

任意寸法の試験片に対して  
正確な応力集中係数を与える計算式  
に関する研究

平成 20 年 3 月

高瀬 康

# 目 次

第1章 緒 論-----	5
1.1 本研究の背景-----	5
1.2 試験片形状に関連するこれまでの応力集中の研究について-----	6
1.3 円周切欠きを有する丸棒の応力集中に関する過去の研究について-----	8
1.4 本論文の目的と構成-----	12
1.5 本論文で用いる記号-----	13
第2章 浅い切欠きの応力集中係数とその応用-----	18
2.1 緒 言-----	18
2.2 浅い切欠きの解に関するこれまでの研究-----	19
2.3 体積力法の解析について-----	20
2.4 丸棒の引張りおよび曲げ問題の浅い切欠きの応力集中係数-----	23
2.5 丸棒ねじり問題の浅い切欠きの応力集中係数-----	26
2.6 円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 $K_t$ と浅い切欠きの解 $K_{ts}$ の関係-----	28
2.7 結 言-----	32
第3章 深い切欠きの応力集中係数とその応用-----	34
3.1 緒 言-----	34
3.2 深い切欠きの解に関するこれまでの研究-----	35
3.3 深い切欠きにおける開き角の影響-----	38
3.4 円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 $K_t$ と深い切欠きの解 $K_{td}$ -----	42
3.5 結 言-----	45

第 4 章	切欠き半径がゼロの鋭い切欠きの応力拡大係数-----	47
4 . 1	緒 言-----	47
4 . 2	鋭い切欠き角部および異種材料接合角部に関する過去の研究について-----	48
4 . 3	異種材料接合角部の特異応力場について-----	51
4 . 4	解析方法-----	54
4 . 5	丸棒問題の切欠き半径 0 の切欠きの応力拡大係数-----	56
4 . 6	結 言-----	76
第 5 章	切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	79
5 . 1	丸棒引張り，曲げ，ねじりの応力集中係数の性質について-----	79
5 . 2	丸棒引張りの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	81
5 . 3	丸棒曲げの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	87
5 . 4	丸棒ねじりの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	93
5 . 5	修正 Neuber 三角則との比による切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	96
5 . 6	結 言-----	102
第 6 章	V 形切欠きを有する帯板問題の切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	104
6 . 1	緒 言-----	104
6 . 2	浅い切欠きの応力集中係数-----	105
6 . 3	鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数--	107
6 . 4	その他の切欠きの応力集中係数-----	112
6 . 5	切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式-----	112

6 . 6 結 言-----	119
第7章 フィレット部を有する段付丸棒問題のフィレットの寸法の 全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式-----	121
7 . 1 緒 言-----	121
7 . 2 フィレットの段の高さが小さいときの応力集中係数-- -----	122
7 . 3 フィレットの曲率半径が大きいときまたは段の高さが 大きい場合の応力集中係数-----	126
7 . 4 その他のフィレット部の応力集中係数-----	131
7 . 5 フィレット部の全範囲に対して応力集中係数を与える 計算式-----	131
7 . 6 結 言-----	139
第8章 結 論-----	142
謝 辞-----	145
付 録-----	146

# 第1章 緒 論

## 1.1 本研究の背景

材料力学の主な目的は、材料を正しく、すなわち安全でしかも経済的に使用することである。その目的を達成するためには、試験片の強さから実物の強さを予測する必要がある。もし、材料の強度が最大応力  $\sigma_{\max}$  のみによって決まるのであれば、平滑材の強度のみを実験で求め、実物の最大応力  $\sigma_{\max}$  を適当な方法、たとえば、ハンドブック、有限要素法、ひずみゲージによる測定などの方法により求めることで、実物の強度評価が可能となる。しかし、材料の降伏や破壊は一点の応力だけでは決まらないので、一般に応力集中部を有する部材の強さを、平滑材の強さから直接予想することはできない。すなわち、応力集中がある場合には、最大応力  $\sigma_{\max}$  が一定であっても同一現象が起こるとは限らない[1],[2]。たとえば、最大応力  $\sigma_{\max}$  が大きく異なっても公称応力で表した疲労限度は同じであるなど、同一現象が異なる  $\sigma_{\max}$  のもとで起こっている例は古くから報告されている。

小野は、深い回転双曲面切欠きを有する試験片を用いて実験を行い、1939年に発表された論文[3]において、切欠き材の疲労限度が最大応力  $\sigma_{\max}$  のみでは決まらないことを示した。すなわち、試験片の正確な応力解析が困難であった当時、正確な応力集中係数を用いることが重要であると考え、製作困難であるが厳密解のある深い回転双曲面切欠きをもつ試験片を利用して、応力集中係数  $K_t$  が約5の場合でも、疲労限度は平滑材の疲労限度の約1/2にしかならないことを示している。このことは、切欠き材の疲労破壊が一点の応力のみでは支配されないことを意味している。石橋は、切欠き材の降伏現象を塑性域の観察を行いながら研究し、切欠き底からある一定の距離だけ入った点の応力を厳しさの尺度とする、2nd point theory を提案した [4] これに対して、Siebel ら [5] は、切欠き底での応力の勾配 を定義して切欠き効果の評価に用いることを提案している。また、石橋は、横穴をもつパイプ型試験片を用いて、最大応力勾配方向の現象を観察したほか、回転双曲面切欠き材の縦断面を観察し、停留き裂の存在を確認した [6] 。

その後、西谷は、疲労き裂発生限界の応力を  $10^7$  回繰り返した後の切欠き底の状態は応力集中係数の値に無関係にほぼ似ていることを示したほか、疲労限度をき裂発生曲線と、停留き裂の伝播限界曲線として表したときの交点である分岐点において、切欠き深さや最小断面の直径とは無関係に、切欠き半径 の値がほぼ一定となり材料定数となることを発見した [7]。また、その理由を分析するために、切欠き底の最大応力

を1としたときの切欠き底付近の応力分布を，だ円孔を有する無限板の引張りと，深い回転双曲面切欠きを有する丸棒の曲げの場合に求めたところ，それが $\sigma_{\max}$ と によってほぼ決まることを明らかにした[7]．これらの小野，石橋，西谷の切欠き材の強度に関する研究では，回転双曲面切欠きの解や，円孔による応力集中の解，だ円孔による応力集中の解が，強度の解明に極めて重要な役割を果たしている．従って，切欠きや円孔を有する試験片の応力集中係数を求めることは大変重要である．

## 1.2 試験片形状に関連するこれまでの応力集中の研究について

このように，試験片の強さから実物の強さを予測するためには，まず試験片の応力を正確に把握しなければならない．このような観点から，試験片形状に密接に関係する応力集中係数研究の歴史をまとめれば以下のようなになる[8]，[9]．

無限板の応力集中問題では，円孔を有する無限板の問題が 1898 年 Kirsch[10]によって，極座標を用いてはじめて研究され，その応力集中係数が $K_t = 3$ であることが示された．また，だ円孔を有する無限板の問題が 1913 年 Inglis[11]によって，だ円座標を用いてはじめて研究され，その応力集中係数が $K_t = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$ であることが示された．これら無限板の問題に対して，円孔を有する帯板の引張問題を Howland[12]が極座標と関数展開を用いて解析し，1930 年に発表している．これは，有限幅の問題を取り扱った初めての論文である．

切欠きの問題では，半無限板の半円切欠きの引張問題が 1936 年 Maunsell [13]によって初めて解かれている．Maunsell は，その応力集中に対して $K_t = 3.05$ の結果を得たが，正しい結果は $K_t = 3.0$ であろうと過って推測している（厳密解は $K_t = 3.0653$ ）．また，深い外側切欠きの最初の問題として，双曲線切欠きを有する無限板の引張り曲げ問題が 1933, 1934 年 Neuber[14], [15]によって，だ円座標を用いて研究され，その応力集中係数が与えられた．次に，Neuber[16]は 1937 年 3次元切欠き問題の最初の問題として回転双曲面切欠きを有する無限体の引張り，曲げ，ねじり問題をだ円座標を用いて研究し，その応力集中係数を示した．さらに，Neuber[16]は 1937 年これまでに求められた，だ円孔を有する無限板の解と自身で解析した深い切欠きの解を用いて有限深さの切欠きの応力集中係数を推定する，いわゆる Neuber 三角則を提案した．この式は，近似であるが 70 年間以上にわたって使用されている．

国内では石橋 [17]が，1940 年に円弧切欠きを有する半無限板の引張問題について双曲座標を用いて解析を行い，半円切欠きで真の値 $K_t = 3.0653$ に対して $K_t = 3.06$ を得ている．また，平野[18]は，2次元弾性体の複素関数表示による解法を用いて，無限板にひし形，三角形状孔が存在する場合と，半無限板に半円，半だ円及び半直線状

切欠きがある場合の問題を解析している。その結果、あらゆる切欠きの応力集中係数は切欠きの曲率半径と切欠き深さが等しいだ円切欠きの応力集中係数においてほとんど置換え可能であるという「等価だ円」の考え方が適用可能であることを示している。

有限幅の切欠きに関しては、半円切欠きを有する帯板の引張りと曲げ問題が、1947年 Ling[19]によって、関数展開法を用いて研究され、その応力集中係数が示された。しかし、1953年石田[20]によって関数展開と摂動法によって同問題が再度解析された。その結果、Lingの引張りの数値には誤りがあることが指摘され、正しい値が与えられた。次に、石田[21]は、1955年、だ円孔を有する帯板の引張問題を Laurent 展開法を用いて解析した。この  $K_t$  の値は正確で、広範囲の試験片形状に対して応力集中係数をもとめることができる。

西谷[22]は、1967,1968年  $60^\circ V$  形切欠きを有する半無限板の問題について、初めて体積力法を用いて電算機を利用した解析を行い、高精度の結果を得ている。長谷部[23]は、1971年、U字形切欠きを含む三角形切欠きを有する半無限板の問題を平面弾性問題として、あるいは板の面外曲げ問題として解析し、その応力分布を求めている。次に、1975年、半だ円切欠きを有する帯板引張問題が、体積力法を用いて西谷により解析された[24]。この特別な場合である半円切欠きの応力集中係数は石田の値と4桁一致している。また、半だ円円周切欠きを有する丸棒ねじり問題が1977年に、西谷・橋本[25]によって、引張り(1981年)、曲げ問題(1982年)が村上・野田・西谷・[26]によって各々解析されている。応力集中係数  $K_t$  が正確に求まり、しかも製作し易い丸棒試験片として重要な、 $60^\circ V$  形切欠きを有する丸棒の引張り、曲げ、ねじり問題が1984年西谷・野田[27]によって解析されている。次に、 $60^\circ V$  形切欠きを有する帯板の引張り、曲げ問題が1985年野田・西谷・深迫・原田[28]によって解析されている。さらに、 $K_t$  の値が正確に求まる三次元的な切欠きの問題として、ドリル穴を有する半無限体の引張り問題が1988年野口・西谷・後藤[29]によって解析されている。三次元的な欠陥を代表する形として、ドリル穴が昔から実験に使用されているが、それまで正確な  $K_t$  の値が求められていなかった。

さきに述べたように、降伏や破壊は一点の応力だけでは決まらないので、一般にき裂や切欠きをもつ部材の強さを平滑材の強さから直接予想することはできない。すなわち、西谷が線形切欠き力学として提案しているように、切欠き材の強度は実質的には、最大応力  $\sigma_{\max}$  と切欠き半径  $\rho$  とによって支配される。このため、試験片の強さから種々の応力集中部を有する実物の強さを予測するためには、切欠き半径  $\rho$  を0から無限大まで広範囲に変化させて、材料の挙動に関するマスターカーブを作成する必要がある[30]。その様な実験に際し、最も便利であり、最も広く用いられる試験片は、

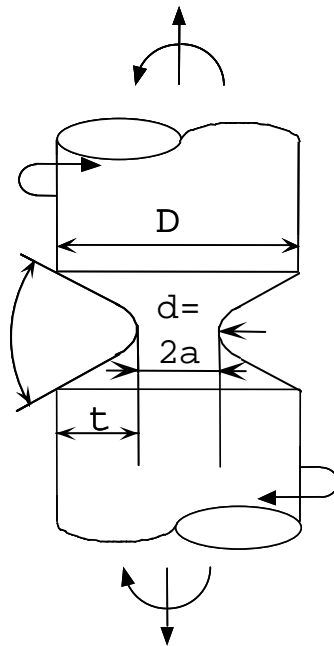


Fig. 1-1 Round specimens with a V-shaped notch

Fig1-1 に示すような切欠きを有する丸棒試験片である。

### 1.3 円周切欠きを有する丸棒の応力集中に関する過去の研究について

前述のように、これまでに切欠きを有する丸棒の応力集中問題に関して数多くの研究がなされてきた。その中でも Neuber の提案した三角則[16]は、過去 70 年以上にわたってよく用いられてきた。これは、以下のようにして近似式  $K_{tN}$  を  $K_{ts}$  と  $K_{td}$  から求める公式である。

$$K_{tN} = \frac{(K_{ts} - 1)(K_{td} - 1)}{\sqrt{\{K_{ts} - 1\}^2 + \{K_{td} - 1\}^2}} + 1 \quad \dots (1-1)$$

すなわち、この式は、浅い切欠きの解  $K_{ts}$  として、切欠きを有する半無限板の応力集中係数を用いる。また、深い切欠きの解  $K_{td}$  として深い双曲面及び双曲線切欠きの応力集中係数  $K_{ts}$  を用いる。そして、実際に必要な有限寸法の切欠きの応力集中係数 ( $K_{tN}$ ) を見積ろうとするものである。Neuber の研究[16]では  $K_{ts}$  としてだ円孔を有する無限板の引張り（ねじりの場合は面外せん断）の解を用い、 $K_{td}$  としては引張り、曲げ、ねじりを受ける回転双曲面切欠きを有する無限体の解を用いている。それは以下の式 (1



- 2) - (1 - 4) で与えられる .

( 1 ) 丸棒引張問題

$$K_{ts} = 1 + 2\sqrt{\frac{t}{\rho}}$$

$$K_{td} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + (0.5 + \nu) \frac{a}{\rho} + (1 + \nu) \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \right\} \quad \dots (1 - 2)$$

$$N = \frac{a}{\rho} + 2\nu \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2$$

( 2 ) 丸棒曲げ問題

$$K_{ts} = 1 + 2\sqrt{\frac{t}{\rho}}$$

$$K_{td} = \frac{1}{N} \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \left\{ 3 \frac{a}{\rho} - (1 - 2\nu) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 4 + \nu \right\} \quad \dots (1 - 3)$$

$$N = 3 \left( \frac{a}{\rho} + 1 \right) + (1 + 4\nu) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + (1 + \nu) / \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right)$$

( 3 ) 丸棒ねじり問題

$$K_{ts} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}$$

$$K_{td} = \frac{3(1 + \sqrt{a/\rho + 1})^2}{4(1 + 2\sqrt{a/\rho + 1})} \quad \dots (1 - 4)$$

菊川ら[31-34]は , Fig. 1 - 1 に示すような両側に対称な切欠きを有する丸棒・帯板が引張り及び曲げを受ける場合の応力集中問題について , 上記のような Neuber 三角則 [16]や Peterson[35]の図表が使用されている事に疑問を持ち , 切欠き底にひずみゲージをはり側面角と切欠き深さを変えて応力集中係数を測定した . 菊川らの研究では , ( A ) ゲージ長さが有限であることの誤差を補正すること , ( B ) 半円切欠きを有する帯板の厳密解を用いて結果を補正すること , ( C ) 切欠き底にひずみゲージを固定した状態で , 試験片を加工することによって切欠き深さを変化させること , などの工夫に

よって精度の高い値を得ており，以下のような結論を得た．

(1) Neuber の三角則の仮定の 1 つである「切欠き深さが深いほど応力集中係数は常に大きくなること」が，成立せず，Neuber の三角則に定性的にも誤りがある．

(2) 切欠きが深くなる時，応力集中係数が減少する現象は切欠き深さが増すと最小断面の内部において，引張り方向に直角な横方向引張り応力が増すので，これがその部分の縦方向の変形を妨げることにより起こる．

(3) 切欠きが深くなる時，応力集中係数が減少する現象は 2 次元より 3 次元，曲げより引張りの場合にその効果は大きく表れる．

(4) 切欠きの開き角の影響は，2 次元問題の場合，応力集中係数は開き角がかなり大きくなるまでは変化せず，3 次元引張問題の場合，開き角が増加するに従い，わずかに増加する．

村上・野田・西谷[26][36-41]は，V 形切欠きを有する丸棒・帯板の応力集中問題について体積法による切欠き寸法を広範囲に変えた系統的な解析を行い，高精度の応力集中係数を求めており，以下のような結論を得た．

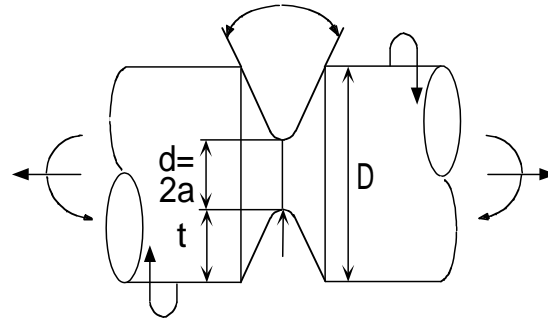
(5) 軸対称曲げ問題の体積法による解析法を提案し，回転曲げ疲労試験における円周切欠きを有する丸棒試験片の応力集中係数の誤差を明らかにした．

(6) 60°V 形切欠きを有する丸棒の引張り・ねじりの応力集中を系統的に解析し考察を行い，2 次元問題の結果から解析困難な 3 次元問題の応力集中係数を推定する方法を示した．

(7) 両縁に 60°V 形切欠きを有する帯板の引張り・面内曲げの応力集中を系統的に解析し考察を行い，Neuber 三角則の誤差を検討するとともに，帯板と半無限板の比から帯板の応力集中係数を評価する方法を示した．

以上のように切欠きを有する丸棒・帯板の応力集中問題については，これまでに数多くの研究が行われてきたが，依然として Neuber の三角則[16]が現在の設計者や研究者に用いられている．この理由は，Neuber 公式が簡便であるにもかかわらず切欠き形状の全範囲に対してある程度の精度で応力集中係数を与えるたいへん便利なものであったためであると考えられる．しかし，Neuber 公式には，正確な応力集中係数に対して最大で 10%程度の誤差があることが問題となる．たとえば，宮本は，その著書「三次元弾性論」において，円周切欠きを有する丸棒の問題の解決の重要性を強調している[42]．切欠き効果（または寸法効果）の定量的評価や，最近の実験技術の進歩に伴う疲労機構の詳細な究明のためには，正確な応力集中と応力分布を知ることが必要である．

Table 1 1 Reference values  $K_t$  for a notch



Ref		t	d	D		$2a/D$	$2t/D$	Specimen	Notch Shape	Loadin	$K_t$	$K_t^{FN}$	$K_t^{treal}$	Error(%)
OKADA et. al [43]	7.0	3.0	4.0	10.0	-	1.4	0.6	Round bar	Circular-arc-notch	bending	1.08(?)	1.081	1.081	0.09
WANG et. al [44]	2.0	1.5	9.0	12.0	-	0.3333	0.25	Round bar	Circular-arc-notch	bending	1.51(Neuber)	1.508	1.560	3.2
KAWAGOISHI et. al [45]	7.0	3.5	3.0	10.0	-	1.4	0.7	Round bar	Circular-arc-notch	bending	1.06(?)	1.062	1.061	0.09
OSHITA, HATANAKA [46]	1.0	2.5	5.0	10.0	$0^\circ$	0.2	0.5	Round bar	U-notch	tension	2.32(FEM)	1.822	1.934	20.0
	2.5	2.5	5.0	10.0	-	0.5	0.5	Round bar	Circular-arc-notch	tension	1.75(FEM)	1.384	1.416	23.6
	4.0	2.0	5.0	10.0	-	0.8	0.4	Round bar	Circular-arc-notch	tension	1.54(FEM)	1.295	1.321	16.6
TAKADA, SAKANE [47]	0.8	1.0	6.0	8.0	$60^\circ$	0.2	0.25	Round bar	V-notch	tension	2.0(FEM)	2.036	2.179	8.2
	0.1	1.0	6.0	8.0	$60^\circ$	0.025	0.25	Round bar	V-notch	tension	4.8(FEM)	4.745	5.275	9.0
	0.05	1.0	6.0	8.0	$60^\circ$	0.0125	0.25	Round bar	V-notch	tension	6.4(FEM)	6.473	7.277	12.1
OCHI et. al [48]	1.6	1.0	10.0	12.0	-	0.2667	0.1667	Round bar	Circular-arc-notch	bending	1.62(Petersen)	1.635	1.959	17.3

#### 1. 4 本論文の目的と構成

Table 1 - 1 は、最近の金属やセラミックスの強度に関する研究論文[43-48]で使用されている応力集中係数を示している。Table1-1 からわかるように文献の応力集中係数には、誤差が最大で 23.6%ある場合もある。また、有限要素法による応力集中係数が Neuber の近似値より大きな誤差を含んでいる場合もある。このようにこれまでに Fig. 1-1 のような試験片を用いて数多くの研究が行われてきたが、現在においても未だ不正確な応力集中係数が使用されている。

そこで、本論文では、丸棒引張、曲げ、ねじり問題において、切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積力法によって得られた正確な解析結果を基に物理的考察を行い、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式（誤差 1 % 以内）を提案することを目的とする。具体的な方法として、求める応力集中係数の値に対して直接対称とせず、その値にほぼ等しい理論解のある値との比に最小二乗法を適用することにより、高精度の計算式を作製する。Neuber の公式のように簡便な評価式を提案することは難しいが、計算機の進歩により、一度近似式を提案し、計算機上にデータとして入力しておけばそれを種々の切欠き寸法に対して利用することは容易である。

本論文は、全 8 章から構成されている。

まず、本章では、本研究の背景として切欠き材の強度に関する研究とその試験片の応力集中に関する研究についてまとめた。また、最近の強度研究用試験において用いられた応力集中係数に大きな誤差が含まれることを指摘した。その結果、切欠きを有する丸棒試験片に関して、簡便で正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案することを目的とすることを述べた。

第 2 章では円周切欠きを有する丸棒の問題で、切欠き底の最小断面の幅もしくは直径が無限に大きくなった極限の場合についての応力集中係数について考察する。本章では、Neuber が使用した切欠きが浅くなった極限の解をより正確に求めるため、切欠き深さが浅い場合の極限に相当する V 形切欠きを有する半無限板の引張り及びねじりにおける応力集中係数  $K_{ts} = K_t \Big|_{2t/D \rightarrow 0}$  について解析し、考察した。さらに、 $K_{ts}$  に及ぼす開き角  $\omega$  の影響についても体積力法による追加計算を行い開き角の影響について考察した。

第 3 章では円周切欠きを有する丸棒の問題で、鈍い切欠きまたは深い切欠きの場合についての応力集中係数について考察する、本章では、Neuber が使用した深い双曲面切欠きの応力集中係数の解をより正確に求めるため、切欠き深さが深い場合の極限に

相当する V 形切欠きを有する丸棒における応力集中係数  $K_{td} = K_t|_{2t/D \rightarrow 1}$  について解析し、考察した。さらに、 $K_{td}$  に及ぼす開き角  $\omega$  の影響についても体積法による追加計算を行い開き角の影響について考察した。

第 4 章では、任意の寸法  $\rho, t$  に対して適用可能な応力集中係数の計算式を提案するため問題となる  $60^\circ$  V 切欠きの曲率半径がゼロの鋭い切欠きについて解析した。解析方法として体積法の特異積分方程式を利用して鋭い V 形切欠きを有する丸棒引張り、曲げ、ねじりの特異応力場の強さ  $K_{I, \lambda_1}, K_{II, \lambda_2}, K_{III, \lambda_4}$  を開き角  $\omega$ 、傾き角  $\theta$ 、切欠き深さ  $t$  を変化させ解析した。

第 5 章では、浅い切欠きの応力集中係数と深い切欠きの応力集中係数を直接用いていない中間の場合の切欠き、つまり一般の切欠きの応力集中係数について考察を行い、近似式を作製した。また、簡便な近似式を作製するため、提案した修正 Neuber の三角則  $K_{tN}$  との比に最小二乗法を適用する方法を示した。

第 6 章では、帯板引張、曲げ問題において、切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積法によって得られた解析結果を基に物理的考察を行い、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式と線図を提案した。

第 7 章では、フィレット部を有する丸棒の引張、曲げ問題において、フィレットの段の高さが大きい場合の極限の解  $K_{td}$  とフィレットの段の高さが小さい場合の極限の解  $K_{ts}$  と体積法によって得られた解析結果を基に物理的考察を行った。そして、フィレット形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式と線図を提案した。

第 8 章では、本研究で得られた主要な結論をまとめた。

## 1. 5 本論文で用いる記号

本論文で使用する記号を以下にまとめて示す。

- $\rho$  : 切欠き半径
- $t$  : 切欠き深さ
- $a$  : 切欠き底の最小断面の半径
- $D$  : 直径
- $\nu$  : ポアソン比 (=0.3)
- $\xi$  :  $=\sqrt{t/\rho}$
- $\eta$  :  $=\sqrt{\rho/t}$
- $\lambda$  :  $=2t/D$

- $\chi$  :  $a / \rho \leq 1.0$  ,  $= a / \rho$   
 $\rho / a \leq 1.0$  ,  $= 2 - \rho / a$
- $K_t$  : 応力集中係数
- $K_{tS}$  : 60°V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数
- $K_{tH}$  : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数
- $K_{td}$  : 深い60°V形切欠きの応力集中係数
- $K_{tE}$  : 無限板の円孔の応力集中係数
- $\omega$  : 切欠きの開き角 ( degree )
- $\omega^*$  :  $\omega / 90$
- $M_1$  : 体積力法による解析の際の切欠きの円弧部の分割数
- $M_2$  : 体積力法による解析の際の切欠きの直線部の分割数
- $\lambda_1$  : モード I ( X軸に対称 ) の開き角と剛性比によって決まる特異性指数
- $\lambda_2$  : モード II ( X軸に逆対称 ) の開き角と剛性比によって決まる特異性指数
- $\lambda_3$  : モード III ( X軸に対称 ) の開き角と剛性比によって決まる特異性指数
- $\lambda_4$  : モード III ( X軸に逆対称 ) の開き角と剛性比によって決まる特異性指数
- $K_{I,\lambda_1}$  : 面内変形 ( X Y平面内 ) に対応するモード I ( X軸に対称 ) の応力拡大係数
- $K_{II,\lambda_2}$  : 面内変形 ( X Y平面内 ) に対応するモード II ( X軸に逆対称 ) の応力拡大係数
- $K_{III,\lambda_3}$  : 面外変形に対応するモード III ( X軸に対称 ) の応力拡大係数
- $K_{III,\lambda_4}$  : 面外変形に対応するモード III ( X軸に逆対称 ) の応力拡大係数
- 切欠き深さのパラメータとしては  $2t / D$  を用い、切欠き半径のパラメータとしては  $a / \rho$  ( または  $\rho / a$  ) を用いて整理する .

## 参考文献

- (1) 西谷弘信, 遠藤正浩, 極めて浅い切欠きをもつ炭素鋼の疲労強度 ( 連続観察をもとにした考察 ), 日本機械学会論文集, 51-464, A ( 1985 ), 1008-1016.
- (2) 西谷弘信, 村上敬宜, 電解研磨した S10C 切欠き材のねじり疲れと曲げ疲れ, 日本機械学会論文集, 35-275, A ( 1969 ), 1389-1396.
- (3) 小野正敏, 小野鑑正, 切欠効果に関する実験, 日本機械学会論文集, 5-19, ( 1939 ), 167-174.
- (4) Isibasi, T., On the Fatigue Limits of Notched Specimens, Mem. Fac. Eng. Kyushu Univ. 11-1, (1948), 1-31.
- (5) Siebel, E. and Stieler M., Ungleichformige Spannungsverteilung bei Schwingender Beanspruchung, VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE, 97-5 ( 1955 ),

- 121-126.
- (6) Isibasi, T., Strength and Deformation of Low Carbon Steel Bars with a Round-Crack under Statical and Repeated Loads, Mem. Fac. Eng. Kyushu Univ. 12-3,4, (1951), 281-308.
  - (7) 西谷弘信, 炭素鋼の回転曲げ試験における分岐点ならびに疲れ限度の寸法効果 (小形材による検討), 日本機械学会論文集, 34-259, A (1968), 371-382.
  - (8) 西谷弘信, 材料力学の進展 (1) 古いものから新しいものへ, 機械の研究, 41-9, (1989), 977-982.
  - (9) 西谷弘信, 材料力学の進展 (2) 古いものから新しいものへ, 機械の研究, 41-10, (1989), 1105-1108.
  - (10) Kirsch, C., Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 42 (1898), 797-807.
  - (11) Inglis, C. E., Stresses in a Plate due to the Presense of Crack and Sharp Corners, Proc. Inst. Naval Architects, (1913), 219.
  - (12) Howland, R. C. J., On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension, Phil. Trans. Roy. Soy., 229 (1930), 49-86.
  - (13) Maunsell, F. G., Stresses in a Notched Plate under Tension, Phil. Mag., 21 (1936), 765-773.
  - (14) Neuber, H., ZAMM, 13(1934), 439.
  - (15) Neuber, H., Ing.-Arch., 5(1934), 239.
  - (16) Neuber, H., Kerbspannungslehre (第1版), (1937); (第2版), (1958), 9, Springer-Verlag.
  - (17) Isibasi, T., Stresses in a Semi-infinite Plate with a Circular Notch under Uniform Tension, Mem. Fac. Eng. Kyusy Univ., 9-2(1940), 131-143.
  - (18) 平野富士夫, 二次元弾性体の形状係数の研究 (第1報), 日本機械学会誌, 50-347(1947), 190 - 191; 二次元弾性体の形状係数の研究 (第2報), 日本機械学会論文集, 16-55, A (1950), 52-57.
  - (19) Ling, C. B., Stresses in a Notched Strip Under Tension, J. Appl. Mech., 14-4(1947), A-275-280; On the Stresses in a Notched Strip, J. Appl. Mech., 19-2(1952), A-141-146.
  - (20) 石田 誠, 両縁に半円切欠きを有する帯板の引張り, 日本機械学会論文集, 19-83, A (1953), 5-10; 両縁に半円切欠きを有する帯板の曲げ, 日本機械学会論文

- 集, 19-87, A (1953), 94-99.
- (21) 石田 誠, だ円孔を有する帯板の引張り (第 2 報), 日本機械学会論文集, 21-107, A (1955), 514-518.
- (22) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 日本機械学会誌, 70-580(1967), 627-635; Mechanics of Fracture 5 (Sih, G. C. ed), (1978), Chapter 1, Noordhoff.
- (23) 長谷部宣男, 三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析, 土木学会論文報告集, 第 194 号, (1971), 29-40.
- (24) 西谷弘信, 両縁にだ円弧切欠きまたはき裂を有する帯板の引張り, 日本機械学会論文集, 41-349, A (1975), 2518-2526.
- (25) 西谷弘信, 橋本, 日本機械学会論文集, 43-374, A (1977), 3642.
- (26) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信, 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数, 日本機械学会論文集, 47-423, (1981), 1194-1205.; 日本機械学会論文集, 48-427, A (1982), 312.
- (27) Nisitani, H., Noda, N-. A., Enging. Frac. Mech., 20(1984), 743.
- (28) 野田尚昭, 西谷弘信, 深迫 泉, 原田昭治, 両縁に  $60^\circ V$  形または円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げ, 日本機械学会論文集, 51-465, A (1985), 1467-1470.
- (29) 野口博司, 西谷弘信, 後藤浩文, ドリル穴状ピットを有する半無限体の引張り, 日本機械学会論文集, 54-501, A (1988), 977-982.
- (30) 西谷弘信, き裂における応力拡大係数に相当する切欠きにおける応力場の尺度, 日本機械学会論文集, 49-447, A (1983), 1353-1359.
- (31) 菊川 真, 佐藤芳久, 引張りもしくは曲げを受ける帯板, 丸棒の切欠きによる応力集中 (第 1 報, 両側に U 形切欠きのある帯板), 日本機械学会論文集, 38-311, A (1972), 1663-1672.
- (32) 菊川 真, 佐藤芳久, 引張りもしくは曲げを受ける帯板, 丸棒の切欠きによる応力集中 (第 2 報, U 形環状みぞのある丸棒), 日本機械学会論文集, 38-311, A (1972), 1673-1680.
- (33) 菊川 真, 佐藤芳久, 引張りもしくは曲げを受ける帯板, 丸棒の切欠きによる応力集中 (第 3 報, V 形切欠きのある帯板, V 形みぞのある丸棒および段付丸棒), 日本機械学会論文集, 38-311, A (1972), 1681-1687.
- (34) 佐藤芳久, 菊川 真, 松井高信, 引張りもしくは曲げを受ける帯板, 丸棒の切欠きによる応力集中 (第 4 報, 半円環状みぞのある丸棒の有限要素解析), 日本機械学会論文集, 42-364, A (1976) 3701-3709.



- (35) Peterson, R. E., Stress Concentration Design Factors, (1962), John-Wiley & Sons.
- (36) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析 (第3報, V形およびU形切欠きを有する丸棒の曲げ), 日本機械学会論文集, 48-430, A (1982), 800-809.
- (37) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析 (第1報, 基礎理論と二, 三の問題への応用), 日本機械学会論文集, 48-427, A (1982), 301-311.
- (38) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析 (第2報, 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の曲げ), 日本機械学会論文集, 48-427, A (1982), 312-320.
- (39) 西谷弘信, 野田尚昭, 半だ円および  $60^\circ$  V形切欠きを有する丸棒のねじりにおける応力集中, 日本機械学会論文集, 50-457, A (1984), 1592-1599.
- (40) 西谷弘信, 野田尚昭,  $60^\circ$  V形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察, 日本機械学会論文集, 51-461, A (1985), 54-62.
- (41) 西谷弘信, 野田尚昭, 深迫 泉, 原田昭治, 両縁に  $60^\circ$  V形または円弧形切欠きを有する帯板の引張り, 日本機械学会論文集, 51-467, A (1985), 1804-1810.
- (42) 宮本, “三次元弾性論”, (1967), 裳華房.
- (43) 岡田憲司, 古市真知子, 酒井達雄, 金属材料疲労強度データベースによる SCM435 鋼の長寿命確率疲労特性の解析, 日本機械学会 2003 年度年次大会講演論文集 (I), (2003), 177-178.
- (44) 王 生武, 西田新一, 服部信祐, 玉崎英俊, 中村憲和, ローラ加工による切欠き材の疲労強度の向上と最適塑性加工量, 日本機械学会論文集, 67-663, A (2001), 1776-1781.
- (45) 皮籠石紀雄, 森野数博, 岡 威憲, 田中伸明, 深田一徳, ラジカル窒化した軸受鋼の疲労強度, 日本機械学会論文集, 66-651, A (2000), 2036-2043.
- (46) 大下賢一, 幡中憲治, 高温下における窒化けい素セラミックス切欠材の非弾性解析, 日本機械学会論文集, 67-661, A (2001), 1436-1442.
- (47) 高田暁男, 坂根政男, SUS 316 ステンレス鋼の高温切欠クリープ破壊に及ぼす真空度の影響, 日本機械学会論文集, 67-661, A (2001), 1548-1554.
- (48) 越智 秀, 澤井 猛, 山本義秋, 栗田昌幸, 小川垣一, 菅 泰雄, 6061 アルミニウム合金摩擦圧接継手の引張強さおよび疲労強さの評価, 材料, 50-9, (2001), 961-967.

## 第2章 浅い切欠きの応力集中係数とその応用

### 2.1 緒言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題で、切欠き底の最小断面の幅もしくは直径が無限に大きくなった極限の場合、すなわち  $2t/D \rightarrow 0$  では、Fig.2-1 に示すように、問題は半無限板の応力集中問題となる。Neuber が円周切欠きを有する丸棒の応力集中の評価に浅い切欠きの応力集中係数を利用しているように、Fig.1-1 (a), (b) の応力集中係数には密接な関係がある。なお、Neuber [1] は、研究当時 (1937-) 切欠きを有する半無限板の応力集中の解  $K_{ts}$  (Fig.2-1 (b)) が利用できなかったため、無限板中のだ円孔の応力集中係数の解  $K_{tE}$  (Fig.2-2 (b)) を使用している。すなわち、浅い切欠きが Fig.2-2 に示すようにだ円孔で近似できることを利用してこれを切欠きが浅い場合の極限の解として用いている。

Fig.2-2 の両者の応力集中はほぼ等しいことは以下のようにして理解できる。まず、両者の  $y$  軸上での  $\tau_{xy}$  は 0 であり、この点に関しては Fig.2-2 の (a), (b) は完全に等しい。一方、 $y$  軸上の  $\sigma_x$  に関しては半無限板の問題においては 0 であるが、無限板の問題では存在している。しかし、ここで問題となる切欠き底の最大応力  $\sigma_y$  に関しては、 $y$  軸上の  $\sigma_x$  の有無は力の方向が異なるので、あまり影響しないことが確認されている。このため両者の応力集中係数はほぼ等しい。

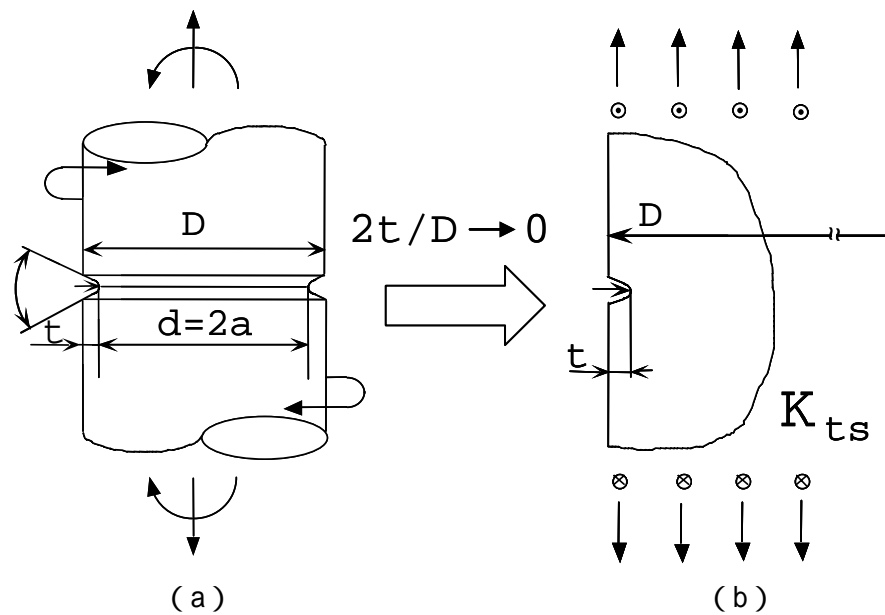


Fig.2-1 (a) A round bar with a shallow notch, (b) A shallow notch in a semi-infinite plate

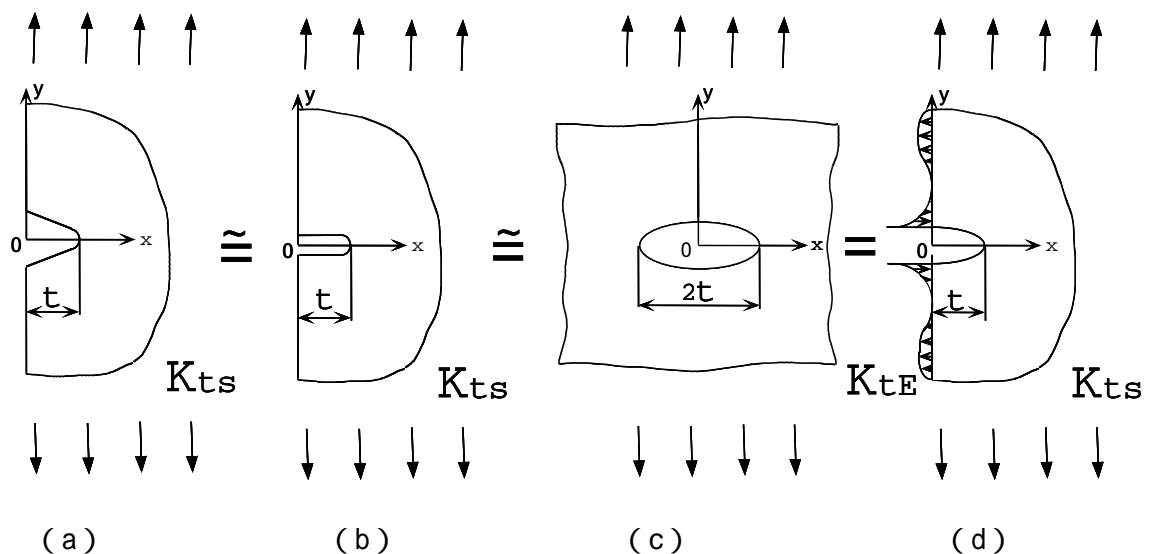


Fig.2-2 Stress concentration factor (a) A semi-infinite plate with sharp or shallow V-notch, (b) A semi-infinite plate with U-notch, (c) A infinite plate with a circular hole, (d) A semi-infinite plate with U-notch

以下では、まず、浅い切欠きの解として用いられてきた無限板および半無限板の応力集中に関して重要と考えられる過去の研究を整理する。そして、それらの研究成果を基にして、浅い切欠きの応力集中係数を任意の切欠き寸法  $\rho, t$  に対して、正確に評価する近似式を提案する。

## 2. 2 浅い切欠きの解に関するこれまでの研究

Fig.2-3 に示すようなだ円孔を有する無限板の問題は 1913 年 Inglis[2]によって、だ円座標を用いてだ円孔付近の応力を決定することによってはじめて研究され、その応力集中係数が  $K_t = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$  であることが示された。

一方、半無限板の半円切欠きの問題は 1936 年 Maunsell [3]によって初めて解かれている。Maunsell は、Fig.2-4 に示すような半円切欠きを有する半無限板の引張問題について初めて解析を行い、 $K_t = 3.05$  の結果を得たが、正しい結果は  $K_t = 3.0$  であると過って推測している。

石橋 [4]は、半円切欠きを有する半無限板の問題について半円切欠きに置換えて両極座標を用いて解析している。

平野[5, 6]は、2次元弾性体の複素関数表示による解法を用いて、無限板にひし形、三角形状孔が存在する場合と、半無限板に半円、半だ円及び半直線状切欠きがある場

合の問題を解析している．その結果，あらゆる切欠きの応力集中係数は切欠きの曲率半径と切欠き深さが等しいだ円切欠きの応力集中係数においてほとんど置換え可能であるという「等価だ円」の考え方が適用可能であることを示している．

### 2.3 体積力法の解析について

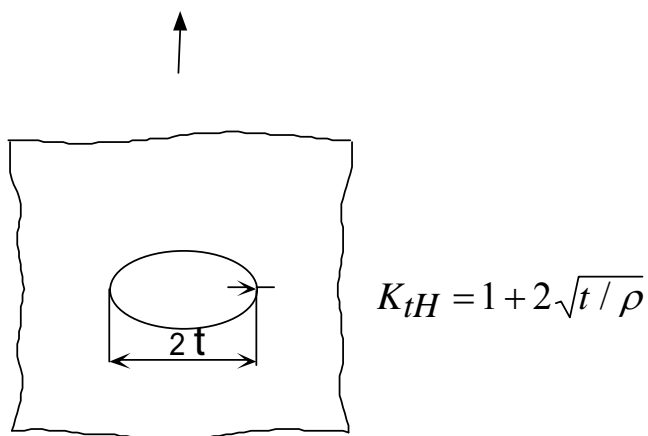


Fig. 2-3 An elliptical hole in an infinite plate under tension

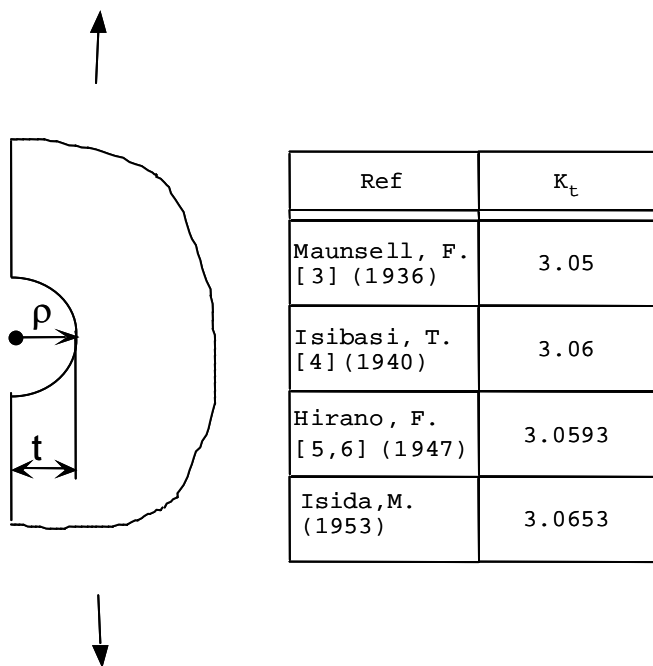


Fig. 2-4 A circular-arc-notch in a semi-infinite plate under tension

西谷[7]は、 $60^\circ$  V 形切欠きを有する半無限板の問題について体積力法を用いてコンピュータ解析を行い、高精度の結果を得ている。

ここでは、切欠きが鋭く浅い場合のねじりの問題を例に体積力法について説明する。この問題は V 形切欠きを有する半無限板の面外せん断問題となる。この V 形切欠きを有する半無限板の問題は Fig. 2-5 (a) に示すように円弧部と直線部によって構成されている。体積力法の詳細については文献[8]-[10]に示されている方法を用いる。ここではその概略について述べる。

体積力法は、半無限板の一点に集中力の働く場合の応力分布を基本解とする。そして、境界条件を満足させるため、仮想境界に体積力を分布させ、その無限小外側で境界条件を満足させる。分布させるべき体積力の密度  $\rho_z$  は閉じた形では求まらないので、仮想境界を分割することにより、各区間の体積力密度を決める。具体的には、Fig. 2-5 (b) に示すように切欠き先端の円弧部  $\widehat{AB}$  を  $M_1$  分割、切欠き側面の直線部  $\overline{BC}$  を  $M_2$  分割する。そして、分割した各区間で境界条件を満たすよう各区間に分布させる体積力密度を決定する。ここでは、各区間で体積力の密度は一定とする。なお、高精度の結果を得るには、体積力の密度として以下のような定義を用いることが重要となる。

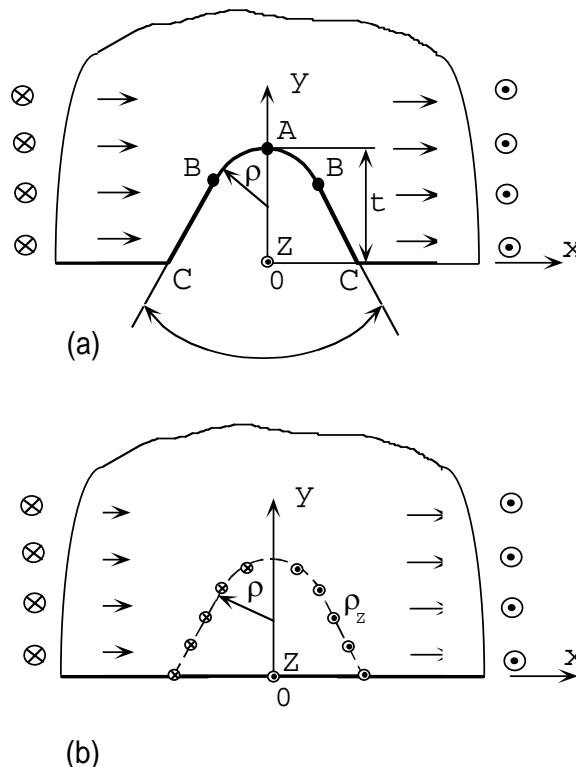


Fig. 2-5 (a) Anti-plane shear of a semi-infinite body with V-shaped notch, (b) A fictitious boundary for V-shaped notch imagined in a semi-infinite plate where body forces are applied.

半無限板の引張問題

$$\rho_x = \frac{dF_x}{dy}, \quad \rho_y = \frac{dF_y}{dx} \quad \dots \dots \dots (2-1.a)$$

半無限板の面外せん断問題

$$\rho_z = \frac{dF_z}{dx} \quad \dots \dots \dots (2-1.b)$$

ここで、 $dF_x, dF_y, dF_z$  は境界の微小要素  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  に働く体積力の合力の  $x, y, z$  成分である。式 (2-1.a), (2-1.b) に示すように体積力の密度の定義として、境界の微小要素  $ds$  に対する  $x, y$  方向投影面積当たりの定義を用いることによって、最大応力が生じる点 A 近傍に分布させる体積力は滑らかに変化することにより、高精度の結果が得られる。

Table 2-1, 2-2は、切欠きが浅い場合の解として用いるV形切欠きを有する半無限板が引張り及びねじりを受けた場合の解析結果の収束の例を示す。Table 2-1は引張りの場合の開き角  $\omega = 70^\circ, 80^\circ$  での  $K_{ts}$  の値を  $t/\rho = 64, 400$  の場合について示している。Table 2-1に示すように  $t/\rho$  があまり大きくない場合には有効数字3桁程度の収束性があり、また  $t/\rho$  が大きい場合には有効数字3桁程度の収束性があることがわかる。

Table 2-1 Convergence of  $K_{ts}$  for tension

	$t/\rho = 64$		$t/\rho = 400$	$t/\rho = 400$
$M$	$\omega = 70^\circ$	$M$	$\omega = 70^\circ$	$\omega = 80^\circ$
64	18.9796	50	45.5338	43.6339
68	18.9781	52	45.5326	43.6371
72	18.9768	54	45.5313	43.6376
76	18.9756	56	45.5301	43.6400
→ ∞ (68-64)	18.9537	→ ∞ (52-50)	45.5018	43.7184
→ ∞ (72-68)	18.9538	→ ∞ (54-52)	45.4993	43.6517
→ ∞ (76-72)	18.9543	→ ∞ (56-54)	45.4969	43.7050
$K_{IE}$	8	$K_{IE}$	41	41

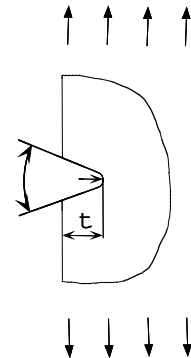


Table 2-2 Convergence of  $K_{ts}$  for torsion

$t/\rho = 64$			$t/\rho = 1600$		
$M_1$	$M_2$	$\omega = 90^\circ$	$M_1$	$M_2$	$\omega = 60^\circ$
64	400	7.2520	30	1500	31.8686
68	432	7.2522	31	1550	31.8728
72	464	7.2524	32	1600	31.8764
76	496	7.2525	33	1650	31.8797
→ ∞ (68-64)		7.2556	→ ∞ (31-30)		31.9976
→ ∞ (72-68)		7.2552	→ ∞ (32-31)		31.9905
→ ∞ (76-72)		7.2547	→ ∞ (33-32)		31.9803
$K_{IE}$		9	$K_{IE}$		41

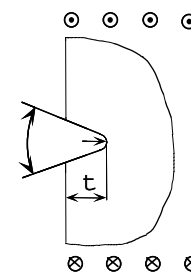


Table2-2に丸棒ねじりの場合の開き角  $\omega = 60^\circ, 90^\circ$  での  $K_{ts}$  の値を  $t/\rho = 64, 1600$  の場合について示す。Table2-2のような検討の結果，面外せん断問題における  $K_{ts}$  は，有効数字4桁程度の精度があると考えられる。

## 2.4 丸棒の引張りおよび曲げ問題の浅い切欠きにおける応力集中係数

Neuber は，浅い切欠きが Fig.2-2 に示すようにだ円孔で近似できることを利用してこれを極限の解として用いている。そこで，Neuber が使用した切欠きが浅くなった極限の解をより正確に求めるため，切欠き深さが浅い場合の極限に相当する V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数  $K_{ts} = K_t|_{2t/D \rightarrow 0}$  を考察する。

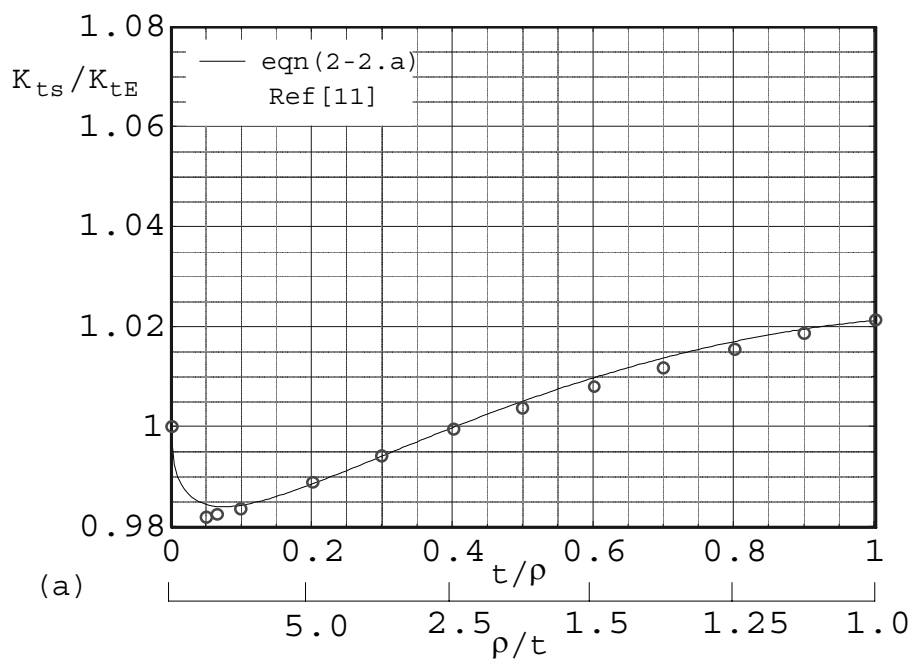
2・4・1 半無限板の  $60^\circ$  V 形切欠きまたは円弧形状切欠きの  $K_{ts}$  [11] まず， $60^\circ$  V 形切欠きを有する半無限板の近似式を作製する。ここでは， $60^\circ$  V 形切欠きを有する半無限板の解  $K_{ts}$  とだ円孔を有する無限板の解  $K_{tE}$  がほぼ等しい事を利用して， $K_{ts}/K_{tE}$  の比について最小二乗法を行うことにより高精度の近似式を求めた。得られた式を以下に示す。

$$K_{ts}/K_{tE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \quad \dots \dots \dots (2-2.a)$$

$$K_{ts}/K_{tE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \quad \dots \dots \dots (2-2.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \quad \eta = \sqrt{\rho/t}, \quad K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots \dots (2-2.c)$$

Fig. 2-6 (a), (b)に，式(2)の  $K_{ts}/K_{tE}$  の値を図示する。



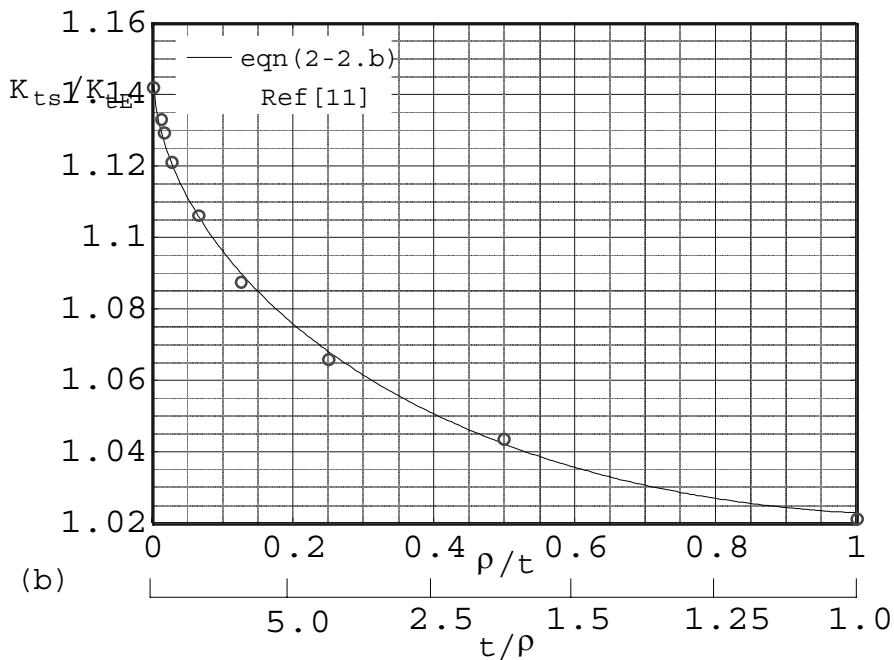


Fig. 2-6 (a) and (b)  $K_{ts}/K_{IE}$  vs.  $\rho/t$  or  $t/\rho$

2・4・2 開き角の影響を考慮したV形切欠きまたは円弧形状切欠きを有する半無限板の  $K_{ts}$  [12] 次に,  $K_{ts}$  に及ぼす開き角  $\omega$  の影響を調べるため,  $\omega = 60^\circ$  と同様に体積力法による追加計算を行って得られた結果を Table2-3 に示す. Table2-1 のような検討によって得られた Table2-3 に示すように,  $t/\rho < 1.0$  では開き角の影響がほとんど表われず,  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の結果は有効数字 3 桁以上まで一致する. しかし,  $t/\rho > 1.0$  では  $\rho \rightarrow 0$  に従って開き角の影響は大きく表われる. すなわち,  $\omega = 90^\circ \rightarrow 0^\circ$  に従って  $K_{ts}$  が大となる. Table2-3 で  $t/\rho = \infty$  の結果は  $t/\rho$  が大きいときの結果から外そうによって求めたものであるが有効数字 3 桁程度の精度があると考えられる. このとき  $\omega = 0^\circ$  と  $\omega = 90^\circ$  では 17% の違いがある.  $\rho$  と  $t$  を揃えた場合, 開き角  $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$  では等価だ円の概念より, 応力集中係数は多くの場合に大きな変化はないと考えられている様であるが,  $\rho$  が小さい場合には注意が必要である. Table2-3 の結果に最小 2 乗法を適用して得られた近似式の結果を Fig. 2-6 に示す. 式(2-3)または Table2-3 (および Fig. 2-7) は切欠きの開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の  $K_{ts}$  を誤差 1% 以内で与える.

