低い範囲に限られる事が数値計算例においても示されている<sup>4)</sup>。その理由として、従来のモデルは任意の一つの粒子の外界領域のコンプライアンスは粒子密度によらず単粒子の場合と同じとしている所にあると考えられる。この点に留意し、本研究では粒子間の干渉を粒子の外界の剛性において取り扱い、平均的なコンプライアンスの視点に立った等価混合則を考え、当初 Hershey<sup>19)</sup> と Kröner<sup>100)</sup> により提案された自己整合法 (Self-consistent Scheme) を用いた構成則、SCC モデルを提案する。

また、実際の複合材では前述の複雑な現象が重なって起きるため、構成則モデルの実験的検証が難しく、上に述べた根本的な問題が余り認識されずなおざりにされてきた傾向がある。そこで本研究ではこの点に焦点を絞り、非線形現象を排除したメゾメカニクス解析を実施し、その結果と比較する事により本モデルの妥当性を検証する。

ここでも、介在物の粒子形状を一般に楕円体として考え、球状粒子はその特別な場合と考える。これらの場合、粒子内の応力は一様であることが Eshelby<sup>1)</sup> によって証明されている。また、Eshelby の等価介在物概念を均質媒体に適用し、粒子密度レベルが以下に示す三つの場合すなわち、単粒子、EMT モデル、SCC モデルについて3次元の相応力および構成則をテンソル直接表示形にて示す。2次元問題に帰着させれば繊維強化複合材料問題などにも応用出来る。EMT モデルは、Eshelby の等価介在物理論および Mori-Tanaka の平均場理論を基本とする従来のモデルを代表させたものである。EMT モデルに比べ SCC モデルでは介在相の体積分率と両相の剛性比の広域に亘ってよい精度の結果が得られた。

## 2. 媒体中の単粒子

無限領域を持つ母相の中に単一の異材粒子が存在する非均質体を想定する。Eshelby の等価介在物法によれば、母相中に母相と同じ弾性係数を持つ仮想粒子を考え、これに適当な固有ひずみを与えて実際系の粒子に等価させる事によって負荷状態にある粒子の応力とひずみを求める事ができる。本論文での展開において $(:)$  は2階以上のテンソルを表し、 $(:)$  は2重内積を、 $(\otimes)$  はテンソル積を表す。

等価粒子に固有ひずみ  $\epsilon^*$  が与えられた時の粒子ひずみは

$$\epsilon_2 = \epsilon_1^* + \epsilon^* \quad (1)$$

と表される。ここで、添字1と2はそれぞれ母相と介在

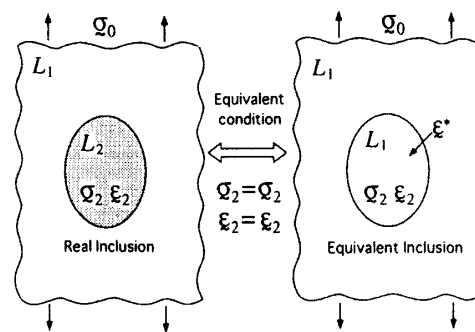


Fig. 1 Concept of Eshelby's equivalent inclusion model

相を表し、相添字をもって表す諸量は相内での平均値であるとする。 $\epsilon_1^*$  は介在相の弾性ひずみ、 $\epsilon_2$  は介在相の全ひずみである。今、母相と介在相の平均ひずみの差および平均応力差をそれぞれ  $\epsilon^c$  および  $\sigma^c$  と定義する。

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + \epsilon^c \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma^c \quad (3)$$

等価粒子の弾性係数は母相のもと同じであるので、式 (1), (2), (3) および Hooke の法則より、母相のコンプライアンス・テンソル  $L_1$  を用いて介在相の弾性ひずみを次式のように表す事が出来る。

$$\epsilon_1^* = L_1 : (\sigma_1 + \sigma^c) \quad (4)$$

単粒子の場合、介在相と母相の応力差およびひずみ差は Eshelby 理論により、次のように表す事が出来る。

$$\sigma^c = E_0 : \epsilon^* \quad (5)$$

$$\epsilon^c = S : \epsilon^* \quad (6)$$

$$E_0 = E_1 : (S - I \otimes I) \quad (7)$$

ここで、 $E_1$  は母相の弾性材料テンソルであり、 $E_0$  は母相の拘束係数である。また  $I$  は単位テンソルを表す。 $S$  は Eshelby テンソルであり、楕円体粒子に対してその詳細は文献<sup>6)</sup> に与えられている。この時、粒子の回りは全てマトリックス材料であるので、固有ひずみを与えた時に応答する外界のコンプライアンスはマトリックスのコンプライアンスに等しい。