$$K_{ts} / K_{IE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3$$

(適応範囲  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$ , 推定誤差 0.2%以内)      \dots (2-3.a)



Table 2-3  $K_{ts} / K_{tE}$  for various  $\omega$   
 [  $K_{ts} = K_t |_{2t/D \rightarrow 0}$ ,  $K_{ts} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$  ]  
 □ : Circular arc notch

$t/\rho$	$\sqrt{t/\rho}$	$\alpha=0^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=70^\circ$	$\alpha=80^\circ$	$\alpha=90^\circ$
0.0625	0.250	0.963	0.963	0.963	0.963	0.963
0.1	0.316	0.964	0.964	0.964	0.964	0.964
0.15	0.387	0.966	0.966	0.966	0.966	0.966
0.2	0.447	0.968	0.968	0.968	0.968	0.968
0.25	0.500	0.969	0.969	0.969	0.969	0.969
0.3	0.548	0.970	0.970	0.970	0.970	0.970
0.35	0.582	0.971	0.971	0.971	0.971	0.971
0.4	0.632	0.972	0.972	0.972	0.972	0.972
0.45	0.671	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002
0.5	0.707	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004
0.55	0.742	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006
0.6	0.775	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008
0.65	0.806	1.010	1.010	1.010	1.010	1.010
0.7	0.837	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012
0.75	0.866	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014
0.8	0.894	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015
0.85	0.922	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017
0.9	0.949	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019
0.95	0.975	1.020	1.020	1.020	1.020	1.020
1	1.000	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022
1.111	1.054	1.025	1.025	1.024	1.024	1.023
1.25	1.118	1.028	1.028	1.028	1.027	1.026
1.429	1.195	1.033	1.032	1.032	1.031	1.030
1.666	1.291	1.038	1.037	1.037	1.036	1.034
2	1.414	1.044	1.044	1.043	1.042	1.039
4	2.000	1.060	1.060	1.065	1.061	1.054
8	2.828	1.084	1.088	1.084	1.077	1.065
16	4.000	1.113	1.106	1.089	1.088	1.068
36	6.000	1.133	1.122	1.111	1.092	1.062
64	8.000	1.141	1.129	1.115	1.091	1.053
100	10.000	1.148	1.133	1.117	1.090	1.043
225	15.000	1.161	1.135	1.113	1.077	1.023
400	20.000	1.166	1.137	1.110	1.066	1.015
$\infty$		1.172	1.139	1.107	1.042	1.005

$$\begin{aligned}
 K_{ts} / K_{tE} = & \left\{ (1.062 - 0.3913\eta + 0.9886\eta^2 - 1.088\eta^3 + 0.4294\eta^4) \right. \\
 & + (-0.0898 + 1.266\eta - 4.629\eta^2 + 6.185\eta^3 - 2.742\eta^4) \omega^* \\
 & + (0.5199 - 7.762\eta + 28.636\eta^2 - 38.398\eta^3 + 17.070\eta^4) \omega^{*2} \\
 & + (-0.9099 + 14.280\eta - 53.087\eta^2 + 71.325\eta^3 - 31.728\eta^4) \omega^{*3} \\
 & \left. + (0.3161 - 6.961\eta + 27.373\eta^2 - 37.494\eta^3 + 16.828\eta^4) \omega^{*4} \right\} \\
 & \times (1.107 + 0.1451\eta - 0.9594\eta^2 + 1.245\eta^3 - 0.5180\eta^4)
 \end{aligned}$$

(推定誤差 1%以内) . . . (2 - 3. b)

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}, \omega^* = \omega/90$$

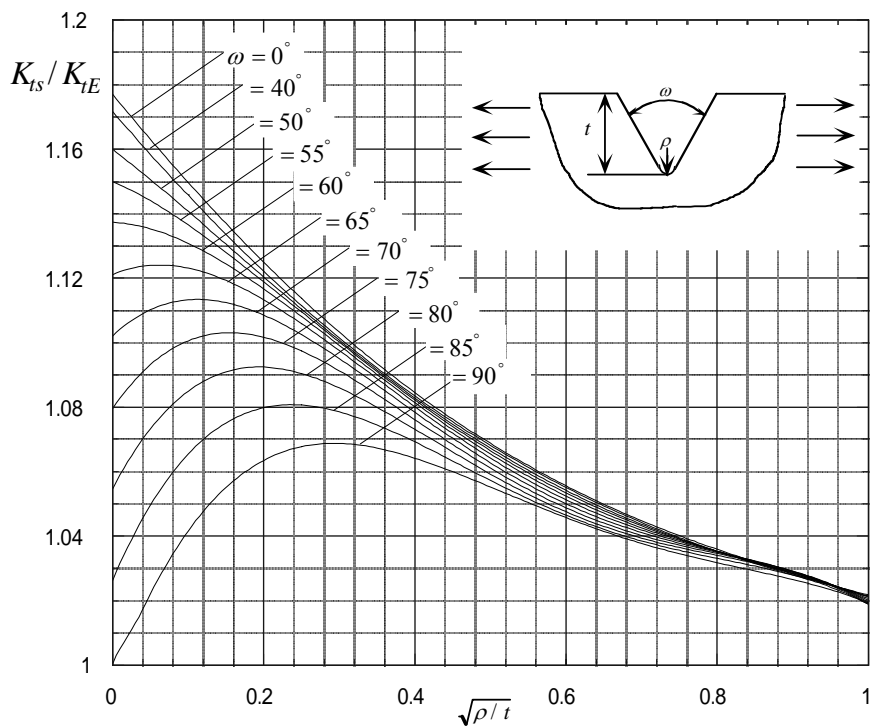
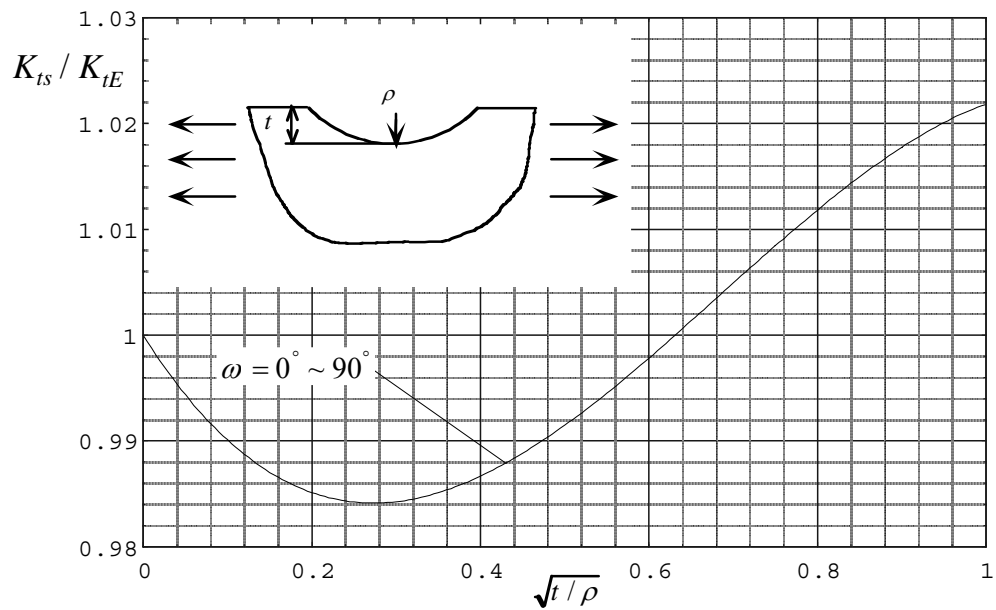


Fig. 2-7  $K_{ts}/K_{tE}$  vs.  $\sqrt{t/\rho}$  and  $\sqrt{\rho/t}$

## 2.5 丸棒ねじり問題の浅い切欠きの応力集中係数[13]

ここでは、引張問題と同様にせん断を受ける場合の浅い切欠きの応力集中係数につ

いて考察する．円周切欠きを有する丸棒がねじりを受ける問題では，切欠きが浅くなつた極限の解としてせん断を受ける V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts} = K_t|_{2t/D \rightarrow 0}$  を用いる必要がある．

開き角を変化させて体積力法による計算を行って得られた結果を Table 2-4 に示す．Table 2-4 に示すように， $t/\rho < 1.0$  では開き角の影響がほとんど表われず， $t/\rho < 1.0$  の結果は有効数字 3 桁程度まで一致する．しかし， $t/\rho > 1.0$  では  $\rho \rightarrow 0$  に従って開き角の影響は大きく表われる．すなわち， $\omega = 90^\circ \rightarrow 0^\circ$  に従って  $K_{ts}$  が大となる．Table 2-4 で  $t/\rho = \infty$  の結果は  $t/\rho$  が大きいときの結果から外そうによって求めたものである．Table 2-4 の結果を Fig.2-8 に示す．例えば， $t/\rho = 400$  でねじりでは  $\omega = 0^\circ$  と  $\omega = 90^\circ$  はその値が 2 倍程度異なるのに対して引張りでの違いは 17% である．結局， $\rho$  が小さい浅い切欠きのねじりの場合には，引張りの場合より開き角の影響がはるかに大きいことがわかる．等価だ円の考え方より引張りでもねじりでも  $\rho$  と  $t$  を固定すれば，開き角の影響は  $\omega = 0^\circ - 90^\circ$  程度ではさほど大きくないと考えられているようであるが，注意が必要である．

Table 2-4  $K_{ts} / K_{tE}$  for various  $\omega$  [ $K_{ts} = K_t|_{2t/D \rightarrow 0}$ ,  $K_{ts} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$ ]

$t/\rho$	$\sqrt{t/\rho}$	$\omega = 0^\circ$	$\omega = 40^\circ$	$\omega = 60^\circ$	$\omega = 70^\circ$	$\omega = 80^\circ$	$\omega = 90^\circ$
0.05	0.224	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986
0.0625	0.25	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986
0.10	0.316	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984
0.20	0.447	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983
0.25	0.5	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984
0.30	0.548	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984	0.984
0.40	0.632	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987
0.50	0.707	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988
0.60	0.775	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990
0.70	0.837	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993
0.80	0.894	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
0.90	0.949	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
1.0	1.0	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997	0.994
1.111	1.054	-	-	1.002	-	-	-
1.25	1.118	-	-	1.004	-	-	-
1.428	1.195	-	-	1.007	-	-	-
1.666	1.291	-	-	1.011	-	-	-
2	1.414	1.022	1.019	1.014	1.011	1.005	0.995
4	2	1.055	1.043	1.028	1.018	1.004	0.985
8	2.828	1.095	1.064	1.034	1.014	0.990	0.960
16	4	1.138	1.078	1.029	0.998	0.961	0.919
36	6	1.186	1.082	1.008	0.962	0.912	0.857
64	8	1.214	1.077	0.983	0.928	0.870	0.806
100	10	1.236	1.068	0.964	0.899	0.834	0.764
225	15	1.269	1.044	0.919	0.840	0.768	0.688
400	20	1.286	1.022	0.905	0.795	0.719	0.619
900	30	-	-	0.821	-	-	-
1600	40	-	-	0.780	-	-	-
2500	50	-	-	0.753	-	-	-
-	-	-	-	0.705	-	-	-

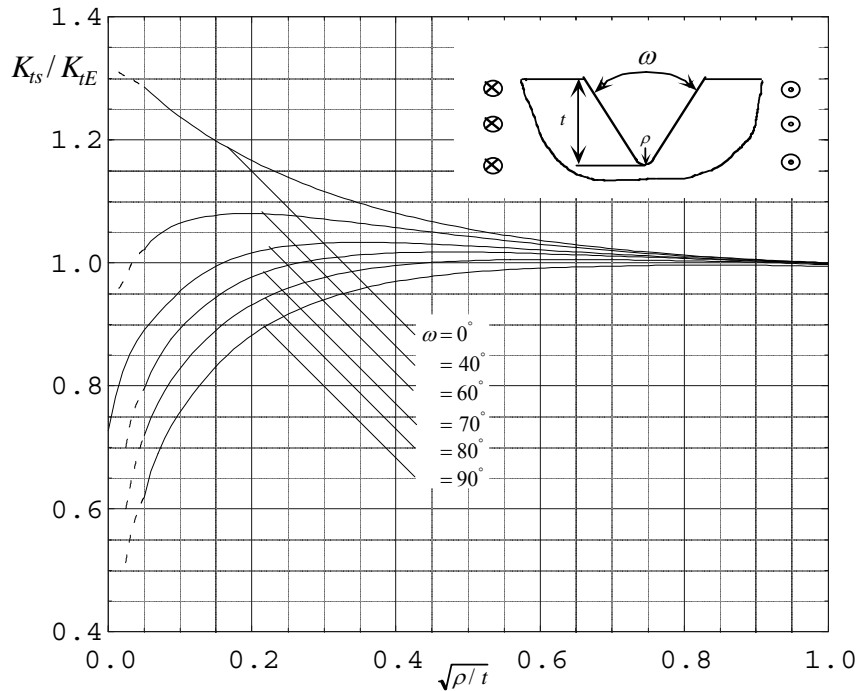


Fig. 2-8  $K_{ts}/K_{tE}$  vs.  $\sqrt{\rho/t}$  for torsion

## 2.6 円周切欠きを有する丸棒の応力集中係数 $K_t$ と浅い切欠きの解 $K_{ts}$ の関係

まず、切欠き半径  $\rho$  が小さい Fig.2-1 (a) のような  $60^\circ$  V 形切欠きに対する応力集中係数  $K_t$  を考察する．このような鋭い切欠きの応力集中係数は、同一形状比  $t/\rho$  の V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  より求めることができる．Fig.2-9 (a), (b), (c) は、引張、曲げ、ねじり問題の応力集中係数と  $60^\circ$  V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の解  $K_{ts}$  との比を切欠き形状の広い範囲 ( $0 < \rho/a \leq 10$ ) について示したものである [ Fig.2-9 (a), (b), (c) ] . なお、Fig.2-9 (a) で  $\rho/a \rightarrow 0$  の線は、 $\rho/a$  が小さい場合、たとえば  $\rho/a$  が 0.01 と 0.02 で  $K_t/K_{ts}$  が 3 桁程度以上一致することを確認して求めている．Fig.2-9 (a), (b), (c) より以下の範囲で  $K_{ts}$  による近似が有効である．

引張りの場合：

(1) 極端に鋭い切欠き ( $\rho/a \leq 0.1$ ) では、 $K_t/K_{ts}$  の値は  $2t/D$  の全範囲で  $2t/D$  のみによって決まる．従って  $K_{ts}$  を用いれば、この場合の  $K_t$  を求めることができる．

(2) 極端に浅い切欠き ( $2t/D < 0.02$ ) については  $a/\rho$  のほぼ全範囲 ( $a/\rho > 10$ )

0.01) で  $K_t/K_{ts}$  の値が  $2t/D$  のみによって決まることから同様に  $K_t$  を求めることができる。

(3) 極端に浅い切欠きで切欠き半径が大きい場合 ( $a/\rho < 0.01$ ) は  $K_t = (1.001 - 1.006)$  であるので  $K_t = 1.003$  として評価できる。

曲げの場合：

(1) [Fig.2-9 (b)] 鋭い切欠き ( $\rho/a \leq 0.1$ ) では,  $K_t/K_{ts}$  の値は  $2t/D$  0.4 の範囲で ほとんど  $2t/D$  のみによって決まる。従って  $K_{ts}$  とこの関係を用いれば, 鋭く浅い切欠きの  $K_t$  を求めることができる。

(2) 浅い切欠きで ( $2t/D \leq 0.02$ ) では, が極端に大きい場合 ( $2t/D \leq 0.02$ ) を除き  $K_t/K_{ts}$  の値は ほぼ  $2t/D$  によって決まる狭い範囲に分布する (例えば  $2t/D = 0.02$  で  $a/\rho \geq 0.02$  ならば,  $0.938 \leq K_t/K_{ts} \leq 0.968$ )。従って  $K_t/K_{ts}$  のこのような性質を利用すれば, 浅い切欠きの  $K_t$  を求めることができる。

(3) 浅い切欠きで, が極端に大きい場合 ( $2t/D \leq 0.02$  かつ  $a/\rho \leq 0.02$ ) では, 次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果,  $K_t = (1.000 \sim 1.005)$  と見積ることができる。よってこの場合  $K_t \cong 1.002$  として十分精度よく評価できる。

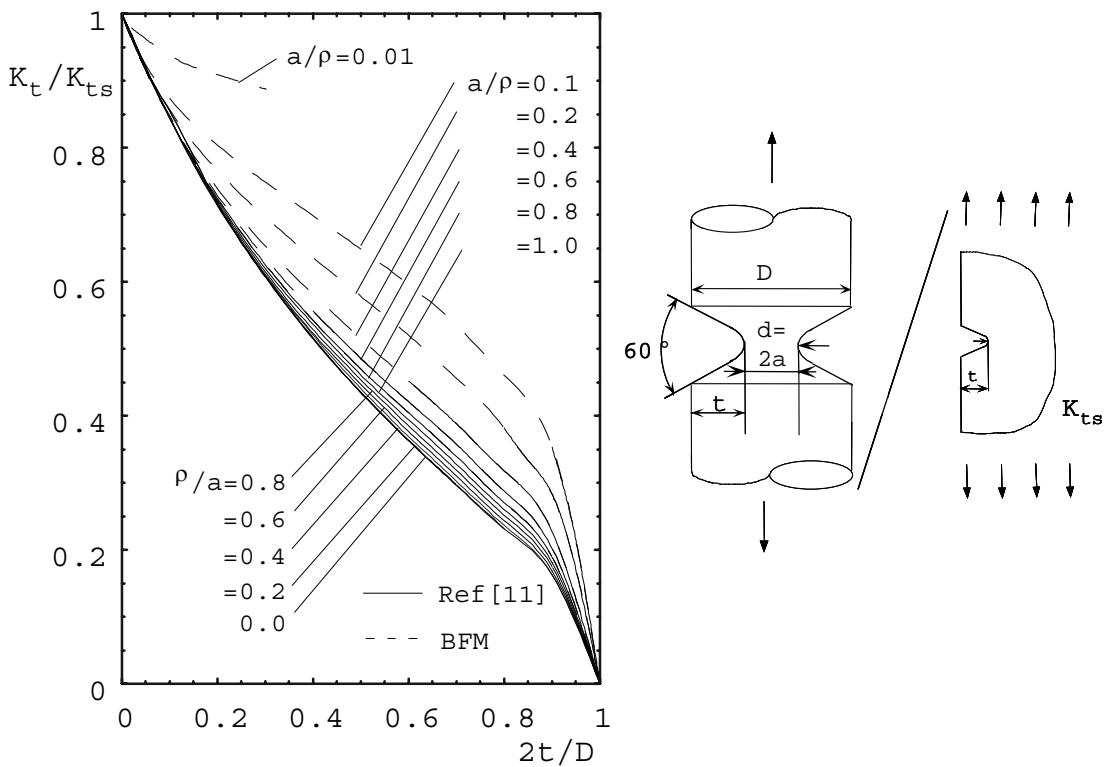


Fig. 2-9 (a)  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$  for tension

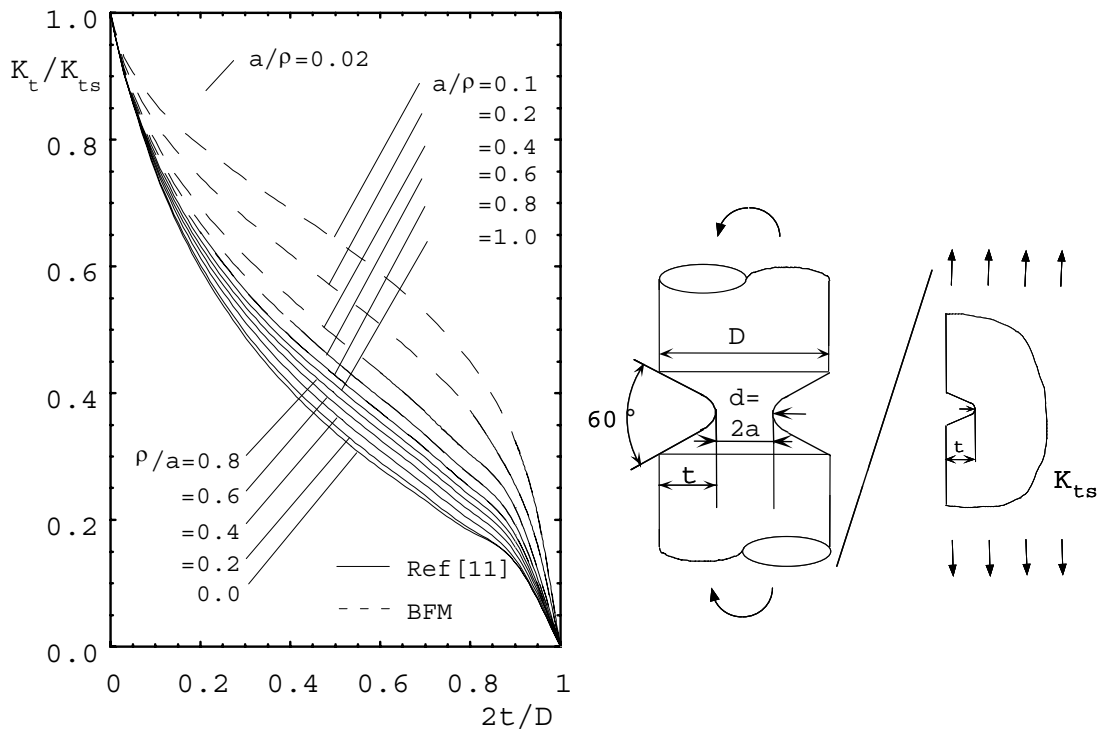


Fig. 2-9 (b)  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$  for bending

ねじりの場合：

- (1) 鋭い切欠き ( $\rho/a=0.05$ ) では,  $K_t/K_{ts}$  の値は  $2t/D$  のみでは決まらないが,  $\rho/a=0.05$  と  $\rho/a \rightarrow 0$  から間の値を推測すれば,  $K_t$  を求めることができる.
- (2) 浅い切欠き ( $2t/D \leq 0.02$ ) では,  $\rho$  が極端に大きい場合 ( $a/\rho = 0.01$ ) を除き  $K_t/K_{ts}$  の値はほぼ  $2t/D$  によって決まる狭い範囲に分布する. 例えば,  $2t/D=0.02$  のとき,  $K_t/K_{ts}$  の実際の数値は  $a/\rho=0.01$  ならば  $K_t/K_{ts}=0.989$  であり,  $a/\rho \rightarrow \infty$  でも  $K_t/K_{ts}=0.956$  であり, 比較的狭い範囲に分布している. 従って  $K_t/K_{ts}$  のこのような性質を利用すれば, 浅い切欠きの  $K_t$  を求めることができる.
- (3) 浅い切欠きで,  $\rho$  が極端に大きい場合 ( $2t/D \leq 0.02$  かつ  $a/\rho = 0.01$ ) では, 次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果,  $K_t=(1.000 \sim 1.005)$  と見積もることができる.

Fig.2-9 (a), (b), (c) より得られた結果をまとめると, 引張り, 曲げ, ねじりの順に  $K_t/K_{ts}$  の分布は狭い範囲になっていることがわかる. 従って,  $K_{ts}$  を用いる計算式の適用範囲が, 引張り, 曲げ, ねじりの順に大きくなる. つまり,  $K_{ts}$  による近似が引張り, 曲げ, ねじりの順に有効となる.

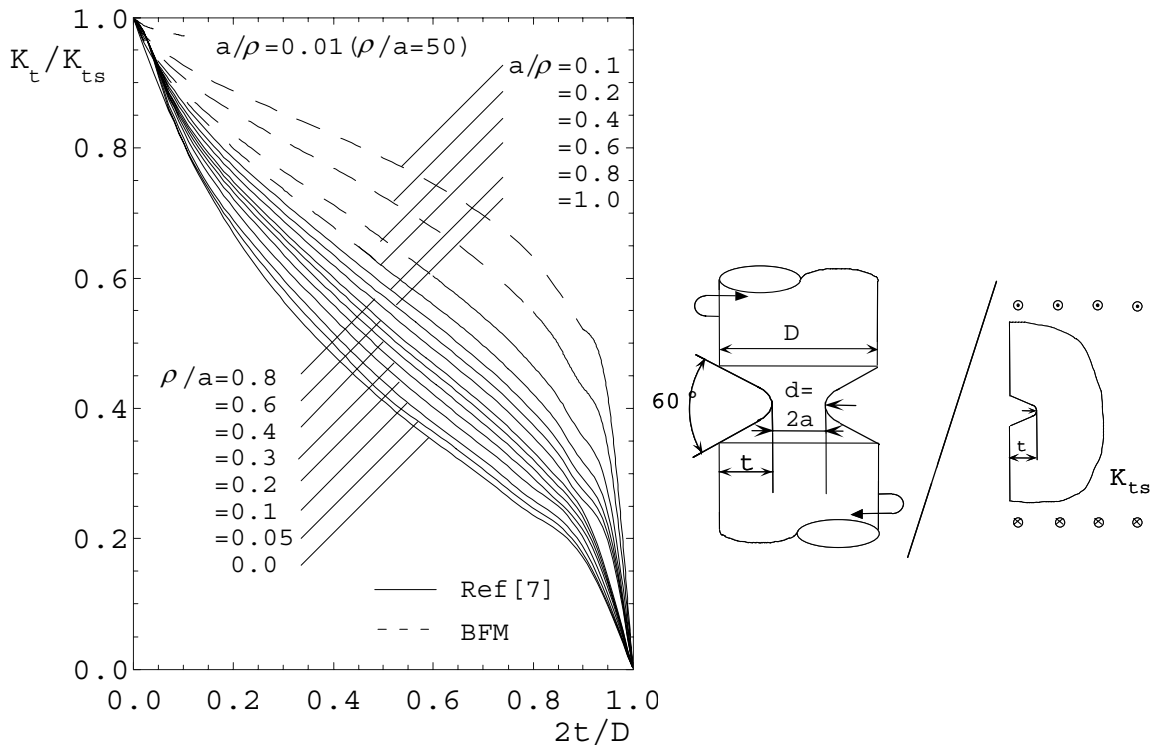


Fig. 2-9 (c)  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$  for torsion

## 2.7 結 言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題で，切欠き底の最小断面の幅もしくは直径が無限に大きくなった極限の場合，すなわち  $2t/D \rightarrow 0$  では，Fig.2-1 に示すように，問題は半無限板の応力集中問題となる．Neuber [ 1 ] は，切欠きを有する半無限板の応力集中の解  $K_{ts}$  が利用できなかったため，無限板中の円孔の応力集中係数の解  $K_{tE}$  を使用している．本章では，Neuber が使用した切欠きが浅くなった極限の解をより正確に求めるため，切欠き深さが浅い場合の極限に相当する V 形切欠きを有する半無限板の引張り及びねじりにおける応力集中係数  $K_{ts} = K_t|_{2t/D \rightarrow 0}$  について解析し，考察した．さらに， $K_{ts}$  に及ぼす開き角  $\omega$  の影響についても体積力法による追加計算を行い開き角の影響について考察した．結果をまとめると以下のようなになる．

( 1 ) V 形切欠きを有する半無限板の引張り問題に対して切欠きが浅くなった場合の極限 ( $2t/D \rightarrow 0$ ) に相当する，半無限板の切欠き半径  $\rho/t = 0 \sim \infty$  ，開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  に対する応力集中係数  $K_{ts}$  の近似式  $K_{ts}^{\omega=0^\circ \sim 90^\circ}$  を与えた．その応力集中係数  $K_{ts}$  は，開き角  $\omega$  が  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  と増加するに従って，最大 17% まで低下する ( $\rho/t \rightarrow 0$  のとき)，その低下は， $\rho/t$  が小さいほど顕著に表れる．

(2) V形切欠きを有する半無限板のねじり問題に対して切欠きが浅くなった場合の極限に相当する，半無限板の切欠き半径，開き角に対する応力集中係数を求めた．その応力集中係数は，開き角が  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  と増加するにすると従って，最大2倍程度まで低下する．その低下は， $\rho/t$  が小さいほど顕著に表れる．

(3) V形切欠きを有する半無限板のねじり問題の浅く鋭い切欠きでは引張りや曲げの場合と大きく異なり切欠きの開き角の影響が大きく表れる．

(4)  $K_t/K_{ts}$  の引張り，曲げ，ねじりの結果をまとめると，引張り，曲げ，ねじりの順に  $K_t/K_{ts}$  の分布は狭い範囲になっていることがわかる．従って， $K_{ts}$  を用いる計算式の適用範囲が，引張り，曲げ，ねじりの順に大きくなる．つまり， $K_{ts}$  による近似が引張り，曲げ，ねじりの順に有効となる．

### 参考文献

- (1) Neuber, H., Kerbspannungslehre (第1版),(1937); (第2版), (1958), 9, Springer-Verlag.
- (2) Inglis, C. E., Stresses in a Plate due to The Presence of Cracks and Sharp Corners, Proc. Inst. Naval Architects, (1913), 219-231.
- (3) Maunsell, F. G., Stresses in a Notched Plate under Tension, Phil. Mag., 21 (1936), 765-773.
- (4) Isibasi, T., Stresses in a Semi-infinite Plate with a Circular Notch under Uniform Tension, Mem. Fac. Eng. Kyushu Univ., 9, (1940), 131-143.
- (5) 平野富士夫, 二次元弾性体の形状係数の研究(第1報), 日本機械学会誌, (1947), 190-191.
- (6) 平野富士夫, 二次元弾性体の形状係数の研究(第2報), (1950), 日本機械学会論文集, 16-55, A (1950), 52-58.
- (7) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 日本機械学会誌, (1966), 627-635.
- (8) Nisitani, H., Solutions of Notch Problems by Body Force Method Mechanics of Fracture, Noordhoff International Publishing., 5, (1978).
- (9) 西谷弘信, 野田尚昭, 60°V形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察, 日本機械学会論文集, 51-461, A (1985), 54-62.
- (10) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析(第3報, V形およびU形切欠きを有する丸棒の曲げ), 日本機械学会論文集, 48-430,



A ( 1982 ) , 800-809.

- (11) 野田尚昭, 高瀬 康, 門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-7, ( 1996 ), 757-762.
- (12) 高瀬 康, 野田尚昭, 高 艶, 竹本智一, 切欠きの開き角の影響を考慮した切欠き寸法の全範囲に対して有効な応力集中係数の計算式, 材料, 52-7, ( 2003 ) 795-800.
- (13) 野田尚昭, 高瀬 康, 江藤洋介切欠き寸法の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 ( 円周切欠きを有する丸棒ねじり試験片 ), 日本機械学会論文集, 70-689, A ( 2004 ), 93-100.

### 第3章 深い切欠きの応力集中係数とその応用

#### 3.1 緒言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題で、切欠き底の最小断面の幅もしくは直径が無限に大きくなった極限の場合、すなわち  $2t/D \rightarrow 1$  では、Fig.3-1 に示すように、問題は深い切欠きの応力集中問題となる。Neuber[1]は、研究当時（1937年-）Fig.3-2 (b) に示すような深い  $60^\circ V$  形切欠きの応力集中の解  $K_{td}$  が解析されていなかったため、深い切欠きの解として Fig.3-2 (a) に示すような深い双曲面切欠き（および回転双曲線切欠き）の応力集中係数の解を使用している。

Fig.3-2 (a), (b) の両者の応力集中係数はほぼ等しいことは以下のようにして理解できる。切欠きが深い場合の問題は、切欠き底の最小断面の寸法  $2a$  に比べて、切欠きの深さ  $t$  が無限に大きい場合に相当する。このとき、切欠き底に生じる最大応力の与える応力集中係数  $K_t$  は、最小断面の幅  $a$  と曲率半径  $\rho$  だけに支配され、切欠き深さには無関係となる。結局、Fig.3-2 (b) の深い  $60^\circ V$  形切欠きの応力集中係数と Fig.3-2 (a) の双曲線切欠きの応力集中係数は、応力集中係数が主に  $a$  と  $\rho$  によって決まるため、切欠き形状による応力集中係数の違いは小さいと考えられる。

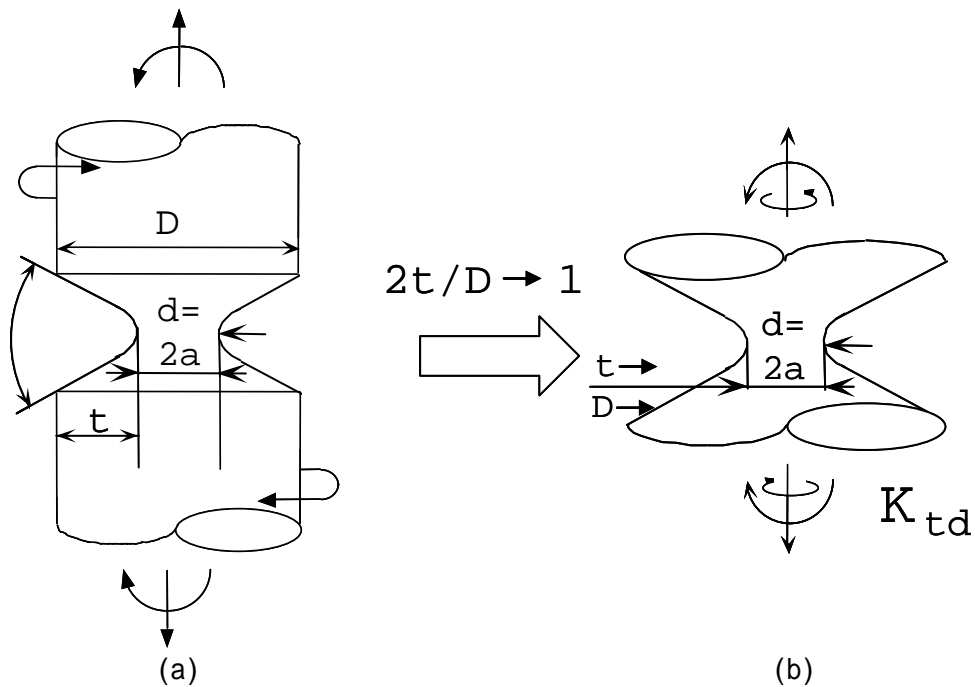


Fig. 3-1 (a) A round bar with a deep notch

(b) A deep notch

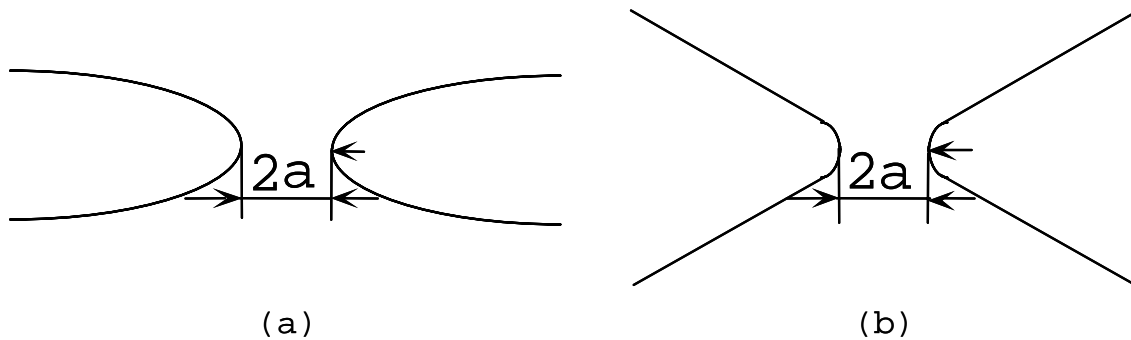


Fig. 3-2 Stress concentration factors for (a) A hyperbolic notch,  
(b) A 60° V-shaped notch

以下では，深い切欠きの解の研究に関して重要と考えられる過去の研究を述べる．

### 3.2 深い切欠きの解に関するこれまでの研究

無限に深い切欠きの解としては，双曲線切欠きや回転双曲面切欠き以外の深いU形切欠きの問題が，菊川[2]によって解析されている．Table3-1 は，菊川[2]によって解析された深いU形切欠きの応力集中係数と Neuber[1]によって求められた回転双曲線切欠きの応力集中係数  $K_{tH}$  を比較したものである．また，参考のため，( ) 内の数値は，後述する本研究によって求めた近似式によるU形切欠きの応力集中係数を示している．

Table3-1 からわかるように菊川[2]のU形切欠きの応力集中係数と Neuber[1]の応力集中係数  $K_{tH}$  の数値の違いは，切欠き形状がU形か双曲線かの違いによるものである．従って，本研究では深い切欠きの解として深い60°V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数  $K_{td}$  をさらに精度よく求めることを試みる．

以下では，Neuber によって求められた深い双曲線切欠き・双曲面切欠きの応力集中係数を求める式について示す．Fig.3-3 に示すような双曲線切欠きが引張り，面内曲げ，面外曲げを受ける場合の応力集中係数が Neuber[1]によって与えられており，以下の式で表現される．

$$K_{td} = \frac{2(a/\rho+1)\sqrt{a/\rho}}{(a/\rho+1)\tan^{-1}\sqrt{a/\rho} + \sqrt{a/\rho}} \dots (3-1)$$

Table 3 1 Stress concentration factors for an U-shaped and hyperboloidal notch

$a/\rho$	U-notch	Deep Hyperbolic notch	Deep 60°-V shaped notch*
0.5	1.30	1.30	1.29
1.0	1.56	1.56	1.56
1.5	1.78	1.78	1.82
2.0	2.01	1.98	2.05
4.0	2.76	2.65	2.79
8.0	3.86	3.66	3.87

\* Obtained by Eq(1.a) in Chapter 6

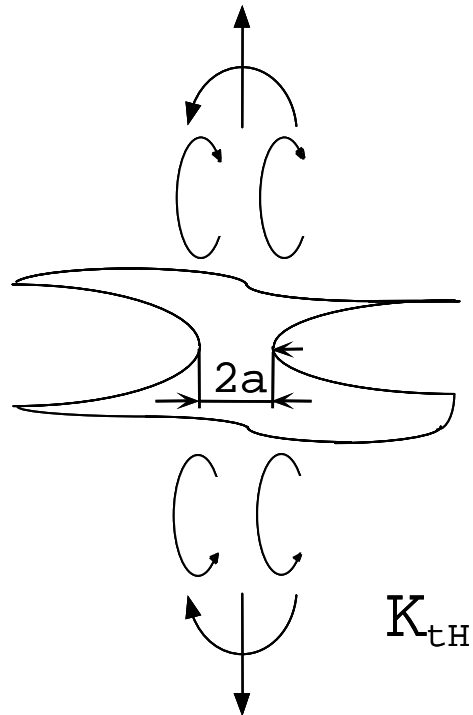


Fig. 3-3 Hyperbolic notch

$$K_{td} = \frac{4a/\rho \times \sqrt{a/\rho}}{3 \left\{ \sqrt{a/\rho} + (a/\rho - 1) \tan^{-1} \sqrt{a/\rho} \right\}} \quad \dots (3-2)$$

$$K_{td} = \frac{2(1+\nu)\sqrt{a/\rho}}{(3+\nu) \tan^{-1} \sqrt{a/\rho} - (1-\nu)\sqrt{a/\rho} / (a/\rho + 1)} \quad \dots (3-3)$$

Fig.3-4 に示すような回転双曲面切欠きが引張り，曲げ，ねじり，せん断を受ける場合の応力集中係数が Neuber [1] によって与えられており，以下の式で表現される．

$$K_{td} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + (0.5 + \nu) \frac{a}{\rho} + (1 + \nu) \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \right\}$$

$$N = \frac{a}{\rho} + 2\nu \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2 \quad \dots (3-4)$$

$$K_{td} = \frac{1}{N} \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \left\{ 3 \frac{a}{\rho} - (1 - 2\nu) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 4 + \nu \right\}$$

$$N = 3 \left( \frac{a}{\rho} + 1 \right) + (1 + 4\nu) \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + (1 + \nu) / \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) \quad \dots (3-5)$$

$$K_{td} = \frac{3(1 + \sqrt{a/\rho + 1})^2}{4(1 + 2\sqrt{a/\rho + 1})} \quad \dots (3-6)$$

$$K_{td} = \frac{\frac{1}{2} \frac{a}{\rho} + \left( \frac{1}{2} + \nu \right) \left( \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \nu} \quad \dots (3-7)$$

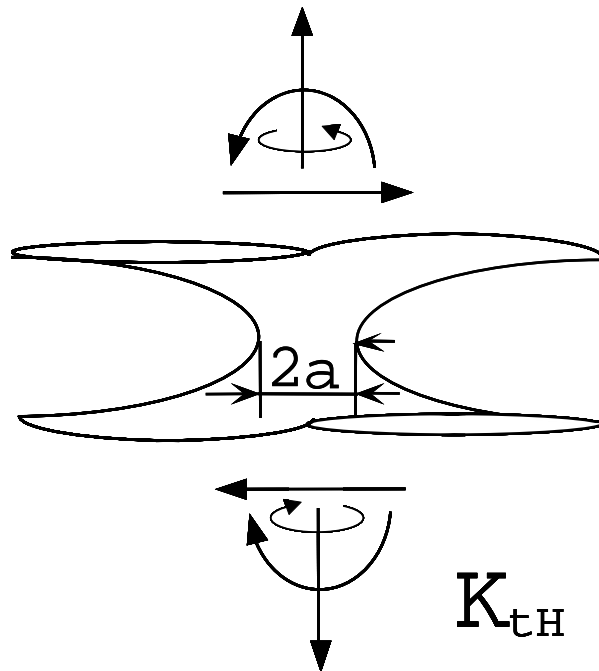


Fig. 3-4 Hyperboloidal notch

### 3.3 深い切欠きにおける開き角の影響[3]

ここでは、切欠き半径  $\rho$  が大きく深い切欠きに対する応力集中係数を考察する。このような切欠きに対して深い双曲面切欠きの解が精度の高い近似式を与える。Fig.3-5は応力集中係数  $K_t$  と深い回転双曲面切欠きの解  $K_{tH}$  との比を示したものである[4]、[5]。Fig.3-5では切欠き半径と切欠き深さのほぼ全範囲 ( $0 < a/\rho < \infty, 2t/D \geq 0.02$ ) について、 $K_t$  と  $K_{tH}$  との比を示している。特に切欠き深さが大きい場合 ( $2t/D \geq 0.5$  の場合) の応力集中係数  $K_t$  は、切欠き半径  $\rho$  が大きい場合のみならず  $\rho$  が小さい場合も含めて、 $\infty \geq \rho/a > 0.1$  の範囲で深い回転双曲面切欠きの解  $K_{tH}$  が良い近似値を与えていることがわかる。また、切欠き半径  $\rho$  が  $a$  に比べて大きい場合、たとえば  $a/\rho \leq 0.5$  の範囲では、切欠き深さ  $2t/D$  のほぼ全範囲 ( $2t/D \geq 0.02$  の範囲) に対して、 $K_{tH}$  が良い近似値を与えている。以上のようにFig.3-5の結果は、切欠きの深い場合に相当する回転双曲面切欠きの解が、有限深さの切欠き問題に対して切欠き形状の広い範囲で有効であることを示している。このことを利用して、開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の場合について、切欠きが深くなったときの極限の解  $K_{td}$  を以下のようにして求める。まず、Table3-2に  $\omega = 90^\circ$  で切欠きが深い場合の体積力法による計算例を示す。ここで、 $M$  は切欠き先端の円弧部の分割数である。Table3-2では有効数字4-5桁の精度があることがわかる。次のTable 3-3もTable3-2のような検討を行って正確に数値を求めた。

Table3-3は $\omega = 90^\circ$ での $K_t / K_{tH}$ の値を $2t / D = 0.7 \sim 0.9$ について、また、収束性を利用して $2t / D \rightarrow 1$ の推定値も示している。

Table 3-3 に示すように、切欠きが深い場合すなわち $2t / D = 0.7, 0.8, 0.9$ の応力集中係数 $K_t$ と深い双曲面切欠きの解 $K_{tH}$ を比較すると $2t / D = 0.7 \sim 0.9$ と切欠きが深くなるに従い応力集中係数 $K_t$ と深い双曲面切欠きの解 $K_{tH}$ との比は一定になる。同様に、深いV形切欠きの解 $K_{td}$ を開き角 $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$ の場合について最小二乗法を適用してパラメータ $x$ の関数として求めた。

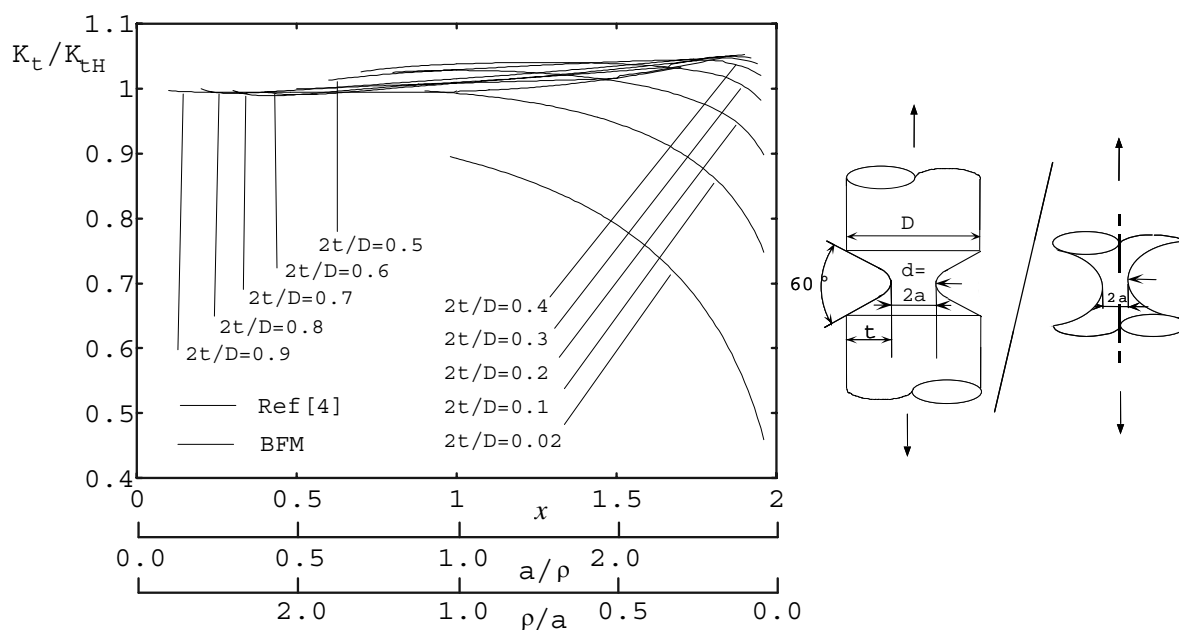


Fig. 3-5  $K_t / K_{tH}$  vs.  $a / \rho$  or  $\rho / a$

Table 3-2 Convergence of  $K_t$  when  $\omega = 90^\circ$  under tension

	$a/\rho = 1.0$	$a/\rho = 1.0$	$a/\rho = 1.0$
$M$	$2t/D = 0.7$	$2t/D = 0.8$	$2t/D = 0.9$
20	1.39683	1.39131	1.38820
25	1.39668	1.39136	1.38856
30	1.39657	1.39138	1.38879
$\rightarrow \infty (25-20)$	1.39608	1.39153	1.39003
$\rightarrow (30-$	1.39601	1.39151	1.38994
$K_{tH}$	1.391	1.391	1.391

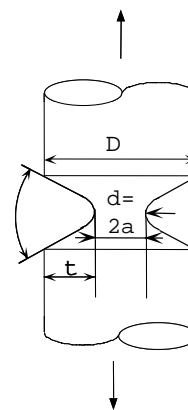


Fig. 3-3は、切欠きが深い場合の応力集中係数  $K_t$  が  $K_{td}$  の値で近似できることを示している。Table 3-4, 3-5は、Table 3-5と同様にして求めた開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の結果である。Table 3-4, 3-5から得られた近似式を式(3-8), (3-9)に示す。

(1) 引張り

$$\begin{aligned}
 & K_{td}/K_{tH} \\
 &= \left\{ (1.001 - 0.0175x + 0.0487x^2 - 0.0576x^3 + 0.0199x^4) \right. \\
 &+ (-0.0064 + 0.0770x - 0.2469x^2 + 0.2622x^3 - 0.0812x^4)\omega^* \\
 &+ (0.0288 - 0.3754x + 1.278x^2 - 1.403x^3 + 0.4414x^4)\omega^{*2} \\
 &+ (-0.0430 + 0.5778x - 2.033x^2 + 2.265x^3 - 0.7149x^4)\omega^{*3} \\
 &+ \left. (0.0166 - 0.2445x + 0.9141x^2 - 1.017x^3 + 0.3161x^4)\omega^{*4} \right\} \\
 &\times (1.005 - 0.0494x + 0.0512x^2 - 0.0077x^3)
 \end{aligned}$$

(推定誤差1%以内)      ···(3-8.a)

Table 3-3  $K_t / K_{tH}$  when  $2t / D \rightarrow 1.0$  and  $\omega = 60^\circ$  under tension

x	a/	/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D=1.0
0.00	0.000		1.000	1.000	1.000	1.000
0.10	0.100	10.000	0.999	1.000	1.000	1.000
0.20	0.200	5.000	0.998	0.998	0.998	0.998
0.30	0.300	3.333	0.996	0.996	0.996	0.996
0.40	0.400	2.500	0.995	0.995	0.995	0.995
0.50	0.500	2.000	0.996	0.995	0.995	0.995
0.60	0.600	1.667	0.998	0.997	0.997	0.997
0.70	0.700	1.429	0.999	0.998	0.998	0.998
0.80	0.800	1.250	1.002	1.000	1.000	1.000
0.90	0.900	1.111	1.004	1.003	1.002	1.002
1.00	1.000	1.000	1.007	1.006	1.005	1.005
1.10	1.111	0.900	1.010	1.008	1.008	1.008
1.20	1.250	0.800	1.014	1.012	1.012	1.012
1.30	1.429	0.700	1.018	1.016	1.016	1.016
1.40	1.667	0.600	1.023	1.021	1.021	1.021
1.50	2.000	0.500	1.027	1.025	1.025	1.025
1.60	2.500	0.400	1.032	1.030	1.030	1.030
1.70	3.333	0.300	1.035	1.033	1.033	1.033
1.80	5.000	0.200	1.034	1.033		1.033
1.90	10.000	0.100	1.020			1.020
2.00		0.000				1.014

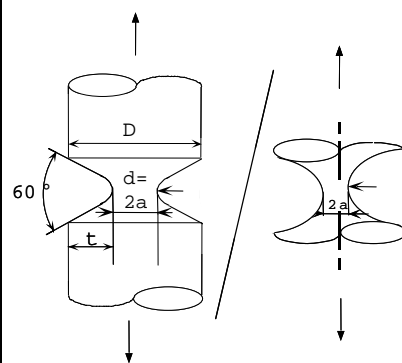




Table 3-4  $K_t / K_{tH}$  for various  $\omega$  when  $2t / D \rightarrow 1.0$  under tension

$x$	$a / \rho$	$\rho / a$	$\omega = 0^\circ$	$\omega = 60^\circ$	$\omega = 70^\circ$	$\omega = 80^\circ$	$\omega = 90^\circ$
0.000	0.000						
0.100	0.100	10.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.200	0.200	5.0000	0.9998	0.9998	0.9997	0.9998	0.9998
0.300	0.300	3.3333	0.9996	0.9996	0.9995	0.9996	0.9996
0.400	0.400	2.5000	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995
0.500	0.500	2.0000	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993	0.9995
0.600	0.600	1.6667	0.9992	0.9992	0.9993	0.9994	0.9997
0.700	0.700	1.4289	0.9991	0.9993	0.9994	0.9995	0.9998
0.800	0.800	1.2500	0.9992	0.9994	0.9995	0.9997	1.0000
0.900	0.900	1.1111	0.9993	0.9995	0.9997	0.9999	1.0020
1.000	1.000	1.0000	0.9994	0.9997	0.9999	1.0001	1.0050
1.100	1.111	0.9000	0.9996	0.9997	1.0001	1.0004	1.0080
1.200	1.250	0.8000	0.9998	0.9999	1.0005	1.0007	1.0120
1.300	1.429	0.7000	1.0001	1.0003	1.0008	1.0012	1.0160
1.400	1.667	0.6000	1.0006	1.0006	1.0014	1.0017	1.0210
1.500	2.000	0.5000	1.0011	1.0012	1.0019	1.0022	1.0250
1.600	2.500	0.4000	1.0019	1.0018	1.0026	1.0029	1.0300
1.700	3.333	0.3000	1.0028	1.0026	1.0034	1.0035	1.0330
1.800	5.000	0.2000	1.0042	1.0045	1.0041	1.0038	1.0330
1.900	10.000	0.1000	1.0053	1.0053	1.0043	1.0035	1.0200
2.000		0.0000	1.0064	1.0060	1.0045	1.0032	1.0140

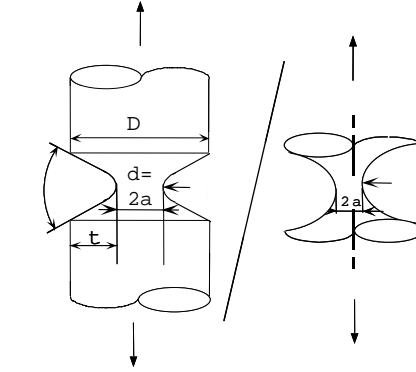
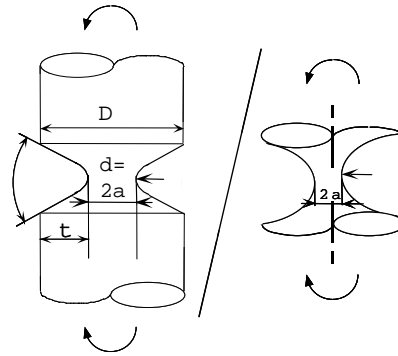


Table 3-5  $K_t / K_{tH}$  for various  $\omega$  when  $2t / D \rightarrow 1.0$  under bending

$x$	$a / \rho$	$\rho / a$	$\omega = 0^\circ$	$\omega = 10^\circ$	$\omega = 20^\circ$	$\omega = 40^\circ$	$\omega = 60^\circ$	$\omega = 90^\circ$
0.000	0.000	$\infty$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.100	0.100	10.000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
0.200	0.200	5.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
0.300	0.300	3.3333	1.0006	1.0002	1.0002	0.9999	0.9998	0.9997
0.400	0.400	2.5000	1.0100	1.0004	1.0005	1.0000	0.9999	0.9996
0.500	0.500	2.0000	1.0105	1.0102	1.0007	1.0002	1.0000	0.9996
0.600	0.600	1.6667	1.0108	1.0105	1.0103	1.0005	1.0001	0.9996
0.700	0.700	1.4289	1.0222	1.0109	1.0104	1.0008	1.0002	0.9996
0.800	0.800	1.2500	1.0209	1.0204	1.0108	1.0008	1.0003	0.9998
0.900	0.900	1.1111	1.0305	1.0300	1.0222	1.0102	1.0004	0.9997
1.000	1.000	1.0000	1.0307	1.0302	1.0204	1.0102	1.0004	0.9998
1.100	1.000	1.0000	1.0307	1.0302	1.0204	1.0102	1.0004	0.9998
1.100	1.111	0.9000	1.0405	1.0305	1.0206	1.0103	1.0005	0.9998
1.200	1.250	0.8000	1.0508	1.0401	1.0300	1.0106	1.0006	1.0000
1.300	1.429	0.7000	1.0604	1.0407	1.0402	1.0108	1.0008	1.0004
1.400	1.667	0.6000	1.0700	1.0504	1.0409	1.0202	1.0100	1.0008
1.500	2.000	0.5000	1.0805	1.0605	1.0407	1.0207	1.0103	1.0007
1.600	2.500	0.4000	1.1005	1.0706	1.0506	1.0301	1.0107	1.0011
1.700	3.333	0.3000	1.1102	1.0801	1.0508	1.0302	1.0202	1.0017
1.800	5.000	0.2000	1.1203	1.0902	1.0700	1.0401	1.0208	1.0021
1.900	10.000	0.1000	1.1505	1.1008	1.0801	1.0501	1.0308	1.0023
2.000		0.0000	1.1807	1.1204	1.0902	1.0601	1.0500	1.0025



$$K_{tH} = (1 / N) \{ (a / \rho) \sqrt{a / \rho + 1} + (0.5 + \nu)(a / \rho) + (1 + \nu)(\sqrt{a / \rho + 1} + 1) \}$$

$$N = a / \rho + 2\nu \sqrt{a / \rho + 1} + 2$$

• • • (3 - 8.b)



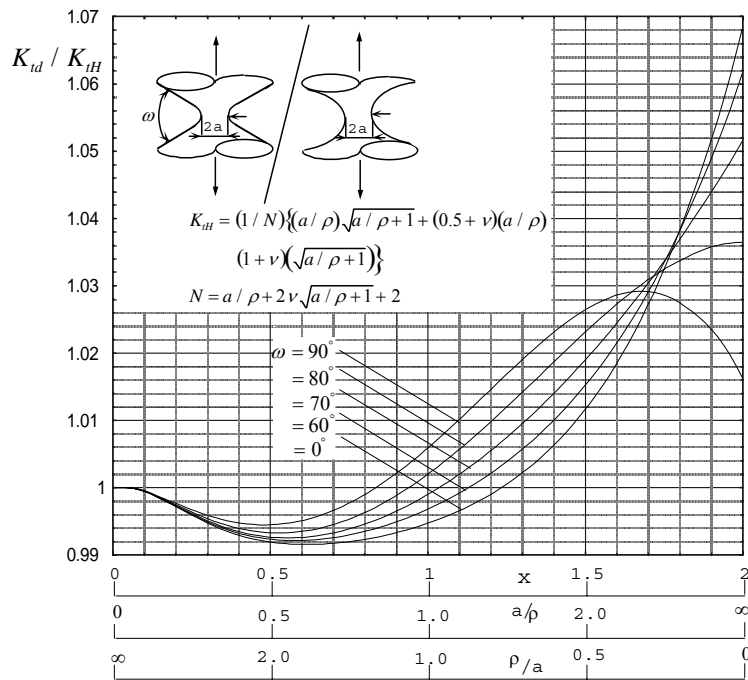


Fig. 3-6  $K_{td} / K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$  under tension

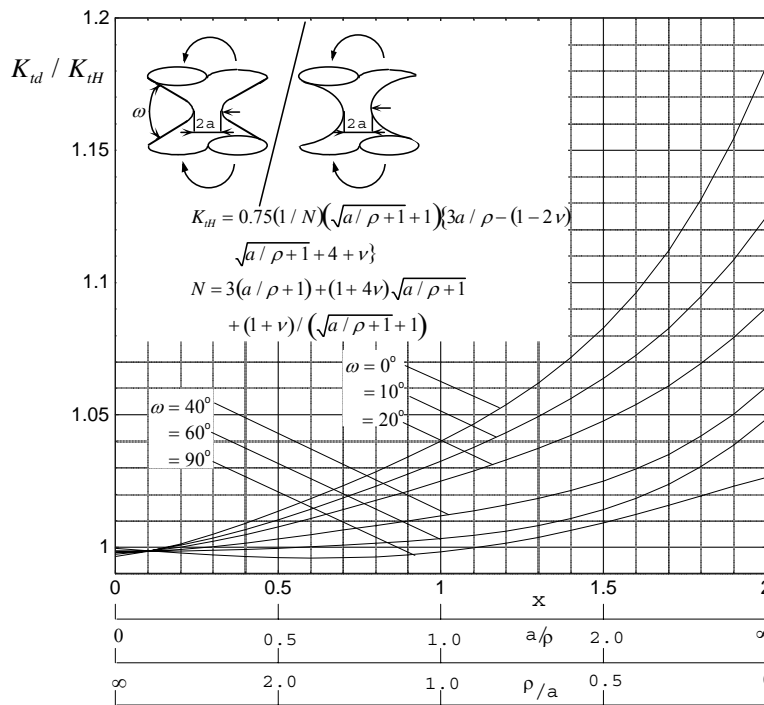


Fig.3-7  $K_{td} / K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$  under bending

$K_{td}$  による近似がねじり，曲げ，引張りの順に有効となる．切欠き形状全範囲で考えると， $K_{ts}$  による近似と  $K_{td}$  による近似とを有効に用いれば正確な応力集中係数を与える事が可能であると思われる．

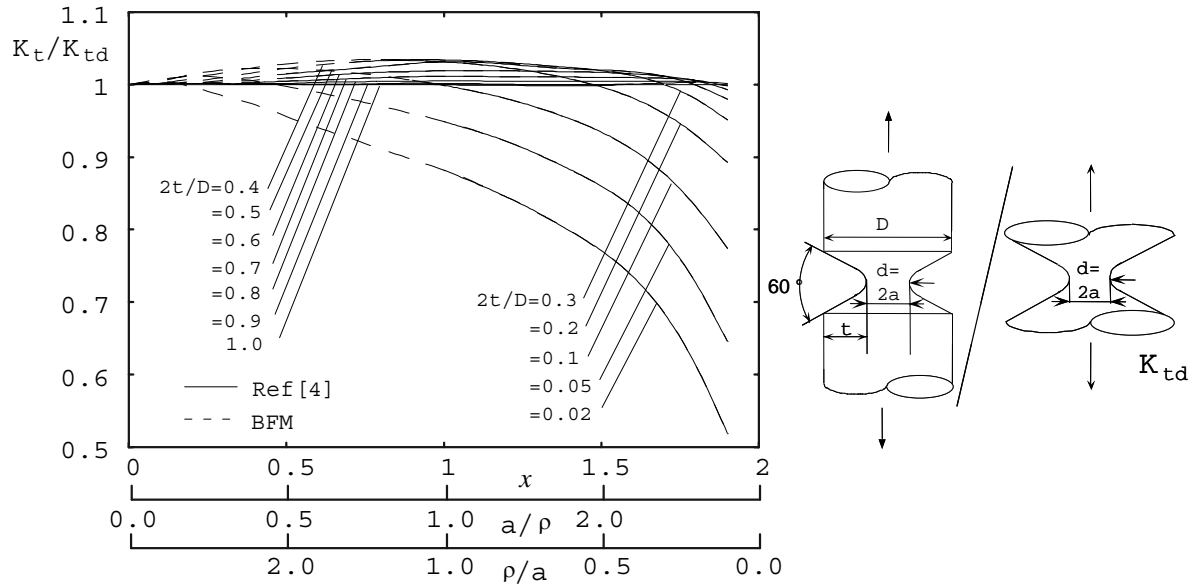


Fig. 3-8 (a)  $K_t / K_{td}$  vs.  $a / \rho$  or  $\rho / a$  round bar under tension

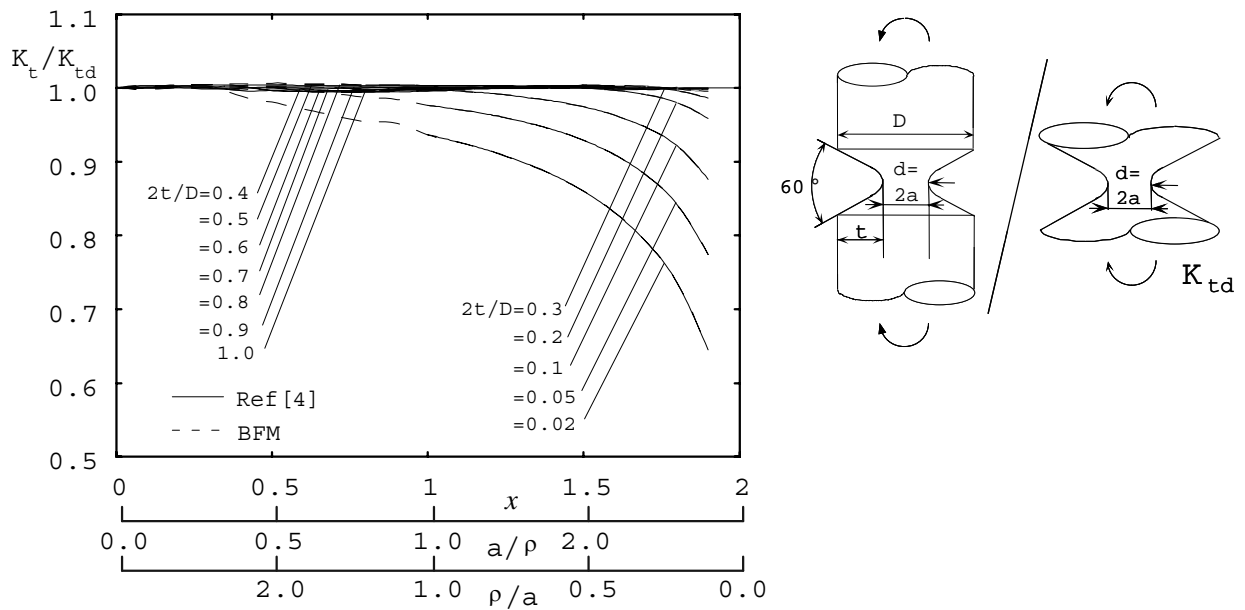


Fig. 3-8 (b)  $K_t / K_{td}$  vs.  $a / \rho$  or  $\rho / a$  round bar under bending

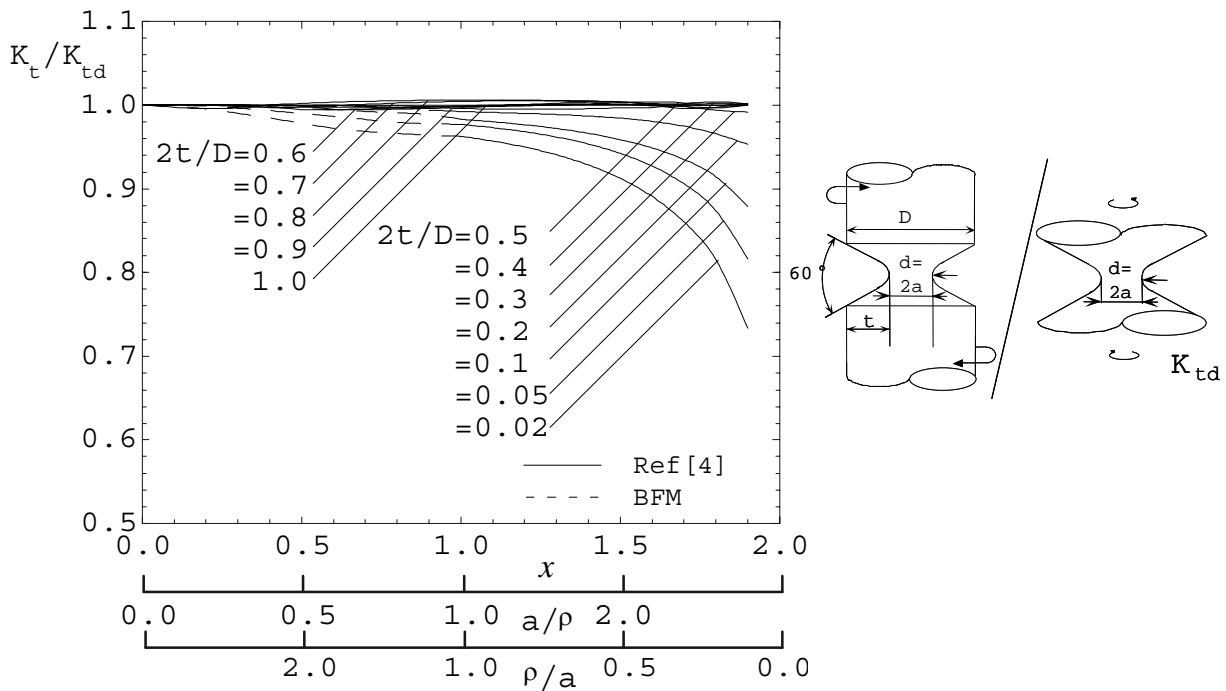


Fig. 3-8 (c)  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$  round bar under torsion

### 3.5 結 言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題で，鈍い切欠きまたは深い切欠きの場合，Fig.3-1 に示すように，問題は無限に深い切欠きの応力集中問題となる．Neuber[1]は深い切欠きの解として深い双曲面切欠きの応力集中係数の解を使用している．本章では，Neuber が使用した深い双曲面切欠きの応力集中係数の解をより正確に求めるため，切欠き深さが深い場合の極限に相当する V 形切欠きを有する丸棒における応力集中係数  $K_{td} = K_t|_{2t/D \rightarrow 1}$  について解析し，考察した．さらに， $K_{td}$  に及ぼす開き角  $\omega$  の影響についても体積力法による解析を行い開き角の影響について考察した．結果をまとめると以下ようになる．

(1) V 形切欠きの開き角が  $60^\circ$  の場合の丸棒及び帯板の引張，曲げ，ねじり問題について切欠き深さが深い場合の極限に相当する深い  $60^\circ$  V 形切欠きの応力集中係数  $K_{td} = K_t|_{2t/D \rightarrow 1}$  を正確に計算式として求めた．

(2) 深い V 形切欠きの引張問題に対して任意の切欠き半径  $a/\rho$ ，開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  に対する応力集中係数の近似式  $K_{td}^{\omega=0^\circ \sim 90^\circ}$  を与えた．その応力集中係数  $K_{td}$  は， $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の変化に対して最大 5% 程度変化する．切欠き半径

$a/\rho = 0 \sim 3.3$  の範囲ではむしろ開き角の増加  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  に対して  $K_{td}$  が増加する場合がある。

(3) 深い V 形切欠きの曲げ問題に対して任意の切欠き半径  $a/\rho$  , 開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  に対する応力集中係数の近似式  $K_{td}^{\omega=0^\circ \sim 90^\circ}$  を与えた。その応力集中係数  $K_{td}$  は,  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の変化に対して最大 16% 程度変化する。

(4) 深い V 形切欠きのねじり問題に対して任意の切欠き半径  $a/\rho$  , 開き角  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  に対する応力集中係数の近似式  $K_{td}^{\omega=0^\circ \sim 90^\circ}$  を与えた。その応力集中係数  $K_{td}$  は,  $\omega = 0^\circ \sim 90^\circ$  の変化に対して最大 5% 程度変化する。即ち, 切欠きが深い場合には切欠きの開き角の影響は比較的小さい。

(5)  $K_t/K_{td}$  の引張り, 曲げ, ねじりの結果をまとめると, 引張り, 曲げ, ねじりの順に  $K_t/K_{td}$  の分布は広い範囲になっていることがわかる。従って,  $K_{ts}$  とは逆に  $K_{td}$  を用いる計算式の適用範囲が, ねじり, 曲げ, 引張りの順に大きくなる。つまり,  $K_{td}$  による近似がねじり, 曲げ, 引張りの順に有効となる。

#### 参考文献

- (1) Neuber, H., Kerbspannungslehre (第 1 版), (1937); (第 2 版), (1958), 9, Springer-Verlag.
- (2) 菊川 真, 佐藤芳久, 引張りもしくは曲げを受ける帯板, 丸棒の切欠きによる応力集中 (第 1 報, 両側に U 形切欠きのある帯板), 日本機械学会論文集, 38-311, A (1972), 1663-1672.
- (3) 高瀬 康, 野田尚昭, 高 艶, 竹本智一, 切欠きの開き角の影響を考慮した切欠き寸法の全範囲に対して有効な応力集中係数の計算式, 材料, 52-7, (2003), 795-800.
- (4) 野田尚昭, 西谷弘信, 高瀬 康, 篠崎正孝, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (鋭い  $60^\circ$  V 形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片), 日本機械学会論文集, 63-613, A (1997-9), 1926-1931.
- (5) 野田尚昭, 高瀬 康, 門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-7, (1996), 757-762.

## 第4章 切欠き半径がゼロの鋭い切欠きの応力拡大係数

### 4.1 緒言

これまでに述べたように、先端に曲率半径  $\rho$  を有する  $60^\circ$  V 形切欠き (Fig. 4-1(a)) の問題は、金属材料の回転曲げ疲労強度の研究用試験片として重要であり、古くから多くの解析がなされている。切欠き半径  $\rho \neq 0$  の場合には、体積力法を用いてこの問題の応力集中係数が正確に求められたが [1-5]、切欠き半径が小さい場合、特に  $\rho \rightarrow 0$  (Fig. 4-1(b)) の結果を解析上求めることは、当初はできなかった。すなわち切欠き半径がゼロの鋭い切欠きでは、応力集中は無限大になるので解析が困難となる。このことが、任意の寸法  $\rho, t$  に対して適用可能な応力集中係数の計算式を提案するため大きな困難となる。すなわち、 $\rho \rightarrow 0$  の結果を知ることができると解析困難な鋭い切欠き ( $\rho \cong 0$ ) の結果を見積る際に有用となる。

Fig.4-2 は、 $60^\circ$  V 形切欠きを有する丸棒が引張りを受けた場合の応力集中係数  $K_t$  と  $60^\circ$  V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の解  $K_{ts}$  との比を切欠き形状の広い範囲 ( $0 < \rho/a \leq 10$ ) について示したものである [6], [7]。Fig.4-2 で  $\rho/a \rightarrow 0$

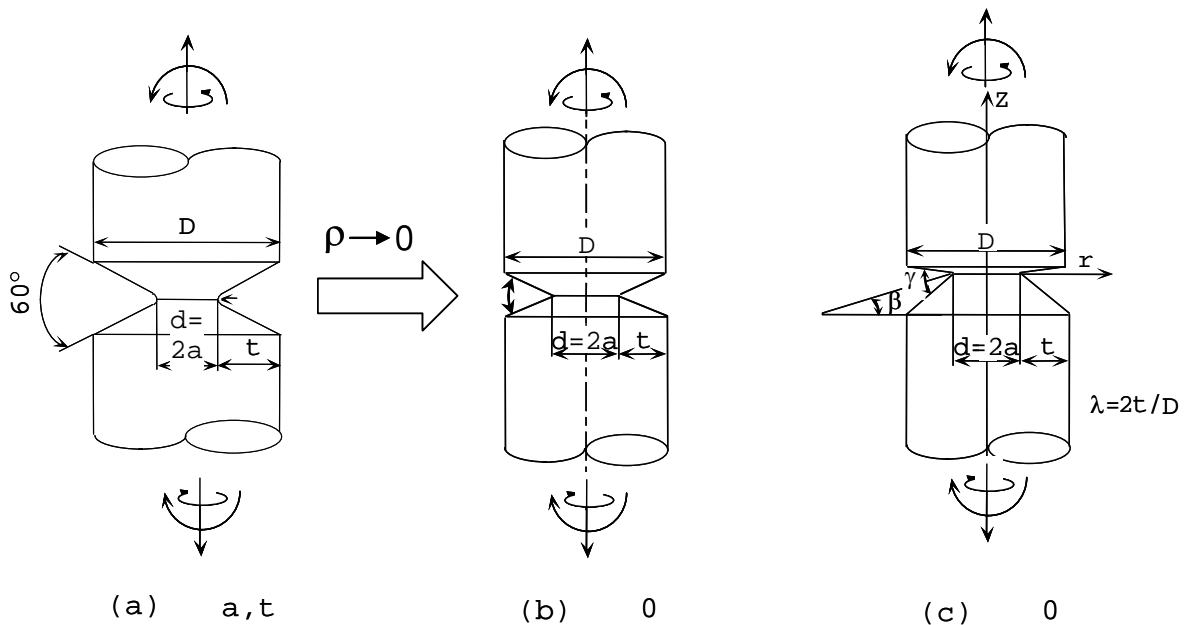


Fig. 4-1 (a) A notched bar with a sharp notch whose notch radius,  
 (b) A notched bar with a sharp notch,  
 (c) A notched bar with a general sharp notch

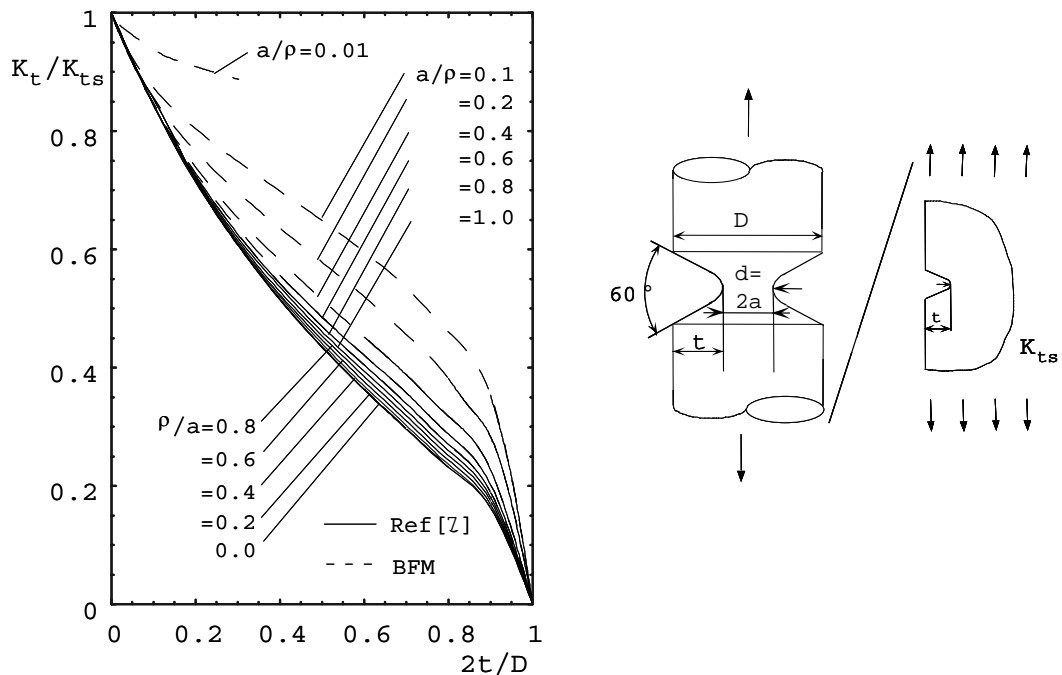


Fig. 4-2  $K_t / K_{ts}$  vs.  $2t / D$

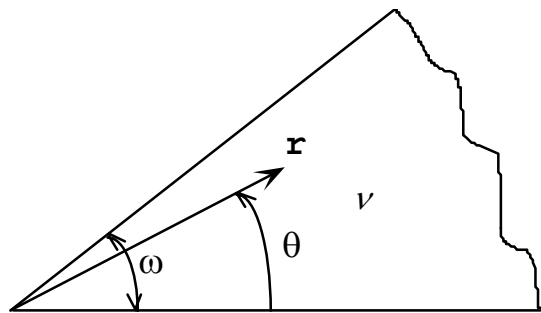
の線は、 $\rho/a$ が小さい場合、 $\rho/a$ が0.1と0.2で3桁程度以上一致することを確認して求めた値である。切欠き半径 $\rho$ が小さい場合の結果から $\rho \rightarrow 0$ の結果を上記のように推定することも可能であるが、厳密な解析によってその妥当性を検討する必要がある。また、鋭い切欠きの問題は以下に述べるように異種材料接合角部の問題の特別の場合としても重要である。この観点から本章では Fig. 4-1(c)に示す一般的な鋭い切欠きの問題も取り扱う。

#### 4.2 鋭い切欠き角部および異種材料接合角部に関する過去の研究について

鋭い切欠き角部の問題は機械構造物においてもしばしば問題になることがあるので、その強度評価を行うためには、まず角部近傍での精密な応力解析が必要となる。このような切欠き角部で応力の特異性が生じることは、古くから知られている。特異性を有する問題に数値解析の手法を適用する場合、特異性を考慮した計算法が必要となる。このような切欠きの応力特異性や、その特異応力場に関してはこれまでに以下のような研究が知られている。

Williams [8][9]は、Fig. 4-4 に示すようなくさび形切欠きの開き角を変化させた場合の応力特異性の指数 $\lambda$ を系統的に求めている。平面問題では、3種類の角部の境界条件(1)変位：自由-自由(2)固定-固定(3)固定-自由について、板の曲げ問題では、6種類の境界条件(1)変位：支持-支持(2)固定-自由(3)支持-自由(4)固定-支持(5)自由-自由(6)固定-固定について解析している。





$\nu$ : Poisson's ratio

Fig. 4-3 Stress singularities resulting from various boundary condition in angular corners of thin plate in plane problems and plate bending

鋭い切欠きの問題より一般的に取扱った異種材料接合角部の問題に関しても複合材料の使用の際などに重要となるので多くの研究がある。このような異種材料接合角部の問題や鋭い切欠きの問題では、通常の破壊力学とは異なり、その特異応力場が、特異性指数の異なる応力拡大係数の組み合わせによって表現される。V形切欠きの頂点近傍での応力場は、モード I の変形に対して  $1/r^{1-\lambda_1}$ 、モード II の変形に対して  $1/r^{1-\lambda_2}$  の特異性をもつ形で、二つのパラメータ  $K_{I,\lambda_1}$  と  $K_{II,\lambda_2}$  により一義的に記述できる（座標軸については Fig.4-4 参照）。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (ij = x, y, xy) \quad \dots (4.1)$$

式(3)中の  $f_{ij}^I(\theta)$ ,  $f_{ij}^{II}(\theta)$  はそれぞれの変形様式および応力成分によって定まる  $\theta$  の関数である。

以上からわかるように、V形切欠き頂角での応力特異場を知るためには、二組のパラメータ  $\lambda_1, K_{I,\lambda_1}$  と  $\lambda_2, K_{II,\lambda_2}$  を求めればよいことになる。

異材の接合部では、材料および形状の不連続のために、接合面の隅角部において集中応力が発生し、これが原因となって接合部のき裂の発生を招き、全体的な破壊へ至ることが多い。異材接合材料についての特異性の指数についての研究は過去に以下のような研究が行われている。

Bogy-Wang[10]は、Dundurs の複合パラメータ  $\mu, \nu$ 、角部の開き角  $\alpha$  を用いた特性方程式(式(4.8),(4.9))を解くことにより Fig.4-5 に示すような接合材の角部境界の応力特異性の指数  $\lambda$  を求め、それぞれのコーナ点の角度  $\theta$  を一定として求めた特異性の指数  $\lambda$  と  $\alpha$  との関係を示している。

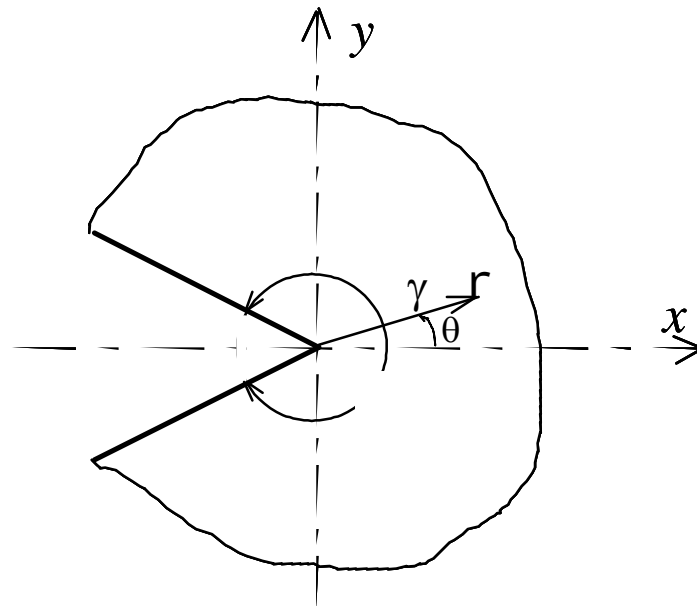


Fig. 4-4 Singular stress fields near a corner

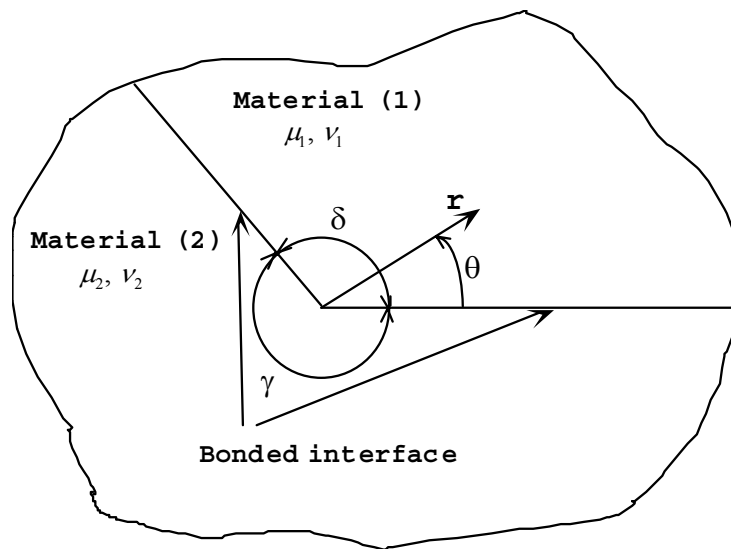


Fig. 4-5 Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials

さらに、陳・西谷[11] は、Fig. 4-6 に示すような二つの異材、材料1と材料2を接合した角部での二次元応力解析を実施し、角部における応力特異性の解析を行うとともに、接合異材の角部近傍の一般式(4-1)を導いて、その角部での力学特性を検討している。

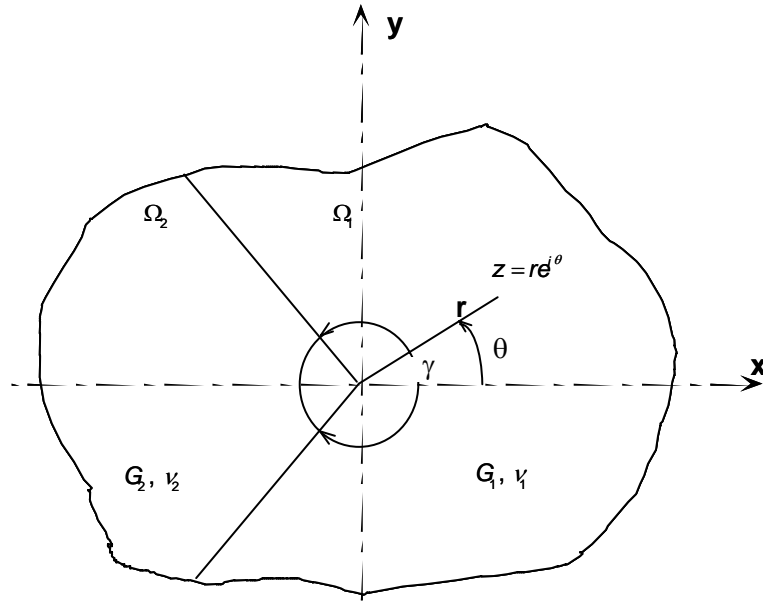


Fig. 4-6 Stress fields near the corner of jointed dissimilar materials

### 4.3 異種材料接合角部の特異応力場について

切欠き先端の曲率半径ゼロの鋭い切欠きの特異応力場について、それを特別な場合として含む一般化した異種材料接合角部の問題として理論的研究が行われている[8-11]。すなわち Fig.4-7 に示す異材接合角部の問題では、き裂問題と異なり、モード -モード の変形モードに関係した異なる応力特異性の指数をもつ特異応力が混在して存在することが知られている。結局、その角部近傍の特異応力場は、次式のように特異性の指数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  および角部に拡張された応力拡大係数によって以下のように記述される[11,12]。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III,\lambda_3}}{r^{1-\lambda_3}} f_{ij}^{III}(\theta)$$

(  $G_1 < G_2$  の場合 ) .....(4 2)

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III,\lambda_4}}{r^{1-\lambda_4}} f_{ij}^{III,\lambda_4}(\theta)$$

(  $G_1 > G_2$  の場合 ) .....(4 3)

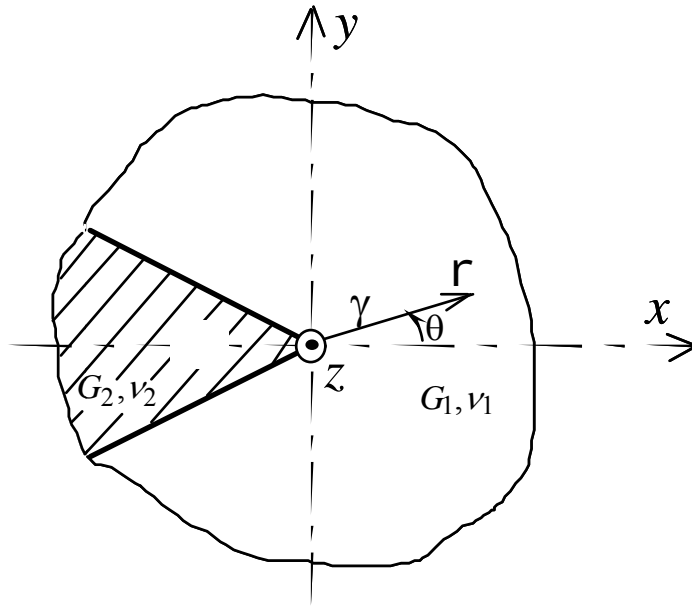


Fig. 4-7 Singular stress fields near a corner of jointed dissimilar materials

ここで,  $K_{I, \lambda_1}$ ,  $K_{II, \lambda_2}$  は面内変形 (xy 平面内) に対応するモード (x 軸に対称) およびモード (x 軸に逆対称) の応力拡大係数である. また,  $K_{III, \lambda_3}$ ,  $K_{III, \lambda_4}$  はモードの面外変形に対応する応力拡大係数 ( $K_{III, \lambda_3}$ : x 軸に対称な変形,  $K_{III, \lambda_4}$ : x 軸に逆対称な変形) である. 関数  $f_{ij}^I(\theta)$ ,  $f_{ij}^{II}(\theta)$ ,  $f_{ij}^{III}(\theta)$ ,  $f_{ij}^{III, \lambda_3}(\theta)$ ,  $f_{ij}^{III, \lambda_4}(\theta)$  は式 (4 4), (4 5) は角部近傍での特異応力を表現している.

$$\begin{aligned}
 f_{\theta,1}^I(\theta) = & \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \langle [\lambda_1(\alpha-\beta)\sin\{\gamma-\lambda_1(\gamma-\pi)\} \\
 & + (1-\beta)\sin(\lambda_1\pi)] \times \cos\{(\lambda_1+1)\theta\} \\
 & + [(\lambda_1+1)(\alpha-\beta)\sin\{\lambda_1(\gamma-\pi)\}] \times \cos\{(\lambda_1-1)\theta\} \rangle \\
 & \dots \dots (4 \ 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\theta,1}^{II}(\theta) = & \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \langle [\lambda_2(\alpha-\beta)\sin\{\gamma-\lambda_2(\gamma-\pi)\} \\
 & - (1-\beta)\sin(\lambda_2\pi)] \times \sin\{(\lambda_2+1)\theta\} \\
 & + [(\lambda_2+1)(\alpha-\beta)\sin\{\lambda_2(\gamma-\pi)\}] \times \sin\{(\lambda_2-1)\theta\} \rangle \\
 & \dots \dots (4 \ 5)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\alpha = \frac{G_2(\kappa_1 + 1) - G_1(\kappa_2 + 1)}{G_2(\kappa_1 + 1) + G_1(\kappa_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{G_2(\kappa_1 - 1) - G_1(\kappa_2 - 1)}{G_2(\kappa_1 + 1) + G_1(\kappa_2 + 1)} \quad \dots \dots (4 \ 6)$$

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{(3 - \nu_i)}{(1 + \nu_i)} \quad (\text{for plane stress}), \\ \kappa_i &= 3 - 4\nu \quad (\text{for plane strain}), \\ & \quad (i=1, 2) \quad \dots \dots (4 \ 7) \end{aligned}$$

応力特異性の指数  $\lambda_1, \lambda_2$  は式 (4 8), (4 9) の最小平方根である .

モード I

$$\begin{aligned} D_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) &= (\alpha - \beta)^2 \lambda^2 (1 - \cos 2\gamma) + 2\lambda(\alpha - \beta) \sin \gamma \{ \sin \lambda \gamma + \sin(2\pi - \gamma) \} \\ &+ 2\lambda(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \{ \sin \lambda(2\pi - \gamma) - \sin \lambda \gamma \} + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda\pi \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{ 2\lambda(\gamma - \pi) \} = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots (4 \ 8)$$

モード II

$$\begin{aligned} D_2(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) &= (\alpha - \beta)^2 \lambda^2 (1 - \cos 2\gamma) + 2\lambda(\alpha - \beta) \sin \gamma \{ \sin(2\pi - \gamma) + \sin \lambda \gamma \} \\ &- 2\lambda(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \{ \sin \lambda(2\pi - \gamma) - \sin \lambda \gamma \} + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda\pi \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{ 2\lambda(\gamma - \pi) \} = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots (4 \ 9)$$

一方, 面外変形の応力特異性は, 式 (4 10), (4 11) の平方根によって求められる .

対称形での応力特異性

$$\frac{\sin \lambda(\gamma - \pi)}{\sin \lambda\pi} = + \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \quad \dots \dots (4 \ 10)$$

逆対称形での応力特異性

$$\frac{\sin \lambda(\gamma - \pi)}{\sin \lambda\pi} = - \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \quad \dots \dots (4 \ 11)$$

このような異種材料接合角部の応力拡大係数の解析例として, これまで菱形介在物

[13], [14], [15], 長方形介在物[16], [17], [18], リング状介在物[19], 円柱状介在物[20], [21]の問題が取り上げられ, その混合モードの応力拡大係数  $K_{I, \lambda_1} - K_{III, \lambda_4}$  が求められている. しかし, ある異種材料の組み合わせに対して  $K_{I, \lambda_1} - K_{III, \lambda_4}$  が与えられ, その特異応力場が式(4-2), (4-3)で表現されている場合でも, 接合角部の角度が異なれば, 特異性指数  $\lambda_1 - \lambda_4$  は異なる. このような  $K_{I, \lambda_1} - K_{III, \lambda_4}$  および  $\lambda_1 - \lambda_4$  が変化する特異応力場の破壊条件を一般的に議論することは容易でない. 結局, 異材境界接合角部の強度評価を, 特異応力場[式(4-2), (4-3)]に基づいて行うためには, 通常の破壊力学とは異なり, 以下の2点を別個に考慮する必要がある.

(1) その特異応力場が, 特異性指数の異なる応力拡大係数の組み合わせによって表現されること.

(2) 破壊は通常異材接合境界上(またはその極く近傍)に生じるため, 材料単体の強度のみならず, 特に異材界面の接合強度が問題となること.

本研究で扱うような, 鋭いV形切欠きを有する丸棒の問題(Fig.4-1(d))では, 異材接合界面が存在しないので, まず, 相違点(1)に注目して, 破壊条件を考察することが比較的容易である. すなわち, 鋭い切欠きを有する丸棒の問題(Fig.4-1(d))は, 複合材料の強度評価などで問題となる. 異種材料接合角部の強度を評価する際, 従来のき裂を扱う破壊力学と異なる点を考察する観点からも重要である.

#### 4.4 解析方法

前述のように Fig.4-1(d)のような鋭い切欠きの問題では, 切欠き先端近傍の応力場は  $G_2 = 0$  であるので, 式(4-12)で表される. また,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$  は次の方程式(4-13)の根として与えられる[8,9].

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III, \lambda_3}}{r^{1-\lambda_3}} f_{ij}^{III}(\theta)$$

(  $G_1 < G_2$  の場合 )                      . . . . . (4-12)

モード I        :  $\sin[\lambda_1(2\pi - \gamma)] = -\lambda_1 \sin \gamma$   
 モード II        :  $\sin[\lambda_2(2\pi - \gamma)] = \lambda_2 \sin \gamma$   
 モード III       :  $\sin[\lambda_4(\pi - \gamma)] = \sin(\lambda_4 \pi)$                       . . . . . (4-13)

このような鋭い切欠きの問題に関して利用できる結果としては, これまでに両側および片側に鋭い切欠きを有する帯板試験片の引張りおよび曲げの解[22]があり, それを用いて脆性材料の破壊条件が検討されている[23], [24], [25]. しかし, 実際の試

験片では板厚の影響がどの程度表れるか不明である．このため，Fig.4-1(d)のような鋭い切欠きを有する丸棒曲げの問題は，従来のき裂を取扱う破壊力学を式(4-12)，(4-13)または式(4-3)のような切欠き先端近傍の応力場より一般的な特異応力場の問題に拡張するため，従来の破壊力学とは異なる点を考慮する上でも重要となる．

ここでは，鋭いV形切欠きを有する丸棒が曲げを受ける場合を例に解析方法を説明する．曲げ問題では引張り(モードI, IIのみ)やねじり(モードIIIのみ)とは異なり，モードI-IIIの3つの特異応力場が混在する．

Fig.4-8に無限体中に想定した鋭いV形切欠きを有する丸棒となるべき仮想境界を示す．体積力法の考え方に基づいて，問題はFig.4-8に示す仮想境界の無限小外側に分布させる体積力密度を未知関数とする特異積分方程式(4-14)で表わされる．

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}F_n(s) + \int_L h_{nm}^{F_n}(l,s)F_n(l)dl + \int_L h_{nn}^{F_t}(l,s)F_t(l)dl \\
 & \quad + \int_L h_{nn}^{F_\theta}(l,s)F_\theta(l)dl = -\sigma_n^\infty(s) \\
 & -\frac{1}{2}F_t(s) + \int_L h_{nt}^{F_n}(l,s)F_n(l)dl + \int_L h_{nt}^{F_t}(l,s)F_t(l)dl \\
 & \quad + \int_L h_{nt}^{F_\theta}(l,s)F_\theta(l)dl = -\tau_{nt}^\infty(s) \\
 & -\frac{1}{2}F_\theta(s) + \int_L h_{n\theta}^{F_n}(l,s)F_n(l)dl + \int_L h_{n\theta}^{F_t}(l,s)F_t(l)dl \\
 & \quad + \int_L h_{n\theta}^{F_\theta}(l,s)F_\theta(l)dl = -\tau_{n\theta}^\infty(s) \quad \dots\dots(4-14)
 \end{aligned}$$

ここで， $\int_L$ は仮想境界上の積分を意味し， $\sigma_n^\infty(s)$ ， $\tau_{nt}^\infty(s)$ および $\tau_{n\theta}^\infty(s)$ は，無限遠での曲げ応力によって，仮想境界上の任意の点sに生じる法線方向垂直応力および，接線方向および円周方向のせん断応力である．そして， $h_{nm}^{F_n}(l,s)$ 等は，仮想境界上の点rに法線方向(n方向)，接線方向(t方向)または円周方向(θ方向)の単位大きさの集中力の輪を作用させたときに仮想境界上の任意の点sに生じる応力である．ここで集中力の輪とは以下の3種類をいう[1]，[26](ここでφは力の作用する位置を表す円周方向の角度であり，φと区別して用いる．)．

- (1) 周方向にcos φで変化する半径方向の集中力の輪
- (2) 周方向にsin φで変化する周方向の集中力の輪
- (3) 周方向にcos φで変化する軸方向の集中力の輪

いま，鋭いV形切欠き先端部分の境界条件の満たし方を例にとり解析方法を説明する．無限体中の鋭いV形切欠き先端部分となるべき仮想境界上 (Fig.4-8 の BAB' ) に分布させる体積力を，Fig.4-8 (b) - (e) に示すような形式の体積力分布の線形結合によって問題を表現する．即ち，角部では，一般にモード I-モード III の変形が生じるので，角部での上下の仮想境界上に分布させるべき法線方向，接線方向および円周方向の体積力に対し，角部の二等分線に対して対称形 (モード I) と逆対称形 (モード II) および円周方向の対称形と逆対称形の4種類の分布形式を採用する．結局，Fig.4-8 (a) の BAB' 部分では， $F_n$ ， $F_t$  および  $F_\theta$  を基本密度関数と級数で以下のように近似する．

$$\begin{aligned} F_n(r_A) &= F_n^I(r_A) + F_n^{II}(r_A) = W_n^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_n^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\ F_t(r_A) &= F_t^I(r_A) + F_t^{II}(r_A) = W_t^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_t^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\ F_\theta(r_A) &= F_\theta^I(r_A) + F_\theta^{II}(r_A) = W_\theta^I(r_A)r_A^{\lambda_3-1} + W_\theta^{II}(r_A)r_A^{\lambda_4-1} \quad (\lambda_3 = 1) \quad \dots \dots (4 \ 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M a_n r_A^{n-1}, \quad W_n^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M b_n r_A^{n-1} \\ W_t^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M c_n r_A^{n-1}, \quad W_t^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M d_n r_A^{n-1} \\ W_\theta^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M e_n r_A^{n-1}, \quad W_\theta^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M f_n r_A^{n-1} \quad \dots \dots (4 \ 16) \end{aligned}$$

ここで， $r_A$  は角部 A から境界に沿う方向の局所座標であり， $r_A^{\lambda_1-1} - r_A^{\lambda_4-1}$  は，切欠きにおける切欠き角部 A での特異応力場を表現するための基本密度関数である．また，添字 I，II は，切欠きの二等分線に対して対称形および逆対称形の体積力を作用させることを意味する．

Fig.4-8 の BAB' 以外の部分の体積力密度の表現も，式 (4 15)，(4 16) とほぼ同様であるが，対称形と逆対称形の表現を用いない点が異なる．以上のような離散化手法を用いて特異積分方程式[16]を解くことにより，角部で定義される一般化応力拡大係数  $K_{I,\lambda_1}$ ， $K_{II,\lambda_2}$ ， $K_{III,\lambda_4}$  は，角部先端での重みの値  $W_n^I(0) - W_\theta^{II}(0)$  から求められる[27]．以下ではポアソン比  $\nu = 0.3$  とした．また， $\theta$  を円周方向の角度とすると， $K_{I,\lambda_1} \propto \cos \theta$ ， $K_{II,\lambda_2} \propto \cos \theta$ ， $K_{III,\lambda_4} \propto \sin \theta$  であるので， $K_{I,\lambda_1}$ ， $K_{II,\lambda_2}$  は  $\theta = 0$  での値を， $K_{III,\lambda_4}$  は  $\theta = \pi/2$  での値を以下で議論する．

#### 4.5 丸棒問題の切欠き半径 0 の切欠きの応力拡大係数



Fig.4-9 に示すように各々の問題での無次元化応力拡大係数  $F_{I,\lambda_1}$  ,  $F_{II,\lambda_2}$  は式 (4 17) - (4 19) で定義される .

( 1 ) 引張り

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_2},$$

$$\sigma^\infty = \frac{4P}{\pi d^2}, P = \text{axial force} \quad \dots (4 17)$$

( 2 ) 曲げ

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_2},$$

$$F_{III,\lambda_4} = K_{III,\lambda_4} / \sigma^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_4}, \sigma^\infty = \frac{32M}{\pi d^3}, M = \text{bending moment} \quad \dots (4 18)$$

( 3 ) ねじり

$$F_{III,\lambda_4} = K_{III,\lambda_4} / \tau^\infty \sqrt{\pi t}^{1-\lambda_4}, \tau^\infty = \frac{16T}{\pi d^3}, T = \text{torsional moment} \quad \dots (4 19)$$

4・5・1 V形切欠き有する半無限板 初めに Fig.4-9 で  $2t / D \rightarrow 0$  の極限に相当する半無限板の V 形切欠き ( Fig.4-11) の結果を示す . ここでは , この問題を 2 種類の方法で解析した . 方法 1 は Fig.4-12 ( a) に示す仮想境界上に体積力を分布する場合であり , 方法 2 は Fig.4-12 ( b) に示す仮想境界上に体積力を分布する場合である . 方法 1 が仮想境界が短いため精度が良いと考えられるが , Fig.4-9 の問題は Fig.4-10 の仮想境界を用いて解く必要があるのでその精度を比較検討する . 方法 1 , 2 の収束性の例を Table 1 に示す . Table 1 では方法 1 が有効数字 5 桁収束しており精度が高いことがわかる . しかし , 方法 2 でも有効数字の 5 桁目がわずかに異なる程度で良好な結果が得られている . よって , Fig.4-12 ( b) や Fig.4-10 の仮想境界を用いても有効

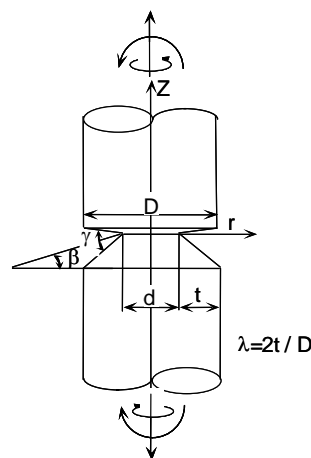


Fig. 4-9 60° V-shaped notched bar under tension, bending, and torsion

数字5桁程度の精度の高い結果が得られるものと考えられる。なお、Table 4-1では西谷らの論文[13]の図からの読取値も参考のため示しているが、本解析結果とよく一致している。

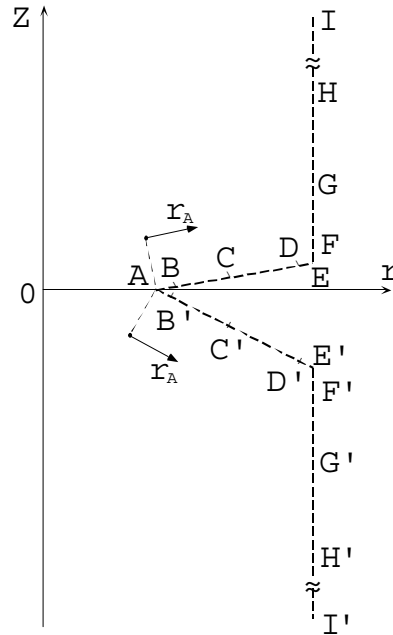


Fig. 4-10 Prospective boundary for notched bar and boundary division

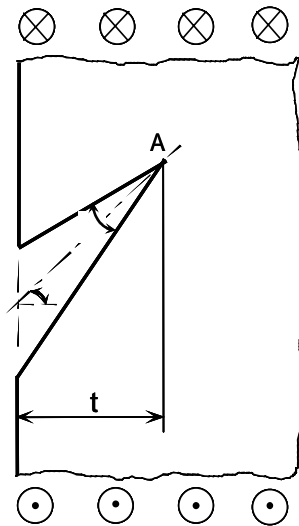
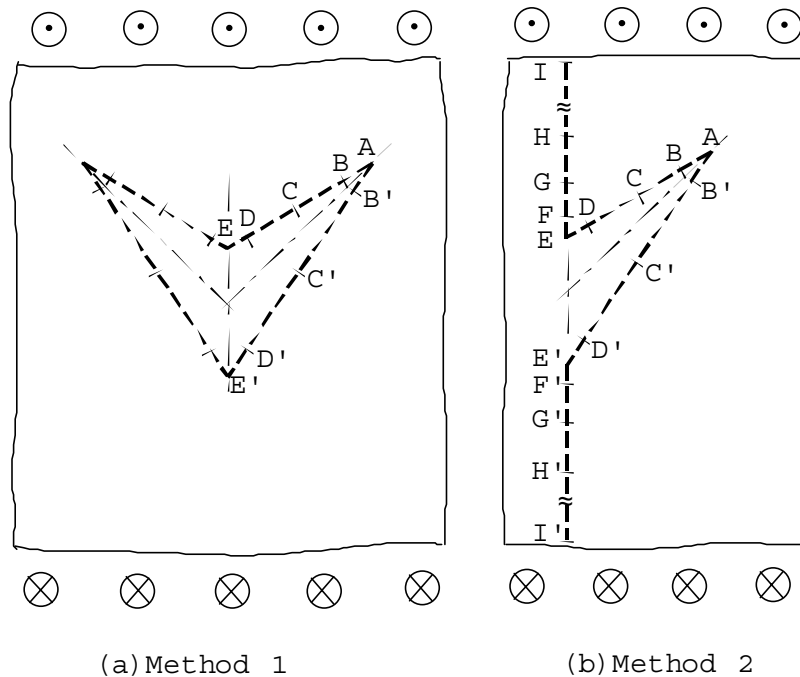


Fig. 4-11 Case when  $2t / D \rightarrow 0$  in Fig.1



(a) Method 1 (b) Method 2

Fig. 4-12 Model of V-notch in a infinite plate

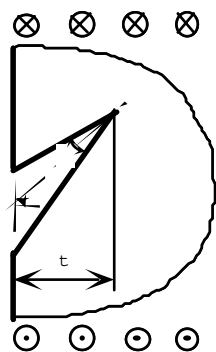
Table 4-1 Covergence of  $F_{III,\lambda_4}$  in Fig.5-3 and Fig.5-4

Method 1		$F_{III,\lambda_4}, \theta = 0^\circ$				$\theta = 30^\circ$
M	$15^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	
4	1.02445	1.05397	1.13513	1.26901	1.02190	
5	1.02454	1.05410	1.13525	1.26916	1.02251	
6	1.02454	1.05410	1.13526	1.26917	1.02250	
7	1.02456	1.05412	1.13527	1.26920	1.02254	
Method 2		$F_{III,\lambda_4}, \theta = 0^\circ$				$\theta = 30^\circ$
M	$15^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	
6	1.02336	1.05315	1.13505	1.26913	1.02199	
7	1.02402	1.05339	1.13517	1.26916	1.02245	
8	1.02431	1.05377	1.13549	1.26916	1.02252	
9	1.02430	1.05418	1.13521	1.26911	1.02259	
Ref [2]	1.025	1.054	1.135	1.270		

Table 4-2 は方法 1 で得られた結果をまとめて示しているが，方法 2 による結果も全形状で有効数字 4 桁まで完全に一致しており 5 桁目が少し異なる場合がある程度である。

**4・5・2 V 形切欠き有する丸棒の収束性** Table 4-3 に式 (4 19) で定義される  $F_{III,\lambda_4}$  の収束の例を示す．ここで， $M_1$  は各区間あたりの選点数である．Table 4-3 に示す以外の形状でも検討した結果，本解析法では  $M_1 = 8-11$  程度で  $\theta$  方向の重みより得

Table 4-2 Results of V-notch in a semi-infinite plate



		$F_{III,\lambda_4, Method 1}$			
		$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
$10^\circ$		1.0159	1.0042	0.9693	0.9103
$15^\circ$		1.0245	1.0124	0.9756	0.9139
$30^\circ$		1.0541	1.0399	0.9970	0.9242
$45^\circ$		1.0902	1.0734	1.0225	0.9353
$60^\circ$		1.1353	1.1150	1.0533	0.9453
$90^\circ$		1.2692	1.2372	1.1369	

Table 4-3 Results of V-notch in a semi-infinite plate

$F_{III,\lambda_4}, \gamma = 30^\circ, \lambda_4 = 0.54, \lambda = 2t/D = 0.2$				
M	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
8	1.36668	1.35002	1.30046	1.21905
9	1.36676	1.35011	1.30050	1.21886
10	1.36682	1.35018	1.30055	1.21881
11	1.36683	1.35018	1.30052	1.21868
$F_{III,\lambda_4}, \gamma = 60^\circ, \lambda_4 = 0.6, \lambda = 2t/D = 0.5$				
M	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
8	3.74436	3.70312	3.58159	3.38597
9	3.74434	3.70312	3.58162	3.38597
10	3.74433	3.70312	3.58167	3.38604
11	3.74432	3.70311	3.58166	3.38598

られた  $K_{III,\lambda_3}$  の値が有効数字 4-5 桁程度まで一致し収束しており，良好な収束性を示すことが確認された．

**4・5・3 円周き裂を有する丸棒の解との比較** Table 4-4 (a) に  $\beta = 0^\circ$  で  $\gamma = 10^\circ$  ,  $15^\circ$  ,  $30^\circ$  の結果を示す．Table 4-4 (a) で  $\gamma = 0^\circ$  (15・10) 等は  $\gamma = 15^\circ$  と  $10^\circ$  の結果から  $\gamma = 0^\circ$  を外挿して求めた結果であることを示す． $\gamma = 0^\circ$  (15・10) と  $\gamma = 0^\circ$  (30・15) は有効数字 3 桁程度一致しており，この程度まで精度があると考えられる．Table 4-4 (b) はこのようにして求めた円周き裂のねじりにおける応力拡大係数  $F_{III}$  を式 (4 20) の Benthem・Koiter の近似式[28]の値と比較して示している．

$$F_{III,B}(\xi) = \frac{3}{8} \xi^{-\frac{5}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{8} \xi^2 + \frac{5}{16} \xi^3 + \frac{35}{128} \xi^4 + 0.208 \xi^5 \right),$$

$$\xi = d/D \quad \dots \dots (4 20)$$

Fig.4-5 にその比を示す . Fig. 4-5 より Benthem・Koiter の近似式は誤差 1%程度以内で  $F_{III}$  を近似できることがわかる . より正確な近似式を求めるため , Fig.4-5 の  $F_{III,(15-10)} / F_{III,B}$  の比に最小 2 乗法を用いて近似式を作製し , 得た結果を式 (4 21) に示す . この  $F_{III,(15-10)} / F_{III,B}$  と式 (4 20) を比較した結果 , 式 (4 20) , (4 21) は誤差 0.2%程度以内で円周き裂の  $F_{III}$  を与えると考えられる .