実介在粒子側では、粒子の応力と全ひずみの関係式は次式によって与えられ

$$\epsilon_2 = L_2 : \sigma_2 \quad (8)$$

等価性により、式 (1), (3), (4), (8) から固有ひずみは次式となる。

$$\epsilon^* = (L_2 - L_1) : \sigma_2 \quad (9)$$

式 (3), (5) から等価粒子の応力を固有ひずみの関数として表せば

$$\sigma_2 = \sigma_1 + E_0 : \epsilon^* \quad (10)$$

となり、式 (9) および (10) から  $\epsilon^*$  について解けば等価

性を満たす固有ひずみが求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}_0^* : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (11)$$

ここに

$$\mathbf{A}_0^* = \left[ (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)^{-1} - \mathbf{E}_0 \right]^{-1} \quad (12)$$

式 (11) を (10) に用いれば、粒子応力は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}_0^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (13)$$

単粒子の場合には母相の平均応力は粒子から十分遠方の応力、すなわち外荷重応力  $\boldsymbol{\sigma}_0$  と同じであると考えられるので、粒子の応力は次式によって求められる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}_0^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (14)$$

### 3. 疎らな粒子複合材：EMT モデル

母相の中に散在する粒子の体積分率が高い場合は粒子間の干渉による影響が無視できない。しかし、粒子の体積分率が小さい場合は粒子間の距離は充分遠く、互いの干渉は殆どないと考えられ、各粒子は前節の単粒子の場合に近い状態にある。よって式 (1) ~ (13) は疎らな多粒子の問題に対しても、そのまま適用する事が出来る。但し、母相の応力は粒子の密度によって有為な影響を受けるため、 $\boldsymbol{\sigma}_0$  と同じとはならない。そこで、粒子の影響を受ける母相の応力を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}' \quad (15)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}'$  は母相の応力の外荷重 (すなわち複合材料全体にかかる平均応力) からの偏差量である。これを式 (3) に代入すれば、介在相の応力は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}^c \quad (16)$$

複合材料の平均応力、母相の平均応力、介在相の平均応力の間には平衡条件により次の関係がある。

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = (1-f) \boldsymbol{\sigma}_1 + f \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (17)$$

$f$  は粒子の体積分率である。式 (15)、(16) を式 (17) に代入すれば次式を得る。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -f \boldsymbol{\sigma}^c \quad (18)$$

式 (18) は、母相応力の偏差が粒子の体積分率により、相間応力差とどのような関係にあるかを示している。式 (18) を用いれば母相と介在相の平均応力はそれぞれ次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= \boldsymbol{\sigma}_0 - f \boldsymbol{\sigma}^c \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= \boldsymbol{\sigma}_0 + (1-f) \boldsymbol{\sigma}^c \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで相間応力差に対して単粒子の場合の応力差、すなわち式 (5) を用いれば、両相の応力は次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= \boldsymbol{\sigma}_0 - f \mathbf{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= \boldsymbol{\sigma}_0 + (1-f) \mathbf{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^* \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

この相応力の表現式は、Mori-Tanaka<sup>(2)</sup> の応力混合則と同じ形をしており、Wakashima<sup>(4)</sup> らの定式化においても使用されている。

式 (9) と式 (20) より  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  について解けば、粒子が疎らに分散する場合の等価性を実現する固有ひずみが次式のように求められる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}^* : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (21)$$

ここで、

$$\mathbf{A}^* = \left[ (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1)^{-1} - (1-f) \mathbf{E}_0 \right]^{-1} \quad (22)$$

式 (21) を式 (20) に代入すれば、応力分散則として次式が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - f \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + (1-f) \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}^* \right) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (24)$$

上式において  $f \rightarrow 0$  とした場合は、式 (24) は単粒子の応力、式 (14) に帰着する。

Mori-Tanaka のひずみ平均則

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_1 + f \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (25)$$

を用いれば巨視的ひずみが定義できる。ここで

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (27)$$

式 (19) を式 (26)、(27) と共に式 (25) に用いれば、巨視的な平均応力と平均ひずみに関する構成則は

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{L}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (28)$$

として表す事ができる。 $\mathbf{L}_0$  は複合材料の平均弾性コンプライアンス・テンソルであり、次式ようになる。

$$\mathbf{L}_0 = (1-f) \mathbf{L}_1 + f \mathbf{L}_2 + f (1-f) (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \mathbf{E}_0 : \mathbf{A}^* \quad (29)$$

本混合則は比較的体積分率の低い粒子分散複合材料に対して有効であり、簡単なテンソル演算によって求められる。本モデルは水を入れた容器にボールを浮かべた状態に例える事が出来る。水位に対応する母相応力は粒子数を増やせば上昇するが、介在相と母相の平均応力差は不変である。Reuss や Voigt モデルでは各相の応力表現は粒子の体積分率に全く依存しない形であり、本モデルでは応力に体積分率の依存性が考慮されている。また、介在相の外領域の平均的なコンプライアンスが母相のものと同じであるとするモデルである。用いたいくつかの条件と導出経路に違いはあるが、基本的仮定において本構成則 (EMT モデル) は Wakashima<sup>(4)</sup>、Tohgo<sup>(6)</sup> らの応力混合則と同じであると