Table 4-4 Results of a circumferential crack in a round bar under torsion

(a)  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  ,  $\lambda = 2t / D$  , (b)  $F_{III}$  and Benthem・Koiter's value

$\lambda = 2t / D$	$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$				
	$\gamma = 10^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 0^\circ_{(15-10)}$	$\gamma = 0^\circ_{(30-15)}$
0.01	0.9798	0.9797	0.9789	0.98	0.9805
0.02	0.9574	0.9578	0.9568	0.9566	0.9588
0.05	0.8961	0.8964	0.8954	0.8955	0.8974
0.10	0.8064	0.8067	0.8062	0.8058	0.8072
0.20	0.6617	0.6625	0.664	0.6601	0.661
0.30	0.549	0.5504	0.554	0.5462	0.5468
0.40	0.4576	0.4596	0.4635	0.4536	0.4557
0.50	0.3812	0.3837	0.3912	0.3762	0.3762
0.60	0.3148	0.3177	0.3267	0.309	0.3087
0.70	0.2545	0.2576	0.2676	0.2483	0.2476
0.80	0.196	0.1992	0.2095	0.1896	0.1889
0.90	0.1322	0.1352	0.1449	0.1262	0.1255
$\lambda = 2t / D$	$F_{III,(15-10)} / F_{III,B}$ $\gamma = 0^\circ$	$F_{III,(30-15)} / F_{III,B}$ $\gamma = 0^\circ$	$F_{III,B}$	$F_{III,(15-10)} / F_{III,B}$	$F_{III,(30-15)} / F_{III,B}$
0.01	1.01	1.0105	1.0099	1.0001	1.0006
0.02	1.0164	1.0187	1.0194	0.9971	0.9993
0.05	1.0445	1.0467	1.0509	0.9949	0.996
0.10	1.1053	1.1072	1.1145	0.9917	0.9934
0.20	1.2893	1.291	1.2972	0.9939	0.9952
0.30	1.5924	1.5942	1.593	1.000	1.0008
0.40	2.1	2.1097	2.0899	1.0048	1.0095
0.50	3.0096	3.0096	2.9834	1.0088	1.0088
0.60	4.8281	4.8234	4.777	1.0107	1.0097
0.70	9.1693	9.1704	9.09	1.0087	1.0088
0.80	23.7	23.613	23.437	1.0112	1.0075
0.90	126.2	125.5	125	1.0096	1.004

$$F_{III} / F_{III,B} = 1.0009 - 0.19064\lambda + 1.2326\lambda^2 - 2.7484\lambda^3 + 2.7081\lambda^4 - 1.0024\lambda^5, \quad \lambda = 2t / D \quad \dots (4-21)$$

曲げについても同様に，Table 4-6 と Fig. 4-6 は，き裂の結果を Benthem・Koiter の値と比較して示している．曲げの Benthem・Koiter の近似式 (4-22) は誤差 3% 程度であることがわかる．そこで，最小二乗法を用いて正確な近似式を提案した．式 (4-22)，(4-23) は，誤差 0.3% 程度以内で正確な値を与える．

$$F_{I,B} = \frac{3}{8} \xi^{-5/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{8} \xi^2 + \frac{5}{16} \xi^3 + \frac{35}{128} \xi^4 + 0.531 \xi^5 \right\},$$

$$\xi = d / D \quad \dots (4-22)$$

$$F_I / F_{I,B} = 1.0002 - 0.5226\lambda + 3.1062\lambda^2 - 6.7504\lambda^3 + 6.5459\lambda^4 - 2.3794\lambda^5, \quad \lambda = 2t / D \quad \dots (4-23)$$

**4・5・4 疲労試験片における鋭い 60°V 形切欠きの結果** 切欠き半径  $\rho$  の 60°V 形切欠きを有する丸棒は，しばしば疲労試験片として用いられている．

Table 4-6 は，引張りにおける  $2\rho / D = 0.03, 0.05$  の時の  $K_t / K_t|_{\lambda=2t/D \rightarrow 0}$  の値を鋭い場合の結果と比較して示す． $\lambda = 2t / D \leq 0.7$  の範囲の結果は，誤差 1% 以内で一致している．

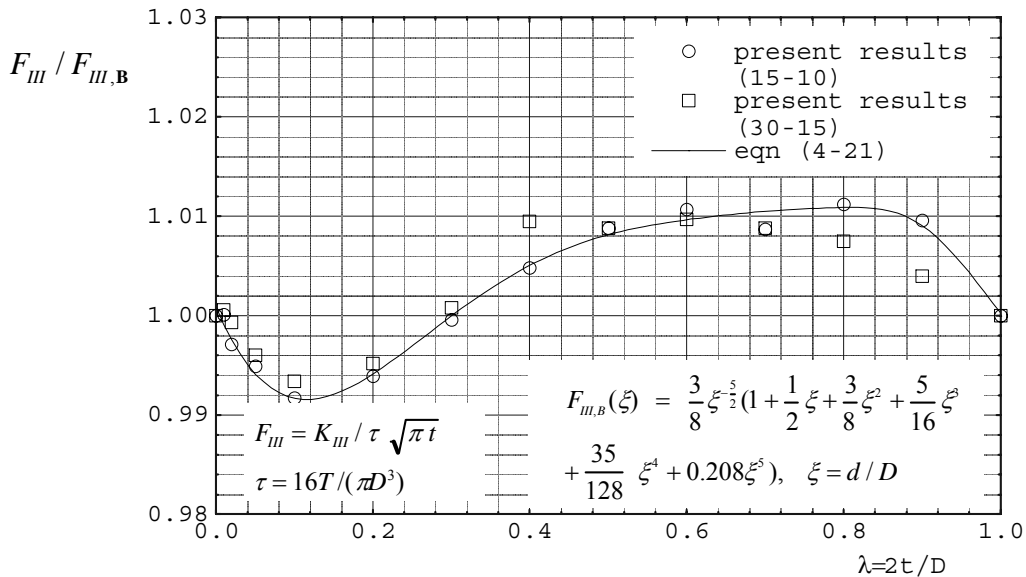
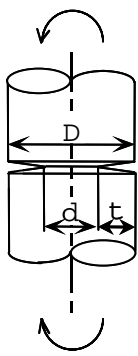


Fig. 4-5  $F_{III} / F_{III,B}$  vs.  $\lambda = 2t / D$  under torsion

Table 4-5 Results of a circumferential crack in a round bar under bending



$\lambda = 2t/D$	$(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda} / F_{I,\lambda}  _{\lambda \rightarrow 0}$		$F_{I,\lambda}  _{\lambda \rightarrow 0}$	$F_{IB}$	$F_I / F_{IF} \text{ (Eqn 4-23)}$
	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$			
0.05	0.869	0.869	1.137	1.158	0.982 (0.981)
0.1	0.765	0.762	1.177	1.211	0.972 (0.973)
0.2	0.608	0.608	1.332	1.363	0.978 (0.976)
0.3	0.495	0.495	1.618	1.643	0.985 (0.988)
0.4	0.408	0.407	2.118	2.117	1.001 (0.999)
0.5	0.337	0.336	3.024	3.000	1.008 (1.006)
0.6	0.276	0.276	4.836	4.800	1.008 (1.010)
0.7	0.222	0.222	9.221	9.100	1.013 (1.013)
0.8	0.170	0.170	23.83	23.45	1.016 (1.016)
0.9	0.113	0.113	126.7	125.0	1.014 (1.014)

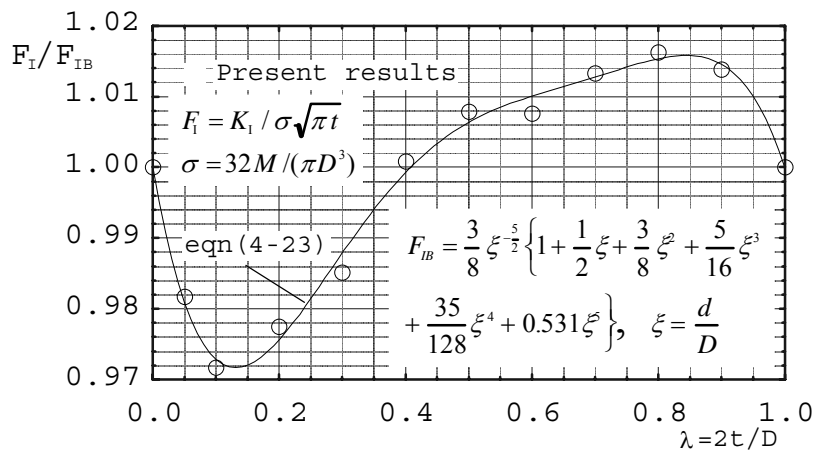
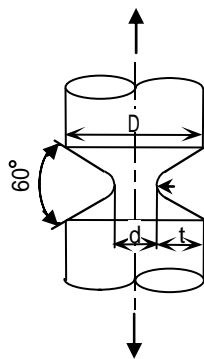


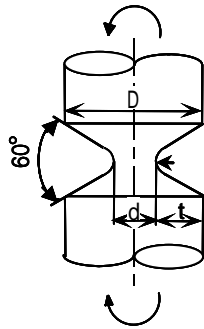
Fig. 4-6  $F_{III} / F_{III,B}$  vs.  $\lambda = 2t / D$  under bending.

Table 4-6  $K_t / K_{ts} (K_{ts} = K_t |_{\lambda \rightarrow 0})$  of a notched bar with a root radius  $\rho$  under tension



$\lambda = 2\rho/D$	0 Table 4-9	0.02 (Nisitani and Noda, 1984)	0.03 (Nisitani and Noda, 1984)
0.02	0.970	0.964	0.968
0.05	0.928	0.923	0.921
0.1	0.854	0.847	0.849
0.2	0.724	0.716	0.717
0.3	0.613	0.608	0.608
0.4	0.519	0.517	0.516
0.5	0.437	0.436	0.435
0.6	0.363	0.363	0.363
0.7	0.294	0.296	0.296
0.8	0.226	0.230	0.232
0.9	0.152	0.160	0.165

Table 4-7  $K_t / K_{ts} (K_{ts} = K_t|_{\lambda \rightarrow 0})$  of a notched bar with a root radius  $\rho$  under bending



$\lambda = \frac{2\rho/D}{2t/D}$	0 Table 4-10	0.03 (Nisitani and Noda, 1984)	0.05 (Nisitani and Noda, 1984)
0.02	0.937	0.937	0.936
0.05	0.867	0.86	0.858
0.10	0.762	0.751	0.753
0.20	0.605	0.597	0.597
0.30	0.492	0.487	0.488
0.40	0.405	0.403	0.405
0.50	0.335	0.337	0.339
0.60	0.276	0.281	0.284
0.90	0.115	0.132	0.143

このことより、切欠き半径が小さい場合の結果から正確な応力拡大係数を推定可能である。Table 4-7 は、曲げの結果を示している。曲げの場合、 $\lambda = 2t/D \leq 0.6$  の範囲の結果は誤差 1% 以内で一致している。

**4・5・5 一般的な 60° V 形切欠きの結果** Fig.4-7 (a), (b), (c) に丸棒ねじり問題の傾き角  $\beta = 0^\circ$  で開き角  $\alpha$  を  $15^\circ - 90^\circ$  まで変化させたときの  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  と切欠き深さ  $2t/D$  の関係を示す。Fig.4-7 (a) より、 $\alpha$  が変化しても、 $2t/D$  が同一であれば、 $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  の値の変化は小さいことがわかる。Fig. 4-7 (b), (c) には、それぞれ  $\alpha = 15^\circ$  (Table 4-8 (A)) と  $\alpha = 90^\circ$  (Table 4-8 (E)) の場合に、 $\beta$  を変化させたときの  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  の値を示す。Fig. 4-7 (b), (c) より  $\alpha = 15^\circ$  の場合 (Fig. 4-7 (b)) では、 $\beta$  の変化に対する  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  の変化はごく小さく、 $\alpha = 90^\circ$  (Fig. 4-7 (c)) の場合においても、その変化は  $\alpha = 15^\circ$  の場合よりはやや大きいものの一般に小さいことがわかる。

Fig. 4-8 (a) に丸棒曲げにおける傾き角  $\beta = 0^\circ$  で開き角  $\alpha$  を  $15^\circ - 90^\circ$  まで変化させたときの  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1}|_{\lambda \rightarrow 0}$  と切欠き深さ  $2t/D$  の関係を示す。4-8 (a) より、 $\alpha$  が変化しても、 $2t/D$  が同一であれば、 $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1}|_{\lambda \rightarrow 0}$  の値の変化は小さいことがわかる。4-8 (b), (c) には、 $\alpha = 15^\circ$  の場合に、 $\beta$  を変化させたときの  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1}|_{\lambda \rightarrow 0}$ ,  $(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda 2} / F_{II,\lambda 2}|_{\lambda \rightarrow 0}$  の値を示す。Fig. 4-8 (b), (c) よ



り  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  の場合 (4-8 (c)) では,  $\beta$  の変化に対する  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  の変化は小さく,  $(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda 2} / F_{II,\lambda 2} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  (4-8 (c)) の場合においても, その変化は小さいことがわかる. 以上述べた通り, Fig.4-7 (a), (b), (c) 4-8 (a), (b), (c) より, 開き角 傾き角  $\beta$  が変化しても, 切欠き深さ  $2t / D$  が同一であれば, 応力拡大係数の相対値  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$ ,  $(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda 2} / F_{II,\lambda 2} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  の変化は一般に小さいことがわかる. これより, 種々の寸法に対する結果を精度よく求めることができる.

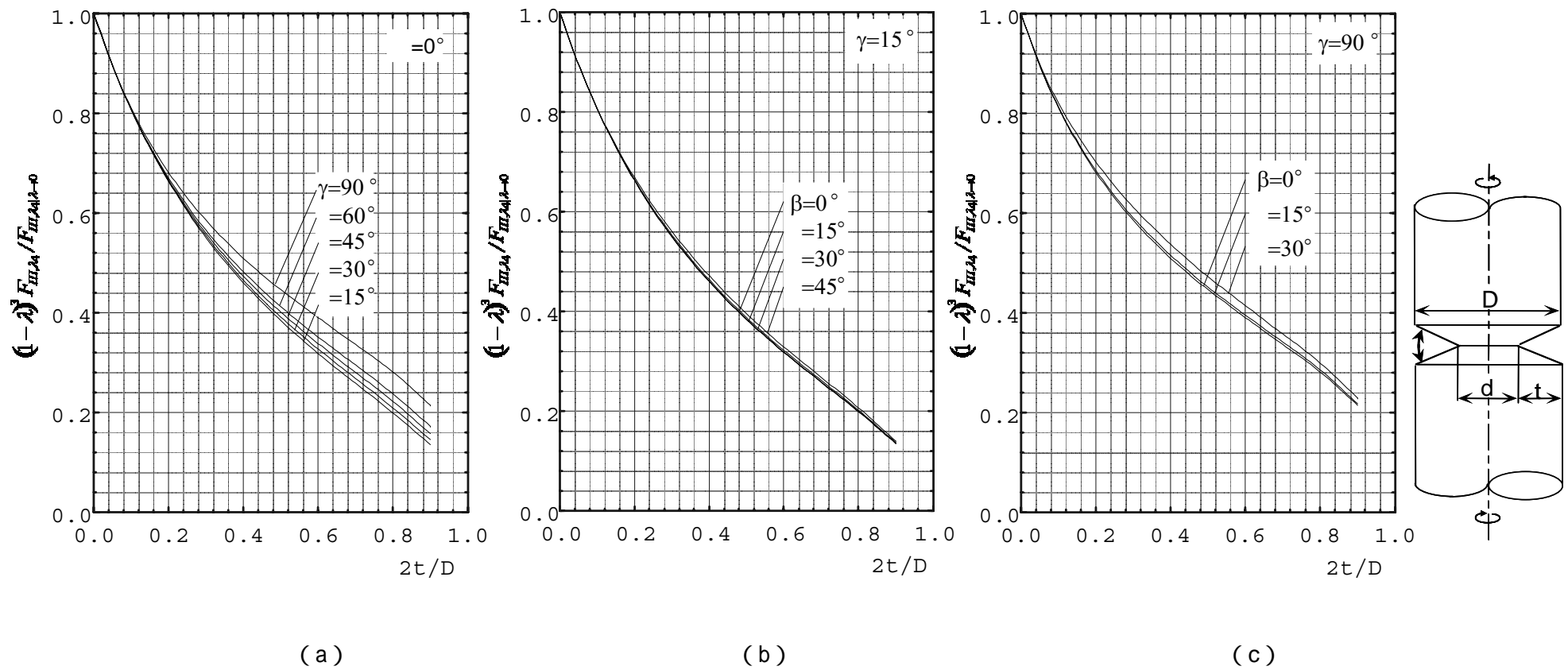


Fig. 4-7 Results of torsion: (a)  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\beta=0^\circ$ , (b)  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\gamma=15^\circ$ , (c)  $(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\gamma=90^\circ$

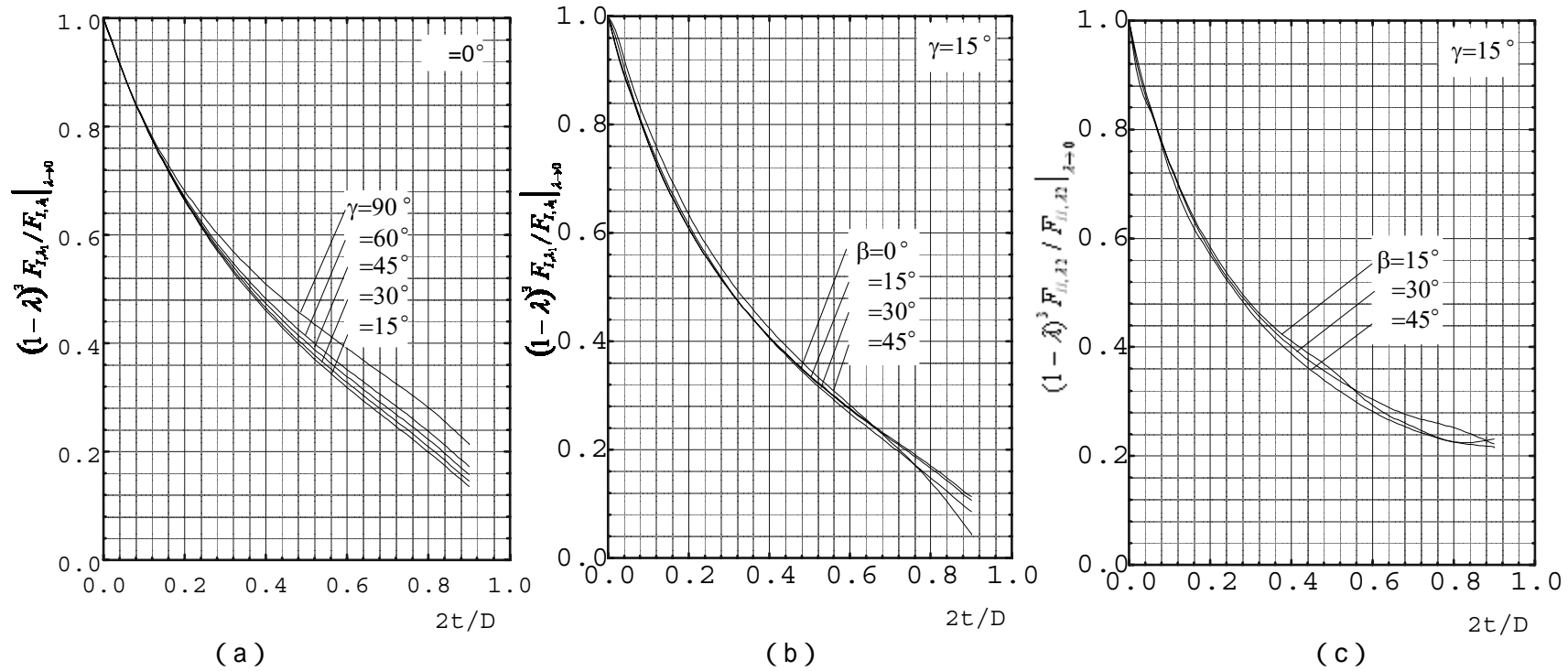


Fig. 4-8 Results of bending: (a)  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda1} / F_{I,\lambda1}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\beta=0^\circ$ , (b)  $(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda1} / F_{I,\lambda1}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\gamma=15^\circ$ , (c)  $(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda2} / F_{II,\lambda2}|_{\lambda \rightarrow 0}$  vs.  $2t/D$  for  $\gamma=15^\circ$

Table 4-8 Results of V-notched bar under torsion: (A)  $\gamma = 15^\circ$ , (B)  $\gamma = 30^\circ$ , (C)  $\gamma = 45^\circ$ , (D)  $\gamma = 60^\circ$ , (E)  $\gamma = 90^\circ$

$\lambda = 2t/D$ $\gamma = 15^\circ$	$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda_4} / F_{III,\lambda_4}  _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.980	0.980	0.979	0.978
0.02	0.958	0.958	0.957	0.956
0.05	0.896	0.896	0.896	0.896
0.10	0.807	0.807	0.807	0.808
0.20	0.663	0.663	0.665	0.669
0.30	0.550	0.551	0.554	0.561
0.40	0.460	0.461	0.464	0.472
0.50	0.384	0.385	0.388	0.396
0.60	0.318	0.319	0.322	0.329
0.70	0.258	0.259	0.262	0.268
0.80	0.199	0.200	0.202	0.207
0.90	0.135	0.136	0.137	0.140
$\gamma = 30^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.979	0.979	0.979	0.979
0.02	0.957	0.957	0.957	0.957
0.05	0.895	0.895	0.896	0.897
0.10	0.806	0.806	0.808	0.811
0.20	0.664	0.665	0.668	0.675
0.30	0.554	0.555	0.560	0.570
0.40	0.465	0.467	0.472	0.483
0.50	0.391	0.393	0.398	0.409
0.60	0.327	0.328	0.333	0.343
0.70	0.268	0.269	0.273	0.281
0.80	0.209	0.210	0.214	0.221
0.90	0.145	0.146	0.148	0.153

(Continued on next page)

Table 4-8 ( Continued )

$\lambda = 2t / D$ $\gamma = 45^\circ$	$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda_4} / F_{III,\lambda_4}  _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.979	0.979	0.978	0.978
0.02	0.956	0.956	0.956	0.957
0.05	0.895	0.897	0.895	0.897
0.10	0.807	0.807	0.808	0.814
0.20	0.666	0.668	0.672	0.683
0.30	0.559	0.561	0.567	0.582
0.40	0.473	0.475	0.482	0.498
0.50	0.401	0.403	0.410	0.425
0.60	0.338	0.340	0.346	0.360
0.70	0.280	0.281	0.287	0.299
0.80	0.222	0.233	0.228	0.238
0.90	0.157	0.158	0.161	0.168
$\gamma = 60^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.978	0.978	0.978	0.978
0.02	0.956	0.956	0.956	0.957
0.05	0.895	0.895	0.896	0.899
0.10	0.807	0.808	0.811	0.819
0.20	0.670	0.671	0.678	0.696
0.30	0.565	0.568	0.577	0.600
0.40	0.482	0.485	0.495	0.519
0.50	0.412	0.415	0.425	0.448
0.60	0.351	0.354	0.363	0.383
0.70	0.295	0.297	0.305	0.322
0.80	0.237	0.239	0.246	0.260
0.90	0.172	0.173	0.178	0.188

( Continued on next page )

Table 4-8 (Continued)

$\lambda = 2t/D$ $\gamma = 90^\circ$	$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda_4} / F_{III,\lambda_4}  _{\lambda \rightarrow 0}$		
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$
0	1.000	1.000	1.000
0.01	0.977	0.977	0.977
0.02	0.955	0.955	0.956
0.05	0.895	0.895	0.898
0.10	0.810	0.812	0.820
0.20	0.681	0.685	0.702
0.30	0.585	0.590	0.611
0.40	0.509	0.515	0.537
0.50	0.446	0.451	0.472
0.60	0.390	0.395	0.414
0.70	0.336	0.341	0.357
0.80	0.281	0.258	0.299
0.90	0.214	0.217	0.228

Table 4-9 Results of V-notched bar under tension: (A)  $\gamma = 15^\circ$ , (B)  $\gamma = 30^\circ$ ,  
 (C)  $\gamma = 45^\circ$ , (D)  $\gamma = 60^\circ$ , (E)  $\gamma = 90^\circ$

$\lambda = 2t/D$	$(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda_1} / F_{I,\lambda_1}  _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda_2} / F_{II,\lambda_2}  _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
$\gamma = 15^\circ$								
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.987	0.990	0.995	1.002	0.000	0.970	0.966	0.967
0.02	0.973	0.975	0.982	0.989	0.000	0.955	0.950	0.952
0.05	0.930	0.933	0.939	0.948	0.000	0.907	0.905	0.904
0.10	0.857	0.858	0.862	0.867	0.000	0.844	0.840	0.840
0.20	0.725	0.726	0.727	0.727	0.000	0.720	0.719	0.723
0.30	0.613	0.613	0.612	0.605	0.000	0.622	0.624	0.633
0.40	0.518	0.518	0.514	0.504	0.000	0.543	0.543	0.555
0.50	0.436	0.435	0.429	0.419	0.000	0.468	0.471	0.483
0.60	0.362	0.360	0.354	0.346	0.000	0.398	0.400	0.413
0.70	0.293	0.291	0.286	0.279	0.000	0.328	0.331	0.343
0.80	0.225	0.223	0.219	0.214	0.000	0.256	0.260	0.271
0.90	0.150	0.149	0.146	0.143	0.000	0.176	0.180	0.189
$\gamma = 30^\circ$								
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.984	0.987	0.992	1.000	0.000	0.985	0.980	0.972
0.02	0.972	0.976	0.980	0.988	0.000	0.969	0.965	0.958
0.05	0.930	0.934	0.938	0.947	0.000	0.919	0.918	0.911
0.10	0.856	0.860	0.861	0.868	0.000	0.847	0.845	0.842
0.20	0.725	0.728	0.729	0.733	0.000	0.719	0.719	0.719
0.30	0.614	0.617	0.615	0.617	0.000	0.614	0.617	0.621
0.40	0.519	0.519	0.518	0.520	0.000	0.528	0.531	0.540
0.50	0.437	0.436	0.435	0.436	0.000	0.451	0.454	0.467
0.60	0.363	0.362	0.361	0.363	0.000	0.378	0.384	0.402
0.70	0.293	0.293	0.293	0.294	0.000	0.310	0.317	0.339
0.80	0.225	0.225	0.225	0.226	0.000	0.242	0.252	0.274
0.90	0.151	0.151	0.151	0.151	0.000	0.170	0.181	0.199
$\gamma = 45^\circ$								
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.982	0.984	0.985	1.001	0.000	0.984	0.978	0.980
0.02	0.971	0.972	0.975	0.998	0.000	0.968	0.965	0.972
0.05	0.929	0.930	0.933	0.939	0.000	0.920	0.918	0.914
0.10	0.855	0.856	0.858	0.863	0.000	0.848	0.845	0.841
0.20	0.725	0.725	0.727	0.735	0.000	0.717	0.714	0.715
0.30	0.614	0.614	0.616	0.627	0.000	0.610	0.608	0.613
0.40	0.519	0.520	0.522	0.535	0.000	0.516	0.518	0.530
0.50	0.437	0.437	0.440	0.455	0.000	0.434	0.438	0.461
0.60	0.363	0.364	0.368	0.382	0.000	0.360	0.368	0.400
0.70	0.294	0.295	0.299	0.312	0.000	0.292	0.306	0.343
0.80	0.225	0.227	0.231	0.241	0.000	0.230	0.248	0.285
0.90	0.151	0.152	0.155	0.162	0.000	0.168	0.185	0.216

(Continued on next page)

Table 4-9 (Continued)

$\lambda = 2t/D$ $\gamma = 60^\circ$	$(1 - \lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1 - \lambda)^3 F_{II,\lambda 2} / F_{II,\lambda 2} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000
0.01	0.983	0.983	0.984	0.990	0.000	0.992	0.983	0.982
0.02	0.970	0.972	0.971	0.978	0.000	0.972	0.967	0.966
0.05	0.928	0.929	0.931	0.936	0.000	0.930	0.917	0.916
0.10	0.854	0.855	0.857	0.864	0.000	0.847	0.842	0.842
0.20	0.724	0.729	0.731	0.745	0.000	0.707	0.703	0.715
0.30	0.613	0.608	0.613	0.646	0.000	0.600	0.597	0.615
0.40	0.519	0.516	0.523	0.562	0.000	0.502	0.505	0.536
0.50	0.437	0.436	0.446	0.485	0.000	0.417	0.426	0.470
0.60	0.363	0.364	0.375	0.411	0.000	0.342	0.359	0.414
0.70	0.294	0.296	0.308	0.337	0.000	0.278	0.303	0.361
0.80	0.226	0.229	0.240	0.262	0.000	0.224	0.252	0.309
0.90	0.152	0.155	0.162	0.178	0.000	0.172	0.198	0.247
$\gamma = 90^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$		$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	
0	1.000	1.000	1.000		0.000	1.000	1.000	
0.01	0.985	0.985	0.983		0.000	0.984	0.982	
0.02	0.971	0.972	0.971		0.000	0.970	0.967	
0.05	0.927	0.928	0.928		0.000	0.921	0.919	
0.10	0.852	0.854	0.856		0.000	0.843	0.840	
0.20	0.722	0.724	0.736		0.000	0.701	0.703	
0.30	0.612	0.616	0.640		0.000	0.578	0.591	
0.40	0.518	0.525	0.558		0.000	0.472	0.503	
0.50	0.434	0.446	0.485		0.000	0.385	0.434	
0.60	0.365	0.375	0.414		0.000	0.320	0.382	
0.70	0.298	0.309	0.345		0.000	0.276	0.341	
0.80	0.233	0.242	0.273		0.000	0.248	0.310	
0.90	0.161	0.168	0.189		0.000	0.229	0.282	



Table 4-10 Results of V-notched bar under bending: (A)  $\gamma=15^\circ$ , (B)  $\gamma=30^\circ$ , (C)  $\gamma=45^\circ$ , (D)  $\gamma=60^\circ$ , (E)  $\gamma=90^\circ$

$\lambda = 2t/D$	$(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda_1} / F_{I,\lambda_1}  _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda_2} / F_{II,\lambda_2}  _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda_3} / F_{III,\lambda_3}  _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
$\gamma = 15^\circ$												
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.206	0.381	0.484
0.02	0.940	0.944	0.959	0.971	0.000	0.932	0.921	0.904	0.000	0.205	0.375	0.485
0.05	0.869	0.872	0.879	0.896	0.000	0.849	0.843	0.839	0.000	0.207	0.378	0.485
0.10	0.765	0.767	0.772	0.794	0.000	0.739	0.737	0.725	0.000	0.229	0.416	0.534
0.20	0.608	0.609	0.615	0.634	0.000	0.584	0.577	0.570	0.000	0.278	0.505	0.644
0.30	0.495	0.495	0.497	0.515	0.000	0.480	0.474	0.465	0.000	0.370	0.670	0.848
0.40	0.408	0.407	0.406	0.424	0.000	0.411	0.401	0.388	0.000	0.539	0.982	1.236
0.50	0.337	0.335	0.331	0.348	0.000	0.358	0.347	0.329	0.000	0.895	1.645	2.062
0.60	0.276	0.274	0.267	0.282	0.000	0.293	0.304	0.282	0.000	1.833	3.400	4.270
0.70	0.222	0.219	0.208	0.215	0.000	0.254	0.272	0.248	0.000	5.478	10.27	13.11
0.80	0.170	0.166	0.148	0.140	0.000	0.226	0.252	0.226	0.000	44.77	79.38	100.7
0.90	0.113	0.106	0.085	0.045	0.000	0.231	0.222	0.217				
$\gamma = 30^\circ$												
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.264	0.479	0.609
0.02	0.938	0.945	0.954	0.964	0.000	0.932	0.927	0.925	0.000	0.254	0.461	0.583
0.05	0.869	0.873	0.874	0.890	0.000	0.854	0.855	0.845	0.000	0.247	0.454	0.573
0.10	0.762	0.768	0.769	0.787	0.000	0.742	0.742	0.733	0.000	0.264	0.486	0.615
0.20	0.608	0.611	0.614	0.632	0.000	0.579	0.577	0.573	0.000	0.313	0.574	0.731
0.30	0.495	0.497	0.500	0.520	0.000	0.462	0.465	0.466	0.000	0.393	0.743	0.958
0.40	0.407	0.410	0.412	0.431	0.000	0.378	0.386	0.391	0.000	0.538	1.076	1.399
0.50	0.336	0.339	0.339	0.357	0.000	0.304	0.327	0.334	0.000	0.827	1.798	2.361
0.60	0.276	0.279	0.277	0.289	0.000	0.241	0.282	0.291	0.000	1.518	3.734	4.996
0.70	0.222	0.225	0.219	0.219	0.000	0.181	0.249	0.262	0.000	3.770	11.72	15.82
0.80	0.170	0.174	0.159	0.139	0.000	0.117	0.231	0.248	0.000	12.33	100.4	130.5
0.90	0.113	0.120	0.087	0.035	0.000	0.020	0.242	0.257				

(Continued on next page)

Table 4-10 (Continued)

$\lambda = 2t / D$	$(1-\lambda)^3 F_{I,\lambda_1} / F_{I,\lambda_1}  _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1-\lambda)^3 F_{II,\lambda_2} / F_{II,\lambda_2}  _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1-\lambda)^3 F_{III,\lambda_3} / F_{III,\lambda_3}  _{\lambda \rightarrow 0}$			
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$
$\gamma = 45^\circ$												
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.360	0.645	0.797
0.02	0.937	0.939	0.942	0.951	0.000	0.932	0.928	0.929	0.000	0.334	0.599	0.737
0.05	0.868	0.869	0.871	0.882	0.000	0.854	0.851	0.846	0.000	0.319	0.573	0.706
0.10	0.763	0.764	0.767	0.781	0.000	0.739	0.735	0.733	0.000	0.330	0.594	0.740
0.20	0.607	0.608	0.613	0.634	0.000	0.569	0.569	0.574	0.000	0.371	0.684	0.873
0.30	0.493	0.496	0.502	0.526	0.000	0.444	0.454	0.470	0.000	0.452	0.870	1.144
0.40	0.406	0.410	0.417	0.441	0.000	0.348	0.371	0.398	0.000	0.616	1.242	1.688
0.50	0.336	0.340	0.348	0.365	0.000	0.272	0.309	0.346	0.000	0.987	2.063	2.901
0.60	0.276	0.281	0.288	0.294	0.000	0.209	0.260	0.310	0.000	1.994	4.239	6.263
0.70	0.222	0.228	0.232	0.221	0.000	0.156	0.223	0.286	0.000	6.706	13.25	20.17
0.80	0.170	0.176	0.175	0.140	0.000	0.105	0.197	0.276	0.000	59.94	112.5	168.6
0.90	0.114	0.119	0.106	0.038	0.000	0.055	0.195	0.291				
$\gamma = 60^\circ$												
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.538	0.949	1.124
0.02	0.937	0.935	0.938	0.946	0.000	0.933	0.933	0.932	0.000	0.480	0.842	1.002
0.05	0.867	0.868	0.870	0.880	0.000	0.854	0.850	0.848	0.000	0.444	0.783	0.933
0.10	0.762	0.762	0.766	0.784	0.000	0.735	0.733	0.736	0.000	0.439	0.782	0.959
0.20	0.605	0.608	0.616	0.648	0.000	0.560	0.562	0.581	0.000	0.484	0.878	1.126
0.30	0.492	0.496	0.508	0.546	0.000	0.435	0.447	0.482	0.000	0.594	1.100	1.472
0.40	0.405	0.410	0.427	0.464	0.000	0.342	0.360	0.413	0.000	0.864	1.559	2.172
0.50	0.335	0.341	0.361	0.390	0.000	0.278	0.296	0.362	0.000	1.470	2.546	3.718
0.60	0.276	0.281	0.302	0.320	0.000	0.237	0.245	0.325	0.000	3.402	5.069	7.896
0.70	0.222	0.226	0.249	0.251	0.000	0.215	0.200	0.298	0.000	13.10	14.37	24.41
0.80	0.171	0.173	0.196	0.178	0.000	0.214	0.157	0.277	0.000	137.7	88.20	178.8
0.90	0.115	0.112	0.131	0.098	0.000	0.269	0.131	0.258				

(Continued on next page)

Table 4-10 (Continued)

$\lambda = 2t/D$	$(1 - \lambda)^3 F_{I,\lambda 1} / F_{I,\lambda 1} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1 - \lambda)^3 F_{II,\lambda 2} / F_{II,\lambda 2} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$				$(1 - \lambda)^3 F_{III,\lambda 4} / F_{III,\lambda 4} \Big _{\lambda \rightarrow 0}$		
	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 0^\circ$	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 30^\circ$
0	1.000	1.000	1.000		0.000	1.000	1.000				
0.02	0.940	0.940	0.938		0.000	0.932	0.930		0.000	2.399	3.996
0.05	0.866	0.867	0.869		0.000	0.843	0.844		0.000	1.918	3.202
0.10	0.759	0.761	0.771		0.000	0.720	0.725		0.000	1.629	2.733
0.20	0.601	0.607	0.634		0.000	0.540	0.560		0.000	1.476	2.543
0.30	0.490	0.498	0.534		0.000	0.427	0.458		0.000	1.580	2.825
0.40	0.405	0.414	0.452		0.000	0.367	0.397		0.000	2.004	3.625
0.50	0.338	0.346	0.383		0.000	0.342	0.360		0.000	3.067	5.391
0.60	0.281	0.286	0.321		0.000	0.341	0.335		0.000	5.735	9.378
0.70	0.230	0.233	0.264		0.000	0.350	0.312		0.000	13.48	20.03
0.80	0.179	0.181	0.210		0.000	0.355	0.285		0.000	44.82	59.96
0.90	0.124	0.126	0.146		0.000	0.312	0.260		0.000	307.6	401.4

#### 4.6 結 言

60°V 切欠きの曲率半径がゼロの鋭い切欠きでは，応力集中は無限大になるので解析が困難となる．このことが，任意の寸法  $\rho, t$  に対して適用可能な応力集中係数の計算式を提案するため問題となる．

本章では，体積力法の特異積分方程式を利用して鋭い V 形切欠きを有する丸棒引張り，曲げ，ねじりの特異応力場の強さ  $K_{I, \lambda_1}, K_{II, \lambda_2}, K_{III, \lambda_4}$  を開き角  $\alpha$ ，傾き角  $\beta$ ，切欠き深さ  $\lambda$  を変化させ解析した．その結果，以下のような結論が得られた．

(1) 体積力法の特異積分方程式の数値解析として，境界をいくつかの基本区間に分割し，それぞれの基本区間で体積力密度（未知関数）を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を検討した．その結果，解析した範囲で，有効数字 3-5 桁程度収束した結果が得られ，解法の有効性が確認された．

(2) Table 4-8-10 より，無次元化した  $(1-\lambda)^3 F_{III, \lambda 4} / F_{III, \lambda 4} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$ ， $(1-\lambda)^2 F_{I, \lambda 1} / F_{I, \lambda 1} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$ ， $(1-\lambda)^3 F_{II, \lambda 2} / F_{II, \lambda 2} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  の値は切欠きの開き角  $\alpha$  と傾き角  $\beta$  が変化しても切欠き深さ  $\lambda$  が同一であれば変化は小さい．その結果，これらの無次元化した値より全形状の応力拡大係数を推定可能である．

(3) 円周き裂を有する丸棒曲げの Benthem・Koiter の近似式の誤差は 3%以下である．本論文に提案した近似式は，誤差 0.3%程度以内で評価できる．

(4) 切欠き半径  $\rho$  の 60°V 形切欠きを有する丸棒は，しばしば疲労試験片として用いられている．引張りにおける  $2\rho/D = 0.03, 0.05$  の時の  $K_t / K_t \Big|_{\lambda=2\rho/D \rightarrow 0}$  の値と鋭い場合の結果は， $\lambda = 2t/D \leq 0.7$  の範囲で誤差 1%以内で一致している．その結果，切欠き半径が小さい場合の結果から正確な応力拡大係数を推定可能である．

#### 参考文献

- (1) 村上敬宜，野田尚昭，西谷弘信，体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析（第 3 報，V 形および U 形切欠きを有する丸棒の曲げ），日本機械学会論文集，48-430，A (1982)，800-809．
- (2) 西谷弘信，野田尚昭，半だ円および 60°V 形切欠きを有する丸棒のねじりにおける応力集中，日本機械学会論文集，50-457，A (1984)，1592-1599．
- (3) 西谷弘信，野田尚昭，60°V 形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察，日本機械学会論文集，51-461，A (1985)，54-62．
- (4) 野田尚昭，西谷弘信，深迫 泉，原田昭治，両縁に 60°V 形または円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げ，日本機械学会論文集，51-465，A (1985)，1467-1470．
- (5) 野田尚昭，西谷弘信，深迫 泉，原田昭治，両縁に 60°V 形または円弧形切欠き

- を有する帯板の引張り, 日本機械学会論文集, 51-467, A (1985), 1804-1810.
- (6) 野田尚昭, 西谷弘信, 高瀬 康, 篠崎正孝, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (鋭い  $60^\circ V$  形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片), 日本機械学会論文集, 63-613, A (1997-9), 1926-1931.
- (7) 野田尚昭, 高瀬 康, 門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-7, (1996), 757-762.
- (8) M.L.Williams, Surface Stress Singularity Result in from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending, Proc., 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., (1951), pp. 325-329.
- (9) M.L.Williams, Stress Singularity Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol. 19, No.4 (1952), pp. 526-528.
- (10) D.B. Bogy, Stress Singularity at Interface Corners in Bonded Dissimilar Isotropic Elastic Material, Int. J. Solids Structures, Vol. 7, No. 8 (1971), pp.993-1005.
- (11) 陳玳珩, 西谷弘信, 接合異材の角部近傍での応力場, 日本機械学会論文集, 57 534, A (1991), 366-372.
- (12) 陳玳珩, 西谷弘信, 面外せん断を受ける接合異材の特異応力場, 日本機械学会論文集, 57 542, A (1991), 2499-2503.
- (13) 西谷弘信・陳玳珩・柴戸明, 面外せん断による菱形介在物角部の特異応力場, 日本機械学会論文集, 59-561, A (1993), 1191-1195.
- (14) 陳玳珩・西谷弘信, 接合異材の角部の特異応力場について, 日本機械学会論文集, 57-542, A (1991), 2509-2515; 陳玳珩・西谷弘信, 介在物角部における特異応力場の数値解析, 日本機械学会論文集, 57-534, A (1991), 2504-2508.
- (15) 野田尚昭・川島裕二・小田和広, 特異積分方程式による菱形介在物の干渉効果の解析, 日本機械学会論文集, 62-598, A (1996), 1456-1463; 野田尚昭・川島裕二・森山伸也・小田和広, 任意個の一系列菱形介在物の干渉効果の解析, 日本機械学会論文集, 62-600, A (1996), 1870-1876.
- (16) 陳玳珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力の場の強さ解析 (第1報, 解析方法), 日本機械学会論文集, 58-554, A (1992), 1834-1838 ; (第2報, 計算結果), 日本機械学会論文集, 58-555, A (1992), 2153-2158.
- (17) 陳玳珩・岩本 哲, 繊維の干渉効果, 機講論, No.930-63, A (1993-10), 245-246.

- (18) 野田尚昭・王清・上村仁誉・川島裕二，特異積分方程式による長方形介在物の干渉効果の解析，日本機械学会論文集，63-612，A (1997)，1663-1668；野田尚昭，陳夢成，高瀬康，今橋智則，2個の長方形介在物の干渉における介在物角部の応力拡大係数の解析，材料，48-11，(1999)，1269-1274。
- (19) 西谷弘信・陳玳珩・柴戸明，ring 状介在物を有する無限体がねじり荷重を受けるときの特異応力場，日本機械学会論文集，59-568，A (1993)，2872-2876。
- (20) 野田尚昭・王清・諸富貴光，円柱状介在物端部の特異応力場の強さ解析，日本機械学会論文集，63-612，A (1997)，1701-1706。
- (21) 野田尚昭・現海孝雄・熊谷雄一郎，円柱状介在物端部の非軸対称一軸引張りにおける特異応力場の強さ解析，日本機械学会論文集，66-644，A (2000)，735-740。
- (22) Chen, D.H., Stress intensity factors for V-notched strip under tension and in-plane bending, *Int. J. Fract.*, 70, (1995), 81-97.
- (23) 陳玳珩・野田尚昭・高瀬康・諸富貴光，角部の応力拡大係数を用いた強度評価法，日本機械学会論文集，62-598，A (1996)，1445-1449。
- (24) 野田尚昭・陳玳珩・高瀬康・諸富貴光，混合モード破壊における角部の応力拡大係数を用いた強度評価法，日本機械学会論文集，64-620，A (1998)，958-963。
- (25) 陳玳珩・野田尚昭，切欠先端の破壊のクライテリオンに関する一考察，日本機械学会論文集，64-626，A (1998)，2574-2582。
- (26) Nisitani, H. and Noda, N.-A., Stress concentration of a cylindrical bar with a V-shaped circumferential groove under torsion, tension or bending, *Engng. Frac. Mech.*, 20 (1984), pp.743-766.
- (27) 陳玳珩・西谷弘信，半無限板のV形切欠き先端における特異応力場，日本機械学会論文集，57-538，A (1991)，1406-1411。
- (28) Benthem, J. P. and Koiter, W. T., *Mechanics of Fracture*, edited by Sih, G. C., Noordhoff Int. Pub.1, (1973), 173.

## 第5章 切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

### 5.1 丸棒引張り，曲げ，ねじりの応力集中係数の性質について

本章では，2，3章において作製した切欠きが浅い場合や深い場合の近似式および体積力法の解析結果を基に丸棒引張，曲げ，ねじり問題において物理的考察を行い，Fig.5-1 に示すような切欠き半径  $\rho$  が極端に大きい円弧形切欠き，及び切欠き半径が極端に小さい  $60^\circ$  V 形切欠きを含めた，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案する．そこで，前章までに述べた以下の点を利用する．

**鋭い切欠きまたは浅い切欠きの応力集中係数** 切欠きが鋭いかまたは切欠き半径  $\rho$  が小さい  $60^\circ$  V 形切欠きに対する応力集中係数  $K_t$  は，同一形状比  $t/\rho$  の V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  より精度良く求めることができる[1]．鋭い切欠きについては，4章で述べている．

**鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数** 切欠き半径  $\rho$  が大きく深い切欠きに対する応力集中係数  $K_t$  は，深い双曲線切欠きの解  $K_{td}$  より精度良く求めることができる．

以上の議論から，切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるための適用範囲を丸棒引張り，曲げ，ねじりについて Fig. 5-2,3,4 に示す．これらの図より，浅い

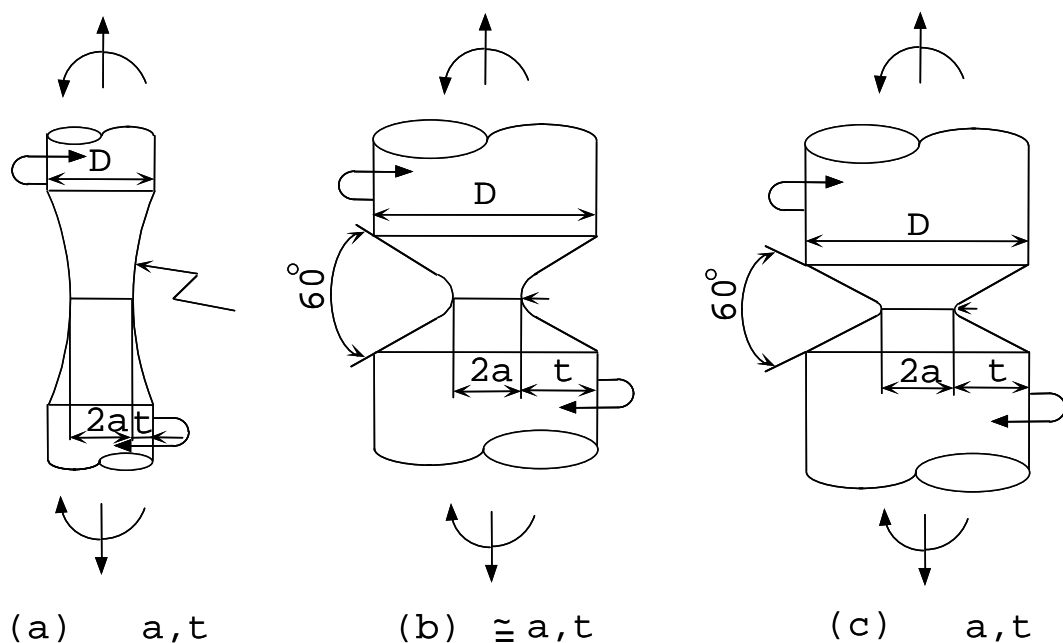


Fig. 5-1 Round specimens with a V-shaped notch

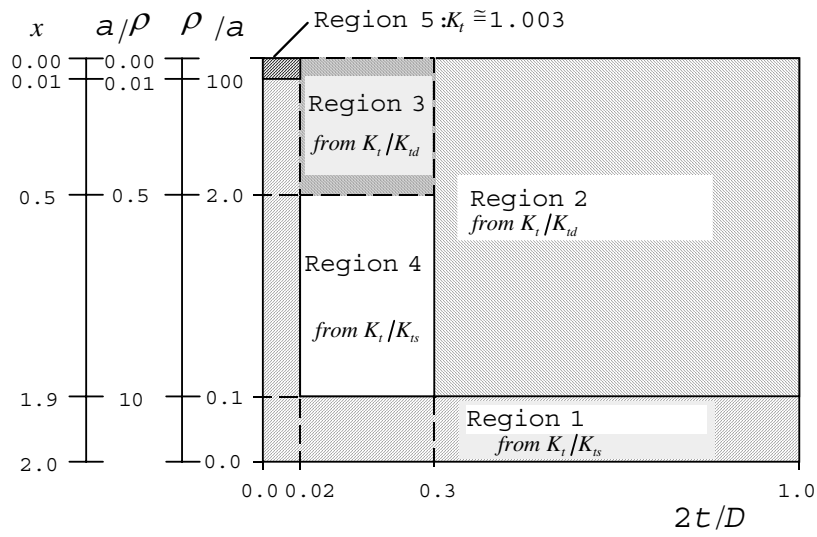


Fig. 5-2 Classification of notch shape when round bar under tension

- Region 1: Sharp or Shallow notch
- Region 2: Deep notch
- Region 3: Blunt notch
- Region 4: Other notch
- Region 5:  $K_t \approx 1.003$

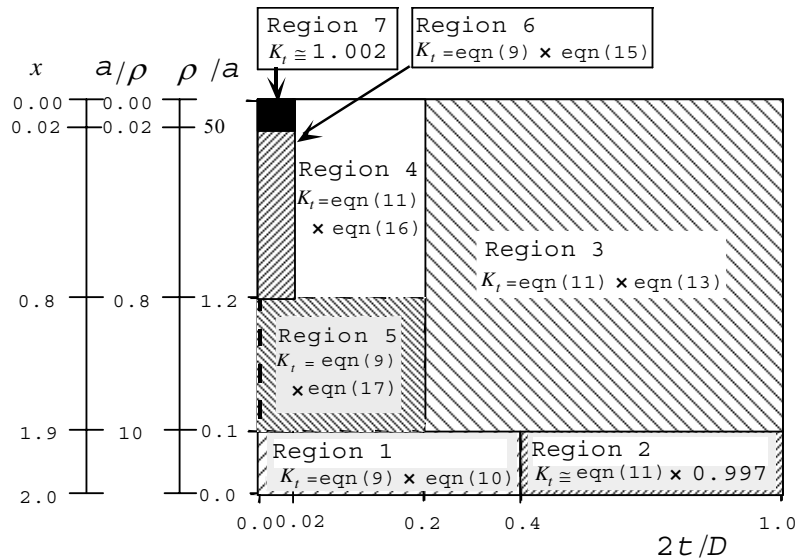


Fig. 5-3 Classification of notch shape when round bar under bending

- Region 1: Sharp and Shallow notch
- Region 2: Sharp and Deep notch
- Region 3: Deep notch
- Region 4: Blunt notch
- Region 5: Ordinary notch
- Region 6: Shallow notch
- Region 7: Blunt and Shallow notch



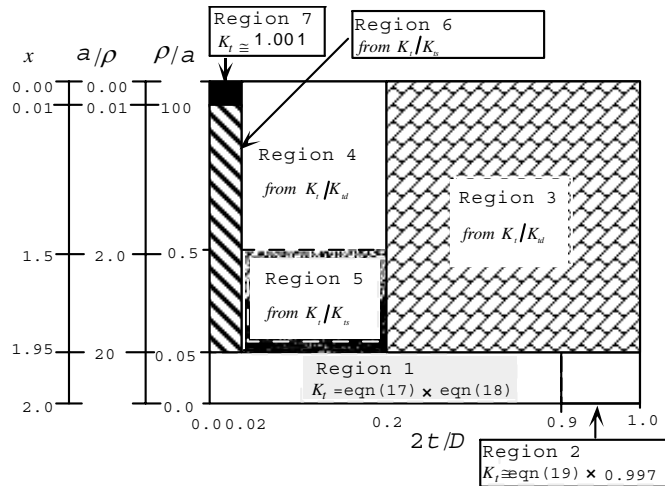


Fig. 5-4 Classification of notch shape when round bar under torsion

- Region 1: Sharp and Shallow notch
- Region 2: Sharp and Deep notch
- Region 3: Deep notch
- Region 4: Blunt notch
- Region 5: Ordinary notch
- Region 6: Shallow notch
- Region 7: Blunt and Shallow notch

切欠きの解  $K_{ts}$  の適用範囲は、引張り、曲げ、ねじりの順に大きくなっており、深い切欠きの解  $K_{td}$  の適用範囲は、逆に引張り、曲げ、ねじりの順に小さくなっていることがわかる。また、その時必要となる線図と近似式を各々の問題についてまとめて以下に示す。

## 5.2 丸棒引張りの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

5・2・1 半無限板の  $60^\circ V$  形切欠きまたは円弧形状切欠きの  $K_{ts}$  [2] (Fig. 5-1 で、 $t$  が有限で  $d, D$  のとき  $K_t, K_{ts}$ )

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \quad \dots \dots \dots (5-1.a)$$

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \quad \dots \dots \dots (5-1.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots \dots (5-1.c)$$

Fig. 5-5 (a) に、式 (5-1) の  $K_{ts} / K_{tE}$  の値を図示する。

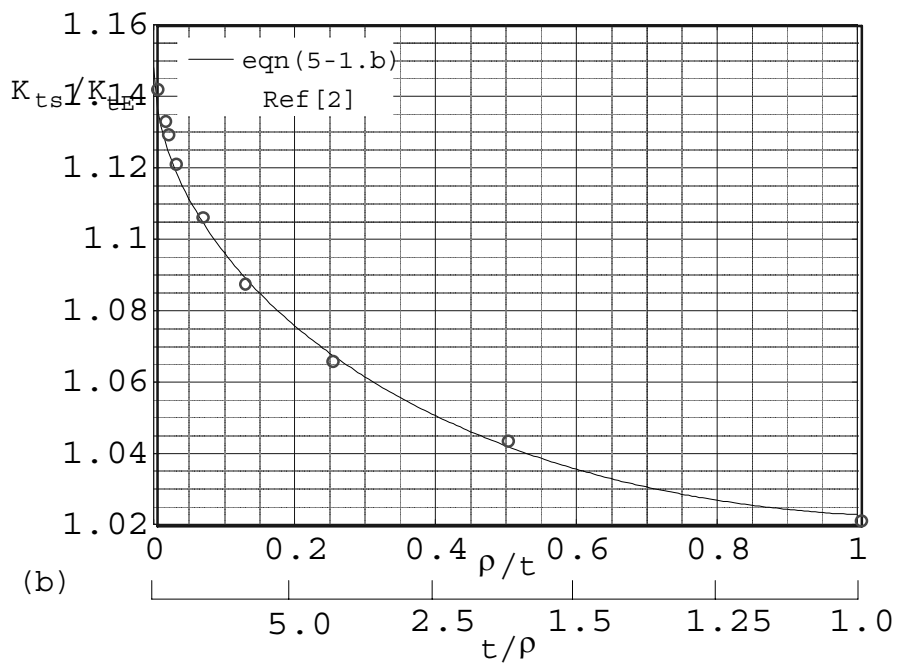
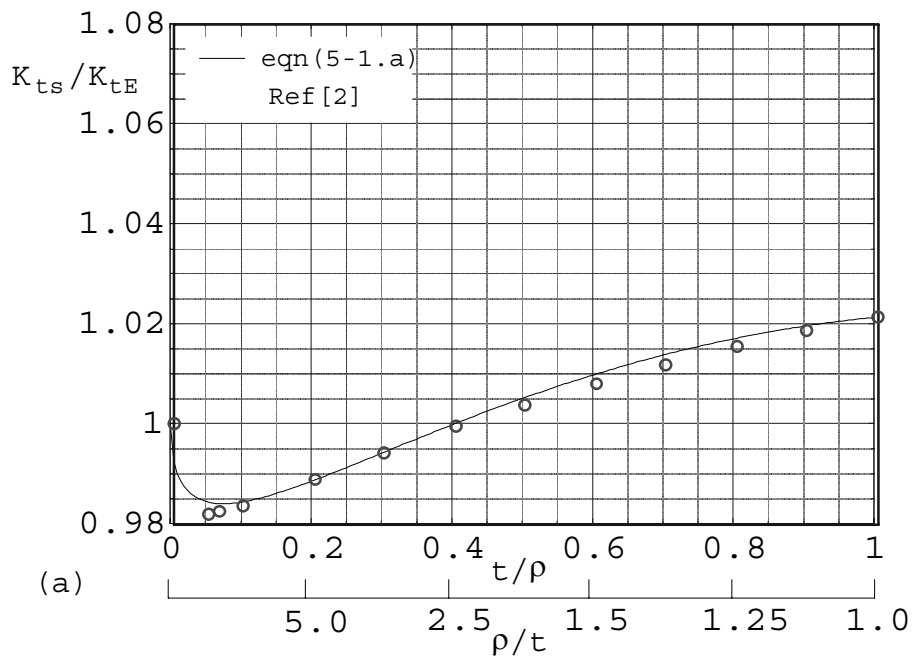


Fig. 5-5 (a) and (b)  $K_{ts}/K_{tE}$  vs.  $\rho/t$  or  $t/\rho$

5・2・2 鋭い切欠きまたは浅い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-2 の領域 1 :  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.8 または  $a/\rho$  0.01 かつ  $2t/D$  0.02)

$$\begin{aligned}
K_t / K_{ts} \Big|_{a/\rho \rightarrow 0.0} &= 0.99981 - 1.5611\lambda - 2.0531\lambda^2 + 31.554\lambda^3 \\
&\quad - 137.39\lambda^4 + 313.02\lambda^5 - 395.19\lambda^6 + 261.31\lambda^7 \\
&\quad - 70.691\lambda^8 \quad \dots \dots \dots (5-2)
\end{aligned}$$

Fig. 5-6 に , 式 (5-2) の  $K_t / K_{ts}$  の値を図示する .