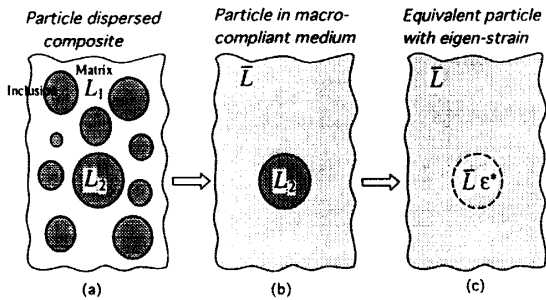


Fig. 2 Concept of equivalence for self-consistent compliance model

言える。

#### 4. 全体積分率・全剛性比領域に適用可：

##### 整合コンプライアンス・モデル (SCC モデル)

粒子の体積分率が前節に述べた粒子密度の範囲を超える場合、後に示すように EMT モデルの結果は著者らの有限要素法によるメゾメカニクス解析の結果から大きくずれることが確認された。母相と介在相の材料係数に顕著な違いがある場合は二つの結果の乖離は一層顕著となる。実粒子系では、一つの粒子に着目すれば、粒子の外界の平均的な剛性は当然、粒子の体積分率の増加と共に変化する。しかしながら、前節の EMT モデルでの等価系では体積分率に拘わらず、粒子外界の剛性を母相の剛性と同一と仮定している点に無理がある。そこで本論文では、特に粒子間の相互作用の観点から、介在粒子に与えられた固有ひずみに対して粒子の外界が応答する平均的なコンプライアンスを自己整合的に決定する混合則、すなわち "整合コンプライアンス・モデル (SCC モデル)" を提案する。Self-consistent 法自体は最初、Hershey<sup>[9]</sup> と Kröner<sup>[10]</sup> によって提案され、その後 Budiansky<sup>[11]</sup> によっても Eshelby の等価介在物理論と共に利用されている。それらは稠密な多結晶への適用を考えていて各相のひずみを平均的なひずみと同じと仮定している。また、Hill<sup>[12]</sup> は粒子分散複合体に適用したが、マトリックスと介在相の粒子形状を区別しない。本論文では介在相の体積分率が 0~1 の範囲の楕円体粒子分散材料に対し、より实际的に各相と平均ひずみが互いに異なると仮定する。

図 2a に示すような外応力を受ける微視的領域の中の一つの粒子に着目し、この粒子が複合体の巨視的なコンプライアンスに等しいコンプライアンス  $\bar{L}$  を持つ均質媒体中にあると考える (図 2b)。この複合体に等価させるモデルとして、図 2c に示すように均質媒体  $\bar{L}$  の中に一つの等価粒子を考える。この仮想粒子に固有ひずみを与える事により、実粒子との間に全ひずみと応力において等価関係を樹立する。

この場合も複合材料の平衡条件より、各相の応力と外応力との間には式 (17) の関係が成り立つ。図 2c は前々節の単粒子の場合と同じ状況であるので、仮想粒子の外領域の平均応力は複合体の平均応力と同じであるとする事が出来る。そこで本モデルにおいても以前と同様に、 $\sigma^c$  を粒子応力の外領域応力からの偏差として式 (30) のように定義する。式 (17) と (30) より、母相と介在相の平均応力は次のように表される。

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma^c \quad (30)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{f}{(1-f)} \sigma^c \quad (31)$$

式 (30), (31) で表現される本モデルの分散則が、Mori-Tanaka の応力分散則 (19) と顕著に相違する点である。式 (31) だけからは  $f \rightarrow 1$  となる極限では発散するのに見えるが、意味のある収束値が得られる事が後の解析で示される。

式 (30), (31) に Eshelby の等価則を用いて  $\sigma^c$  と固有ひずみ  $\varepsilon^*$  を以下のように再定義する。

$$\sigma^c = \bar{E}_0 : \varepsilon^* \quad (32)$$

$$\bar{E}_0 = \bar{E} : (\bar{S} - I \otimes I) \quad (33)$$

上式において、 $\bar{E}$  と  $\bar{S}$  は複合材料の平均弾性テンソルと平均 Eshelby テンソルである。等価介在物のひずみは式 (1) と同様に次式で与えられる。