5・2・3 鈍く浅い切欠きの  $K_t$  ( Fig. 5-2 の領域 6 :  $a/\rho = 0.01$  かつ  $2t/D = 0.02$  )

$$K_t \cong 1.003 \quad \dots \dots \dots (5-3)$$

5・2・4 深い 60°V 形切欠きの  $K_{td}$  ( Fig. 5-1 で a,  $\rho$  が有限で t のとき  $K_t$   $K_{td}$  )

$$K_{td} / K_{tH} = 1.0011 - 0.025485\chi + 0.015727\chi^2 + 0.006131\chi^3 \quad \dots \dots \dots (5-4.a)$$

$$\begin{aligned}
K_{tH} &= (1/N) \left\{ (a/\rho) \sqrt{a/\rho + 1} + (0.5 + \nu)(a/\rho) \right. \\
&\quad \left. + (1 + \nu)(\sqrt{a/\rho + 1} + 1) \right\} \quad \dots \dots \dots (5-4.b)
\end{aligned}$$

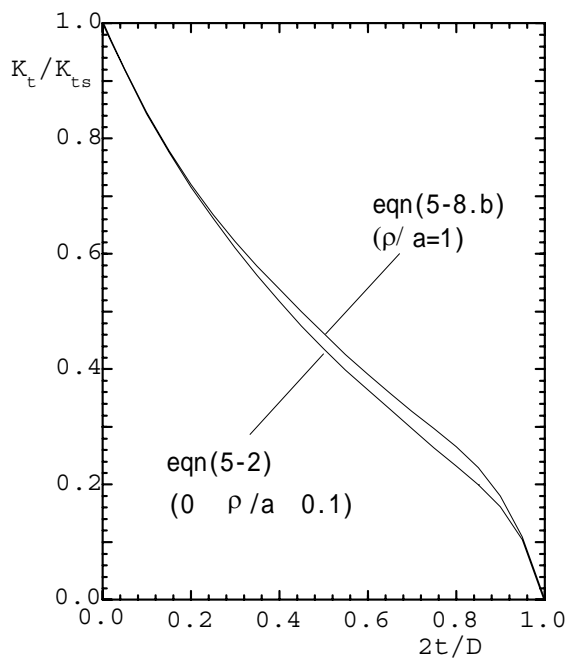


Fig. 5-6  $K_t / K_{ts}$  vs.  $2t/D$

$$N = a/\rho + 2v\sqrt{a/\rho + 1} + 2 \quad \dots \dots \dots (5-4.c)$$

Fig. 5-7 は、式 (5-4) の  $K_{td} / K_{tH}$  の値を線図にしたものである。

5・2・5 鋭く深い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-2 の領域 2:  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.8)  
 $K_t / K_{td} \cong 1.002 \quad \dots \dots \dots (5-5)$

5・2・6 深い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-2 の領域 3:  $2t/D$  0.3 かつ  $a/\rho$  10 (0 x 1.9))

$$K_t / K_{td} = 1.0003 - 0.004428\lambda + 0.0091157\lambda^2 - 0.0045697\lambda^3$$

$$+ (0.11519 - 0.46435\lambda + 0.63297\lambda^2 - 0.28290\lambda^3)x$$

$$+ (0.010653 + 0.34748\lambda - 0.85221\lambda^2 + 0.49036\lambda^3)x^2$$

$$+ (-0.06707 + 0.061199\lambda + 0.12722\lambda^2 - 0.11927\lambda^3)x^3 \quad \dots \dots \dots (5-6)$$

Fig. 5-8 は、式 (5-6) の  $K_t / K_{td}$  の値を線図にしたものである。

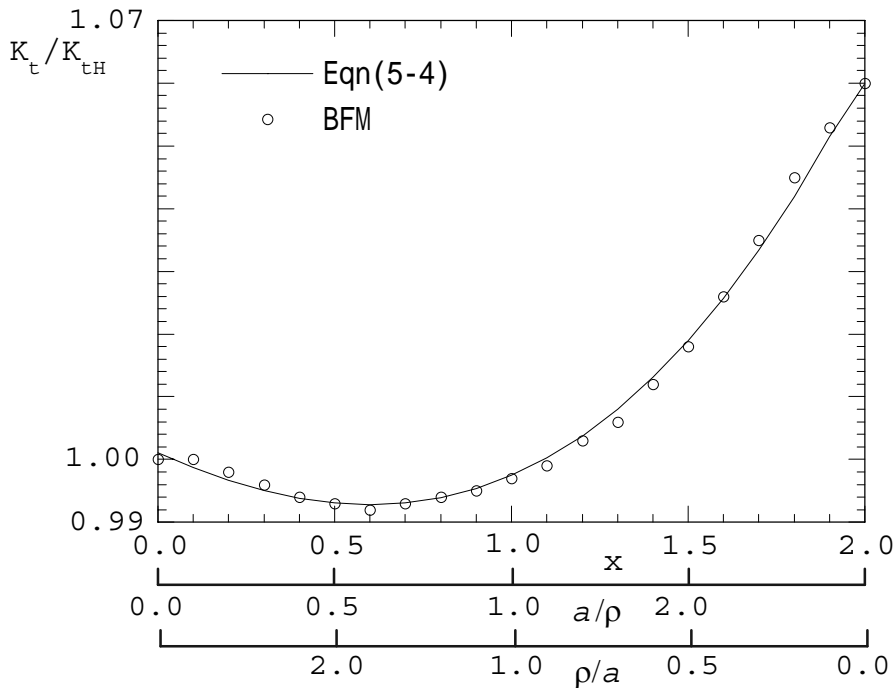


Fig. 5-7  $K_{td} / K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

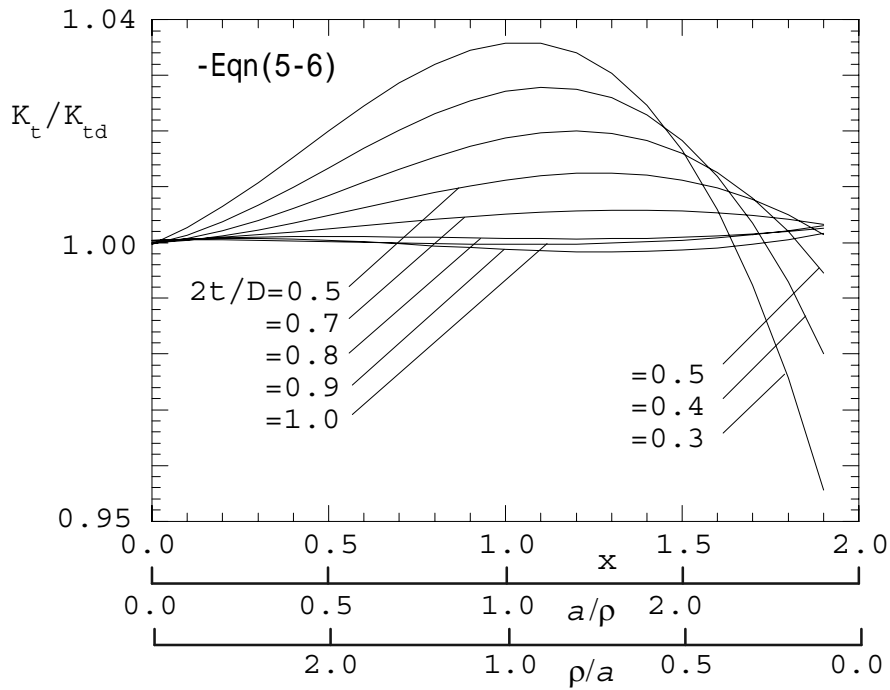


Fig. 5-8  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

5・2・7 鈍い切欠きの  $K_t$  ( Fig. 5-2 の領域 4 :  $a/\rho = 0.5 (0 < x < 0.5)$  かつ  $0.02 < 2t/D < 0.3$  )

$$\begin{aligned}
 K_t/K_{td} = & 1.0007 - 0.0071666\lambda + 0.0012083\lambda^2 + 0.049476\lambda^3 \\
 & + (0.073591 - 0.49666\lambda + 0.37944\lambda^2 + 0.97121\lambda^3)x \\
 & + (-0.83503 + 19.753\lambda - 103.43\lambda^2 + 164.69\lambda^3)x^2 \\
 & + (0.78512 - 23.474\lambda + 132.20\lambda^2 - 217.06\lambda^3)x^3 \\
 & \dots \dots \dots (5-7)
 \end{aligned}$$

Fig. 5-9 は , 式 (5-7) の  $K_t/K_{td}$  の値を線図にしたものである .

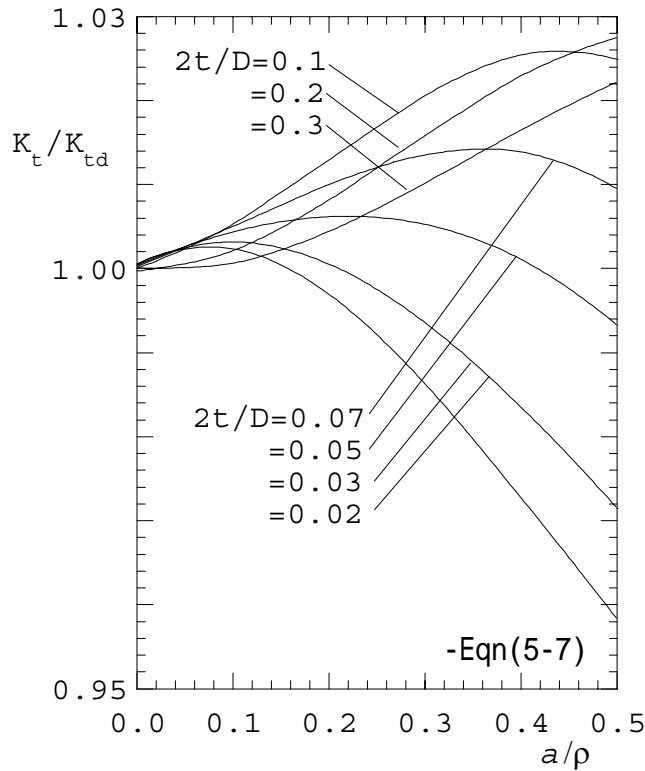


Fig. 5-9  $K_t / K_{td}$  vs.  $a / \rho$

5・2・8 その他の切欠き  $K_t$  (Fig. 5-2 の領域  $5 : 0.1 \quad \rho/a \quad 2.0$  かつ  $0.02 \quad 2t/D \quad 0.3$ )

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{ts} = & \{ (0.99750 - 0.009307(\rho/a) + 0.0082361(\rho/a)^2 \\
 & - 0.0021749(\rho/a)^3) \\
 & + (-0.012636 + 0.49854(\rho/a) - 0.66661(\rho/a)^2 \\
 & + 0.20013(\rho/a)^3)\lambda \\
 & + (0.61979 - 5.7347(\rho/a) + 7.6371(\rho/a)^2 \\
 & - 2.2656(\rho/a)^3)\lambda^2 \\
 & + (-2.7417 + 14.305(\rho/a) - 18.013(\rho/a)^2 \\
 & + 5.4021(\rho/a)^3)\lambda^3 \} (K_t / K_{ts} \Big|_{a/\rho=1.0}) \\
 & \dots \dots \dots (5-8.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{ts} \Big|_{a/\rho=1.0} = & 1.0046 - 1.7334\lambda + 1.1221\lambda^2 + 4.9028\lambda^3 \\
 & - 17.228\lambda^4 + 20.570\lambda^5 - 8.6378\lambda^6 \\
 & \dots \dots \dots (5-8.b)
 \end{aligned}$$

Fig. 5-10 は , 式 (5-8.a) の  $(K_t / K_{ts}) / (K_t / K_{ts} \Big|_{a/\rho=1.0})$  の値を線図にしたものである .

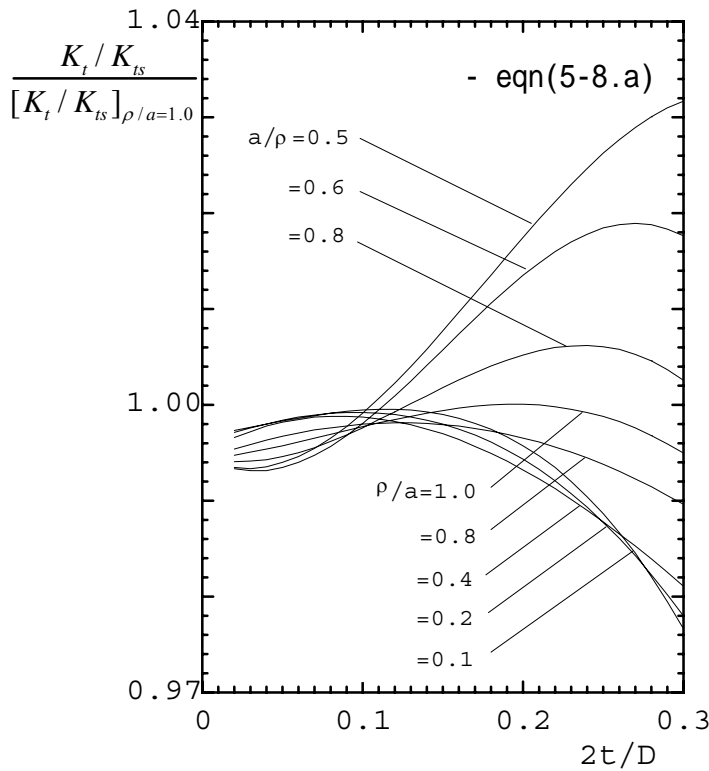


Fig. 5-10  $(K_t / K_{ts}) / [(K_t / K_{ts})_{\rho/a=1.0}]$  vs.  $2t / D$

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数  $K_t$  が求まる .

### 5.3 丸棒曲げの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

5・3・1 半無限板の  $60^\circ V$  形切欠きまたは円弧形状切欠きの  $K_{ts}$  [2] (Fig. 5-1 で  $t$  が有限で  $d, D$  のとき  $K_t / K_{ts}$ )

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \quad \dots \dots \dots (5-9.a)$$

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \quad \dots \dots \dots (5-9.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots \dots (5-9.c)$$

5・3・2 鋭い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-3 の領域 1 :  $\rho/a = 0.1$  かつ  $2t/D = 0.4$ )

$$\begin{aligned} K_t / K_{ts} = & 1.0000 - 3.4188\lambda + 14.016\lambda^2 - 69.430\lambda^3 \\ & + 284.03\lambda^4 - 780.07\lambda^5 + 1342.0\lambda^6 - 1382.7\lambda^7 \quad \dots \dots \dots (5-10) \\ & + 779.25\lambda^8 - 184.65\lambda^9 \end{aligned}$$

Fig. 5-11 に , 式 (5-10) の  $K_t / K_{ts}$  の値を図示する .

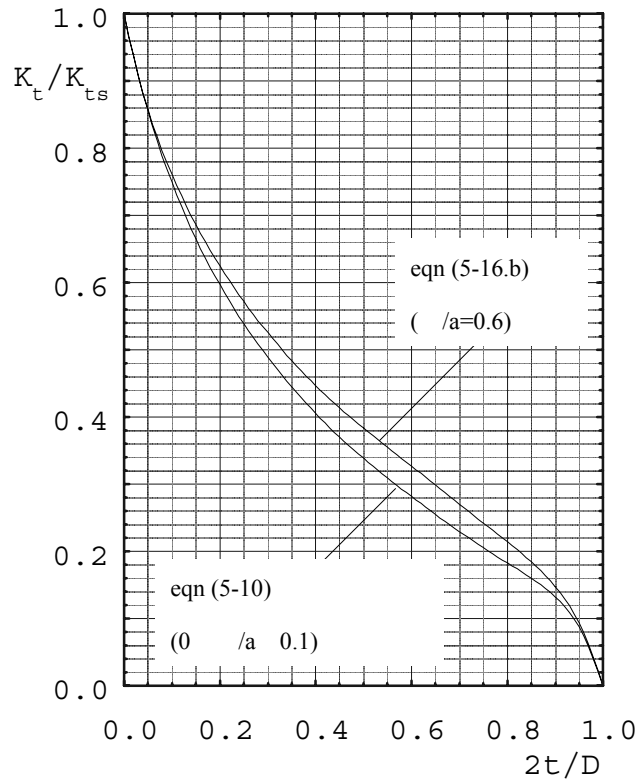


Fig. 5-11  $K_t / K_{ts}$  vs.  $2t/D$

5・3・3 深い 60°V 形切欠きの  $K_{td}$  (Fig. 5-1 で  $a$  ,  $\rho$  が有限で  $t$  のとき  $K_t / K_{ts}$  )

$$K_{td} / K_{ts} = 0.99744 + 0.014732x - 0.024870x^2 + 0.014924x^3 \quad \dots \dots \dots (5-11.a)$$

$$\{3(a/\rho) - (1 - 2\nu)\sqrt{a/\rho + 1} + 4 + \nu\} \quad \dots \dots \dots (5-11.b)$$

$$N = 3(a/\rho + 1) + (1 + 4\nu)\sqrt{a/\rho + 1} + (1 + \nu)/(\sqrt{a/\rho + 1} + 1) \quad \dots \dots \dots (5-11.c)$$

Fig. 5-12 は , 式 (5-11) の  $K_{td} / K_{ts}$  の値を線図にしたものである .



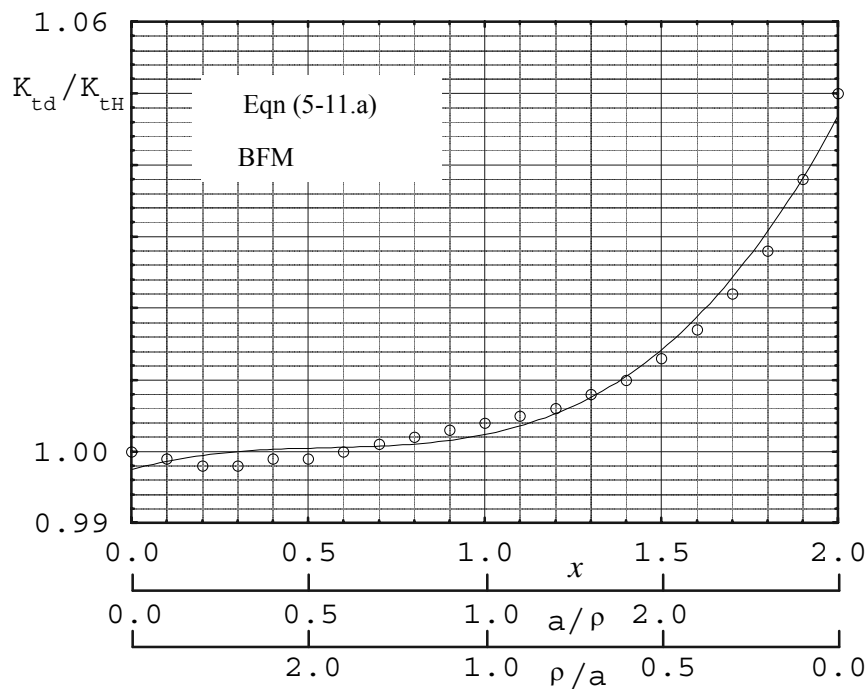


Fig. 5-12  $K_{td} / K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

5・3・4 鋭く深い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-3 の領域 2 :  $2t/D = 0.1$  かつ  $a/\rho = 0.4$ )  
 $0 \leq x \leq 0.997$  . . . . . (5-12)

5・3・5 深い切欠きの  $K_t$  [Fig. 5-3 の領域 3 :  $2t/D = 0.2$  かつ  $a/\rho = 10$  ( $0 \leq x \leq 1.9$ )]

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{td} = & 0.99583 + 0.00027062\lambda + 0.012355\lambda^2 + 0.13037\lambda^3 \\
 & - 0.30457\lambda^4 + 0.16578\lambda^5 \\
 & + (0.24827 - 2.6149\lambda + 12.449\lambda^2 - 27.871\lambda^3 \\
 & + 28.293\lambda^4 - 10.502\lambda^5)x \\
 & + (-0.69237 + 7.7422\lambda - 37.365\lambda^2 + 81.715\lambda^3 \\
 & - 80.203\lambda^4 + 28.797\lambda^5)x^2 \quad \dots \dots \dots (5-13) \\
 & + (0.59961 - 6.4408\lambda + 30.561\lambda^2 - 65.732\lambda^3 \\
 & + 63.410\lambda^4 - 22.393\lambda^5)x^3 \\
 & + (-0.18234 + 1.8160\lambda - 8.1768\lambda^2 + 17.016\lambda^3 \\
 & - 16.033\lambda^4 + 5.5587\lambda^5)
 \end{aligned}$$

Fig. 5-13 は , 式 (5-13) の  $K_t / K_{td}$  の値を線図にしたものである .

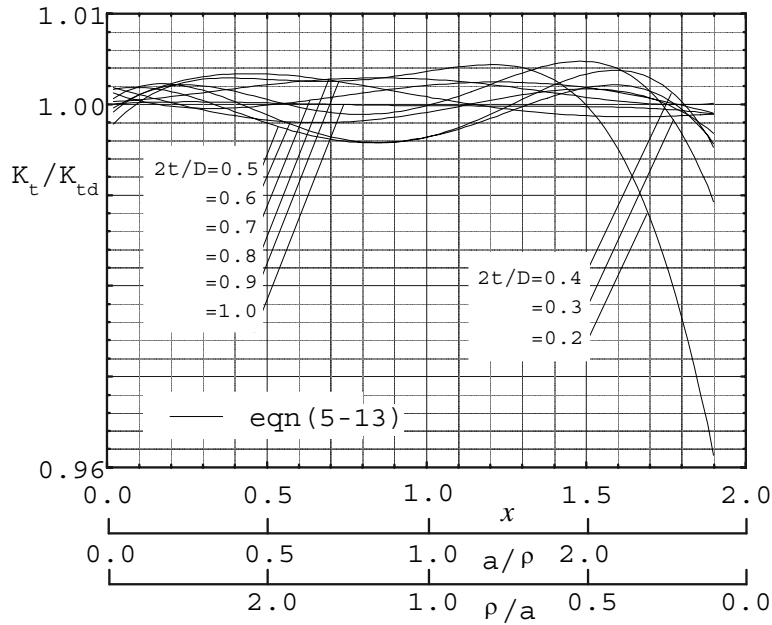


Fig. 5-13  $K_t / K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

5・3・6 鈍く浅い切欠きの  $K_t$  (Fig.5-3 の領域7 :  $a/\rho$  0.02 かつ  $2t/D$  0.02)

$$K_t \cong 1.002 \quad \dots \dots \dots (5-13)$$

5・3・7 浅い切欠きの  $K_t$  [Fig. 5-3 の領域6 : 0.02  $a/\rho$  0.8 (0 x 0.8) かつ  $2t/D$  0.02]

$$K_t / K_{ts} = 1.0000 - (0.96873 + 32.614x - 233.80x^2 + 811.76x^3 - 1423.4x^4 + 1222.9x^5 - 410.16x^6)\lambda \quad \dots \dots \dots (5-14)$$

5・3・8 鈍い切欠きの  $K_t$  [Fig. 5-3 の領域4 :  $a/\rho$  0.8 (0 x 0.8) かつ 0.02  $2t/D$  0.2]

$$K_t / K_{td} = 1.0000 - 0.014793\lambda + 0.070689\lambda^2 + (0.095073 - 1.1067\lambda + 2.9132\lambda^2)x + (-0.42518 + 6.8626\lambda - 22.079\lambda^2)x^2 + (0.26412 - 4.8073\lambda + 15.994\lambda^2)x^3 \quad \dots \dots \dots (5-15)$$

Fig. 5-14 に , 式 (5-15) の  $K_t / K_{td}$  の値を図示する .

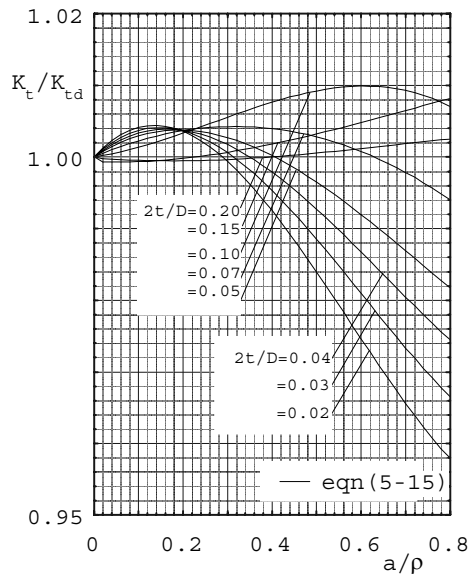


Fig. 5-14  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$

5・3・9 その他の切欠きの  $K_t$  [ Fig. 5-3 の領域 5 : 0.1  $\rho/a$  1.2 かつ  $2t/D$  0.2 ]

$$K_t / K_{ts} =$$

$$\begin{aligned} & 1.0002 - 0.0026876(\rho/a) + 0.0070447(\rho/a)^2 \\ & - 0.0061187(\rho/a)^3 + 0.0017046(\rho/a)^4 \\ & + (0.18110 + 0.75835(\rho/a) - 4.7083(\rho/a)^2 \\ & + 6.3820(\rho/a)^3 + 2.5438(\rho/a)^4)\lambda \\ & + (-5.0005 - 8.5836(\rho/a) + 76.517(\rho/a)^2 \\ & - 105.46(\rho/a)^3 + 42.876(\rho/a)^4)\lambda^2 \\ & + (15.016 + 26.229(\rho/a) - 237.78(\rho/a)^2 \\ & + 333.28(\rho/a)^3 - 136.89(\rho/a)^4)\lambda^3 \\ & ([K_t / K_{ts}]_{\rho/a=0.6}) \end{aligned}$$

..... (5-16.a)

$$\begin{aligned} [K_t / K_{ts}]_{\rho/a=0.6} &= 0.99826 - 3.3823\lambda + 14.184\lambda^2 \\ & - 51.123\lambda^3 + 118.36\lambda^4 - 160.19\lambda^5 \\ & + 114.63\lambda^6 - 33.480\lambda^7 \end{aligned}$$

..... (5-16.b)

Fig. 5-15 に、式 (5-16.a) の  $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.6})$  の値を図示する。

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数  $K_t$  が求まる。Fig. 5-16 は、 $K_t$  の値を線図にしたものである。これは、著者らが以前に作製した線図と比べて利用範囲が広い。

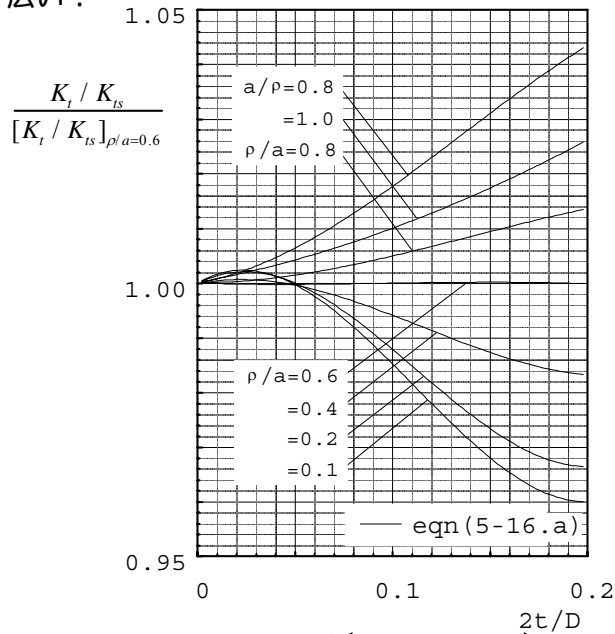


Fig. 5-15  $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.6})$  vs.  $2t/D$

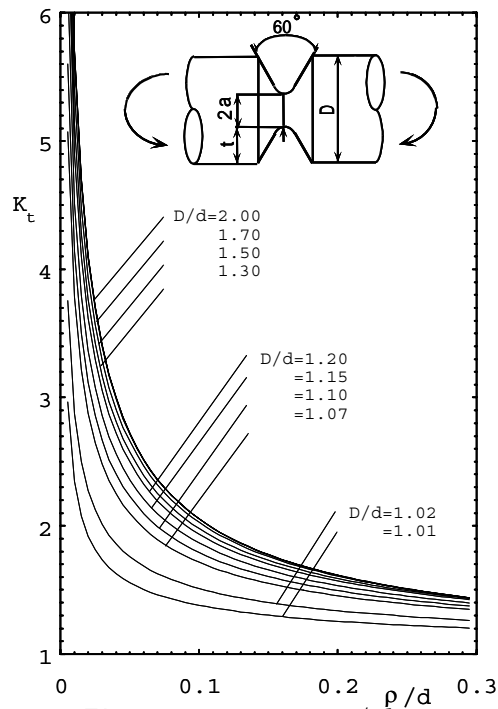


Fig. 5-16  $K_t$  vs.  $\rho/d$

### 5.4 丸棒ねじりの切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

5・4・1 半無限板のV形切欠きまたは円権形状切欠きの  $K_{ts}$  (Fig.5-1で  $\rho, t$  が有限で, のとき)

(1)  $0 \leq \xi \leq 1.0$

$$K_{ts}/K_{tE} = 1.000 - 0.089464\xi + 0.13872\xi^2 - 0.050088\xi^3 \quad \dots \dots (5-17.a)$$

(2)  $0 \leq \eta \leq 0.05$

$$K_{ts}/K_{tE} = 0.70516 - 0.77340\eta + 200.235\eta^2 - 2106.840\eta^3 \quad \dots \dots (5-17.b)$$

(3)  $0.05 < \eta < 1.0$

$$K_{ts}/K_{tE} = 0.81595 + 2.0675\eta - 7.2824\eta^2 + 12.045\eta^3 - 9.6241\eta^4 + 2.9783\eta^5 \quad \dots \dots (5-17.c)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots (5-17.d)$$

Fig. 5-17 に, 式 (5-17) の  $K_{ts}/K_{tE}$  の値を図示する.

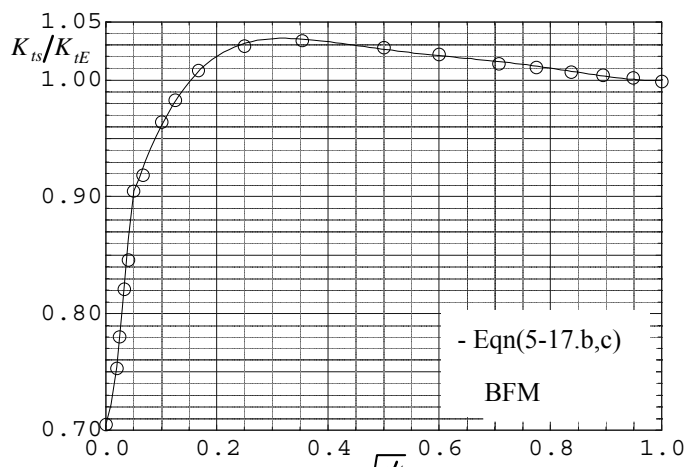
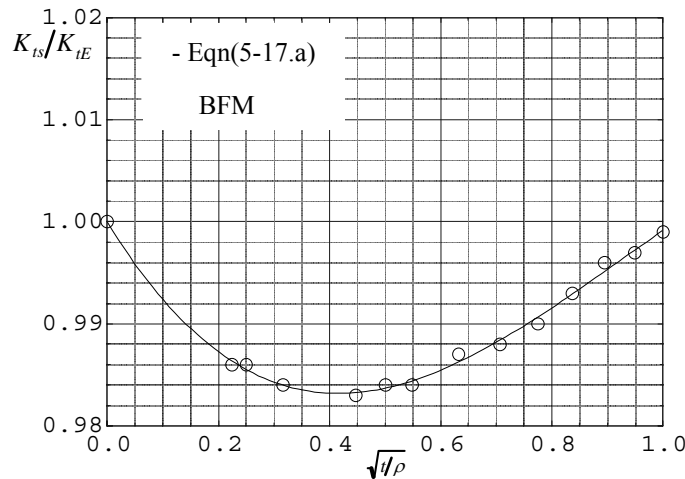


Fig. 5-17  $K_{ts}/K_{tE}$  vs.  $\sqrt{t/\rho}$  and  $\sqrt{\rho/t}$

5・4・2 鋭い切欠きの  $K_t$  ( Fig. 5-4 の領域 1 :  $\rho/a = 0.05$ かつ  $2t/D = 0.4$  )

$$\begin{aligned}
 K_t/K_{ts} = & 1.0002 + 0.065000(\rho/a) - 0.46000(\rho/a)^2 \\
 & + \{-2.3204 + 41.027(\rho/a) - 272.908(\rho/a)^2\}\lambda \\
 & + \{4.9383 - 1051.719(\rho/a) + 7281.060(\rho/a)^2\}\lambda^2 \\
 & + \{-14.354 + 9977.270(\rho/a) - 69683.800(\rho/a)^2\}\lambda^3 \\
 & + \{57.094 - 47562.010(\rho/a) + 334477.80(\rho/a)^2\}\lambda^4 \\
 & + \{-189.604 + 128887.31(\rho/a) - 911641.40(\rho/a)^2\}\lambda^5 \\
 & + \{398.124 - 207815.03(\rho/a) + 1476793.4(\rho/a)^2\}\lambda^6 \\
 & + \{-487.188 + 197560.60(\rho/a) - 1409226.4(\rho/a)^2\}\lambda^7 \\
 & + \{317.414 - 102277.81(\rho/a) + 731834.20(\rho/a)^2\}\lambda^8 \\
 & + \{-85.103 + 22240.230(\rho/a) - 159561.00(\rho/a)^2\}\lambda^9 \\
 & \dots \dots \dots (5-18)
 \end{aligned}$$

Fig. 5-18 に , 式 (5-18) の値を図示する .

5・4・3 深いV形切欠きの ( Fig.5-1 で  $a, \rho$  が有限で  $t \rightarrow \infty$  のとき )

$$\begin{aligned}
 K_{td}/K_{tH} = & 1.0004 - 0.0054166x + 0.031712x^2 \\
 & - 0.034608x^3 + 0.013315x^4 \\
 & \dots \dots \dots (5-19)
 \end{aligned}$$

Fig. 5-19 は , 式 (5-19) の  $K_{td}/K_{tH}$  の値を図示したものである .

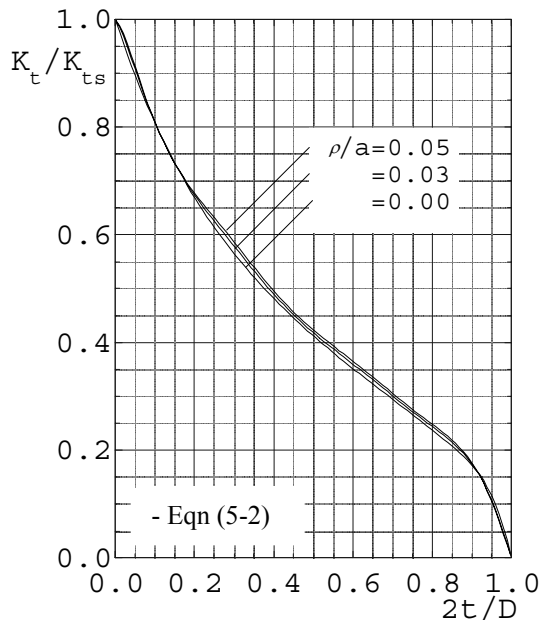


Fig. 5-18  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$

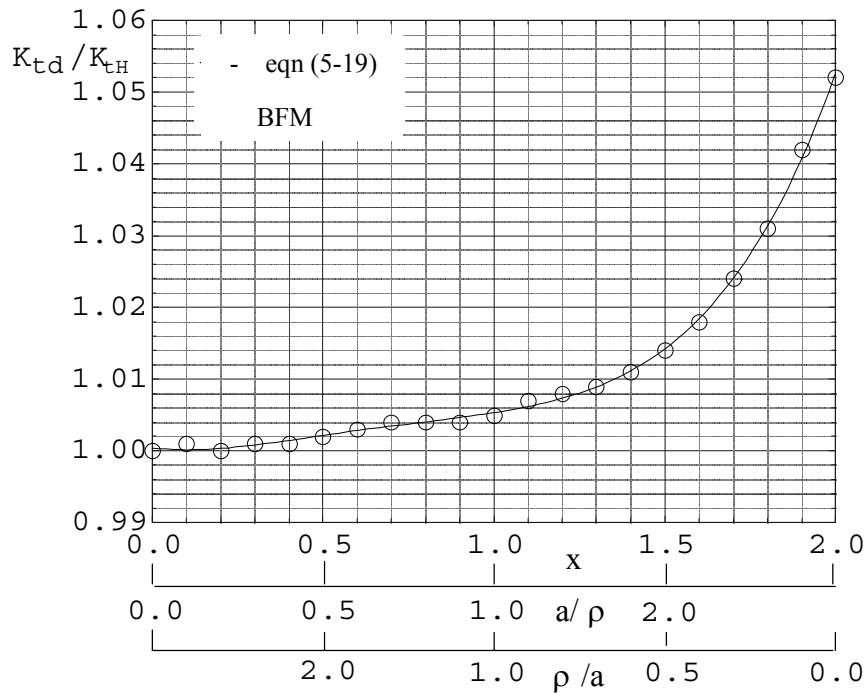


Fig. 5-19  $K_{td}/K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

5・4・4 鋭く深い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-4の領域2:  $\rho/a$  かつ  $2t/D$  0.9)

$$K_t/K_{td} \cong 0.997 \quad \dots \dots (5-20)$$

5・4・5 深い切欠きの  $K_t$  [Fig. 5-4の領域3:  $2t/D$  0.2かつ  $a/\rho$  20 (0  $x$  1.95)]

$$\begin{aligned}
 K_t/K_{td} = & (1.2732 - 5.2256\lambda + 41.037\lambda^2 - 173.861\lambda^3 + 436.177\lambda^4 \\
 & - 666.588\lambda^5 + 609.405\lambda^6 - 306.425\lambda^7 + 65.207\lambda^8) \\
 & + (-3.9187 + 74.205\lambda - 573.456\lambda^2 + 2380.186\lambda^3 - 5824.853\lambda^4 \\
 & + 8649.916\lambda^5 - 7658.407\lambda^6 + 3718.693\lambda^7 - 762.3645\lambda^8)x \\
 & + (11.100 - 210.828\lambda + 1633.779\lambda^2 - 6808.307\lambda^3 + 16762.089\lambda^4 \\
 & - 25112.854\lambda^5 + 22504.266\lambda^6 - 11095.586\lambda^7 + 2316.340\lambda^8)x^2 \\
 & + (-10.339 + 196.614\lambda - 1527.889\lambda^2 + 6393.566\lambda^3 - 15824.185\lambda^4 \\
 & + 23855.548\lambda^5 - 21525.758\lambda^6 + 10690.755\lambda^7 - 2248.312\lambda^8)x^3 \\
 & + (2.9974 - 57.230\lambda + 445.993\lambda^2 - 1871.177\lambda^3 + 4643.677\lambda^4 \\
 & - 7020.090\lambda^5 + 6351.932\lambda^6 - 3462.667\lambda^7 + 666.564\lambda^8)x^4 \\
 & \dots \dots (5-21)
 \end{aligned}$$

5・4・6 鈍く浅い切欠きの  $K_t$  (Fig. 5-4の領域7:  $a/\rho$  0.01かつ  $2t/D$  0.02)

$$K_t \cong 1.001 \quad \dots \dots (5-22)$$

5・4・7 浅い切欠きの  $K_t$  [ Fig. 5-4の領域6 :  $0.01 < a/\rho < 20$  ( $0.01 < x < 1.95$ )

かつ  $2t/D = 0.02$  ]

$$K_t/K_{ts} = 1.000 - (1.0552 + 1.8464x + 1.9736x^2 - 8.2590x^3 + 6.1096x^4 - 1.3570x^5) \dots (5-23)$$

5・4・8 鈍い切欠きの  $K_t$  [ Fig. 5-4 の領域 4 :  $a/\rho = 2.0$  ( $0 < x < 1.5$ ) かつ  $0.02$

$2t/D = 0.2$  ]

$$K_t/K_{td} = (1.0016 - 0.070219\lambda + 0.77019\lambda^2 - 2.3148\lambda^3) + (-0.040827 + 2.2659\lambda - 26.359\lambda^2 + 80.467\lambda^3)x + (-0.14433 - 1.7471\lambda + 46.228\lambda^2 - 169.806\lambda^3)x^2 + (0.22594 + 0.033869\lambda - 36.720\lambda^2 + 153.290\lambda^3)x^3 + (-0.098744 + 0.48288\lambda + 8.4604\lambda^2 - 41.490\lambda^3)x^4 \dots (5-24)$$

5・4・9 その他の切欠きの  $K_t$  [ Fig. 5-4 の領域 5 :  $0.05 < \rho/a < 0.5$  ( $1.5 < \rho/a$

$1.95$ ) かつ  $0.02 < x < 0.2$  ]

$$K_t/K_{ts} = \{(1.0005 + 0.0051162(\rho/a) - 0.11705(\rho/a)^2 + 0.60862(\rho/a)^3 - 1.2770(\rho/a)^4 + 0.95132(\rho/a)^5) + (0.046366 - 2.8738(\rho/a) + 41.066(\rho/a)^2 - 206.252(\rho/a)^3 + 423.882(\rho/a)^4 - 309.132(\rho/a)^5)\lambda + (-5.7618 + 64.791(\rho/a) - 516.761(\rho/a)^2 + 2384.219(\rho/a)^3 - 4832.939(\rho/a)^4 + 3527.542(\rho/a)^5)\lambda^2 + (21.719 - 235.937(\rho/a) + 1785.138(\rho/a)^2 - 7871.300(\rho/a)^3 + 15633.377(\rho/a)^4 - 11306.862(\rho/a)^5)\lambda^3\} ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2}) \dots (5-25.a)$$

$$[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2} = 1.0019 - 0.96607\lambda - 23.944\lambda^2 + 254.767\lambda^3 - 1220.738\lambda^4 + 3272.556\lambda^5 - 5196.867\lambda^6 + 4851.327\lambda^7 - 2457.932\lambda^8 + 520.795\lambda^9 \dots (5-25.b)$$

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数が求まる。

## 5.5 修正 Neuber 三角則との比による切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式



以上を示した式で切欠きの寸法の全範囲に対して応力集中係数が与えられた。但し、それらの式はそれぞれの切欠き寸法の範囲のみで有効であり、やや不便である。そこで、上述の式から得られる値をさきに提案した修正 Neuber の三角則  $K_{tN}$  との比で整理する。そして最小二乗法を適用することによって寸法の全範囲に対して誤差 1% 以内を目標とする簡便な近似式を以下のように得た。それらの式を丸棒引張り・曲げ・ねじりの順に以下に示す。

(1) 引張り

$$K_{tN} = \left\{ (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left( (K_{ts} - 1)^{2.8} + (K_{td} - 1)^{2.8} \right)^{1/2.8} \right\} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & (1.0001 + 0.0036x - 0.0065x^2 + 0.0021x^3) \\ & + (0.0116 + 1.404x - 1.285x^2 + 0.1799x^3)\lambda \\ & + (-0.1311 - 8.165x + 9.687x^2 - 2.124x^3)\lambda^2 \\ & + (0.4240 + 16.94x - 22.77x^2 + 5.618x^3)\lambda^3 \\ & + (-0.5156 - 15.07x + 21.71x^2 - 5.571x^3)\lambda^4 \\ & + (0.2112 + 4.890x - 7.332x^2 + 1.896x^3)\lambda^5 \end{aligned}$$

.....(5-26)

(2) 曲げ

$$K_{tN} = \left[ (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left\{ (K_{ts} - 1)^{2.8} + (K_{td} - 1)^{2.8} \right\}^{1/2.8} \right] + 1$$

(1)  $0 \leq x \leq 1.0$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & (1.0007 - 0.0061187x + 0.00019231x^2) \\ & + (0.032136 + 0.99308x - 1.3017x^2)\lambda \\ & + (-1.2472 - 7.8148x + 17.571x^2)\lambda^2 \\ & + (10.760 + 21.099x - 96.522x^2)\lambda^3 \\ & + (-42.163 - 9.0602x + 283.69x^2)\lambda^4 \\ & + (88.539 - 63.407x - 482.22x^2)\lambda^5 \\ & + (-103.01 + 133.10x + 474.10x^2)\lambda^6 \\ & + (62.562 - 105.45x - 250.04x^2)\lambda^7 \\ & + (-15.472 + 30.559x + 54.712x^2)\lambda^8 \end{aligned}$$

.....(5-27.a)

$$(2) 1.0 \leq x \leq 1.9$$

$$A = x - 1.0$$

$$\begin{aligned}
 K_i/K_{iN} = & (0.99533 - 0.0035974A + 0.0051222A^2) \\
 & + (-0.32401 - 1.2760A - 0.83101A^2)\lambda \\
 & + (9.9470 + 22.740A + 4.1519A^2)\lambda^2 \\
 & + (-78.130 - 145.14A - 0.32590A^2)\lambda^3 \\
 & + (288.43 + 463.53A - 36.046A^2)\lambda^4 \\
 & + (-578.45 - 825.96A + 91.919A^2)\lambda^5 \\
 & + (647.76 + 836.06A - 100.76A^2)\lambda^6 \\
 & + (-380.88 - 450.51A + 52.837A^2)\lambda^7 \\
 & + (91.652 + 100.57A - 10.954A^2)\lambda^8 \quad \dots \cdot (5-27.b)
 \end{aligned}$$

$$(3) 1.9 \leq x \leq 1.99$$

$$B = 10(x - 1.90)$$

$$\begin{aligned}
 K_i/K_{iN} = & (0.99540 - 0.0054492B + 0.0060139B^2) \\
 & + (-1.9557 + 0.65302B - 0.34860B^2)\lambda \\
 & + (29.326 - 10.901B + 3.2846B^2)\lambda^2 \\
 & + (-175.64 + 78.343B - 31.852B^2)\lambda^3 \\
 & + (555.91 - 254.28B + 107.53B^2)\lambda^4 \\
 & + (-1010.7 + 413.27B - 143.87B^2)\lambda^5 \\
 & + (1059.8 - 340.54B + 51.147B^2)\lambda^6 \\
 & + (-595.49 + 127.03B + 41.581B^2)\lambda^7 \\
 & + (138.76 - 13.576B - 27.476B^2)\lambda^8 \quad \dots \cdot (5-27.c)
 \end{aligned}$$

$$(4) 1.99 \leq x \leq 1.999$$

$$C = 100(x - 1.990)$$

$$\begin{aligned}
 & K_i/K_{iN} \\
 = & (0.99195 + 0.0014095C + 0.0010083C^2 + 0.0014459C^3) \\
 & + (-1.0217 - 0.11317C + 0.40147C^2 - 0.66757C^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(8.8740 - 1.0204C - 2.5041C^2 + 3.2927C^3) \\
&+(-31.384 + 6.0540C + 7.3248C^2 - 7.8197C^3)\lambda^3 \\
&+(52.354 - 11.900C - 11.175C^2 + 10.153C^3)\lambda^4 \\
&+(-41.343 + 10.217C + 8.5027C^2 - 6.8543C^3)\lambda^5 \\
&+(12.528 - 3.2355C - 2.5540C^2 + 1.8930C^3)\lambda^6 \quad \dots \cdot (5-27.d)
\end{aligned}$$

(5)  $1.999 \leq x \leq 2.0$

(3) ねじり

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1 \right\} (K_{td} - 1) / \left\{ (K_{ts} - 1)^{2.6} + (K_{td} - 1)^{2.6} \right\}^{1/2.6} + 1$$

(1)  $0 < x \leq 1.95$

$$\begin{aligned}
K_t / K_{tN} = &0.99999 - 0.0026822x + 0.0053295x^2 - 0.0016953x^3 \\
&+(0.0026579 - 0.32756x + 0.031522x^2 - 0.081859x^3)\lambda \\
&+(-0.0076275 + 6.1229x - 4.8157x^2 + 2.3235x^3)\lambda^2 \\
&+(-0.23987 - 30.899x + 30.141x^2 - 12.484x^3)\lambda^3 \\
&+(1.0501 + 63.622x - 66.952x^2 + 26.072x^3)\lambda^4 \\
&+(-1.4274 - 57.780x + 63.046x^2 - 23.742x^3)\lambda^5 \\
&+(0.62212 + 19.268x - 21.460x^2 + 7.9153x^3)\lambda^6 \quad \dots \cdot (5-28.a)
\end{aligned}$$

(2)  $1.95 < x \leq 1.99$

$$\begin{aligned}
K_t / K_{tN} = &1.0025 - 0.0093115A - 0.0058186A^2 + 0.025526A^3 \\
&+(-1.1232 + 0.77408A + 0.76457A^2 - 1.5432A^3)\lambda \\
&+(10.849 - 5.3371A - 6.5696A^2 + 12.729A^3)\lambda^2 \\
&+(-38.451 + 23.186A + 9.7978A^2 - 98.794A^3)\lambda^3 \\
&+(63.849 - 53.490A + 9.3650A^2 + 285.633A^3)\lambda^4 \\
&+(-50.412 + 56.678A - 27.335A^2 - 328.903A^3)\lambda^5 \\
&+(15.286 - 21.788A + 13.972A^2 + 130.778A^3)\lambda^6 \quad \dots \cdot (5-28.b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_t / K_{tN} = & 0.99192 + 0.00011120B + 0.0033482B^2 + 0.0013571B^3 \\
& + (-0.18992 + 0.41943B - 0.32590B^2 - 0.54245B^3)\lambda \\
& + (1.5804 - 5.6709B + 1.6900B^2 + 5.3873B^3)\lambda^2 \\
& + (-4.6494 + 21.058B - 4.1818B^2 - 19.802B^3)\lambda^3 \\
& + (5.5040 - 28.913B + 4.0856B^2 + 27.079B^3)\lambda^4 \\
& + (-2.2419 + 13.113B - 1.2682B^2 - 12.130B^3)\lambda^5
\end{aligned}$$

$$A = 10(x - 1.95) \quad \dots \cdot (5-28.c)$$

(3)  $1.99 < x \leq 2.0$

$$\begin{aligned}
K_t / K_{tN} = & 0.99192 + 0.00011120B + 0.0033482B^2 + 0.0013571B^3 \\
& + (-0.18992 + 0.41943B - 0.32590B^2 - 0.54245B^3)\lambda \\
& + (1.5804 - 5.6709B + 1.6900B^2 + 5.3873B^3)\lambda^2 \\
& + (-4.6494 + 21.058B - 4.1818B^2 - 19.802B^3)\lambda^3 \\
& + (5.5040 - 28.913B + 4.0856B^2 + 27.079B^3)\lambda^4 \\
& + (-2.2419 + 13.113B - 1.2682B^2 - 12.130B^3)\lambda^5
\end{aligned}$$

$\dots \cdot (5-28.d)$

$$B = 100(x - 1.99) \quad \dots \cdot (5-28.e)$$

ねじり問題では2章に示すように引張り[3]や曲げ[4]と異なり，切欠きが鋭い場合  $\rho \rightarrow 0$  (即ち  $x \rightarrow 2$ ) の近似はあまり良くない．このことと関連して式(5-28)に示すように近似式を3つに分ける必要がある．Fig.5-20, 21, 22に，ねじりの  $K_t/K_{tN}$  の値を図示する．Fig.5-23は，丸棒ねじりの  $K_t$  の値を線図にしたものである．

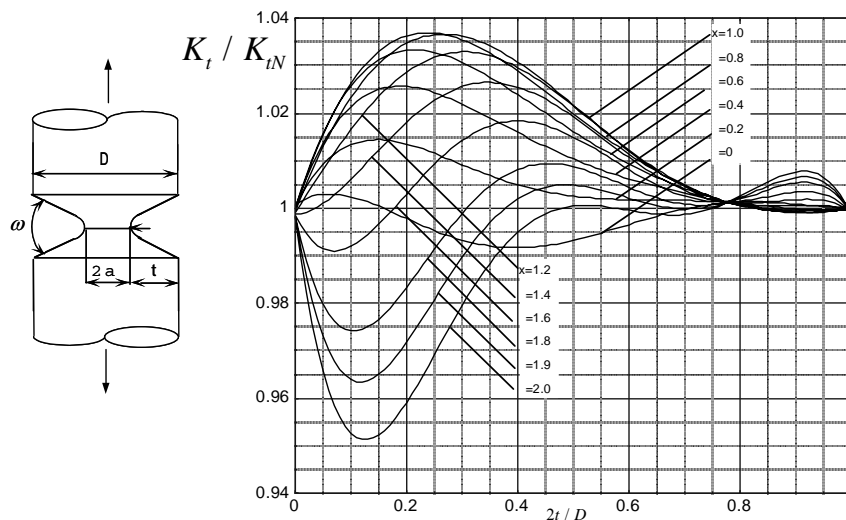


Fig.5-20  $K_t/K_{tN}$  vs.  $2t/D$

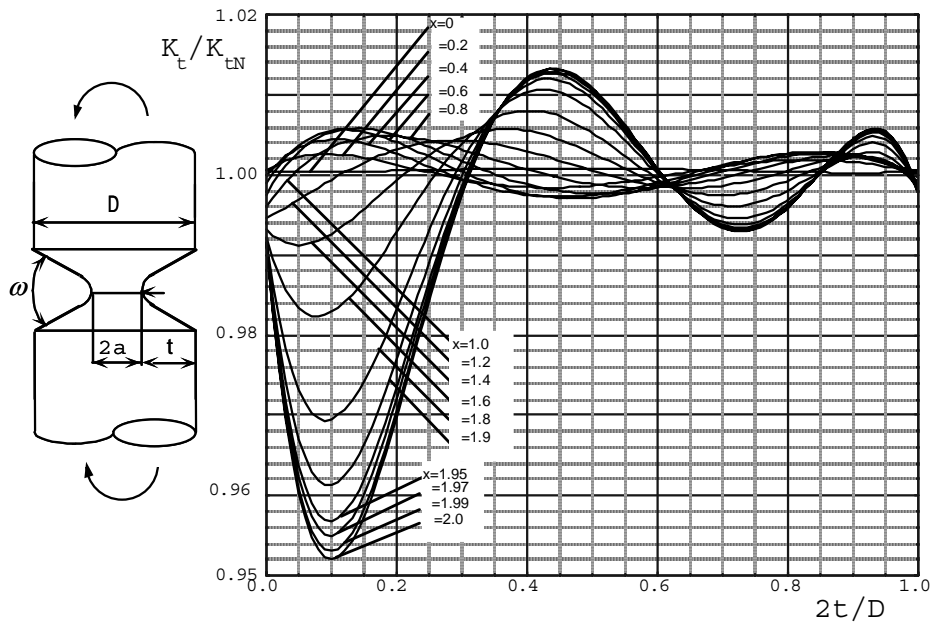


Fig.5-21  $K_t/K_{tN}$  vs.  $2t/D$

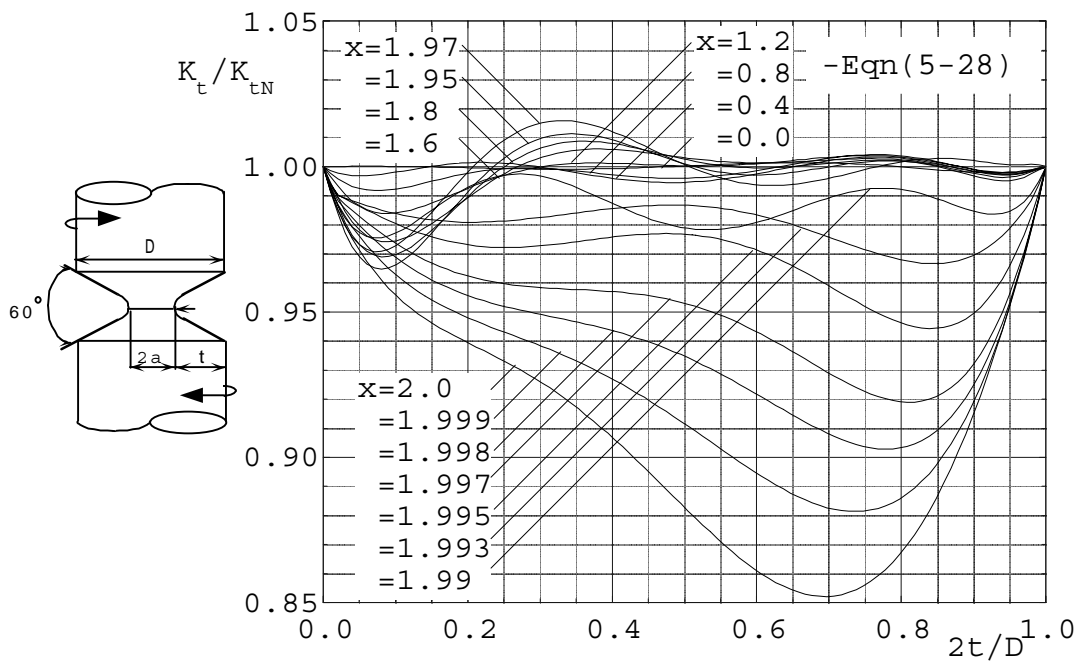


Fig.5-22  $K_t/K_{tN}$  vs.  $2t/D$

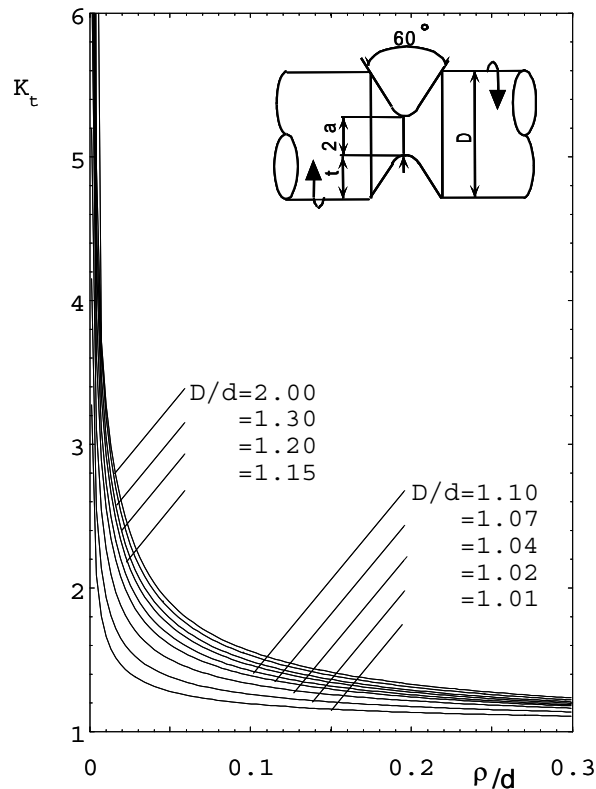


Fig. 5-23  $K_t$  vs  $\rho/d$

## 5.6 結 言

本章では、切欠きが浅い場合や深い場合の近似式および体積力法の解析結果を基に丸棒引張り、曲げ、ねじり問題において物理的考察を行い、切欠き半径  $\rho$  が極端に大きい円弧形切欠き、及び切欠き半径  $\rho$  が極端に小さい60°V形切欠きを含めた、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案した。得られた結論をまとめると以下ようになる。

- (1)  $K_t/K_{ts}$  と  $K_t/K_{td}$  の引張り、曲げ、ねじりの応力集中係数の特徴を考慮して、すべての切欠き形状に対して誤差1%程度で応力集中係数を与える近似式を提案した。
- (2) 簡便な近似式を作製するため、提案した修正 Neuber の三角則  $K_{IN}$  との比に最小二乗法を適用する方法を用いた。その結果、丸棒引張・曲げ・ねじりの各々の問題において、寸法の全範囲に対して誤差1%程度を与える簡便な近似式を得た。
- (3) 切欠きを有する丸棒のねじり問題では、浅い切欠きの解による近似は極めて悪いけれども深い切欠きの解による近似は引張問題と比べて良好である。

## 参考文献

- (1) 西谷弘信，野田尚昭，60°V形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力中問題の

考察，日本機械学会論文集，51-461，A（1985），54-62.

- (2) 野田尚昭，高瀬 康，門田圭司，切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式，機械の研究，48-7，（1996），757-762.
- (3) 野田尚昭，西谷弘信，高瀬 康，篠崎正孝，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式（鋭い  $60^\circ$  V 形および鈍い円弧切欠きを有する丸棒引張試験片），日本機械学会論文集，63-613，A（1997），1926-1931.
- (4) 野田尚昭，高瀬 康，神崎健太郎，西谷弘信，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式（円弧形及び  $60^\circ$  V 形切欠きを有する回転曲げ試験片），日本機械学会論文集，64-625，A（1998），2251-2256.

## 第6章 V形切欠きを有する帯板問題の切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

### 6.1 緒言

Fig.6-1に示すような両縁に切欠きを有する帯板の問題は，円周切欠きを有する丸棒の問題と同様に強度研究用試験片としてもしばしば用いられる．その応力集中評価のため Neuber の提案した三角則[1]は，過去 70 年以上にわたってよく用いられてきた．これは，Neuber 公式が簡便であるにもかかわらず切欠き形状の全範囲に対してある程度の精度で応力集中係数を与えるたいへん便利なものであったためである．円周切欠きを有する丸棒の問題と同様にこの問題に対しても Neuber 公式には無視できない程度の誤差が存在するためさきに体積力法によって得られた高精度の解析結果を基に，Neuber の三角則による近似式に修正係数をかけることによって精度の高い計算式を提案した[2]．しかし，前章までに述べたように丸棒の問題に対して与えたような切欠き半径が極端に大きい円弧切欠き [Fig.6-1 (a)] や切欠き半径が極端に小さい鋭い切欠き [Fig.6-1 (c)] をも含めた，切欠き寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を与える計算式[3]，[4]を与えてはいなかった．そこで，本章ではこの方法を応用し，帯板の引張り，曲げの問題では切欠き寸法のすべての範囲に対して正確な応力集中係数を求める計算式を提案する．

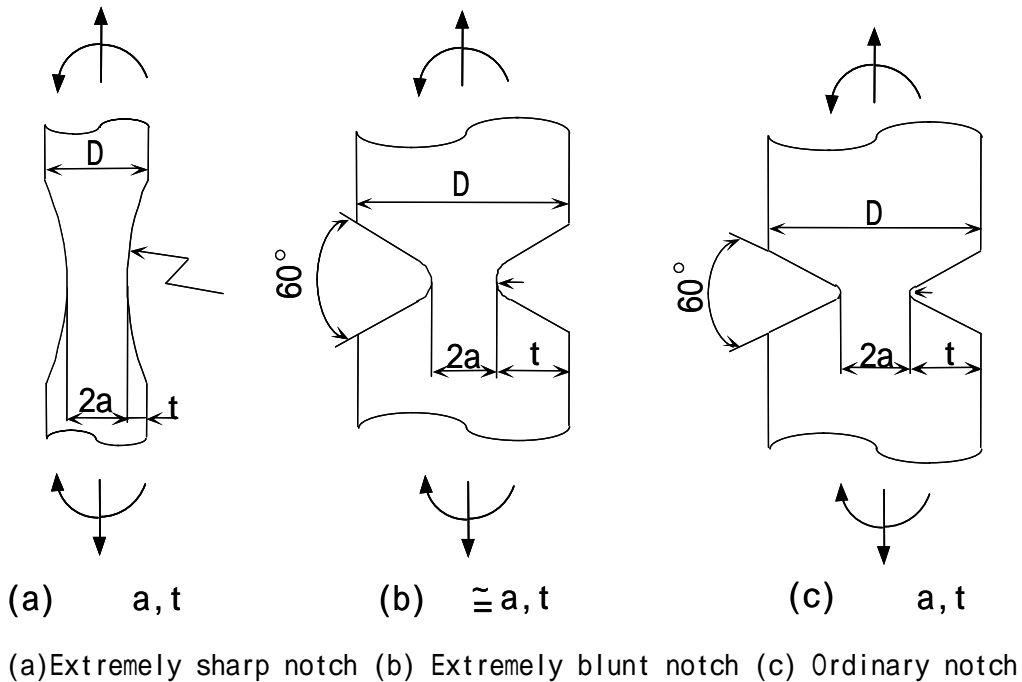


Fig. 6-1 Flat specimens with circular-arc and V-shaped notches



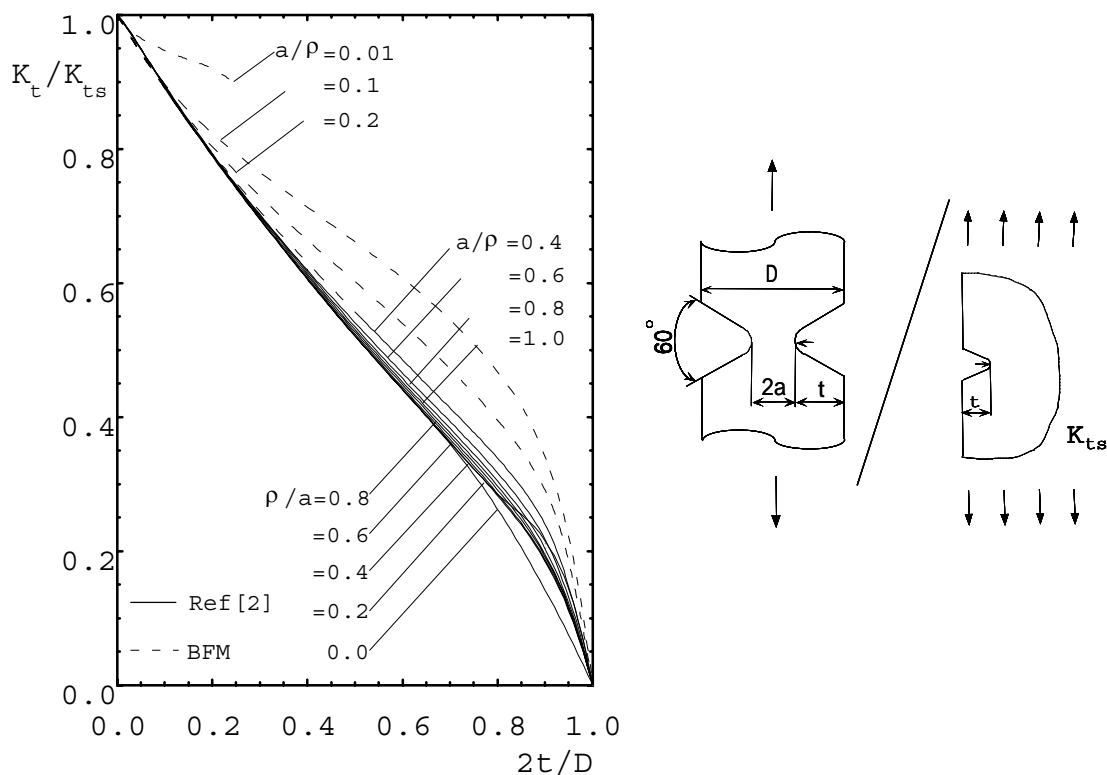
すなわち，本章では，丸棒引張，曲げ問題と同様に，帯板引張り，曲げ問題において，切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積力法によって得られた解析結果[5]を基に物理的考察を行い，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案することを目的とする．切欠きを有する帯板の問題では，切欠きを有する丸棒の問題と異なり，段の高さが浅い場合の解や深い場合の解を利用できる範囲が異なるので注意が必要である．

以下では，まず前章で提案した近似式[2]の結果を図示して考察する（Fig.6-2 の実線）．なお一部については体積力法の追加計算を行った（Fig.6-2 の破線）．その際切欠き深さのパラメータとしては主に  $2t/D$  を用い，切欠き半径のパラメータとしては主に  $a/\rho$ （または  $\rho/a$ ）を用いて整理する．

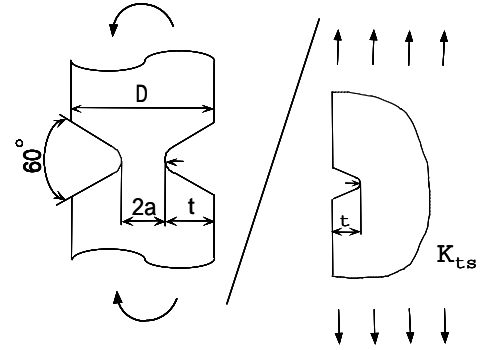
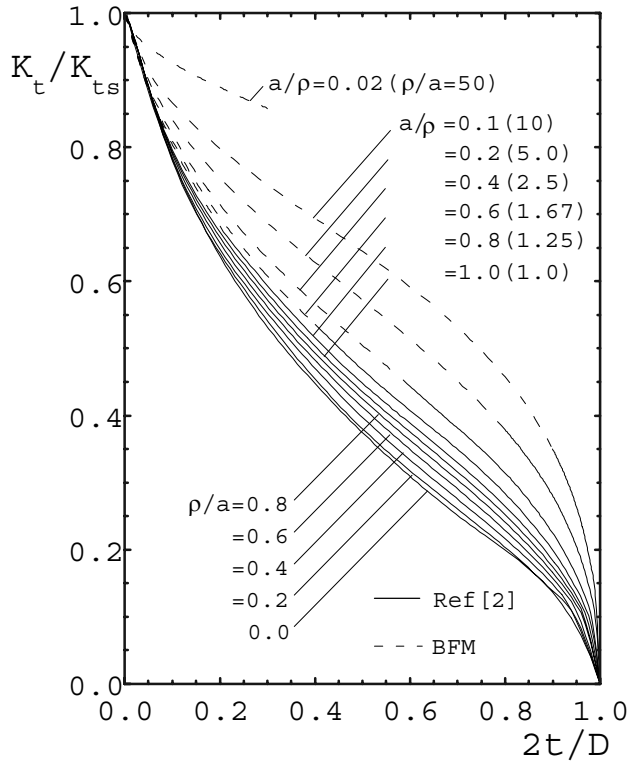
## 6.2 浅い切欠きの応力集中係数

まず，切欠き半径  $\rho$  が小さい Fig.6-1 (c) のような  $60^\circ V$  形切欠きに対する応力集中係数  $K_t$  を考察する．このような鋭い切欠きの応力集中係数は，同一形状比  $t/\rho$  の  $V$  形切欠きを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  より求めることができる．

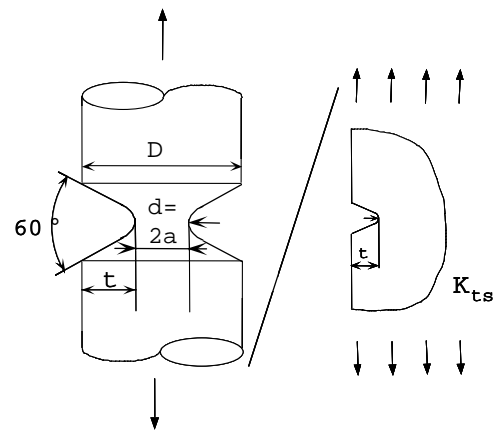
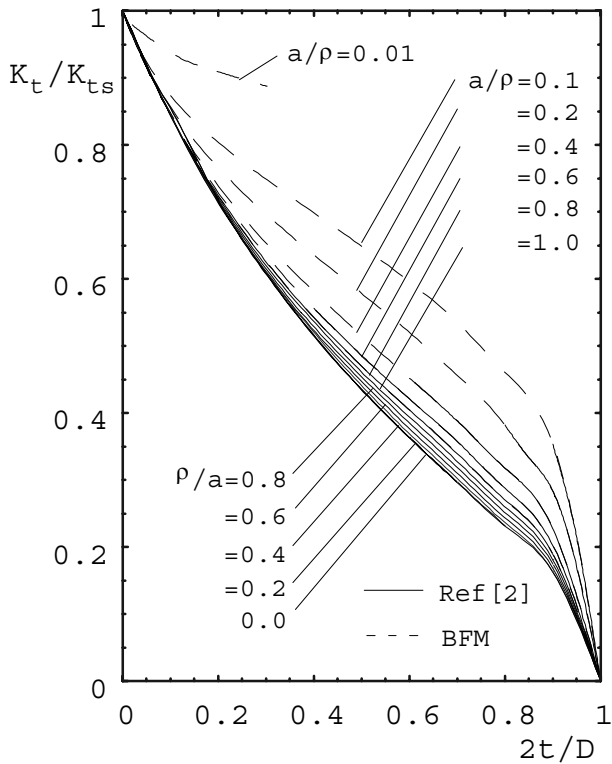
Fig.6-2 は，応力集中係数  $K_t$  と  $60^\circ V$  形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の



(a) Flat bar under tension



(b) Flat bar under bending



(c) Round bar under tension

Fig. 6-2  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$

解  $K_{ts}$  との比を切欠き形状の広い範囲 ( $0 < \rho/a \leq 10$ ) について示したものである [ Fig.6-2 (a) ]. ここで, 参考のため丸棒引張りの場合も示した [ Fig.6-2 (c) ]. なお, Fig.6-2 (a) で  $\rho/a \rightarrow 0$  の線は,  $\rho/a$  が小さい場合, たとえば  $\rho/a$  が 0.01 と 0.02 で  $K_t/K_{ts}$  が 3 桁程度以上一致することを確認して求めている.

Fig.6-2 より帯板引張りの場合 [ Fig.6-2 (a) ] の  $K_t/K_{ts}$  の値は, 丸棒引張りの場合 [ Fig.6-2 (c) ] よりもかなり揃っていることがわかる. 従って,  $K_{ts}$  を用いる計算式の適用範囲が, 引張りの場合よりも広範囲になる. 結局, Fig.6-2 (a) に示すような  $K_t/K_{ts}$  の値の検討から, 以下のことがわかる.

(1) 帯板引張りの場合 [ Fig.6-2 (a) ],  $\rho/a = 0.6, 2t/D = 0.9$  の範囲で, 帯板の面内曲げの場合 [ 6 ],  $\rho/a = 0.1, 2t/D = 0.6$  の範囲で,  $K_t/K_{ts}$  の値, ほとんど  $2t/D$  のみによって決まる. 従って  $K_{ts}$  とこの関係を用いれば, 鋭く浅い切欠きの  $K_t$  を求めることができる.

(2)  $K_t/K_{ts}$  の存在範囲は引張りの場合が曲げの場合より狭い範囲に存在する. また, 切欠きを有する丸棒と帯板を比べると切欠きを有する帯板の方が狭い範囲に存在し,  $K_{ts}$  による近似が有効である.

(3) 切欠きを有する帯板の引張りおよび曲げの両者とも浅い切欠き (引張り:  $2t/D = 0.05$ , 曲げ:  $2t/D = 0.02$ ) では,  $a/\rho$  が極端に大きい場合 ( $a/\rho = 0.01$ ) を除き  $K_t/K_{ts}$  の値はほぼ  $2t/D$  によって決まる狭い範囲に分布する.

(4) 切欠きを有する帯板の引張りおよび曲げの両者とも浅い切欠きで,  $a/\rho$  が極端に大きい場合 (引張り:  $2t/D = 0.05$  かつ  $a/\rho = 0.01$ , 曲げ:  $2t/D = 0.02$  かつ  $a/\rho = 0.02$ ) では, 次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果, 引張りで  $K_t = (1.000-1.005)$ , 曲げで  $K_t = (1.000-1.008)$  と見積ることができる. よってこの場合, 引張りの  $K_t = 1.002$ , 曲げの  $K_t = 1.004$  として十分精度よく評価できる.

### 6.3 鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数

ここでは, 切欠き半径  $\rho$  が大きいまたは深い切欠きに対する応力集中係数を考察する. このような切欠きに対して切欠きの深い場合に相当する回転双曲面切欠きの解が, 有限深さの切欠き問題に対して広い範囲で有効 (すなわち  $K_t/K_{th} \cong 1$ ) であることは, 丸棒引張り, 曲げについての前論文 [3], [4] より明らかである. そこで本論文では, 帯板引張, 曲げ問題についても同様に, 切欠きが深い場合の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる.

Table 6-1(a) は, 帯板引張問題における切欠きが深い場合すなわち  $2t/D = 0.7, 0.8, 0.9$  での応力集中係数  $K_t$  と深い双曲面切欠きの解  $K_{th}$  を比較したものである. Table

6-1 において  $2t/D=0.7 \sim 0.9$  と切欠きが深くなるに従い応力集中係数  $K_t$  と深い双曲面切欠きの解  $K_{IH}$  との比は一定になる。  $2t/D = 1.0$  のとき  $K_t/K_{IH} = 1.0$  ではなく  $K_t/K_{IH} = (0.989 \sim 1.061)$  となるのは、切欠き形状が  $60^\circ V$  形であるか、双曲面であるかの違いによるものと考えられる。そこで、まず Table6-1 (a)の収束性を利用して  $2t/D = 1.0$  の極限值  $K_{td}$  を求めて Table6-1 (a)に示す。Table6-1 (a)で  $\rho/a$  が小さく切欠きが深い場合には極値計算が困難であるが、この場合にも異なる  $K_t/K_{IH}$  の値の結果から  $2t/D = 1.0$  の収束性を確認して極限值を正確に求めた。そして、深い  $60^\circ V$  形切欠きの解  $K_{td}$  を Table6-1 (a)の結果より最小二乗法を適用してパラメータ  $x$  の関数として求めた。Table6-1 (a)の  $K_{td}$  の値で  $a/\rho$  の値は外挿値であるが、 $a/\rho=3.333$  と  $a/\rho=5$  の外挿値と  $a/\rho=5$  と  $a/\rho=10$  の外挿値が3桁程度一致することから十分正確な値であると考えられる。帯板曲げ問題においても同様の方法を用いて Table 6-1(b)の数値より深い  $60^\circ V$  形切欠きの解  $K_{td}$  を求めた。Fig.6-3 は、切欠きが深い場合の応力集中係数  $K_t$  [ Fig.6-3 (a) ] が  $K_{td}$  [ Fig.6-3 (b) ] の値で近似できることを示している。

**深い  $60^\circ V$  形切欠きの  $K_{td}$**

帯板引張り [ Fig.6-3 (b) ] (Fig.6-1 で  $a, t$  が有限で  $D \rightarrow \infty$  のとき  $K_t = K_{td}$ )

$$K_{td}/K_{IH} = 1.0015 - 0.054409x + 0.092227x^2 - 0.071641x^3 + 0.047665x^4 - 0.012184x^5 \dots \dots \dots (6-1.a)$$

$$K_{IH} = \frac{2(a/\rho+1)\sqrt{a/\rho}}{(a/\rho+1)\tan^{-1}\sqrt{a/\rho} + \sqrt{a/\rho}} \dots \dots \dots (6-1.b)$$

Table6-1  $K_t/K_{IH}$  when  $2t/D \rightarrow 1.0$

(a) Flat bar with notch under tension

x	c a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D 1.0
0.000	0.000					
0.100	0.100	10.00	0.999	0.999	0.999	0.999
0.200	0.200	5.000	0.996	0.995	0.995	0.995
0.300	0.300	3.333	0.996	0.992	0.992	0.992
0.400	0.400	2.500	0.999	0.994	0.992	0.990
0.500	0.500	2.000	1.003	0.995	0.991	0.989
0.600	0.600	1.667	1.008	0.999	0.993	0.991
0.700	0.700	1.429	1.012	1.003	0.995	0.994
0.800	0.800	1.250	1.018	1.008	1.000	0.997
0.900	0.900	1.111	1.023	1.012	1.003	1.000
1.000	1.000	1.000	1.027	1.016	1.007	1.004
1.000	1.000	1.000	1.027	1.016	1.007	1.004
1.100	1.111	0.900	1.031	1.021	1.011	1.009
1.200	1.250	0.800	1.036	1.026	1.016	1.014
1.300	1.429	0.700	1.041	1.031	1.021	1.018
1.400	1.667	0.600	1.046	1.037	1.027	1.026
1.500	2.000	0.500	1.052	1.044	1.035	1.034
1.600	2.500	0.400	1.057	1.050	1.042	1.042
1.700	3.333	0.300	1.061	1.056	1.050	1.050
1.800	5.000	0.200	1.061	1.059	1.056	1.056
1.900	10.00	0.100	1.054	1.058		1.058
2.000		0.000				1.060

(b) Flat bar with notch under bending

x	a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D 1.0
0.000	0.000					
0.100	0.100	10.00	0.997	0.997	1.001	0.997
0.200	0.200	5.000	0.996	0.997	1.000	0.996
0.300	0.300	3.333	0.997	0.999	1.000	0.997
0.400	0.400	2.500	0.998	1.001	1.000	0.998
0.500	0.500	2.000	1.000	1.001	1.002	1.000
0.600	0.600	1.667	1.002	1.001	1.002	1.000
0.700	0.700	1.429	1.003	1.002	1.002	1.002
0.800	0.800	1.250	1.005	1.002	1.003	1.002
0.900	0.900	1.111	1.004	1.005	1.005	1.005
1.000	1.000	1.000	1.005	1.005	1.005	1.005
1.000	1.000	1.000	1.005	1.005	1.005	1.005
1.100	1.111	0.900	1.006	1.006	1.006	1.006
1.200	1.250	0.800	1.007	1.007	1.007	1.007
1.300	1.429	0.700	1.010	1.009	1.010	1.010
1.400	1.667	0.600	1.011	1.011	1.011	1.011
1.500	2.000	0.500	1.014	1.014	1.014	1.014
1.600	2.500	0.400	1.018	1.018	1.018	1.018
1.700	3.333	0.300	1.023	1.022	1.022	1.022
1.800	5.000	0.200	1.030	1.029	1.033	1.030
1.900	10.00	0.100	1.038	1.040	1.048	1.038
2.000		0.000				1.046

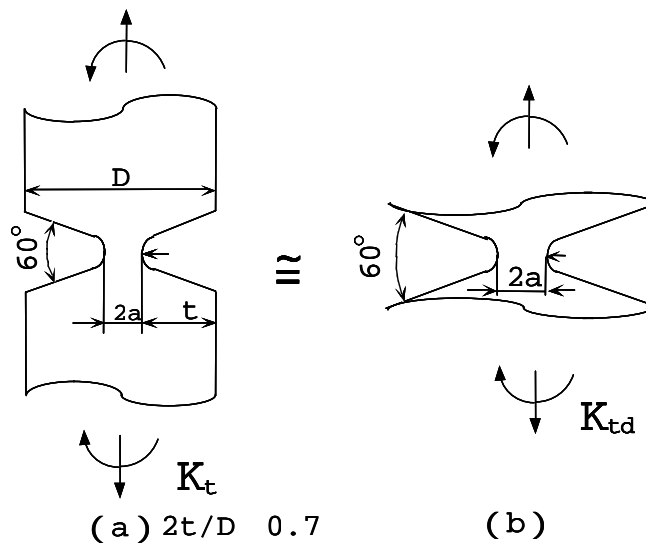


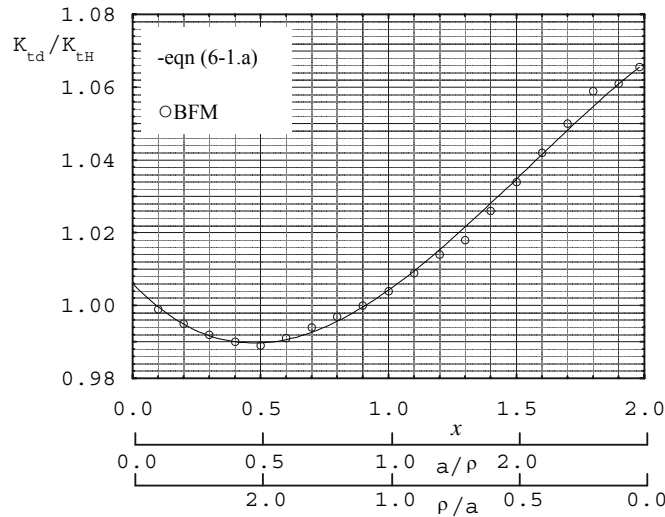
Fig. 6-3  $K_t$  and  $K_{td}$  with V-shaped notches

帯板曲げ (Fig.6-1 で  $a$ ,  $\rho$  が有限で  $t$  のとき  $K_t$ ,  $K_{td}$ )

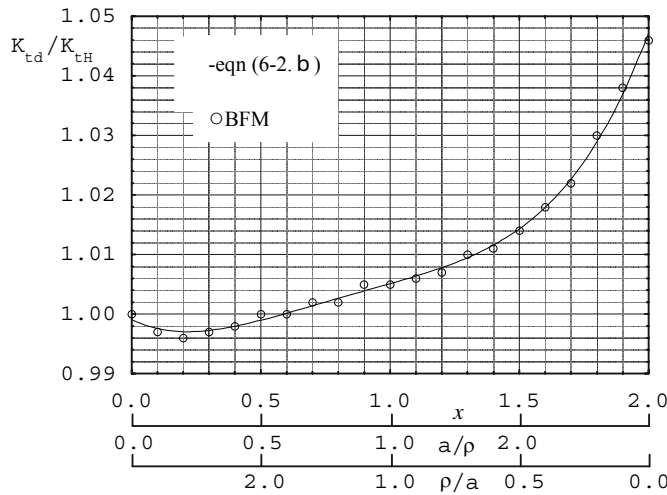
$$K_{td}/K_{tH} = 0.99907 - 0.020546x + 0.062738x^2 - 0.052069x^3 + 0.015923x^4 \quad \dots \dots (6-2.a)$$

$$K_{tH} = \frac{4a/\rho \times \sqrt{a/\rho}}{3\{\sqrt{a/\rho} + (a/\rho - 1)\tan^{-1}\sqrt{a/\rho}\}} \quad \dots \dots (6-2.b)$$

Fig.6-4(a), (b)は, 式 (6-1), (6-2)の  $K_{td}/K_{tH}$  の値を線図にしたものである.



(a) flat bar under tension



(b) round bar under bending

Fig.6-4  $K_{td} / K_{tH}$  vs.  $a / \rho$  or  $\rho / a$

次に、 $K_t$ と式(6-1)、(6-2)より求めた $K_{td}$ との比で整理した結果を Fig.6-5 に示す。ここで、帯板引張りの場合 [ Fig.6-5 (a) ] と、丸棒引張りの場合 [ Fig.6-5 (b) ] について比較、検討する。それによると帯板引張りの場合 [ Fig.6-5 (a) ] での  $K_t / K_{td}$  の値は、丸棒引張りの場合 [ Fig.6-5 (b) ] ほど揃っていないことがわかる。従って、 $K_{td}$ を用いる計算式の適用範囲が、丸棒引張りの場合よりも限定されることになる。

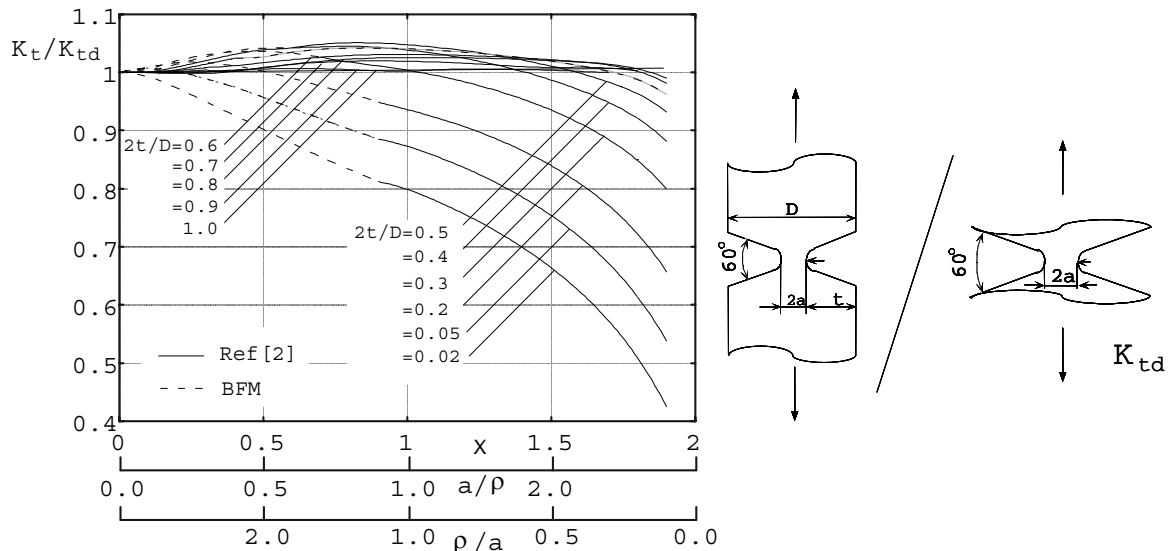
Fig.6-5 に示すような  $K_t / K_{td}$  の値の検討から、以下に示す範囲で  $K_{td}$  による近似が有効であることがわかる。

(1) 曲げの場合 [ Fig.6-5 (b) ] での  $K_t / K_{td}$  の値は、引張りの場合 [ Fig.6-5 (a) ]

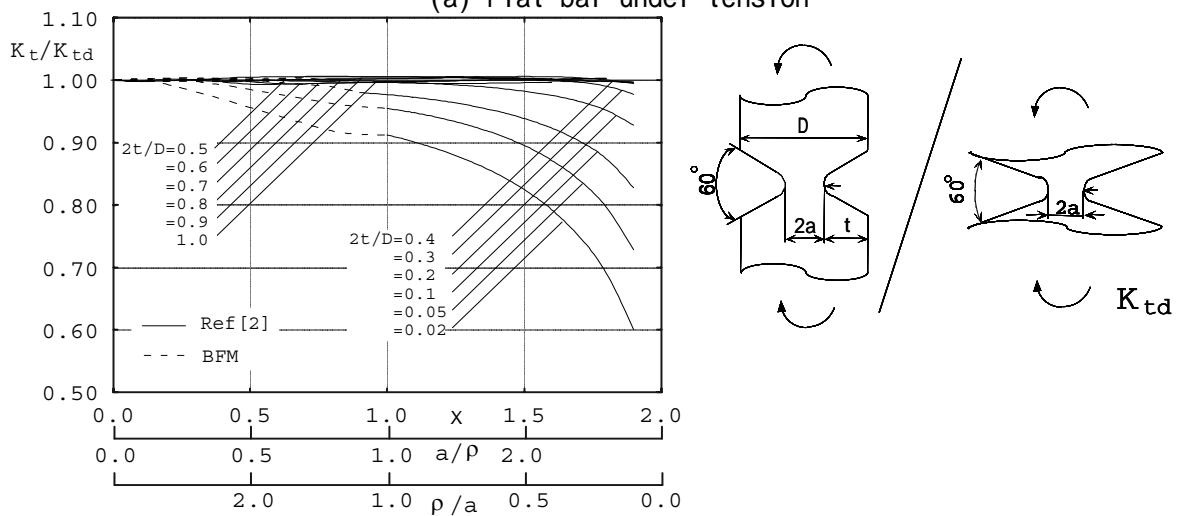
よりもかなり揃っていることがわかる。これは、 $K_{td}$ についての近似が、引張りの場合よりも広範囲にわたって利用できることを示している。結局、[Fig.6-5(a), (b)]とその数値的検討より(2),(3),(4)に示す範囲で、数%の範囲の中で $K_{td}$ で近似できることがわかる(この $K_{td}$ の有効範囲は最終的には $K_{ts}$ による近似の有効範囲との兼ね合いも含めて総合的に決めている)。また、切欠きを有する丸棒と帯板を比べると切欠きを有する帯板の方が広い範囲に存在し、 $K_{td}$ による近似は丸棒問題ほど有効ではないことがわかる。

(2)切欠きの曲率半径 が大きく(引張り:  $0 \leq a/\rho \leq 10$ , 曲げ:  $0 \leq a/\rho \leq 10$ ), 切欠きが深い場合(引張り:  $0.7 \leq 2t/D \leq 1.0$ , 曲げ:  $0.6 \leq 2t/D \leq 1.0$ )の $K_t/K_{td}$ の値は、引張りおよび曲げの両者とも、ほぼ1付近に分布する。従って、この範囲で $K_{td}$ とこの関係を用いれば、切欠きが深い場合の $K_t$ を求めることができる。

(3)切欠きの曲率半径 が大きい場合(引張り:  $0.05 \leq 2t/D \leq 0.7$ で  $0 \leq a/\rho \leq 0.5$ ,



(a) Flat bar under tension



(b) Flat bar under bending

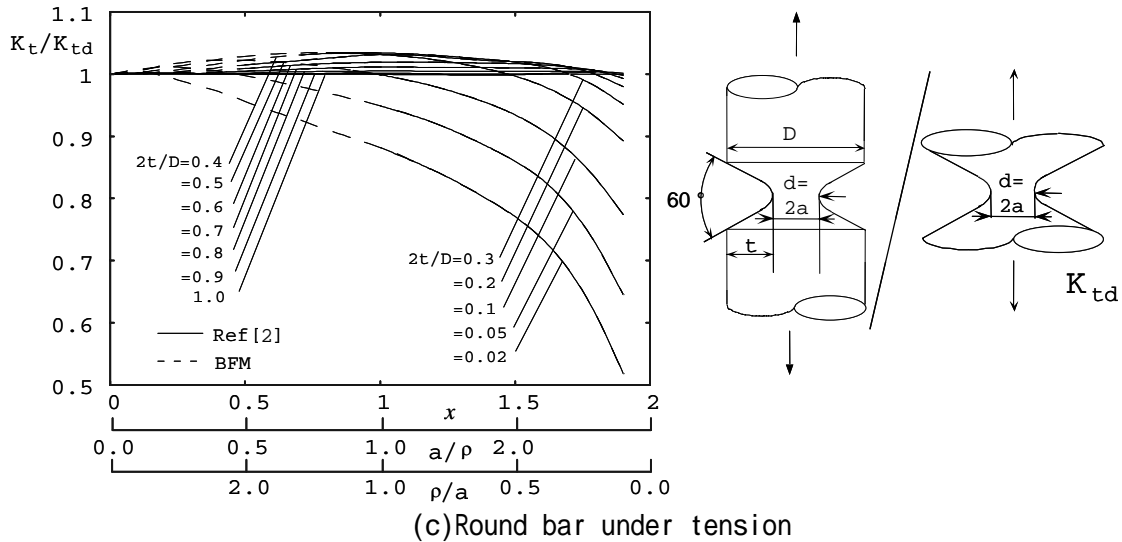


Fig. 6-5  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

曲げ：0.02  $2t/D$  0.6 で 0  $a/\rho$  1.25) の  $K_t/K_{td}$  の値は、引張りおよび曲げの両者とも、ほぼ 1 付近に分布する。従って、この範囲で  $K_{td}$  とこの関係を用いれば、切欠きが深い場合の  $K_t$  を求めることができる。

(4) 切欠きが深い場合 (引張り： $2t/D$  0.9, 10  $a/\rho$  , 曲げ： $2t/D$  0.6, 10  $a/\rho$  ) の  $K_t/K_{td}$  の値を考察した結果、引張りでは  $K_t/K_{td} = (0.999-1.000)$  , 曲げでは  $K_t/K_{td} = (0.997-1.005)$  と見積ることができる。よって引張りの場合  $K_t/K_{td} \cong 1.000$  , 曲げの場合  $K_t/K_{td} \cong 0.999$  として十分精度よく評価できる。

#### 6.4 その他の切欠きの応力集中係数

**6.4.1 帯板引張り** ここでは、前節まで示していない範囲 (引張り： $0.6 \rho/a$  2.0, 0.05  $2t/D$  0.7, 曲げ： $0.1 \rho/a$  0.8, 0.02  $2t/D$  0.6) の応力集中係数の評価方法を提案する。Fig. 6-2 より、このような範囲では、 $K_t/K_{ts}$  の値がほぼ  $2t/D$  のみによってきまり、狭い範囲に存在していることがわかる。そこで、高精度の近似式を作るため、引張りの場合  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$  , 曲げの場合  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.5}$  の値を基準にして  $K_t/K_{ts}$  との比をとる。その結果を Fig.6-6(a), (b) に示す。Fig.6-6(a) の引張りの結果より  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$  と  $K_t/K_{ts}$  の比は  $0.05 \leq 2t/D \leq 0.7$  の範囲で (0.97-1.04) の狭い範囲にあることがわかる。また、Fig.6-6(b) の曲げの結果より  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.5}$  と  $K_t/K_{ts}$  の比は  $0.02 \leq 2t/D \leq 0.6$  の範囲で (0.87-1.09) の狭い範囲にあることがわかる。

#### 6.5 切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

以上の議論から、切欠きを有する帯板の引張り、曲げにおいて切欠き形状の全範囲



に対して応力集中係数を与えるためその存在領域を6つに分けたものを Fig.6-7 に示す．そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す．

6・5・1 半無限板の 60°V 形切欠きまたは円弧形状切欠きの  $K_{ts}$  [2] (Fig.6-1 で  $t$  が有限で  $d, D$  のとき  $K_t / K_{ts}$ )

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \quad \dots \cdot (6-3.a)$$

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \quad \dots \cdot (6-3.b)$$

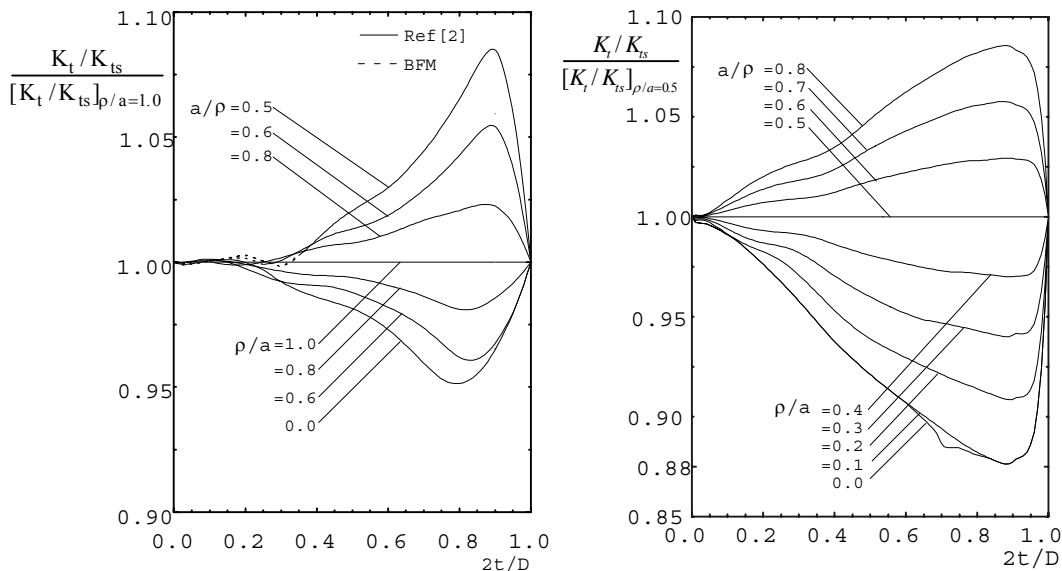
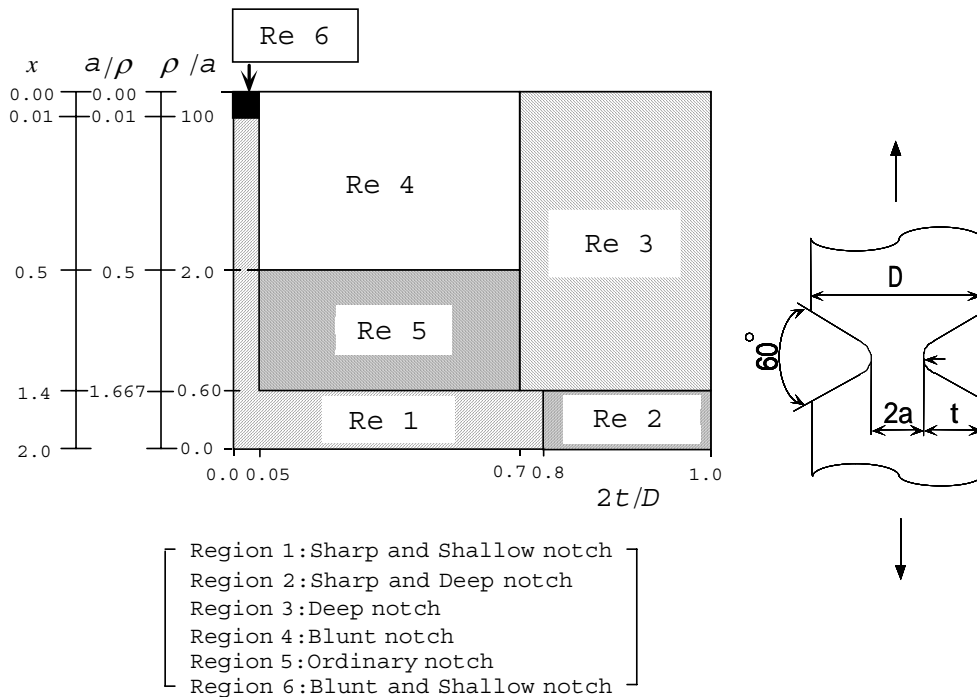


Fig. 6-6  $[K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ ,  $[K_t / K_{ts}]_{\rho/a=0.5}$  vs.  $2t/D$



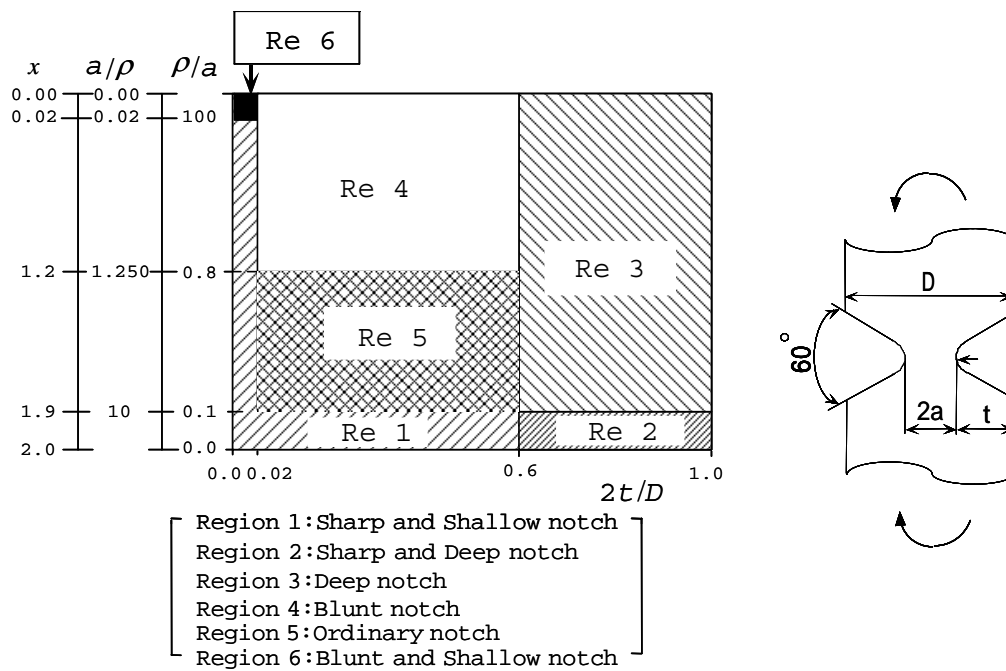


Fig.6-7 Classification of notch shape (a) flat bar under tension,  
 (b) flat bar under bending

$$\xi = \sqrt{t/\rho} \quad , \quad \eta = \sqrt{\rho/t} \quad , \quad K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots \dots (6-3.c)$$

6・5・2 鋭い切欠きまたは浅い切欠きの  $K_t$

帯板引張り ( Fig.6-7(a)の領域 1 :  $a/\rho \le 0.6$  かつ  $2t/D \le 0.7$  または  $a/\rho \le 0.01$  かつ  $2t/D \le 0.05$  または  $a/\rho \le 0.1$  かつ  $2t/D \le 0.9$  )

$$K_t/K_{ts} = 0.99438 - 0.69611\lambda - 4.5236\lambda^2 + 21.368\lambda^3 - 43.643\lambda^4 + 41.675\lambda^5 - 15.175\lambda^6 \quad \dots \dots \dots (6-4.a)$$

帯板曲げ ( Fig.6-7(b)の領域 1 :  $a/\rho \le 0.1$  かつ  $0.02 \le 2t/D \le 0.7$  または  $a/\rho \le 0.02$  かつ  $2t/D \le 0.02$  )

$$K_t/K_{ts} = 1.0000 - 2.1513\lambda - 6.2293\lambda^2 + 93.865\lambda^3 - 418.36\lambda^4 + 918.20\lambda^5 - 1003.5\lambda^6 + 436.18\lambda^7 \quad \dots \dots \dots (6-4.b)$$

Fig.6-8(a), (b)に, 式 (6-4.a), (6-4.b)の  $K_t/K_{ts}$  の値を図示する .

6・5・4 鋭く深い切欠きの  $K_t$

帯板引張り ( Fig.6-7(a)の領域 2 :  $a/\rho \le 0.1$  かつ  $2t/D \ge 0.9$  )

$$K_t/K_{td} \cong 1.000 \quad \dots \dots \dots (6-5.a)$$

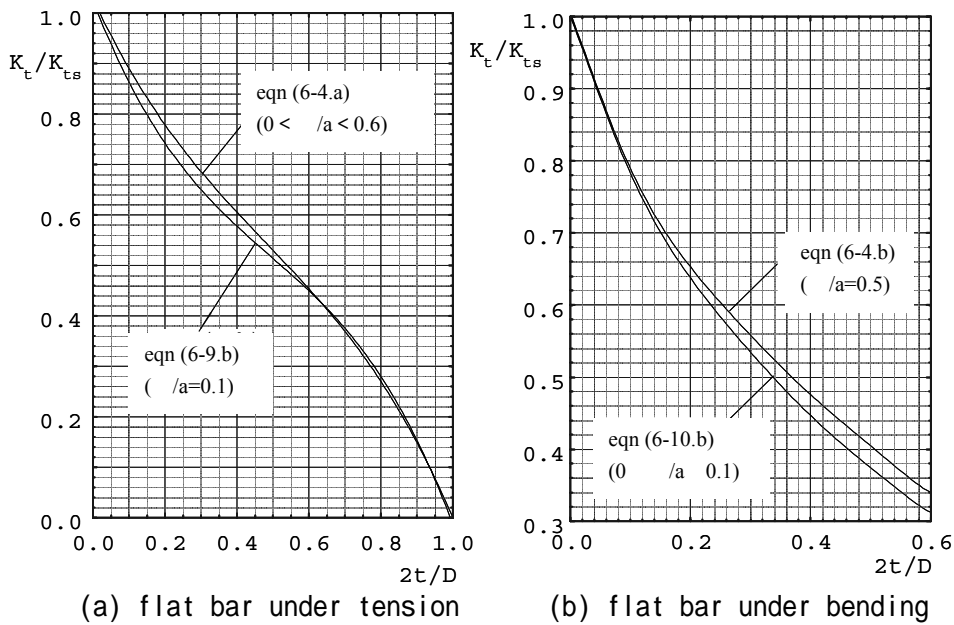


Fig.6-8  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$  (a) flat bar under tension, (b) flat bar under bending

帯板曲げ ( Fig.6-7(b)の領域 2 :  $a/D = 0.1$  かつ  $2t/D = 0.6$  )

$$K_t / K_{td} \cong 0.999 \quad \dots \dots \dots (6-5.b)$$

6・5・5 深い切欠きの  $K_t$

帯板引張り [ Fig.6-7(a)の領域 3 :  $2t/D = 0.7$  かつ  $a/\rho = 10$  ( $0 < x < 1.9$ ) ]

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{td} = & 2.5930 - 7.3660\lambda + 12.437\lambda^2 - 9.1519\lambda^3 + 2.4874\lambda^4 \\
 & + (4.4448 - 22.823\lambda + 44.839\lambda^2 - 39.076\lambda^3 + 12.615\lambda^4)x \\
 & + (-7.5560 + 36.835\lambda - 67.535\lambda^2 + 54.879\lambda^3 - 16.623\lambda^4)x^2 \\
 & \dots \dots \dots (6-6.a)
 \end{aligned}$$

帯板曲げ ( Fig.6-7(b)の領域 3 :  $2t/D = 0.6$  かつ  $a/\rho = 10$  ( $0 < x < 1.9$ ) )

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{td} = & 0.75109 + 1.2297\lambda - 2.1909\lambda^2 + 1.6677\lambda^3 \\
 & - 0.45760\lambda^4 \\
 & + (12.082 - 61.227\lambda + 114.16\lambda^2 - 92.990\lambda^3 \\
 & + 27.976\lambda^4)x \\
 & + (-11.035 + 50.431\lambda - 83.295\lambda^2 + 58.845\lambda^3 \\
 & - 14.946\lambda^4)x^2 \\
 & + (5.8099 - 24.521\lambda + 36.519\lambda^2 - 22.340\lambda^3 \\
 & + 4.5317\lambda^4)x^3 \\
 & + (-1.9742 + 8.9624\lambda - 14.925\lambda^2 + 10.845\lambda^3)
 \end{aligned}$$

.....(6-6.b)

Fig.6-9(a),(b)は、式(6-6)の $K_t/K_{td}$ の値を線図にしたものである。

**6・5・6 鈍く浅い切欠きの $K_t$**

帯板引張り (Fig.6-7(a)の領域6 :  $a/\rho$  0.01 かつ  $2t/D$  0.05)

$K_t \cong 1.003$  .....(6-7.a)

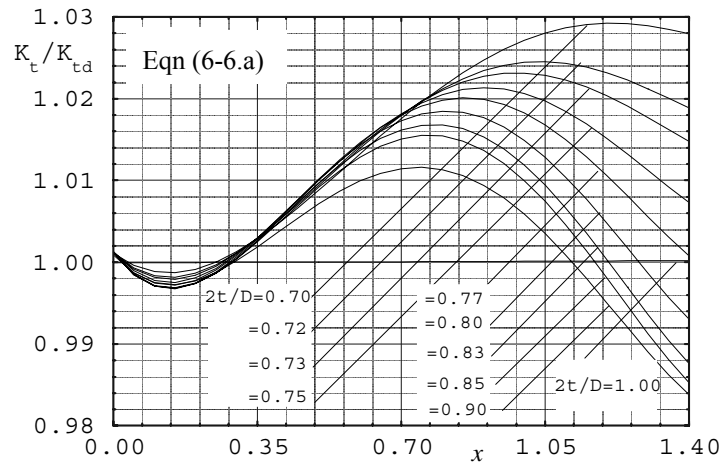
帯板曲げ ((Fig.6-7(b)の領域6 :  $a/\rho$  0.02 かつ  $2t/D$  0.02)

$K_t \cong 1.004$  .....(6-7.b)

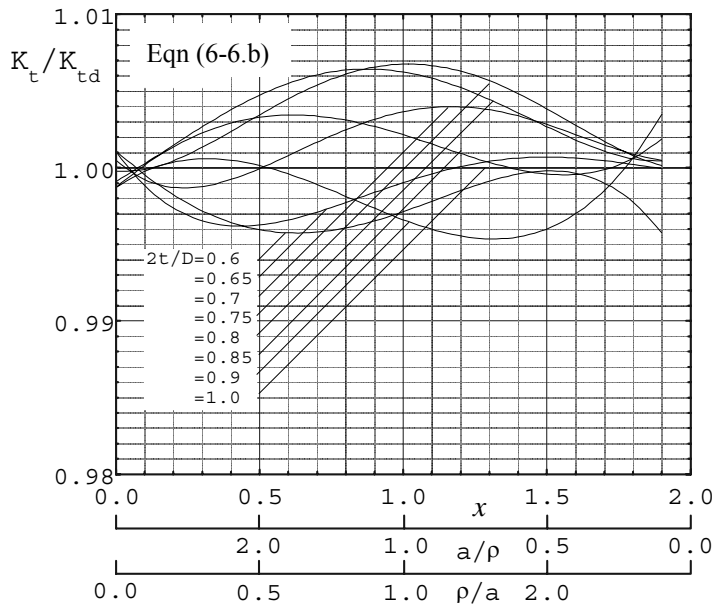
**6・5・7 鈍い切欠きの $K_t$**

帯板引張り [ Fig.6-7(a)の領域4 :  $a/\rho$  0.5 (0 x 0.8) かつ 0.05  $2t/D$

0.7 ]



(a) flat bar under tension



(b) flat bar under bending

Fig.6-9  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

$$\begin{aligned}
K_t/K_{td} = & 2.5930 - 7.3660\lambda + 12.437\lambda^2 - 9.1519\lambda^3 + 2.4874\lambda^4 \\
& + (4.4448 - 22.823\lambda + 44.839\lambda^2 - 39.076\lambda^3 + 12.615\lambda^4)x \\
& + (-7.5560 + 36.835\lambda - 67.535\lambda^2 + 54.879\lambda^3 - 16.623\lambda^4)x^2 \\
& \dots \dots \dots (6-8.a)
\end{aligned}$$

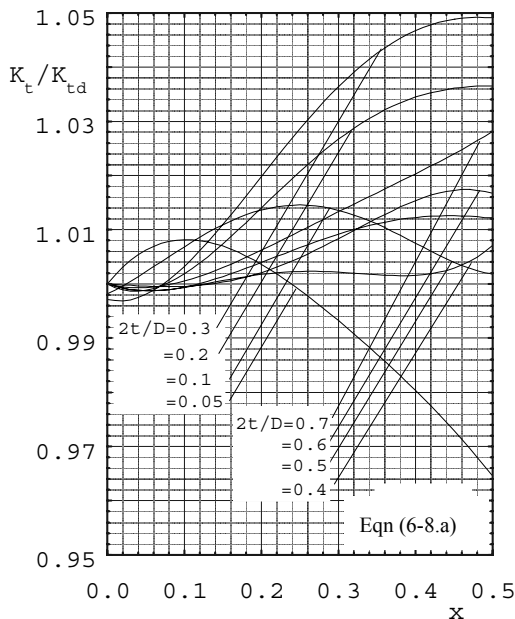
帯板曲げ ( Fig.6- 7 (a)領域 4 : a / 1.25 ( 0 x 1.2 ) かつ 0.02 2t/D 0.6 )

$$\begin{aligned}
K_t / K_{td} = & 1.0107 - 0.16098\lambda + 0.12751\lambda^2 + 8.0266\lambda^3 \\
& + 51.065\lambda^4 + 134.42\lambda^5 - 165.65\lambda^6 + 78.637\lambda^7 \\
& + (-0.21235 + 6.7374\lambda - 74.326\lambda^2 + 435.71\lambda^3 \\
& - 1515.9\lambda^4 + 3112.8\lambda^5 - 3448.7\lambda^6 + 1575.6\lambda^7)x \\
& + (0.075304 - 4.1035\lambda + 42.268\lambda^2 - 209.58\lambda^3 \\
& + 656.95\lambda^4 - 1357.0\lambda^5 + 1614.5\lambda^6 - 803.28\lambda^7)x^2 \\
& + (-0.030717 + 1.4458\lambda - 16.882\lambda^2 + 101.26\lambda^3 \\
& - 381.42\lambda^4 + 881.45\lambda^5 - 1095.7\lambda^6 + 549.30\lambda^7)x^3 \\
& \dots \dots \dots (6-8.b)
\end{aligned}$$

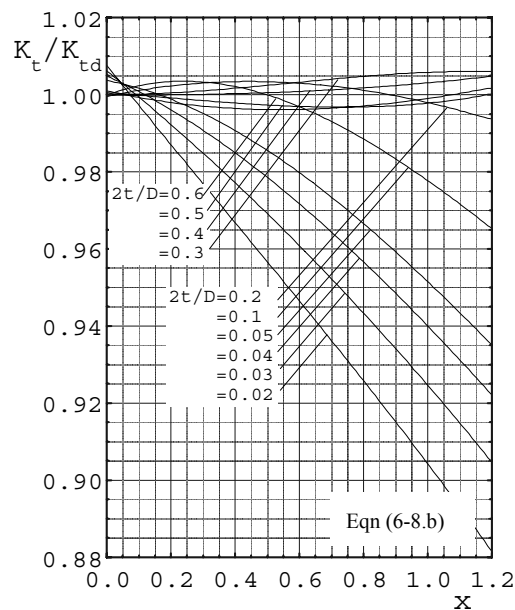
Fig.6-10(a),(b)に, 式 (6-7) ,(6-8)の  $K_t/K_{td}$  の値を図示する .