$$\varepsilon_2 = \varepsilon^c + \varepsilon^* \quad (34)$$

従って、

$$\varepsilon^* = (L_2 - \bar{L}) : \sigma_2 \quad (35)$$

式 (30), (32) と (35) から  $\varepsilon^*$  について解き、等価性を満たす固有ひずみが求められる。

$$\varepsilon^* = \Delta^0 : \sigma_0 \quad (36)$$

$$\Delta^0 = [(L_2 - \bar{L})^{-1} - \bar{E}_0]^{-1} \quad (37)$$

これを式 (32) に適用し、さらに相応式 (30), (31) に用いれば、本モデルの応力混合則が次式の形で与えられる。

$$\sigma_1 = \left[ I \otimes I - \frac{f}{(1-f)} \bar{E}_0 : \Delta^0 \right] : \sigma_0 \quad (38)$$

$$\sigma_2 = [I \otimes I + \bar{E}_0 : \Delta^0] : \sigma_0 \quad (39)$$

単粒子の場合 ( $f=0$ ) には、式 (37) は式 (12) と等しくなり、式 (39) は式 (14) と一致する。

この場合においても巨視的の平均ひずみ  $\varepsilon_0$  を式 (25) を用いて表し、各相内の応力-ひずみ関係式 (26), (27) と式 (38), (39) を適用すれば、巨視的コンプライアンス構成則が次のように得られる。

$$\varepsilon_0 = \bar{L} : \sigma_0 \quad (40)$$

Table 1 Young's moduli for inclusion and matrix, and their ratio

		Young's modulus (Unit : GPa)					
$E_1$	$E_2$	2	4	10	40	Void	Rigid inclusion
2	2	1	0.5	0.2	0.05		
4	4	2	1				
10	10	5		1			
40	40	20			1	$\infty$	0

ここで、コンプライアンス $L$ は次式で表せる。

$$L = (1-f) L_1 + f L_2 + f(L_2 - L_1) : E_0 : A^0 \quad (41)$$

式(41)は右辺に未知数 $L$ 自身を含む自己整合形式をとっている。解は収束計算により求めなければならないが、右辺における初期値を簡単なVoigtモデル又はReussモデルを用いて $L$ 及び $E$ とするのが一つの妥当な方法である。閉じた形の解を必要とする場合には、その第一近似をあてる事が出来る。

本モデルでは、相応力と粒子の外領域のコンプライアンスにおいても共に粒子の体積分率の変化が考慮されていて、粒子の体積分率が高い場合にも、また粒子と母相の弾性係数比が著しく異なる場合にも適用出来るモデルである。

### 5. 解析結果

本研究で開発された混合則と構成則の精度を検討するため、球状粒子分散複合材料の2次元化した無限領域の引き張り弾性解析を行った。広範囲の適用性を立証するため、粒子の体積分率は0~100%まで、また介在物については空孔と剛体を含めて、材料剛性比が0~ $\infty$ にわたって検討した。

本問題に対しては、ポアソン係数の影響は比較的小さく、母相と粒子のポアソン係数をそれぞれ $\gamma_1 = 0.35$ ,  $\gamma_2 = 0.18$ と固定した。ヤング率による影響は顕著であるため、多数の剛性比について詳しく検討した。解析に用いた母相と介在相のヤング率をそれぞれ $E_1, E_2$ とし、剛

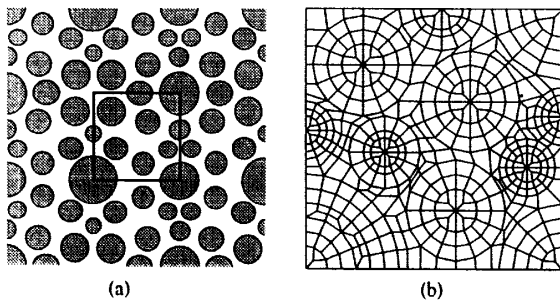


Fig. 3 Particle dispersed composite domain model and reference unit for meso-mechanics analysis by finite element method

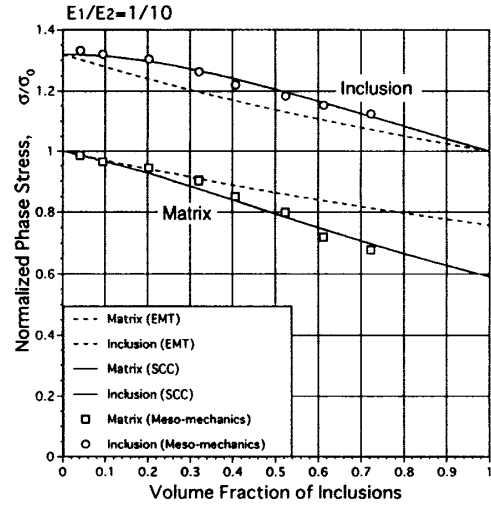


Fig. 4 Phase stress variation when  $E_1/E_2=1/10$

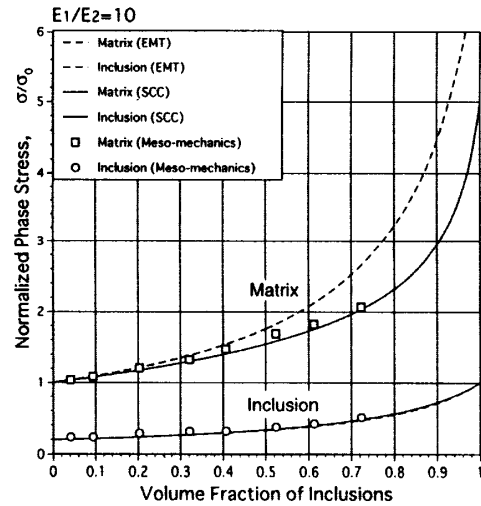


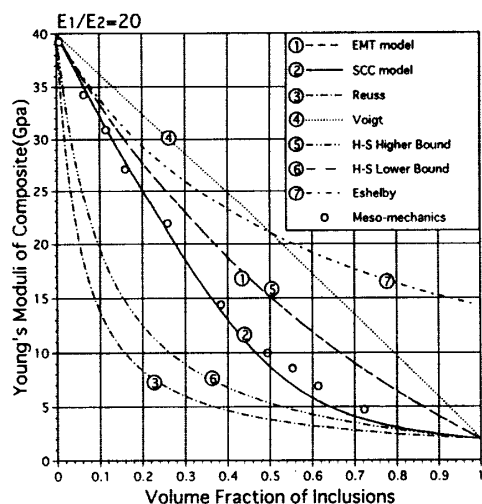
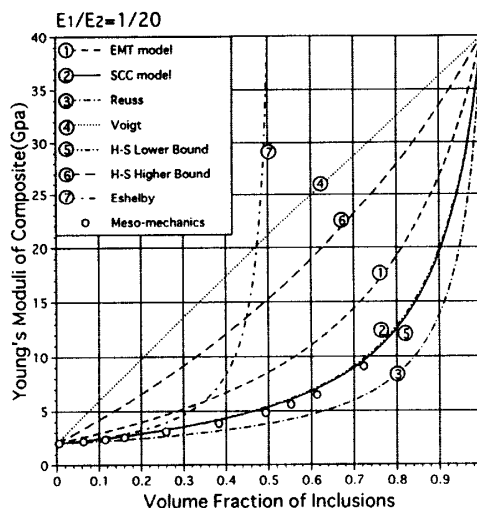
Fig. 5 Phase stress variation when  $E_1/E_2=10$

性比 $E_1/E_2$ を表1に示す。

緒言にも述べたように、実複合体では粒子形状の不均一性や相間はく離など複雑な問題があるため、本モデルの実験との比較が難しい。そこで本モデルと同じ条件の上に立つ粒子分散複合材料のメゾメカニクス解析を有限要素法により行い、ベンチマークとして用いて本モデルおよび他のモデルとの比較検討を行った。

図3(a)に示す無限領域を持つ粒子分散モデルを考え、その一部をとり図3(b)のような解析参照領域として考えた。周期無限領域とするため、参照領域の左辺、下辺には対称境界条件、右辺、上辺にはペナルティ拘束を施している。単粒子の参照領域からなる正方配列の場合には強い異方性が現われるが、粒子をランダム配置した本参照領域モデルはほとんど異方性を持たないパターンである事が示されている<sup>(13)</sup>。

本論文では弾性問題を取り扱っているため、体積膨

Fig. 6 Young's moduli of composite when  $E_1/E_2=20$ Fig. 7 Young's moduli of composite when  $E_1/E_2=1/20$ 

張変形モードとせん断変形モードを分離する事が出来、前述の構成則と収束過程をより簡単なスカラー演算により扱う事が出来る。以下に示す解析はスカラー演算を用いた例であり、SCCモデルにつき具体的な表示式を付録に示す。テンソル形式で計算した場合も、ほとんど変わらない精度の収束解が得られている事を付記する。

複合材料の巨視的な性質を正確に表すためには精度のよい相応力算定式が要求される。そのため、まず本構成則の応力分散則を検証する。図3(b)に示した解析参照領域では、介在相の体積分率は0.04から0.72までの範囲で可能である。その体積分率の範囲で、ヤング率の比が $E_1/E_2=0.1$ と $E_1/E_2=10$ の場合のベンチマーク解析と本構成則の結果を図4と図5に示す。横軸に介在相の体積分率をとり、縦軸には複合材料の平均応力により無次元化された母相または介在相の応力を示す。