6・5・8 その他の切欠きの  $K_t$

帯板引張り [ Fig.6- 7 (a)の領域 5 : 0.6  $\rho/a$  2.0 かつ 0.05 2t/D 0.7 ]



(a) flat bar under tension



(b) flat bar under bending

Fig.6-10  $K_t / K_{td}$  vs.  $a / \rho$  or  $\rho / a$

$$\begin{aligned}
K_t/K_{ts} = & \left\{ 3.8276 - 16.379(\rho/a) + 37.717(\rho/a)^2 - 44.164(\rho/a)^3 + 27.753(\rho/a)^4 \right. \\
& - 8.9125(\rho/a)^5 + 1.1487(\rho/a)^6 + (-49.154 - 271.97(\rho/a) - 589.36(\rho/a)^2 \\
& + 638.12(\rho/a)^3 - 362.87(\rho/a)^4 + 102.76(\rho/a)^5 - 11.324(\rho/a)^6) \lambda \\
& + (+345.16 - 1895.8(\rho/a) + 4035.3(\rho/a)^2 - 4216.6(\rho/a)^3 + 2248.9(\rho/a)^4 \\
& - 569.65(\rho/a)^5 - 51.323(\rho/a)^6) \lambda^2 + (-1674.1 - 9420.3(\rho/a) + 20735(\rho/a)^2 \\
& - 22625(\rho/a)^3 + 12792(\rho/a)^4 + 3529.3(\rho/a)^5 - 367.20(\rho/a)^6) \lambda^3 \\
& + (-3956.6 - 22481(\rho/a) + 50227(\rho/a)^2 - 55836(\rho/a)^3 + 32299(\rho/a)^4 \\
& - 9174.8(\rho/a)^5 + -994.08(\rho/a)^6) \lambda^4 + (-4192.5 + 23884(\rho/a) + 53615(\rho/a)^2 \\
& + 59837(\rho/a)^3 + 34655(\rho/a)^4 + 9810.5(\rho/a)^5 - 1051.6(\rho/a)^6) \lambda^5 \\
& + (1698.2 - 9683.5(\rho/a) + 21791(\rho/a)^2 - 24339(\rho/a)^3 + 14051(\rho/a)^4 \\
& \left. + 3938.0(\rho/a)^5 - 413.19(\rho/a)^6) \lambda^6 \right\} ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})
\end{aligned}$$

. . . . . (6-9.a)

$$[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0} = 1.0071 - 1.2335\lambda + 1.0062\lambda^2 - 1.2169\lambda^3 + 0.65870\lambda^4$$

. . . . . (6-9.b)

帯板曲げ ( Fig.6-7(b)の領域 5 : 0.1 / a 0.8 かつ 0.02 2t/D 0.6 )

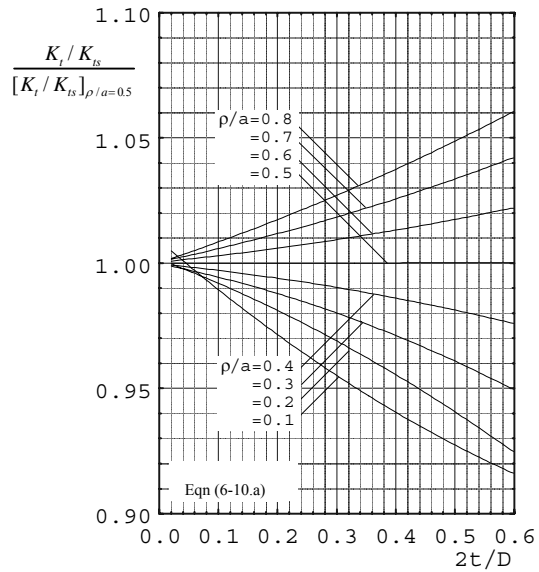
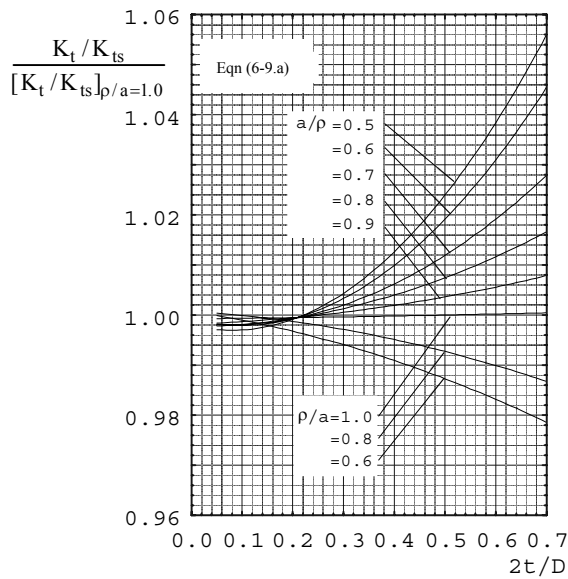
$$\begin{aligned}
K_t/K_{ts} = & \{ 1.0310 - 0.34246(\rho/a) + 1.5454(\rho/a)^2 - 3.7371(\rho/a)^3 \\
& + 5.1403(\rho/a)^4 - 3.7829(\rho/a)^5 + 1.1508(\rho/a)^6 \\
& + (-0.52691 + 5.0283(\rho/a) - 23.006(\rho/a)^2 + 58.227(\rho/a)^3 \\
& - 82.097(\rho/a)^4 + 61.078(\rho/a)^5 - 18.666(\rho/a)^6) \lambda \\
& + (0.68178 - 9.9640(\rho/a) + 50.889(\rho/a)^2 - 130.57(\rho/a)^3 \\
& + 184.37(\rho/a)^4 - 136.77(\rho/a)^5 + 41.614(\rho/a)^6) \lambda^2 \\
& ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.5})
\end{aligned}$$

. . . . . (6-10.a)

$$\begin{aligned}
[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.5} = & 1.0041 - 2.1388\lambda - 6.7332\lambda^2 + 104.66\lambda^3 \\
& - 477.84\lambda^4 + 1070.0\lambda^5 - 1192.1\lambda^6 + 528.00\lambda^7
\end{aligned}$$

. . . . . (6-10.b)

Fig.6-11(a), (b)に, 式(6-9.a), (6-10.a)の  $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$  の値を図示する.



(a) flat bar under tension      (b) flat bar under bending

Fig.6-11  $(K_t / K_{ts}) / ([K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$  vs.  $2t / D$

以上の式および線図を利用することにより Fig.6-12 に示すような全範囲の応力集中係数  $K_t$  が求まる。

## 6.6 結 言

本章では切欠きを有する帯板引張り，曲げ問題の (Fig.6-1) の応力集中係数  $K_t$  を切欠き形状の全範囲で正確に与えることを目的とした．そのため，特に切欠きが深い場合 (Fig.6-3) の応力集中係数  $K_{td}$  を誤差 0.2%程度以内で計算式として求め利用した．

(1) 丸棒引張り，帯板引張り，曲げ問題の  $K_t$  を  $K_{ts}$  を用いて精度良く求めることのできる範囲は，Fig.6-2 に示すように丸棒問題より帯板問題が広い．また，各々の問題においても曲げ問題より引張問題の方が広い範囲で  $K_{ts}$  による近似が有効である．

(2) 丸棒引張り，帯板引張り，曲げ問題の  $K_t$  を  $K_{td}$  で近似できる範囲は，Fig.6-4 に示すように帯板問題より丸棒問題が広い．また，丸棒の問題，帯板の問題の両者において，引張問題より曲げ問題の方が広い範囲で  $K_{td}$  による近似が有効である．

以上のような曲げ応力集中係数の特徴を考慮して，すべての切欠き形状に対して誤差 1%程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した．

## 参考文献

- (1) Neuber, H., Kerbspannungslehre, (1957), 11, Springer-Verlag.
- (2) 野田尚昭・高瀬康・門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-7, (1996), 757-762.
- (3) 野田尚昭, 西谷弘信, 高瀬 康, 篠崎正孝, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (鋭い  $60^\circ V$  形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片), 日本機械学会論文集, 63-613, A (1997-9), 1926-1931.
- (4) 野田尚昭, 高瀬 康, 神崎健太郎, 西谷弘信, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (円弧形及び  $60^\circ V$  形切欠きを有する回転曲げ試験片), 日本機械学会論文集, 64-625, A (1998), 2251-2256.
- (5) 野田尚昭, 毛 映紅, 高瀬 康, 西谷弘信, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (円弧形及び  $60^\circ V$  形切欠きを有する帯板引張試験片), 日本機械学会論文集, 66-646, A (2000), 1197-1203.
- (6) N.-A., Noda and Y, Takase, Stress Concentration Factor Formulas Useful for All Notch Shapes in a Flat Test Specimen Under Tension and Bending, Journal of Testing and Evaluation, Vol. 30, No.5 (2002), pp. 369-381.

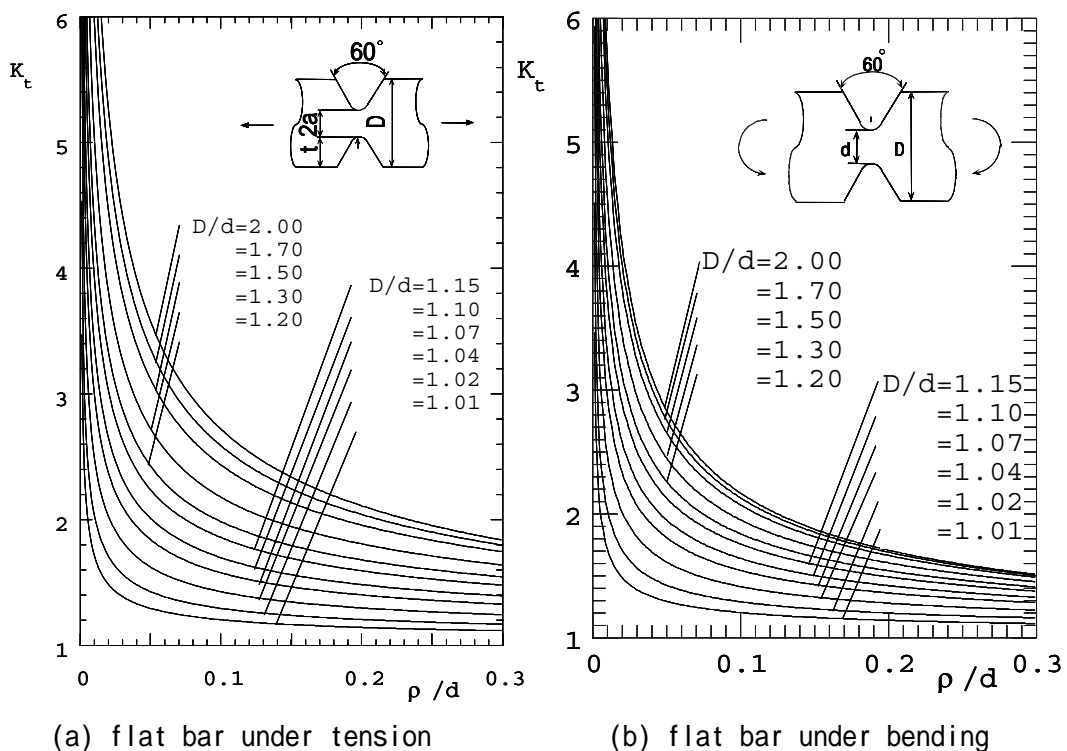


Fig.6-12  $K_t$  vs.  $\rho/d$



## 第7章 フィレット部を有する段付丸棒問題のフィレットの寸法の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式

### 7.1 緒 言

フィレット部を有する丸棒の応力集中問題に関しては、今までにもいくつかの研究はあるものの、切欠き問題に比べ精度の高い研究の解析結果は少ない[1]。これは、切欠きに比べてフィレットの問題では、生じる最大応力の位置がフィレット部の寸法  $a$ 、 $t$  に依存して変化するので解析困難であるということが大きな理由の一つと考えられる。しかし、フィレット部を有する丸棒の応力集中の研究は、特に軸や強度研究用の試験片の設計などにおいて問題となるばかりでなく、現在の軽量かつ強度を追求する構造物の設計において最も重要なものの一つであると言える。そのため、実際に設計や研究に利用する際には応力集中係数を簡便に利用できる近似式や線図の形式にして示しておくことが望まれる。著者は先に切欠きに対する Neuber 三角則[2]と同様な考え方に基づいて、応力集中係数を評価できる近似公式を提案し、さらにその値を修正することによってフィレット部の広範囲の形状寸法に対して応力集中評価に便利な近似式を与えた[3],[4]。しかし、この場合、体積力法による計算結果を基にしているためフィレット部の寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を与えることはできなかった。

そこで本章では、フィレット部を有する丸棒の引張、曲げ問題 (Fig.7-1) を取り扱う。具体的には、まず、フィレットの段の高さが大きい場合の極限の応力集中係数

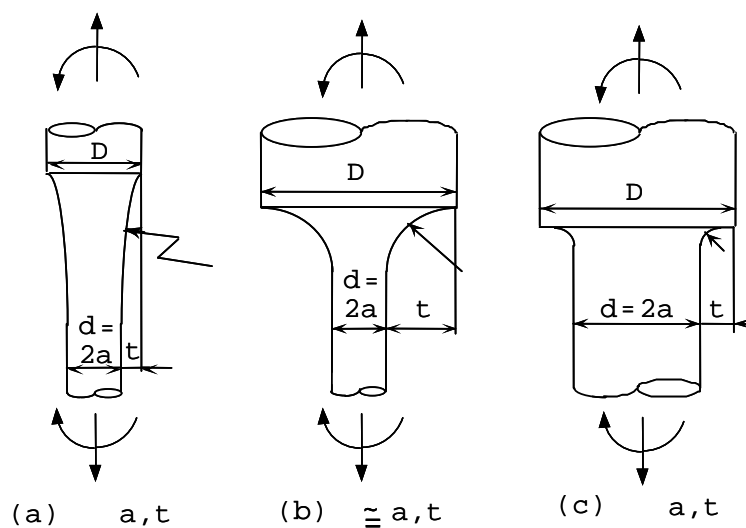


Fig. 7-1 Round specimens with fillet

$K_{fd}$  を正確に求め、先に求めたフィレットの段の高さが小さい場合の極限の解  $K_{ts}$  [3] とあわせて利用する。そして、Fig.7-1 の問題について体積法によって得られた結果を基に、詳しい物理的考察を行う。そして、最終的にはフィレット形状の全範囲に対して精度の高い応力集中係数を与える計算式と線図を提案することを目的とする。フィレット部を有する丸棒の問題では、切欠きを有する丸棒の問題と異なり、段の高さが浅い場合の解や深い場合の解を利用できる範囲が異なるので注意が必要である。

## 7.2 フィレットの段の高さが小さいときの応力集中係数

まず、曲率半径  $\rho$  が小さい Fig.7-1 (c) のようなフィレットに対する応力集中係数  $K_f$  を考察する。フィレットの問題に対してはフィレット部が浅い場合の応力集中係数  $K_{ts}$  として、Fig. 7-2(a)に示すフィレット部を有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  を用いる。Fig. 7-2 は  $K_{ts}$  [ Fig. 7-2(a)] が近似的に [Fig. 7-2(d)] で評価できることを説明している。ここで、 $K_{IH}$  はだ円孔を有する一様引張りを受ける無限板中のだ円孔の片縁に表面力  $\sigma$  が作用する場合の応力集中  $K_{IE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$  である。Fig. 7-2(a)の問題は半無限板の自由縁で  $\tau_{xy} = 0$  となるため、Fig. 7-2(b)の縁をまるめた長方形穴の問題に近似的に等価となる。Fig. 7-2(b)の問題は長方形穴が荷重軸方向に無限に長いものであるため、長方形穴の下縁で応力を解放することの影響を無視できる。このため長方形穴の下縁に表面力  $\sigma$  が作用する問題 [ Fig. 7-2(c)] に置き換えられる。Fig. 7-2(c)の問題は、等価だ円の概念より Fig. 7-2(d)の問題に置き換えられる。このた

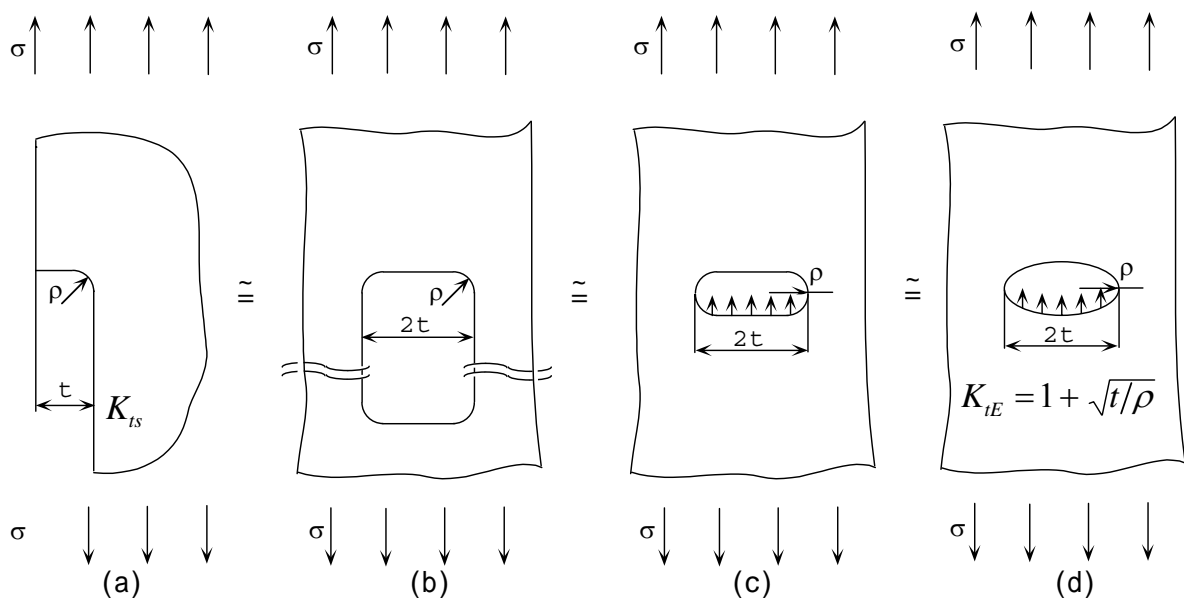


Fig. 7-2 SCF of a fillet in a semi-infinite plate  $K_{ts}$  can be approximated by

$$K_{IE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} .$$

め，穴縁で応力自由の円孔の応力集中  $K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$  ではなく  $K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$  がよい近似となる．その結果を式(1.a),(1.b)と Fig. 7-3(a),(b)に示す．

フィレット部を有する半無限板の  $K_{ts}$  [2] (Fig.7-1で  $t$  が有限で  $d, D$  のとき  $K_t$   $K_{ts}$ )

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.000 + 0.159\xi - 0.127\xi^2 + 0.050\xi^3 \quad \dots (7-1.a)$$

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.106 + 0.016\eta - 0.059\eta^2 + 0.019\eta^3 \quad \dots (7-1.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho} \quad \dots (7-1.c)$$

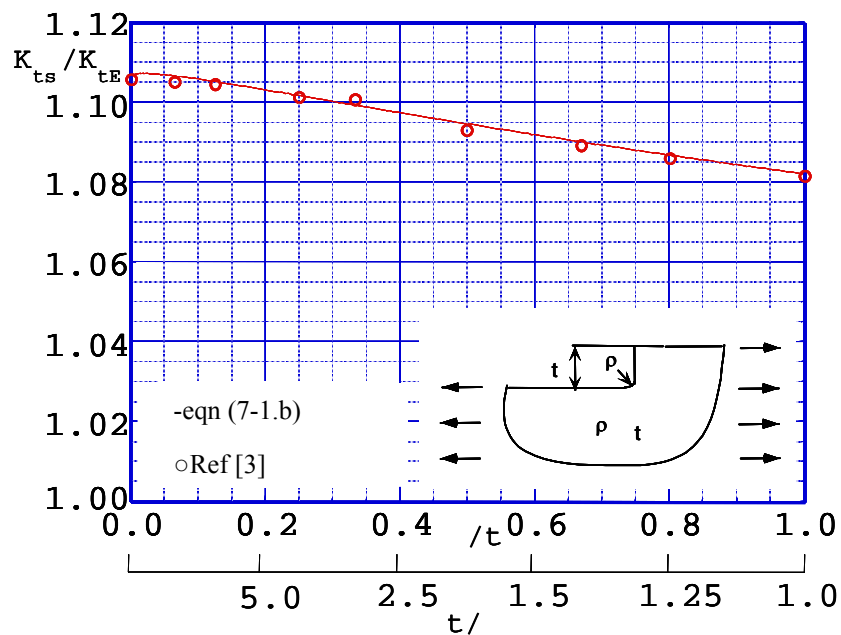
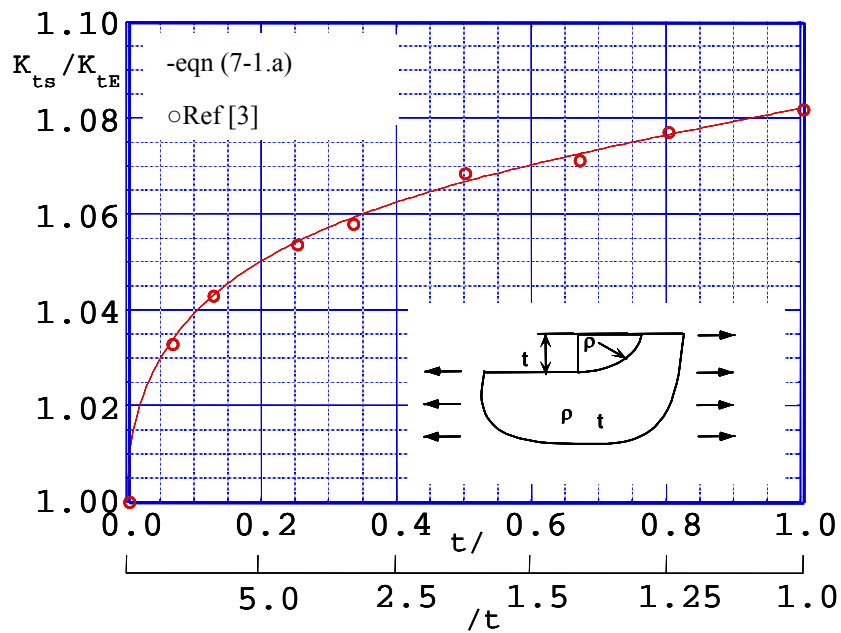
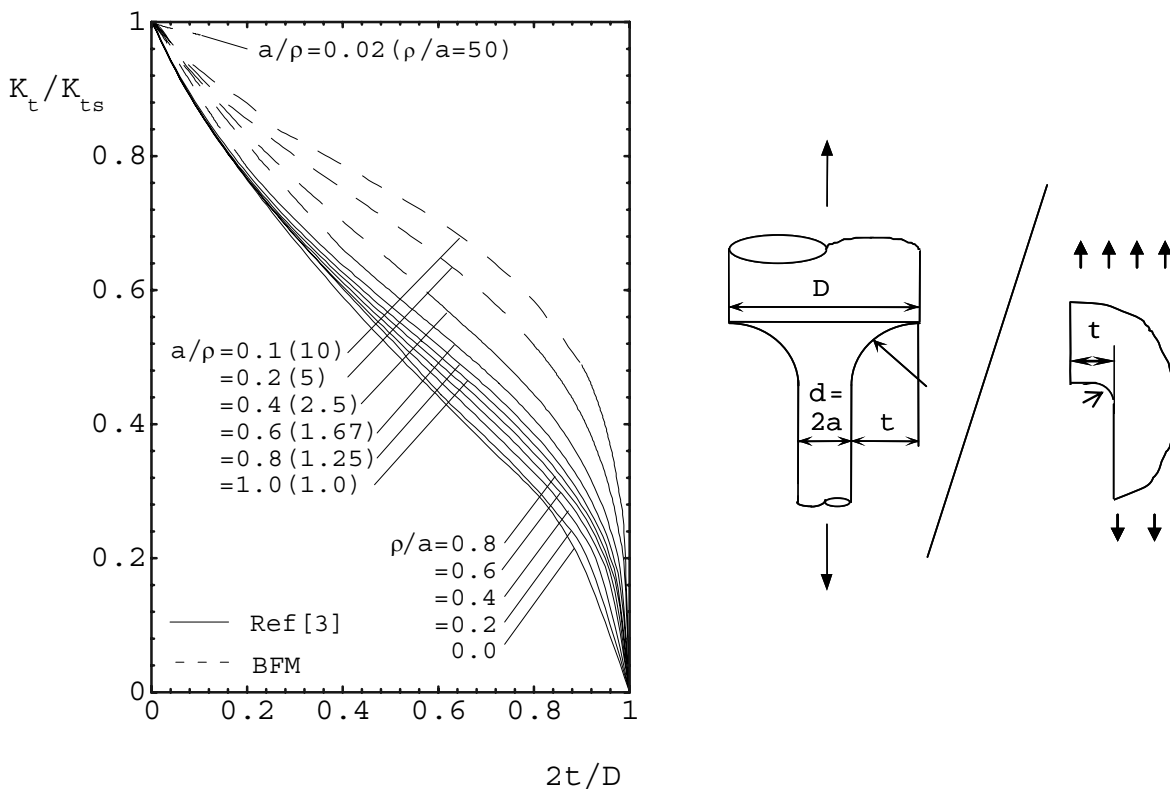


Fig. 7-3  $K_t/K_{tE}$  vs.  $t/\rho$  or  $\rho/t$

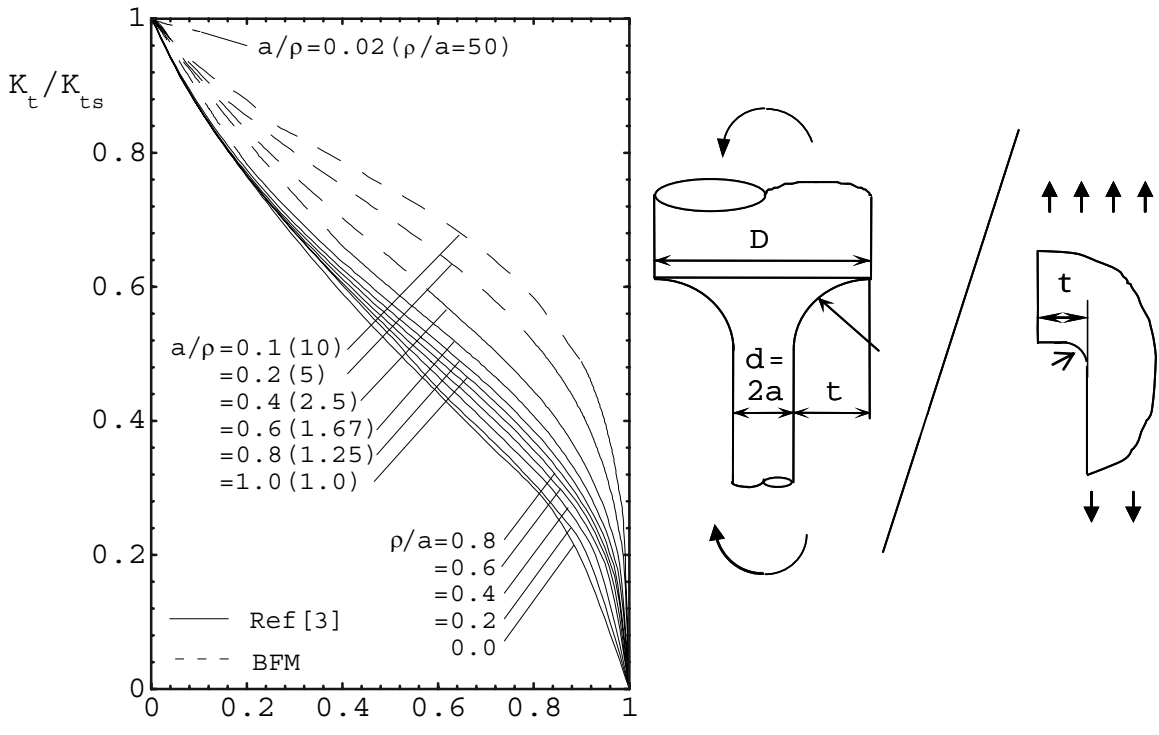
このような曲率半径が小さいときの応力集中係数が，同一形状比  $t/\rho$  の段の高さが小さいフィレットを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  [3] (Fig.7-1 で  $2t/D \rightarrow 0$  に相当) を利用して効率良く求められることを確認している [5, 6] . Fig.7-4(a), (b) は，フィレット部を有する丸棒の引張り，曲げにおける応力集中係数  $K_t$  と段の高さが小さいフィレット部を有する半無限板の応力集中係数の解  $K_{ts}$  との比をフィレットの広い範囲 ( $0 < \rho/a \leq 10$ ) について示したものである [ Fig.7-4 (a), (b), ] [7] . また，比較のため，Fig.7-4(c) に  $60^\circ V$  形切欠きを有する丸棒の引張問題の  $K_t/K_{ts}$  の値も示す [8] . なお，Fig.7-3 で  $\rho/a \rightarrow 0$  の線は， $\rho/a$  が小さい場合，たとえば  $\rho/a$  が 0.10 と 0.11 で  $K_t/K_{ts}$  が 3 桁程度以上一致することを確認して求めている .

Fig.7-4 より曲げの場合 [ Fig.7-4 (b) ] の  $K_t/K_{ts}$  の値は，引張りの場合 [ Fig. 7-4 (a) ] ほど揃っていないことがわかる . 従って， $K_{ts}$  を用いる計算式の適用範囲が，引張りの場合よりも限定されることになる . 結局，[ Fig. 7-4 ] に示すような  $K_t/K_{ts}$  の値の検討から，以下のことがわかる .

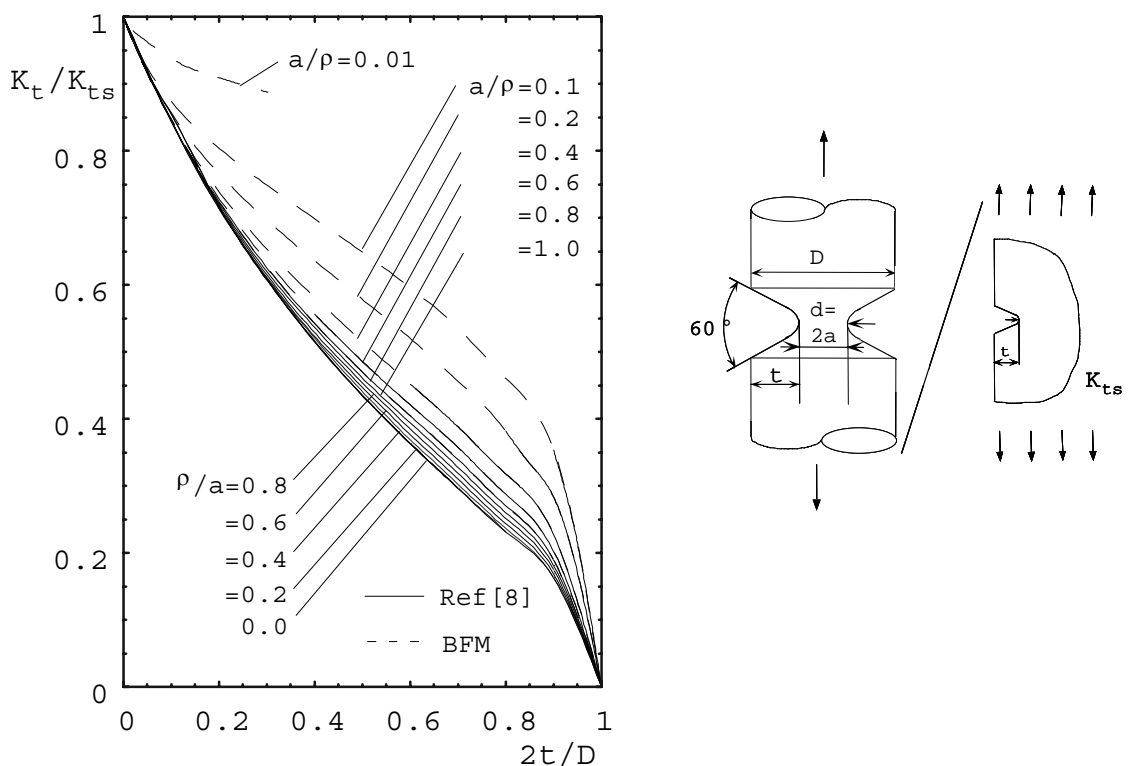
( 1 ) フィレット部を有する丸棒の引張りおよび曲げの両者とも [ Fig. 7-4 (a) ] 曲率半径が小さいフィレット ( $\rho/a = 0.1$ ) では， $K_t/K_{ts}$  の値は  $2t/D$  のほぼ全範囲でほとんど  $2t/D$  のみによって決まる . 従って  $K_{ts}$  とこの関係を用いれば，曲率半径 が小さいときのフィレットの  $K_t$  を求めることができる .



(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending



(c) Round bar with notch under tension

Fig. 7-4  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$

(2)  $K_t/K_{ts}$  の存在範囲は引張りの場合が曲げの場合より狭い範囲に存在する．また，切欠きを有する丸棒とフィレット部を有する丸棒を比べるとフィレット部を有する丸棒の方が狭い範囲に存在し， $K_{ts}$  による近似が有効である．

(3) 段の高さが小さい場合のフィレット ( $2t/D = 0.02$ ) では， $a/\rho$  が極端に大きい場合 ( $a/\rho = 0.02$ ) を除き  $K_t/K_{ts}$  の値はほぼ  $2t/D$  によって決まる狭い範囲に分布する (例えば  $2t/D = 0.02$  で  $a/\rho = 0.02$  ならば， $0.981 < K_t/K_{ts} < 0.994$ )．従って  $K_t/K_{ts}$  のこのような性質を利用すれば，段の高さが小さいときのフィレットの  $K_t$  を求めることができる．

(4) フィレットの段の高さが小さく， $a/\rho$  が極端に大きい場合 ( $2t/D = 0.02$  かつ  $a/\rho = 0.02$ ) では，次節で曲率半径が大きいフィレットの応力集中係数を考察した結果， $K_t = (1.000-1.008)$  と見積ることができる．よってこの場合  $K_t \cong 1.004$  として十分精度よく評価できる．

### 7.3 フィレットの曲率半径が大きいときまたは段の高さが大きい場合の応力集中係数

ここでは，曲率半径  $\rho$  が大きいかまたはフィレットの段の高さが大きいときに対する応力集中係数を考察する．著者は先に，このようなフィレットに対しては深い回転双曲面切欠きの解  $K_{th}$  が引張りを受ける場合の解が，有限深さのフィレット問題に対して広い範囲で有効 (すなわち  $K_t/K_{th} \cong 1$ ) であることを確認している [2]．ここでは，寸法の全範囲で有効な計算式を求めるため，フィレットの段の高さが無限に大きい場合 [Fig.7-5] の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる．

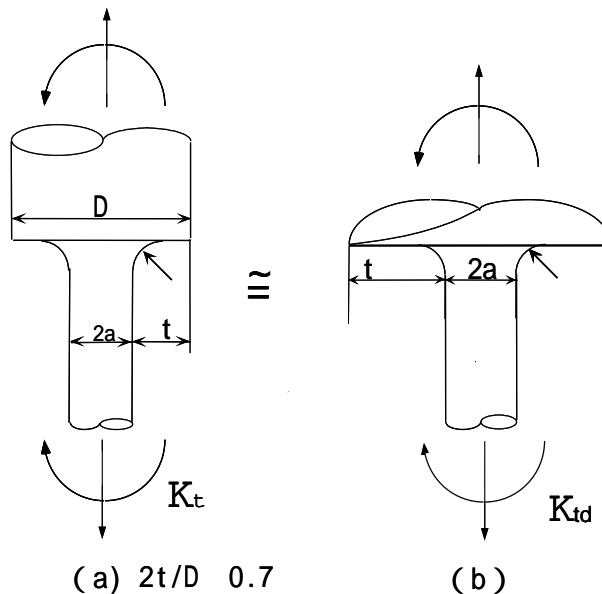


Fig. 7-5  $K_t$  and  $K_{td}$  with fillets

Table7-1(a)はフィレット部を有する丸棒引張問題のフィレットの段の高さが大きい場合すなわち $2t/D=0.7, 0.8, 0.9$ での応力集中係数 $K_t$ と深い双曲面切欠きの解 $K_{IH}$ を比較したものである。Table7-1(a)において $2t/D=0.7-0.9$ とフィレットの段の高さが大きくなるに従い応力集中係数 $K_t$ と深い双曲面切欠きの解 $K_{IH}$ との比は一定になる。そこで、まずTable7-1(a)の収束性を利用して $2t/D=1.0$ の極限值 $K_{td}$ を求めてTable7-1(a)に示す。Table7-1(a)で $\rho/a < 0.3$ では $2t/D=1.0$ のときの収束性がやや悪くなり、また体積力法による計算も困難になるので $2t/D=1.0$ の極限值を求めることが難しくなる。しかし、この場合にも $2t/D=0.7-0.9$ の範囲で追加計算を行い、 $2t/D=1.0$ の最終的な値を外そうや推定するなどして求めた。Table7-1(a)の $2t/D=1.0$ の値は、 $0 < x < 1.7$ で有効数字3桁程度、 $1.8 < x < 2.0$ で誤差1-2%程度以内[Table7-1(a)の( )の値]で得られているものと考えている。そして、段の高さが大きいフィレットの解 $K_{td}$ をTable7-1(a)の結果より最小二乗法を適用してパラメータ $x$ の関数として求めた。結局、フィレットの段の高さが大きい場合( $2t/D=0.7$ )の応力集中係数 $K_t$ は、このようにして求めたフィレットの段の高さ $t$ が $D$ の場合( $2t/D=1$ )の $K_{td}$ の値で近似できる(Fig.7-5)。

同様にフィレット部を有する丸棒曲げ問題[Fig. 7-5]においても、Table7-1(b)から、 $K_{td}$ の近似式を作製した。その結果を式(7-1.a),(7-1.b)とFig. 7-6(a),(b)に示す。

段の高さが大きいフィレットの $K_{td}$  [Fig.7-5] (Fig.7-1 で $a$  ,  $\rho$  が有限で $t=D$  のとき $K_t=K_{td}$ )

**丸棒張り**

$$K_{td} / K_{IH} = 1.0007 - 0.10457x + 0.12152x^2 - 0.11645x^3 + 0.08214x^4 - 0.023524x^5 \dots (7-2.a)$$

$$K_{IH} = (1/N) \{ (a/\rho)\sqrt{a/\rho+1} + (0.5+\nu)(a/\rho) + (1+\nu)(\sqrt{a/\rho+1}+1) \} \dots (7-2.b)$$

$$N = a/\rho + 2\nu\sqrt{a/\rho+1} + 2 \dots (7-2.c)$$

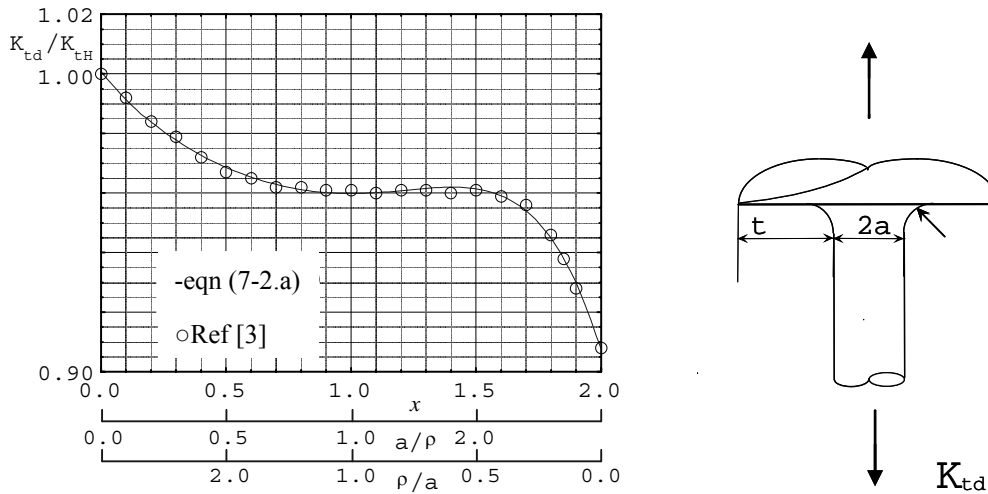
**丸棒曲げ**

$$K_{td} / K_{IH} = 0.99891 - 0.067502x + 0.051582x^2 - 0.019304x^3 \dots (7-3.a)$$

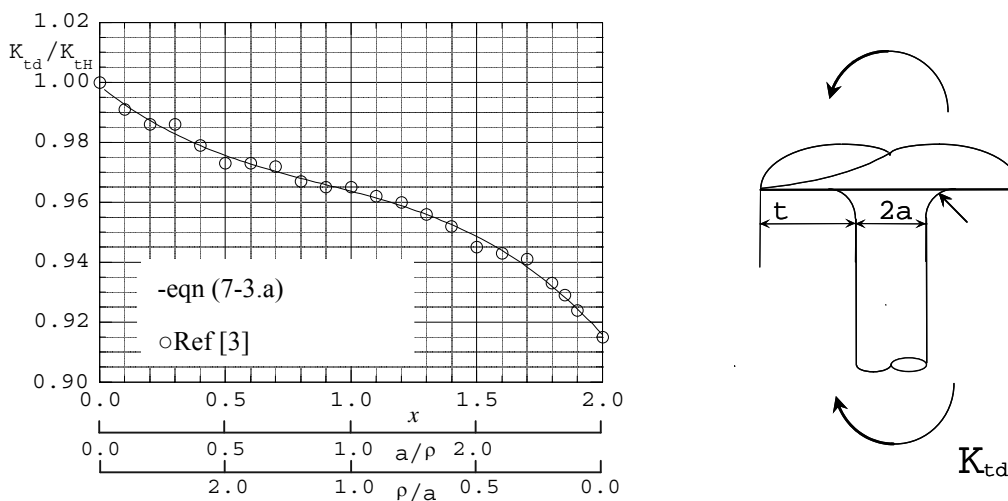
$$K_{IH} = (1/N)(3/4)(\sqrt{a/\rho+1}+1) \{ 3(a/\rho) - (1-2\nu)\sqrt{a/\rho+1} + 4 + \nu \} \dots (7-3.b)$$

$$N = 3(a/\rho + 1) + (1 + 4\nu)\sqrt{a/\rho + 1} + (1 + \nu)/(1 + \sqrt{a/\rho + 1}) \dots (7-3.c)$$

Fig.7-6(a), (b)は, 式(7-2), (7-3)の $K_{td}/K_{tH}$ の値を線図にしたものである。次に, フィレット部を有する丸棒の引張り, 曲げにおける応力集中係数 $K_t$ と式(7-2), (7-3)より求めた $K_{td}$ との比で整理した結果を Fig. 7-7(a), (b)に示す。また, 比較のため, Fig.7-7(c)に $60^\circ$ V形切欠きを有する丸棒の引張問題の $K_t/K_{td}$ の値も示す。結局, [Fig. 7-7]に示すような $K_t/K_{td}$ の値の検討から, 以下のことがわかる。  
 (1) 曲げの場合 [Fig.7-7 (b)] での $K_t/K_{td}$ の値は, 引張りの場合 [Fig.7-5 (a)] よりもかなり揃っていることがわかる。これは,  $K_{td}$ についての近似が, 引張りの場合



(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-6  $K_{td}/K_{tH}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$



Table7-1  $K_t / K_{tH}$  when  $2t / D \rightarrow 1.0$

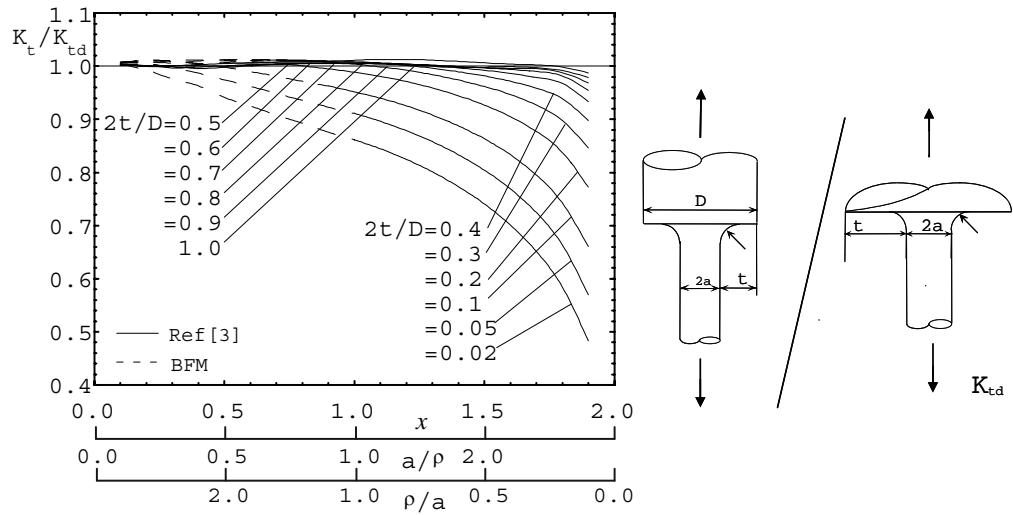
(a) Round bar with shoulder fillet under tension

X	a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D 1.0
0.000	0.000					
0.100	0.100	10.00	0.993	0.992	0.992	0.992
0.200	0.200	5.000	0.986	0.984	0.984	0.984
0.300	0.300	3.333	0.977	0.979	0.979	0.979
0.400	0.400	2.500	0.973	0.972	0.972	0.972
0.500	0.500	2.000	0.969	0.967	0.967	0.967
0.600	0.600	1.667	0.967	0.965	0.965	0.965
0.700	0.700	1.429	0.964	0.963	0.962	0.962
0.800	0.800	1.250	0.964	0.963	0.962	0.962
0.900	0.900	1.111	0.964	0.961	0.961	0.961
1.000	1.000	1.000	0.964	0.961	0.961	0.961
1.000	1.000	1.000	0.964	0.961	0.961	0.961
1.100	1.111	0.900	0.962	0.962	0.960	0.960
1.200	1.250	0.800	0.962	0.962	0.961	0.961
1.300	1.429	0.700	0.961	0.961	0.961	0.961
1.400	1.667	0.600	0.961	0.961	0.960	0.960
1.500	2.000	0.500	0.959	0.961	0.961	0.961
1.600	2.500	0.400	0.957	0.958	0.959	0.959
1.700	3.333	0.300	0.950	0.953	0.955	0.956
1.800	5.000	0.200	0.934	0.939	0.943	(0.946)
1.850	6.667	0.150	0.920	0.928		(0.938)
1.900	10.00	0.100	0.901	0.910		(0.928)
2.000		0.000				(0.908)

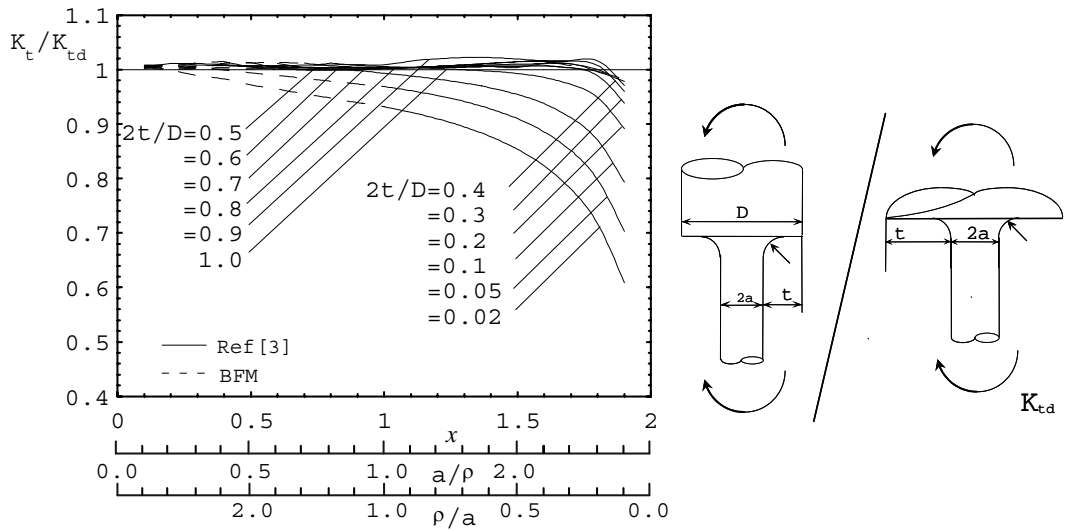
(b) Round bar with shoulder fillet under bending

X	a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D 1.0
0.000	0.000	∞				1.000
0.100	0.100	10.00	0.994	0.992	0.991	0.991
0.200	0.200	5.000	0.988	0.988	0.986	0.986
0.300	0.300	3.333	0.988	0.987	0.986	0.986
0.400	0.400	2.500	0.981	0.979	0.979	0.979
0.500	0.500	2.000	0.975	0.973	0.973	0.973
0.600	0.600	1.667	0.975	0.974	0.973	0.973
0.700	0.700	1.429	0.974	0.973	0.972	0.972
0.800	0.800	1.250	0.971	0.970	0.968	0.967
0.900	0.900	1.111	0.971	0.969	0.967	0.965
1.000	1.000	1.000	0.968	0.967	0.966	0.965
1.000	1.000	1.000	0.968	0.967	0.966	0.965
1.100	1.111	0.900	0.968	0.966	0.964	0.962
1.200	1.250	0.800	0.967	0.964	0.962	0.960
1.300	1.429	0.700	0.965	0.962	0.959	0.956
1.400	1.667	0.600	0.961	0.957	0.954	0.952
1.500	2.000	0.500	0.954	0.951	0.948	0.945
1.600	2.500	0.400	0.949	0.946	0.944	0.943
1.700	3.333	0.300	0.943	0.942	0.941	0.941
1.800	5.000	0.200	0.932	0.933	0.933	0.933
1.850	6.667	0.150	0.922	0.923	0.926	0.929
1.900	10.00	0.100	0.909	0.913	0.919	(0.924)
2.000	∞	0.000				(0.915)

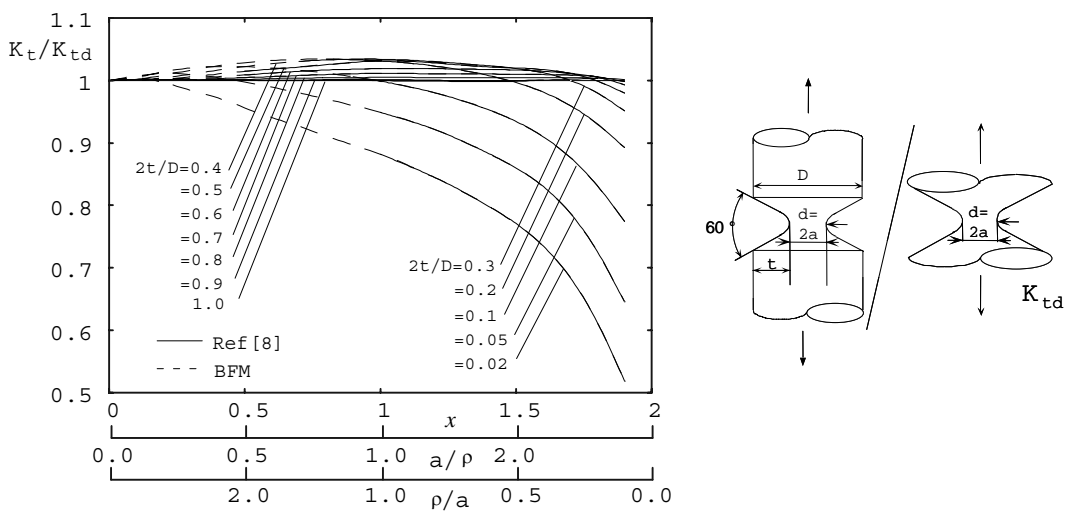
よりも広範囲にわたって利用できることを示している。結局，[ Fig.7-7(a), (b) ] とその数値的検討より ( 2 ), ( 3 ), ( 4 ) に示す範囲で，数%の範囲の中で  $K_{td}$  で近似できることがわかる ( この  $K_{td}$  の有効範囲は最終的には  $K_{ts}$  による近似の有効範囲との兼ね合いも含めて総合的に決めている )。また，切欠きを有する丸棒とフィレット部を有する丸棒を比べるとフィレット部を有する丸棒の方が広い範囲に存在し， $K_{td}$  による近似は切欠き問題ほど有効ではないことがわかる。



(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending



(c) Round bar with notch under tension

Fig. 7-7  $K_t/K_{ts}$  vs.  $2t/D$

(2) フィレット部の曲率半径  $\rho$  が大きく (引張り:  $0 < \rho/a < 10$ , 曲げ:  $0 < \rho/a < 10$ ), フィレットの段の高さが大きい場合 (引張り:  $0.4 < 2t/D < 1.0$ , 曲げ:  $0.2 < 2t/D < 1.0$ ) の  $K_t/K_{td}$  の値は, 引張りおよび曲げの両者とも, ほぼ 1 付近に分布する. 従って, この範囲で  $K_{td}$  とこの関係を用いれば, フィレットの段の高さが大きい場合の  $K_t$  を求めることができる.