両図において、二つのモデルとベンチマークの母相の平均応力は、体積分率が低くなるに従って巨視的平均応力に収束している事が分かる。体積分率が約30%以下の場合、母相と介在相の剛性比に拘わらず、EMTモデルとSCCモデルの応力分散則で計算した結果は共にベンチマークの結果に近く、低体積分率の場合に二つのモデルの応力分散則が有効である事を示している。特に粒子の体積分率が非常に小さい場合(約4%)では単粒子問題に近く、ベンチマークの介在物応力の結果は、EMTの式(24)で粒子の体積分率を0とした式(14)の結果とよく一致しており、単粒子の応力式(14)の有効性をも示している。

SCCモデルの応力分散式(38)、(39)より計算した結果は、全領域に亘ってベンチマーク結果と満足すべき一致が得られている。一方、EMTモデルの介在相応力はさ程ではないが、母相応力は介在相の体積分率が

30%を過ぎる辺りからベンチマーク値とSCCモデルから離れて行き、高体積分率においては大きくその傾向を示している。 $f \rightarrow 1$ の時のSCCモデルの収束値が有限であり、むしろベンチマーク結果との一致においてEMTモデルの結果よりも正しい極限值を指し示していると思われる。

また、母相と介在相の弾性係数比が2、5、20の場合についても同様の傾向を示す結果が得られている。

次に、上に示した応力分散則に基づく、複合材料の構成則について検討する。二相複合材料の場合、ReussとVoigtの線形混合則および、変分原理に基づくHashin-Shtrikman<sup>(14)</sup>のLower BoundとHigher Boundの式がよく利用または参照されている。Reussモデルは母相と介在相の応力が等しいとするモデルであり、母相が介在相に比べて非常に低い剛性を持つ場合に適している。一方Voigtモデルは母相と介在相のひずみが等しいとするモデルであり、母相の剛性が介在相に比して非常に高い場合に適する。

図6と図7に、母相と介在相のヤング率比がそれぞれ20および1/20の場合について、全ての体積分率領域に亘って複合材料の巨視的な縦弾性係数の結果を示す。ReussとVoigtモデルはHashin-Shtrikmanの上下限の外に位置していることが認められ、この程度の剛性比ではReussとVoigt混合則の適用は疑問となる。Eshelbyのモデルは体積分率が50%を越える辺りからVoigtモデルからも大きく離れ、適用範囲はかなり制限される。

相応力の場合と同様に、低体積分率領域ではEMTモデルの結果はSCCモデルの結果と同様にベンチマーク値に近いが、体積分率が高くなるに従って一致しなくなる。一方、SCCモデルは全領域に亘りベンチマーク値とよく一致していると言える。また、 $E_1/E_2=20$ の時はEMTモデルは数値的にHashin-Shtrikmanの上限とほ

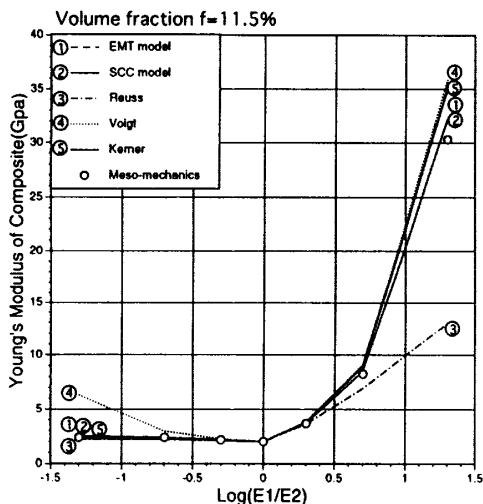


Fig. 8 Young's moduli of composite when f=0.115

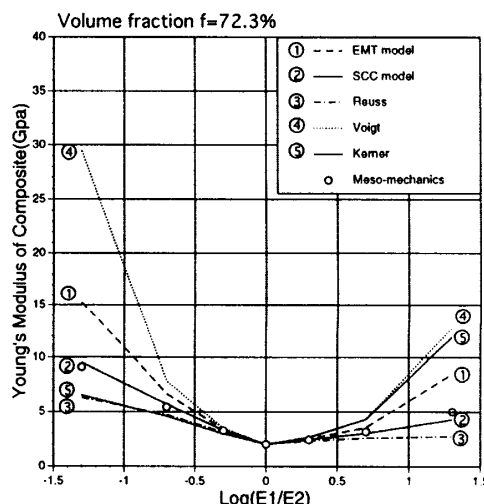


Fig. 9 Young's moduli of composite when f=0.723

ば一致しており、 $E_1/E_2=1/20$ の時は下限に一致しているのは興味深い。

図7の左右を反転させ、図6に重ね合わせればReuss, Voigtモデル, Hashin-Shtrikmanの上, 下限値はそれぞれ一致する事が分かる。この事は、これらのモデルが母相と介在相の区別をしない理由による。粒子の形を考慮し、母相と介在相を区別する本モデルの結果は非対称となる。特に剛性比が極端なこれらの場合、SCCモデルが粒子分散メゾメカニクス・モデルであるベンチマークとよく合う。これらの領域では弾性であっても、複合体の微視的な幾何学的条件が複合体の巨視的材料挙動に無関係でなく、顕著に支配する事が分かる。

複合材料の相材料の剛性比が巨視的構成則の精度に与える影響を観察するため、母相と介在相のヤング率の比が20, 5, 2およびそれらの逆数である場合に、本モデルの解析結果をベンチマーク値と比較する。介在物の体積分率が低い場合(11.5%), および高い場合

(72.3%)の二ケースについて、剛性比が1/20から20に互り、巨視的縦弾性係数の結果をそれぞれ図8と図9に示す。両図において、両相の材料係数が離れるに従い、各モデルの精度が低下する様子が分かる。ReussとVoigtの結果は再びベンチマーク値から最も離れている。

図8の低体積分率の場合には、解析した全剛性比の領域に互ってEMTモデルとSCCモデルの結果はほぼ一致しており、ベンチマーク値ともよい一致を示している。また、三層の粒子構造を持つKernerモデルも全域に互ってまずよい結果を与えている。この程度の体積分率では、母相/介在相の剛性比が低い場合はVoigtは不適当であるがReussは適している事、剛性比が高い場合はその逆である事が結果より判明する。

図9に示す介在物の体積分率が高い場合には、各モデルの結果は母相と介在相の弾性係数が隔たるに従って大きく離れるが、SCCモデルの結果は全範に互ってベ

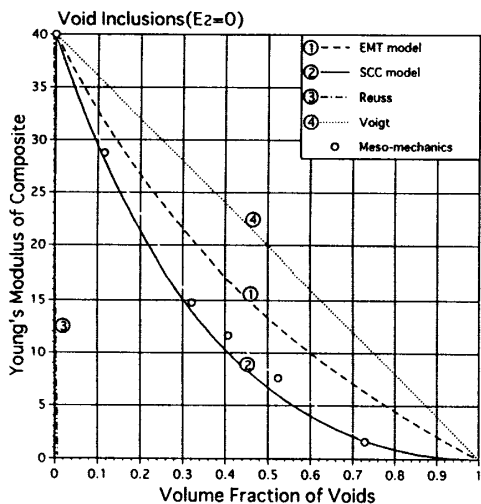


Fig. 10 Young's moduli of composite with void inclusions

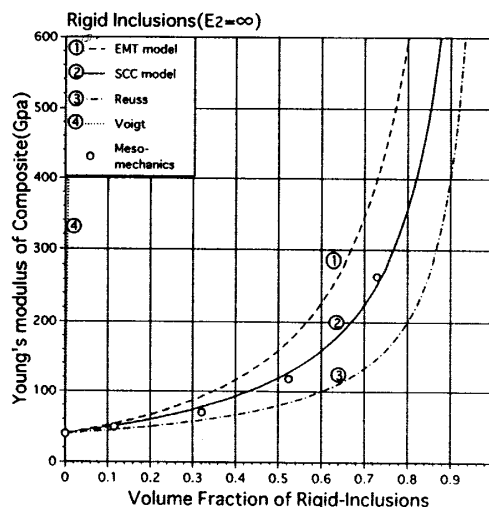


Fig. 11 Young's moduli of composite with rigid inclusions

ンチマーク結果と比較的よく一致している。

以上の結果から明らかなように、このような解析理論の数値的な検証を行う場合、母相と介在相の材料係数の差が十分大きい事と粒子の体積分率が十分高い事が、理論解析の有効性を証明するために要求される。

以上に示したのは、母相と介在相のヤング率の比が20倍以下の場合の結果である。介在相の剛性が両極の場合、すなわち介在物が空孔と剛体の場合の本モデルの精度についても検討する。解析上、空孔と剛体の介在相を模擬するためにヤング率は母相と比べて十分かけ離れた数値とし、それぞれ母相の $10^{-20}$ 倍および $10^{20}$ 倍と設定した。図10は、介在相が空孔の場合の空孔率に対する巨視的縦弾性係数の結果を示し、図11は介在相が剛体の場合の結果を示す。これらの両極の状態においても、体積分率が30%以下の場合、EMTモデルの結果はベンチマーク結果と近いが、それ以上では離れる。SCCモデルの結果は、全ての体積分率の範囲でベンチマーク結果と、図6および図7と同程度のよい一致を得ている。

## 6. 結 論

粒子分散複合材料の巨視的構成則に関する理論モデルの構築とメゾメカニクス有限要素解析を行い、以下に示す結論を得た。

- (1) Eshelbyの等価粒子理論とMori-Tanakaの混合則に基づき、閉鎖形で表されるEMTモデルをテンソル形式で定式化した。このモデルにより算定した巨視的な縦弾性係数は、粒子の体積分率が低い場合、または母相と介在相の弾性係数の差が小さい場合、すなわち微視的に等価非均質性が低い場合にのみ有効である。既出の粒子分散材料の構成則の多くは、それらの基本的仮定でEMTモデルと同じである。
- (2) 本論文で提案した、粒子の外領域のコンプライアンスを考慮するSCCモデルは、等価粒子理論を平均場に適用するSelf-consistent形の構成則である。粒子の体積分率が0~100%の領域と、介在相が空孔から剛体まで、すなわち介在相と母相の材料剛性比が0~ $\infty$ の全領域において信頼できる精度を与えるモデルである事を示した。
- (3) 複合材料の構成則モデルの検証においては、(1)に述べた等価非均質性が比較的高い状態で理論解析の有効性を証明できる事が要求される。
- (4) 等価非均質性が比較的高い状態では、弾性であっても複合体の微視的な幾何学的条件が複合体の巨視的材料挙動を支配する事実が確認された。非線形域ではこの効果は一層強調される。
- (5) 本論文のEMTモデルとSCCモデルは、粒子間の応

力の局所的干渉を無視する場合には増分理論による弾塑性問題にも適用できる。

## 付録 SCCモデルに関する $L$ と $E_0$ のスカラ計算式

一般に、式(41)の収束過程の初期値としてReussもしくはVoigtの混合則を使用する事が出来る。ReussとVoigtの混合則は次式で示される。

$$\text{Reuss: } L = (1-f)L_1 + fL_2 \quad (a)$$

$$\text{Voigt: } L = \left[ (1-f)L_1^{-1} + fL_2^{-1} \right]^{-1} \quad (b)$$

式(a)または(b)を式(41)に代入して、複合材料の弾性係数 $R$ (体積弾性係数)、 $G$ (せん断弾性係数)を次のように求める事ができる。

$$\frac{1}{R} = \frac{(1-f)K_2 + fK_1}{K_1K_2} + f \frac{(K_1 - K_2)R(\alpha - 1)}{K_1K_2} A_\alpha \quad (c)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{(1-f)G_2 + fG_1}{G_1G_2} + f \frac{(G_1 - G_2)G(\beta - 1)}{G_1G_2} A_\beta \quad (d)$$

$$A_\alpha = \frac{(R - K_2)R(\alpha - 1)}{K_1K_2 - (R - K_2)R(\alpha - 1)} \quad (e)$$

$$A_\beta = \frac{(G - G_2)G(\beta - 1)}{G_1G_2 - (G - G_2)G(\beta - 1)} \quad (f)$$

また次式により、ヤング率とポアソン比が求められる。

$$E = \frac{9RG}{3R+G}, \quad \nu = \frac{3R-2G}{6R-2G} \quad (g)$$

(g)式に基づいて、球状粒子分散複合材料の平均的なEshelbyテンソルが次式で定義される。

$$\alpha = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}, \quad \beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \quad (h)$$

上で求められた $R, G, \alpha, \beta$ を繰り返し式(c)~(h)に代入して、弾性係数 $R, G$ の値を収束させる。閉鎖形の解が必要な場合は上の過程の第一近似をあてる。

## 文 献

- (1) J. D. Eshelby, Proceeding of the royal society, London, Vol. A24, pp376-379, 1957.
- (2) T. Mori and K. Tanaka, Acta metallurgica, Vol. 21, pp571-574, May, 1973.
- (3) E. H. Kerner, Proc. Phys. Soc. 69-B, pp808-813, 1956.
- (4) K. Wakashima, Part II. 日本複合材料学会誌, Vol.2-4, pp161-167, 1976.
- (5) G. P. Tandon and G. J. Weng, J. Appl. Mech., Vol.53, pp511-518, 1986.
- (6) K. Tohgo, and G. J. Weng, J. of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, Vol.116, July, 1994.
- (7) Y. D. Wu, M. Nakagaki, and H. Fukushima, Proc. Plasticity 95, pp747-750, 1995.
- (8) T. Mura, "Micromechanics of Defects in Solids", Kluwer Academic Publishers, Second, Revised Edition, 1993.
- (9) A. V. Hershey, J. Appl. Mech. Vol. 21, pp236-241, 1954.
- (10) E. Kröner, Z. Physik Vol.151, pp504-518, 1958.
- (11) B. Budiansky, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp223-227, 1965.
- (12) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp213-222, 1965.
- (13) 中垣ほか, 第8回破壊力シンポジウム講演論文集, pp.165-169, 1995.
- (14) Z. Hashin and S. Shtrikman, J. Mech. Phys. Solids, Vol.11, pp127-140, 1963.