(3) フィレット部の曲率半径  $\rho$  が大きい場合 (引張り:  $0.02 < 2t/D < 0.4$  で  $0 < \rho/a < 0.5$ , 曲げ:  $0.02 < 2t/D < 0.2$  で  $0 < \rho/a < 0.8$ ) の  $K_t/K_{td}$  の値は, 引張りおよび曲げの両者とも, ほぼ 1 付近に分布する. 従って, この範囲で  $K_{td}$  とこの関係を用いれば, フィレットの段の高さが大きい場合の  $K_t$  を求めることができる.

(4) フィレットの段の高さが大きい場合 ( $0.9 < 2t/D < 1.0$ ,  $10 < \rho/a < \infty$ ) の  $K_t/K_{td}$  の値を考察した結果, 引張りでは  $K_t/K_{td} = (0.987-1.000)$ , 曲げでは  $K_t/K_{td} = (0.994-1.000)$  と見積ることができる. よって引張りの場合  $K_t/K_{td} \cong 0.994$ , 曲げの場合  $K_t/K_{td} \cong 0.997$  として十分精度よく評価できる.

#### 7.4 その他のフィレットの応力集中係数

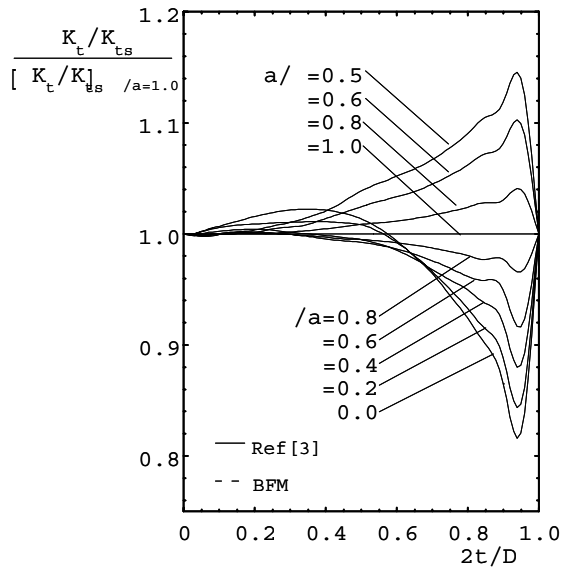
ここでは, 前節まで示していない範囲 (引張り:  $0.1 < \rho/a < 2.0$ ,  $0.02 < 2t/D < 0.4$ , 曲げ:  $0.1 < \rho/a < 1.25$ ,  $0.02 < 2t/D < 0.2$ ) の応力集中係数の評価方法を提案する. Fig.7-4 より このような範囲では,  $K_t/K_{ts}$  の値がほぼ  $2t/D$  のみによってきまり, 狭い範囲に存在していることがわかる. そこで, 高精度の近似式を作るため, 引張りの場合  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ , 曲げの場合  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$  の値を基準にして  $K_t/K_{ts}$  との比をとる. 引張りの場合の結果を Fig.7-8(a)に曲げの結果を Fig.7-8(b)に示す. Fig.7-8(a)の引張りの結果より,  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$  と  $K_t/K_{ts}$  の比は  $0.02 < 2t/D < 0.4$  の範囲で (1.00-1.02) の狭い範囲にあることがわかる. また, Fig.7-8(b)の曲げの結果より,  $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$  と  $K_t/K_{ts}$  の比は  $0.02 < 2t/D < 0.2$  の範囲で (0.988-1.02) の狭い範囲にあることがわかる.

#### 7.5 フィレット形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

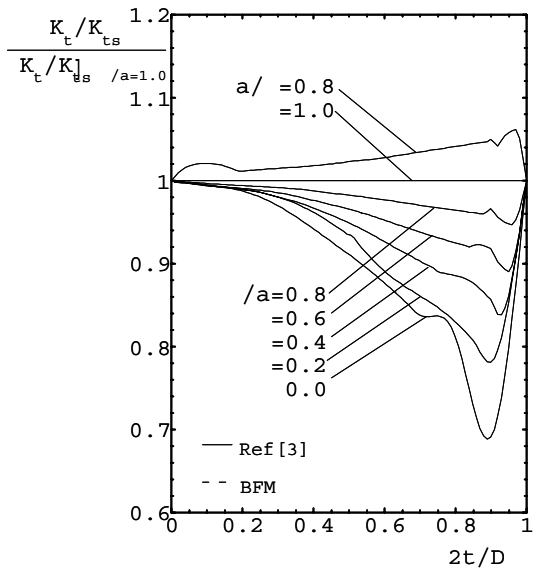
以上の議論から, フィレット部を有する丸棒の引張り, 曲げにおいてフィレット形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるためその存在領域を 6 つに分けたものを Fig.7-9(a), (b)に示す. そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す.

7.5.1 フィレット部を有する半無限板の  $K_{ts}$  [2] (Fig.7-1で,  $t$  が有限で  $d, D \rightarrow \infty$  のとき  $K_t = K_{ts}$ )

$$K_{ts}/K_{tsE} = 1.000 + 0.159\xi - 0.127\xi^2 + 0.050\xi^3 \quad \dots (7-4.a)$$

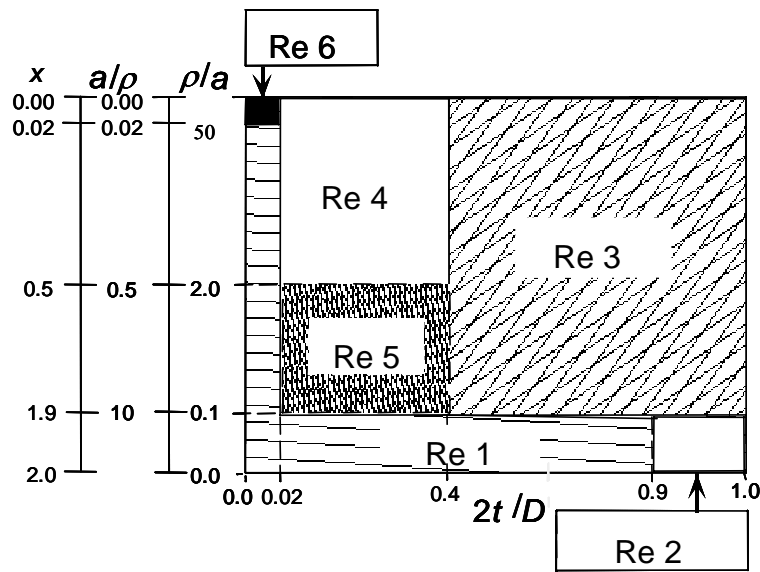


(a) Round bar with shoulder fillet under tension



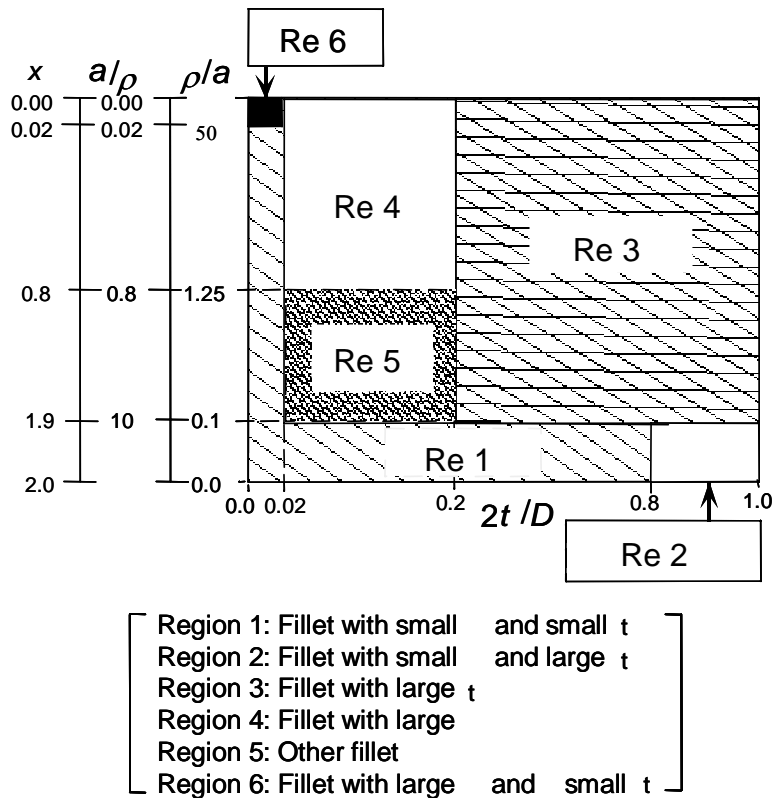
(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-8  $(K_t/K_{ts})/([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$  vs.  $2t/D$



- Region 1: Fillet with small  $a/\rho$  and small  $t$
- Region 2: Fillet with small  $a/\rho$  and large  $t$
- Region 3: Fillet with large  $t$
- Region 4: Fillet with large  $a/\rho$
- Region 5: Other fillet
- Region 6: Fillet with large  $a/\rho$  and small  $t$

(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig.7-9 Classification of fillet shape

$$K_{ts} / K_{tE} = 1.106 + 0.016\eta - 0.059\eta^2 + 0.019\eta^3 \quad \dots \dots (7-4.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \quad \eta = \sqrt{\rho/t}, \quad K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots (7-4.c)$$

7.5.2 フィレットの曲率半径が小さいときまたは段の高さが小さいときの応力集中係数  $K_t$

丸棒張り

(Fig.7-9(a)の領域1 :  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.90 または  $a/\rho$  0.02 かつ  $2t/D$  0.02)

$$K_t / K_{ts} = 0.99883 - 0.46411\lambda - 7.6027\lambda^2 + 67.298\lambda^3 - 283.92\lambda^4 + 650.13\lambda^4 - 829.06\lambda^6 + 553.08\lambda^7 - 150.46\lambda^8 \quad \dots \dots (7-5.a)$$

丸棒曲げ

(Fig.7-9(b)の領域1 :  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.80 または  $a/\rho$  0.02 かつ  $2t/D$  0.02)

$$K_t / K_{ts} = 1.000 - 1.8239\lambda + 8.0835\lambda^2 - 45.476\lambda^3 + 156.38\lambda^4 - 315.99\lambda^5 + 366.28\lambda^6 - 224.06\lambda^7 + 55.607\lambda^8 \dots (7-5.b)$$

Fig.7-10(a), (b)に, 式(7-5.a), (7-5.b)の $K_t / K_{ts}$ の値を図示する.

**7.5.3 段の高さが大きいフィレットの $K_{td}$  [ Fig.7-5 ]**(Fig.7-1で $a$ ,  $\rho$ が有限で $t$  のとき $K_t$ ,  $K_{td}$ )

**丸棒張り**

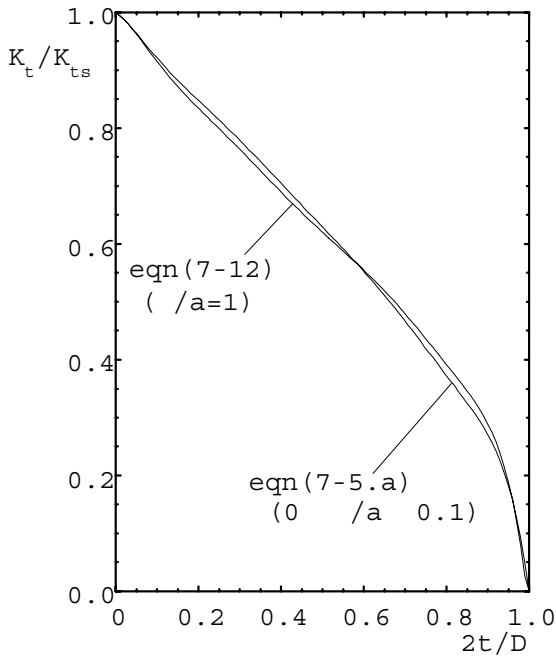
$$K_{td} / K_{tH} = 1.0007 - 0.10457x + 0.12152x^2 - 0.11645x^3 + 0.08214x^4 - 0.023524x^5 \dots (7-6.a)$$

$$K_{tH} = (1/N) \{ (a/\rho)\sqrt{a/\rho+1} + (0.5+\nu)(a/\rho) + (1+\nu)(\sqrt{a/\rho+1}+1) \} \dots (7-6.b)$$

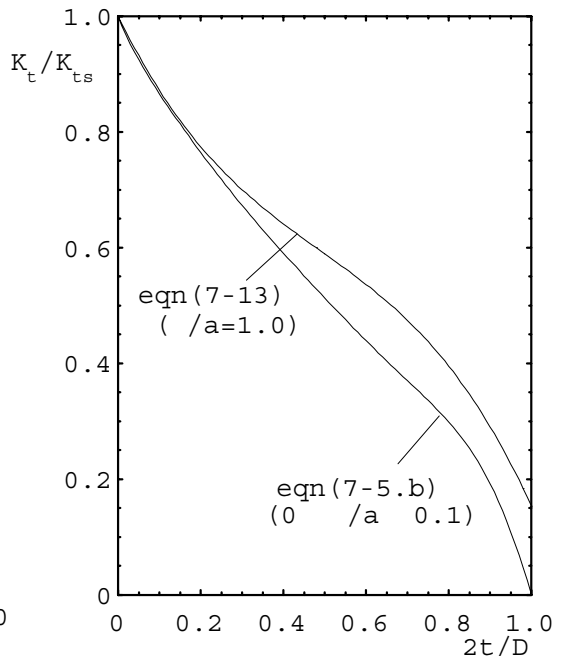
$$N = a/\rho + 2\nu\sqrt{a/\rho+1} + 2 \dots (7-6.c)$$

**丸棒曲げ**

$$K_{td} / K_{tH} = 0.99891 - 0.067502x + 0.051582x^2 - 0.019304x^3 \dots (7-7.a)$$



(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-10  $K_t / K_{ts}$  vs.  $2t / D$

$$K_{tt} = (1/N)(3/4)(\sqrt{a/\rho+1}+1)\{3(a/\rho)-(1-2\nu)\sqrt{a/\rho+1}+4+\nu\} \dots \dots \dots (7-7.b)$$

$$N = 3(a/\rho+1)+(1+4\nu)\sqrt{a/\rho+1}+(1+\nu)/(1+\sqrt{a/\rho+1}) \dots \dots \dots (7-7.c)$$

**7.5.3 フィレットの曲率半径が小さく段の高さが大きいときの  $K_t$**

**丸棒張り** [Fig.7-9(a), (b)の領域 2 :  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.9]

$$K_t / K_{td} \cong 0.994 \dots \dots \dots (7-8.a)$$

**丸棒曲げ** [Fig.7-9(a), (b)の領域 2 :  $\rho/a$  0.1 かつ  $2t/D$  0.8]

$$K_t / K_{td} \cong 0.9998 \dots \dots \dots (7-8.b)$$

**7.5.5 段の高さが大きいフィレットの  $K_t$**

**丸棒張り** [ Fig.7-9(a)の領域 3 :  $2t/D$  0.4 かつ  $a/\rho$  10 (0 x 1.9) ]

$$K_t / K_{td} = 0.98726 + 0.013259\lambda + 0.037656\lambda^2 - 0.038056\lambda^3 + (0.34671 - 0.90519\lambda + 0.57452\lambda^2 - 0.015761\lambda^3)x + (-0.26004 - 0.27256\lambda + 1.9405\lambda^2 - 1.4056\lambda^3)x^2 + (0.069415 + 0.89735\lambda - 2.4565\lambda^2 + 1.4891\lambda^3)x^3 + (-0.04792 - 0.15813\lambda + 0.54481\lambda^2 - 0.33913\lambda^3)x^4 \dots \dots \dots (7-9.a)$$

**丸棒曲げ** [ Fig.7-9(b)の領域 3 :  $2t/D$  0.2 かつ  $a/\rho$  10 (0 x 1.9) ]

$$K_t / K_{td} = 1.0319 - 0.36284\lambda + 1.7370\lambda^2 - 3.6759\lambda^3 + 3.5262\lambda^4 - 1.2564\lambda^5 + (-0.69087 + 6.9549\lambda - 27.799\lambda^2 + 51.712\lambda^3 - 44.798\lambda^4 + 14.621\lambda^5)x + (1.2402 - 12.042\lambda + 47.880\lambda^2 - 89.864\lambda^3 + 79.071\lambda^4 - 26.285\lambda^5)x^2 + (-0.50869 + 4.6585\lambda - 17.974\lambda^2 + 33.285\lambda^3 - 29.154\lambda^4 + 9.6926\lambda^5)x^3 \dots \dots \dots (7-9.b)$$

Fig.7-11(a), (b)は, 式 (7-9.a) , (7-9.b) の  $K_t / K_{td}$  の値を線図にしたものである .

**7.5.6 フィレットの段の高さが小さく曲率半径が大きいときの  $K_t$  ( Fig.7-9 の領域 6 :  $a/\rho$  0.02 かつ  $2t/D$  0.02 )**

**丸棒張り**

$$K_t \cong 1.004 \dots \dots \dots (7-10.a)$$

**丸棒曲げ**

$$K_t \cong 1.004 \dots \dots \dots (7-10.b)$$

**7.5.6 曲率半径が大きいフィレットの  $K_t$**

**丸棒張り** [ Fig.7-9(a)の領域 4 :  $a/\rho$  0.5 (0 x 0.5) かつ 0.02  $2t/D$  0.4 ]

$$\begin{aligned}
K_t / K_{td} = & 1.0008 - 0.013066\lambda + 0.0611\lambda^2 - 0.085109\lambda^3 \\
& + (0.071204 + 0.81013\lambda - 4.7083\lambda^2 + 6.5\lambda^3)x \\
& + (-0.81645 + 7.3901\lambda - 30.313\lambda^2 + 40.157\lambda^3)x^2 \\
& + (0.74717 - 9.2542\lambda + 45.728 - 66.397\lambda^3)x^3
\end{aligned}$$

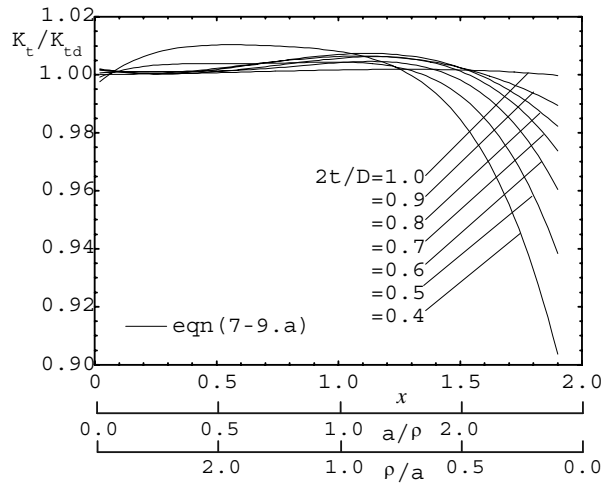
. . . . (7-11.a)

**丸棒曲げ** [ Fig.7-9(b)の領域 4 :  $a/\rho = 0.8$  ( $0 < x < 0.8$ ) かつ  $0.02 < 2t/D < 0.2$  ]

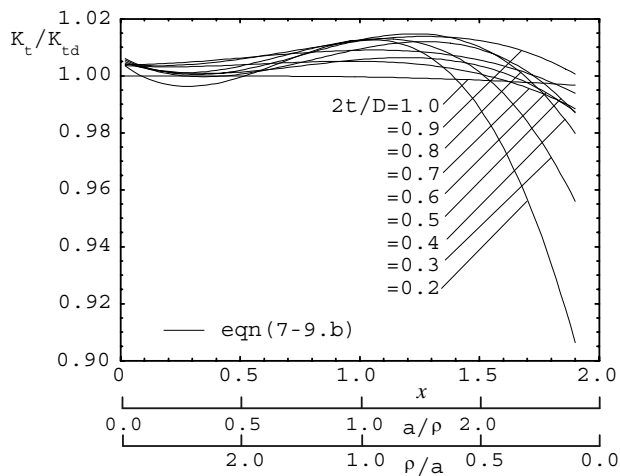
$$\begin{aligned}
K_t / K_{td} = & 1.01018 - 0.0851006\lambda + 0.518204\lambda^2 \\
& + (-0.0692355 + 1.95439\lambda - 10.5417\lambda^2)x \\
& + (-0.856066 - 0.712286\lambda + 10.9346\lambda^2)x^2 \\
& + (0.0567806 + 0.0970325\lambda - 4.81553)x^3
\end{aligned}$$

. . . . (7-11.b)

Fig.7-12(a), (b)に, 式 (7-11.a), (7-11.b)の  $K_t / K_{td}$  の値を図示する.



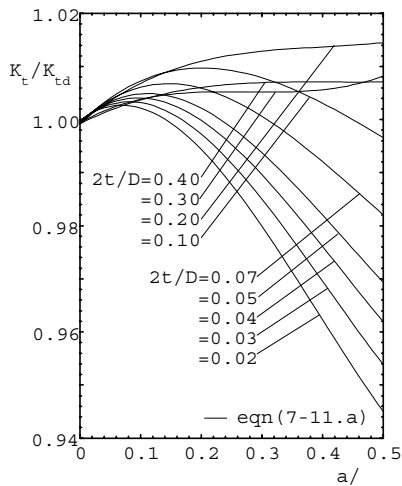
(a) Round bar with shoulder fillet under tension



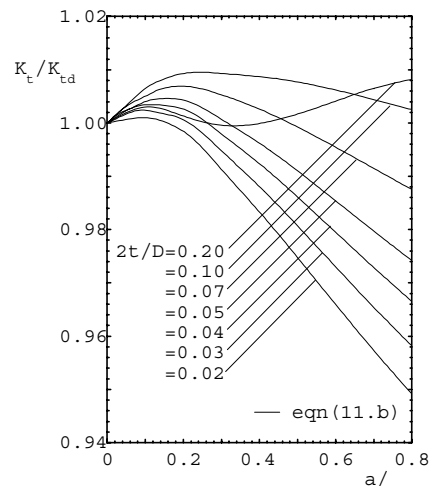
(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-11  $K_t / K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$





(a) Round bar with shoulder fillet  
under tension



(b) Round bar with shoulder fillet  
under bending

Fig. 7-12  $K_t/K_{td}$  vs.  $a/\rho$  or  $\rho/a$

### 7.5.7 その他のフィレットの $K_t$

丸棒張り [ Fig.7-9(a)の領域 5 : 0.1  $\rho/a$  2.0 かつ 0.02  $2t/D$  0.4 ]

$$\begin{aligned}
 K_t / K_{ts} = & \{ 0.99864 + 0.0033094(\rho/a) - 0.0029078(\rho/a)^2 + 0.00070844(\rho/a)^3 \\
 & + (0.090052 - 0.17954(\rho/a) - 0.10613(\rho/a)^2 - 0.020694(\rho/a)^3)\lambda \\
 & + (0.13636 - 0.62649\lambda + 0.69145(\rho/a)^2 - 0.18773(\rho/a)^3)\lambda^2 \\
 & + (-0.42858 + 0.96788\lambda - 0.7725(\rho/a)^2 + 0.19886(\rho/a)^3)\lambda^3 \} ([K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0}) \\
 & \cdot \cdot (7-12.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0} = & 0.99696 - 0.2997\lambda - 11.814\lambda^2 + 98.442\lambda^3 - 402.36\lambda^4 + 906.05\lambda^5 \\
 & - 1142.2\lambda^6 + 754.8\lambda^7 - 203.65\lambda^8 \quad (\text{平均誤差}=0.163\%) \quad \cdot \cdot \cdot (7-12.b)
 \end{aligned}$$

丸棒曲げ [ Fig.7-9(b)の領域 5 : 0.1  $\rho/a$  1.25 かつ 0.02  $2t/D$  0.2 ]

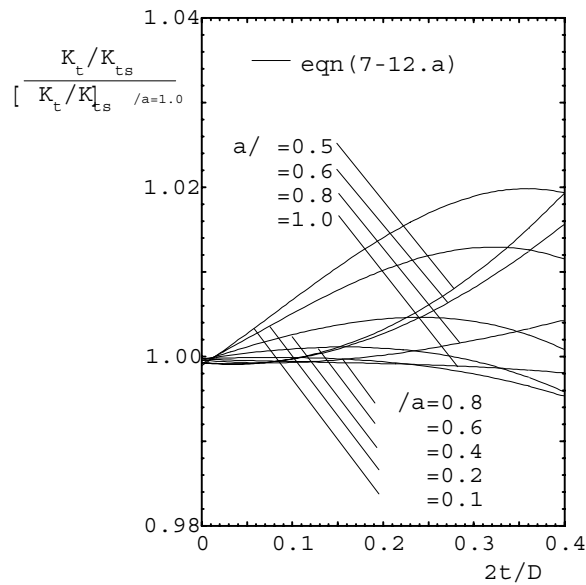
$$\begin{aligned}
 K_t / K_{ts} = & 0.99991 + 0.000075129(\rho/a) - 0.00063833(\rho/a)^2 + 0.00061872(\rho/a)^3 \\
 & + (-0.21884 + 1.2851(\rho/a) - 2.8694(\rho/a)^2 + 1.8442(\rho/a)^3)\lambda \\
 & + (1.7696 - 12.486(\rho/a) + 26.209(\rho/a)^2 - 15.821(\rho/a)^3)\lambda^2 \\
 & + (-4.8880 + 30.952(\rho/a) - 60.641(\rho/a)^2 + 35.158(\rho/a)^3)\lambda^3 [K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0} \\
 & \cdot \cdot \cdot (7-13.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0} = & 1.0006 - 1.4719\lambda + 1.9733\lambda^2 - 1.3492\lambda^3 \\
 & \cdot \cdot \cdot (7-13.b)
 \end{aligned}$$

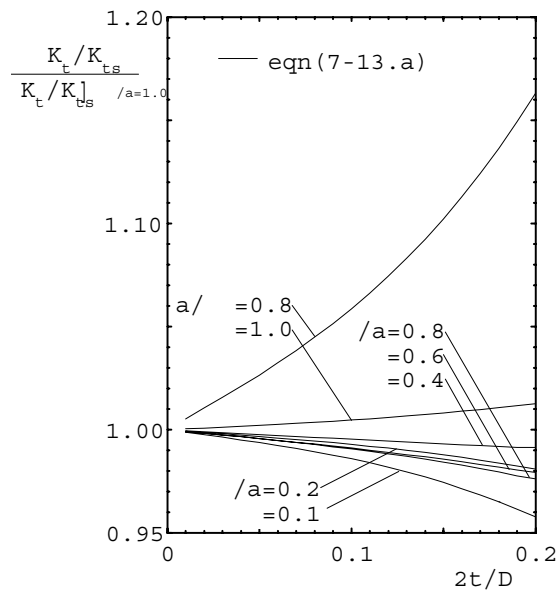
Fig.7-13(a)に , 式 (7-12.a) の  $(K_t / K_{ts}) / ([K_t / K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$  の値を図示する . また ,

Fig.7-13(b)に、式(7-13.a)の $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.6})$ の値を図示する。

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数 $K_t$ が求まる。Fig.7-14(a), (b)は $K_t$ とフィレットの評価に拡張されたNeuberの三角則との比 $K_t/K_{tN}$ を示す。フィレットの曲率半径が小さい場合は応力集中の厳密な数値解析が困難となるが、本論文の近似式はそれの評価が可能である。Fig.7-15(a), (b)は、 $K_t$ の値を線図にしたものである。これは、著者らが以前に作製した線図[2]と比べて利用範囲が広い。

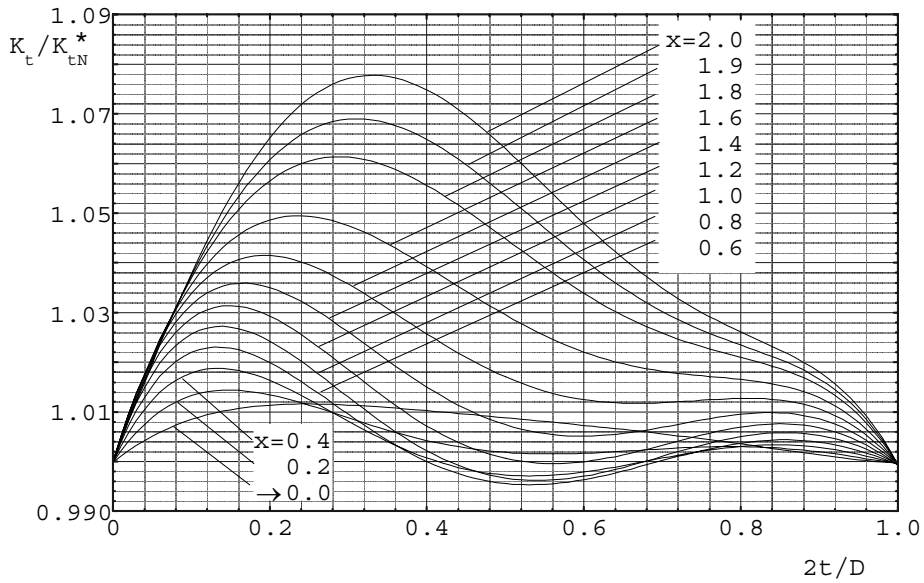


(a) Round bar with shoulder fillet under tension

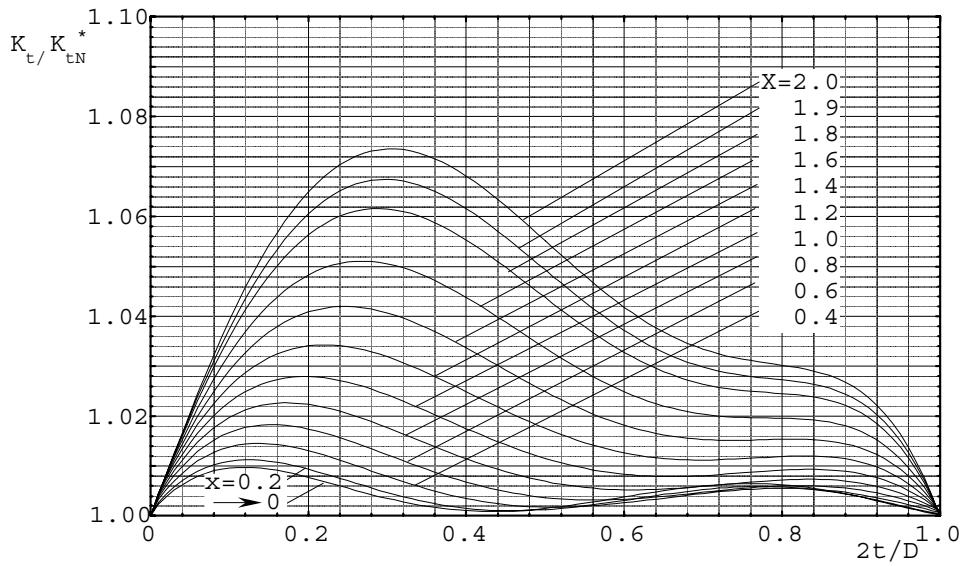


(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-13  $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$ ,  $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.6})$  vs.  $2t/D$



(a) Round bar with shoulder fillet under tension



(b) Round bar with shoulder fillet under bending

Fig. 7-14  $K_t/K_{tN}^*$  vs.  $2t/D$

## 7.6 結 言

本章ではフィレット部を有する丸棒引張り，曲げ(Fig.7-1)の応力集中係数 $K_t$ を切欠き形状の全範囲で正確に与えることを目的とした．そのため，特にフィレット部が

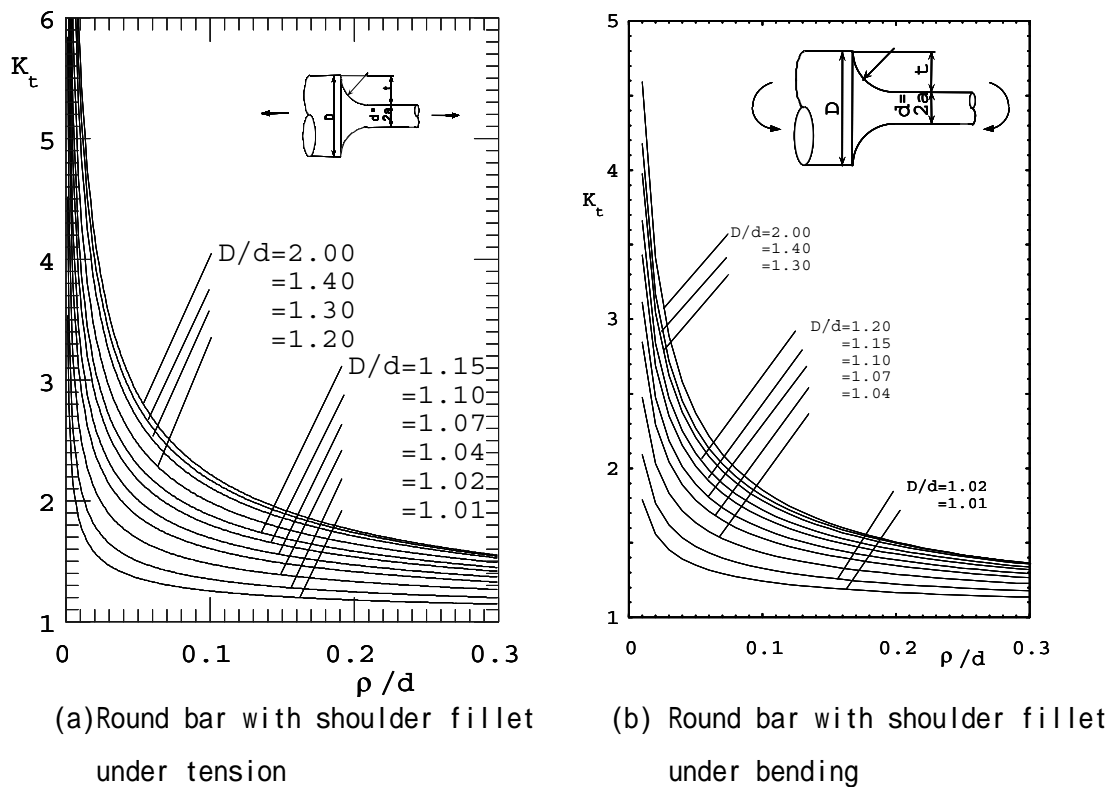


Fig. 7-15  $K_t$  vs.  $\rho/d$

浅い場合の応力集中係数  $K_{ts}$  (Fig.7-2) と深い場合の応力集中係数  $K_{td}$  を計算式として求め利用した。

(1)  $K_t/K_{ts}$  の存在範囲は引張りの場合が曲げの場合より狭い範囲に存在する。また、切欠きを有する丸棒とフィレット部を有する丸棒を比べるとフィレット部を有する丸棒の方が狭い範囲に存在し、 $K_{ts}$  による近似が有効である。

(2)  $K_t/K_{td}$  の存在範囲は曲げの場合が引張りの場合より狭い範囲に存在する。また、切欠きを有する丸棒とフィレット部を有する丸棒を比べると切欠きを有する丸棒の方が狭い範囲に存在し、 $K_{td}$  による近似が有効である。

以上のようなフィレット部を有する丸棒問題の応力集中係数の特徴を考慮して、すべてのフィレット形状に対して誤差 1 - 2 % 程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した。

### 参考文献

- (1) 野田尚昭・山崎丈巳・松尾勝規・西谷弘信, フィレットを有する丸棒および平板試験片の応力集中解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 59-566, (1993),

2404-2411.

- ( 2 ) Neuber, H., Kerbspannungslehre, ( 1957 ), 11, Springer-Verlag.
- ( 3 ) 野田尚昭・高瀬 康・門田圭司, フィレット部を有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-8, ( 1996 ), 855-860.
- ( 4 ) 野田尚昭・高瀬 康, フィレットを有する段付丸棒および段付平板の応力集中についての考察, 日本機械学会論文集 ( A 編 ), 62-595, ( 1996 ), 787-793.
- ( 5 ) N.-A., Noda, Y, Takase and K, Monda, Stress Concentration Factors for Shoulder Fillets in Round and Flat Bars under Various Loads, Int. J. Fatigue, , Vol. 19, No.1 ( 1997 ), pp. 75-84.
- ( 6 ) N.-A., Noda and Y, Takase, Stress Concentration Formula Useful for Any Dimensions of Shoulder Fillet in a Round under Tension and Bending, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., Vol. 26, No.8 ( 2003 ), pp. 245-255.
- ( 7 ) 野田尚昭・高瀬 康・藤本将史, フィレット部の寸法の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 ( フィレット部を有する段付丸棒の引張り ), 日本機械学会論文集 ( A 編 ), 67-653, ( 2001 ), 49-54.
- ( 8 ) 野田尚昭, 高瀬 康, 門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-7, ( 1996 ), 757-762.

## 第8章 結 論

構造物の破壊は多くの場合応力集中部を起点として生じるので、実際の設計において応力集中係数を正しく評価することは、大変重要である。しかし、材料の降伏や破壊は一点の応力だけでは決まらないので、一般に、応力集中部を有する部材の強さを、平滑材の強さから、応力集中係数のみを用いて、直接予想することはできない。したがって、種々の応力集中部を有する実物の強さを正確に予測し、材料を安全かつ経済的に使用するためには、切欠き半径  $\rho$  を 0 から無限大まで広範囲に変化させて、材料の挙動に関するマスターカーブを作成する必要がある。その様な実験に際し、最も便利であり、最も広く用いられる試験片は、円周切欠きを有する丸棒試験片である。このように、試験片の強さから実物の強さを予測するためには、まず試験片の応力集中係数を正確に求める必要がある。

これまで円周切欠きを有する丸棒の応力集中評価には、Neuber の提案した三角則が、過去 70 年以上にわたってよく用いられてきた。これは、Neuber 公式が簡便であるにもかかわらず、切欠き形状の全範囲に対してある程度の精度で応力集中係数を与える、大変便利なものであったためである。著者らは、初期の研究において、体積力法によって得られた高精度の解析結果を基にして、Neuber の三角則による近似式に修正係数をかけることによって精度の高い近似式を提案した。しかし、この場合、体積力法による解析結果を基にしているため、切欠き寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を与えることはできなかった。一般にどのような解析方法を用いても、切欠き形状全範囲の応力集中係数を精度良く求めることは数値計算上たいへん難しい。

そこで、本研究では、切欠きが浅い場合や深い場合の近似式および体積力法の解析結果を基に、丸棒引張り、曲げ、ねじりの各問題において物理的考察を行い、切欠き半径  $\rho$  が極端に大きい円弧形切欠き、及び切欠き半径  $\rho$  が極端に小さい  $60^\circ V$  形切欠きを含めた、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案した。とくに Neuber が使用した切欠きが浅くなった極限の解、つまり円孔を有する無限板の解をより正確に求めるため、切欠き深さが浅い場合の極限に相当する  $V$  形切欠きを有する半無限板の引張り、ねじりにおける応力集中係数  $K_{ts} = K_t \Big|_{2t/D \rightarrow 0}$  を近似式として使用した。また、切欠きが深くなった極限の解、つまり回転双曲面切欠きの解  $K_{tH}$  をより正確に求めるため、切欠き深さが深い場合の極限に相当する深い  $60^\circ V$  形切欠きの応力集中係数  $K_{td} = K_t \Big|_{2t/D \rightarrow 1}$  を提案し、近似式として使用した。これらの切欠きが浅い場合や深い場合の応力集中係数を求めるための近

似式を用いることにより切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を作製することが可能となった。

得られた結論はすでに各章の終わりに示したが，それらを要約すると次のようになる。

- ( 1 ) 60°V 形円周切欠きを有する丸棒引張り，曲げ，ねじり問題の応力集中係数  $K_t$  と，60°V 形切欠きを有する半無限板の応力集中係数  $K_{ts}$  の比  $K_t / K_{ts}$  について比較検討した．切欠き深さが浅い場合には，引張り，曲げ，ねじりの順に  $K_t / K_{ts}$  の分布は狭い範囲に存在する．つまり， $K_{ts}$  による近似が引張り，曲げ，ねじりの順に有効となることを明らかにした．
- ( 2 ) 60°V 形円周切欠きを有する丸棒引張り，曲げ，ねじり問題の応力集中係数  $K_t$  と，深い 60°V 型円周切欠きの応力集中係数  $K_{td}$  との比  $K_t / K_{td}$  について比較検討した．切欠き深さが深い場合には，ねじり，曲げ，引張りの順に  $K_t / K_{td}$  の分布は狭い範囲に存在する．つまり， $K_{td}$  による近似がねじり，曲げ，引張りの順に有効となることを明らかにした．
- ( 3 ) 円周切欠きを有する丸棒問題の  $K_t / K_{ts}$  と  $K_t / K_{td}$  の比について総合的に考察した．その結果，例えば丸棒引張り問題では，切欠き形状の全範囲に対して  $K_t / K_{ts}$  の分布の範囲は狭く， $K_{ts}$  による近似が広い範囲で有効であることが示された．一方，丸棒ねじり問題では  $K_t / K_{td}$  の分布の範囲は狭く， $K_{td}$  による近似が有効であることがわかった．この特徴を考慮して，切欠き深さが中間の場合についても近似式の考察を行い，すべての切欠き寸法に対して誤差 1% 程度で応力集中係数を与える近似式を提案した．
- ( 4 ) すべての切欠き寸法に対する，簡便な近似式を作製するため，切欠きを有する丸棒の応力集中係数  $K_t$  と提案した修正 Neuber の三角則  $K_{tN}$  との比  $K_t / K_{tN}$  に最小二乗法を適用する方法を提案した．その結果，切欠きをもつ丸棒の引張・曲げ・ねじりの各々の問題において，切欠き寸法の全範囲に対して誤差 1% 程度以内の応力集中係数を与える簡便な近似式を作製することに成功した．
- ( 5 ) 切欠きを有する帯板の応力集中問題について，切欠きを有する丸棒と同様

な観点から考察を行った。切欠きが浅い場合の極限である  $K_{ts}$  による近似を、帯板問題と丸棒問題で比較すると、 $K_t/K_{ts}$  の値は、丸棒問題より帯板問題の方が狭い範囲に存在することがわかった。よって、帯板問題では  $K_{ts}$  による近似がより有効である。また、 $K_{td}$  による近似を、帯板問題と丸棒問題で比較検討すると、 $K_t/K_{td}$  の値は切欠きを有する丸棒問題より帯板問題の方が広い範囲に存在する。よって、帯板問題では近似は丸棒問題ほど有効ではない。このような帯板問題の特徴を利用して、帯板の引張りおよび曲げ問題に対して、切欠き寸法の全範囲に対して誤差 1% 程度以内の応力集中係数を与える簡便な近似式を作製することに成功した。

- (6) フィレット部を有する段付丸棒の応力集中問題について、切欠きを有する丸棒・帯板と同様な観点から考察を行った。フィレット部の段が浅い場合の極限に相当する  $K_{ts}$  による近似を、フィレットと切欠きの問題で比較すると、 $K_t/K_{ts}$  の値はフィレットの方が切欠きより狭い範囲に存在する。よって、フィレットの問題では  $K_{ts}$  による近似がより有効である。また、 $K_{td}$  による近似を、フィレットと丸棒切欠きの問題で比較すると、 $K_t/K_{td}$  の値はフィレットの問題が切欠き問題より広い範囲に存在する。よって、 $K_{td}$  による近似は切欠きを有する丸棒問題ほど有効ではない。このようなフィレットの問題の特徴を利用して、フィレット部を有する段付丸棒の引張りおよび曲げ問題に対して、フィレット部寸法の全範囲に誤差 1% 程度以内の応力集中係数を与える簡便な近似式を作製することに成功した。



## 謝 辞

本論文は，九州工業大学工学部 野田尚昭教授の懇切丁寧なご指導のもとにまとめ上げられたもので，終始変わらぬ熱心なご鞭撻を賜り，格別のご配慮にあずかりました．論文を完成させることができましたのはひとえに野田教授のご指導のおかげであり，ここに心より感謝の意を表します．

本論文を完成するにあたり，終始変わらぬ懇切なる御指導を賜りました．九州工業大学工学部 原田昭治教授に心より感謝の意を表します．

本論文の作成にあたり，九州工業大学工学部 寺崎俊夫教授，九州工業大学工学部 赤星保浩教授，九州工業大学工学部 黒島義人准教授には，貴重な御助言とご教示をいただきました．厚く御礼申し上げます．

九州工業大学工学部機械知能工学科弾性力学研究室の皆様には，研究の遂行の上でご協力とご助力を頂きました．ここに感謝の意を表します．とくに，平成7年度卒業門田圭司氏（第2，3章），平成8年度卒業篠崎正孝氏（第5章），平成9年度卒業神崎健太郎氏（第5章），九州工業大学短期留学生毛映紅氏（第6章），平成11年度卒業増留竜二氏（第6章），平成11年度卒業藤本将史氏（第7章），平成12年度卒業小林晋介氏（第7章），平成13年度卒業竹本智一氏（第2，3章），平成13年度卒業松永建治氏（付録），平成14年度卒業江藤洋介氏（第5章），平成16年度卒業森忠幸氏（第2，3章），平成17年度卒業廣川現一氏（第5章）には，各章の数値計算をしていただきました．皆様のご支援と激励に心より感謝いたします．

付 録

1. 60° V形切欠きを有する丸棒引張・曲げ・ねじり問題の応力集中係数線図

1.1 60° V形切欠きを有する丸棒引張問題

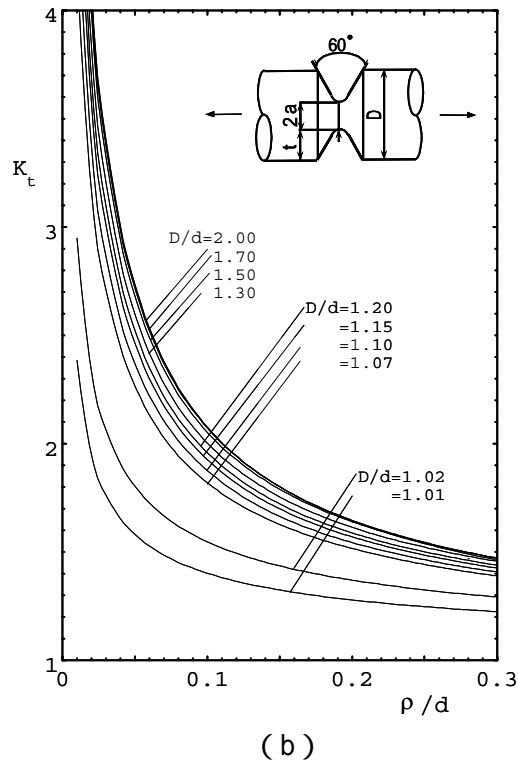
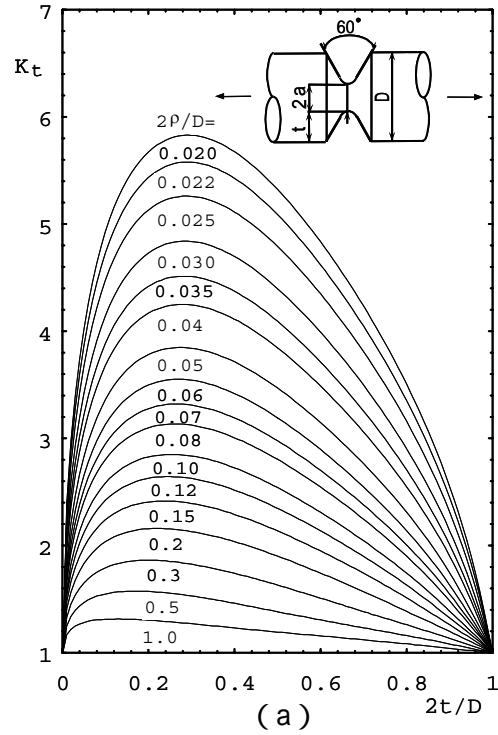


Fig. A1-1 SCF of a V-shaped notch in round bar under tension

1.2 60° V形切欠きを有する丸棒曲げ問題

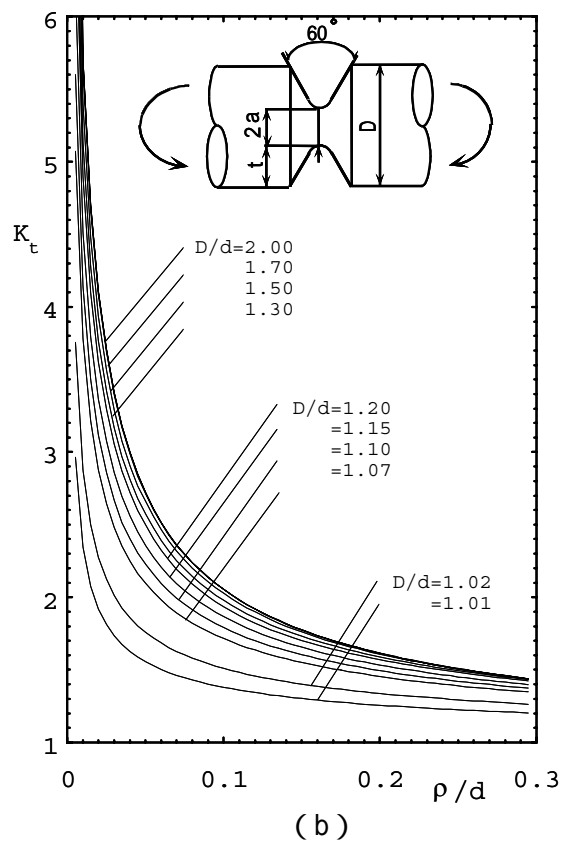
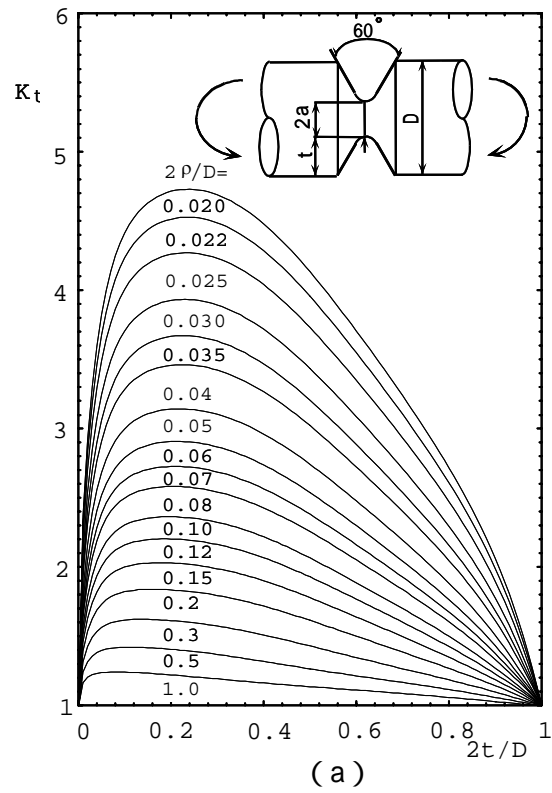


Fig. A1-2 SCF of a V-shaped notch in round bar under bending

1.3 60° V形切欠きを有する丸棒ねじり問題

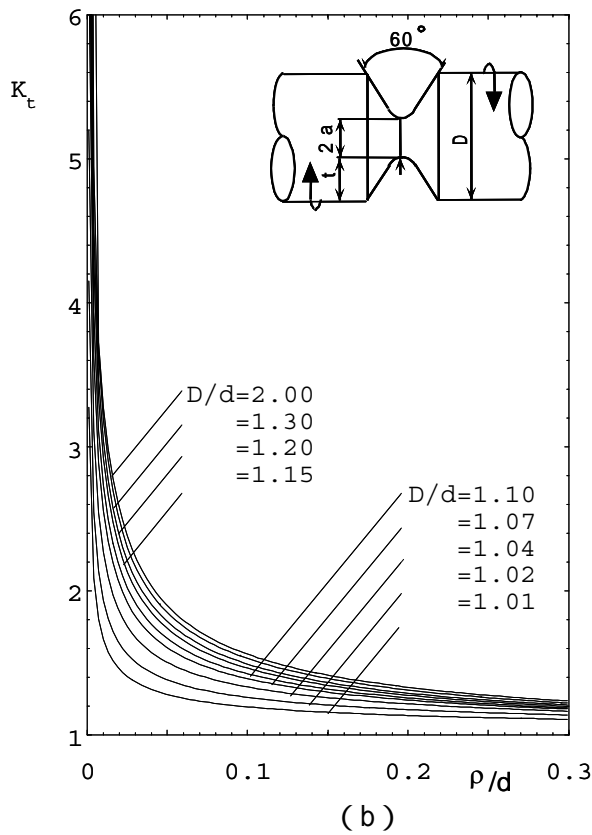
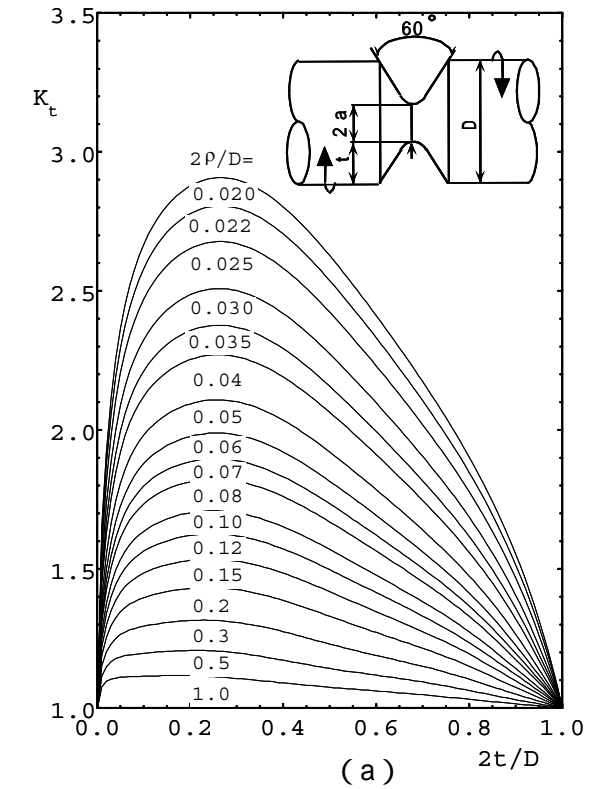


Fig. A1-3 SCF of a V-shaped notch in round bar under bending

## 2. 60°V形切欠きを有する帯板引張・曲げ問題の応力集中係数計算式

### 2.1 丸棒引張問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left( (K_{ts} - 1)^{2.8} + (K_{td} - 1)^{2.8} \right)^{1/2.8} \right\} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & (1.0001 + 0.0036x - 0.0065x^2 + 0.0021x^3) \\ & + (0.0116 + 1.404x - 1.285x^2 + 0.1799x^3)\lambda \\ & + (-0.1311 - 8.165x + 9.687x^2 - 2.124x^3)\lambda^2 \\ & + (0.4240 + 16.94x - 22.77x^2 + 5.618x^3)\lambda^3 \\ & + (-0.5156 - 15.07x + 21.71x^2 - 5.571x^3)\lambda^4 \\ & + (0.2112 + 4.890x - 7.332x^2 + 1.896x^3)\lambda^5 \end{aligned}$$

• • • • (A 1)

### 2.2 丸棒曲げ問題

$$K_{tN} = \left\{ (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left( (K_{ts} - 1)^{2.0} + (K_{td} - 1)^{2.0} \right)^{1/2.0} \right\} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & (1.0005 + 0.0017x - 0.0091x^2 + 0.003x^3) \\ & + (-0.0033 + 0.2641x + 0.0659x^2 - 0.2135x^3)\lambda \\ & + (0.0244 - 2.1933x + 0.6457x^2 + 1.0659x^3)\lambda^2 \\ & + (-0.046 + 5.2855x - 2.5264x^2 - 2.1247x^3)\lambda^3 \\ & + (-0.0281 - 4.9557x + 2.8001x^2 + 1.9485x^3)\lambda^4 \\ & + (-0.0033 + 1.5985x - 0.9791x^2 - 0.6783x^3)\lambda^5 \end{aligned}$$

• • • • (A 2)

### 2.3 丸棒ねじり問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left( (K_{ts} - 1)^{2.8} + (K_{td} - 1)^{2.8} \right)^{1/2.8} \right\} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & (1.0004 - 0.017467x + 0.020929x^2 - 0.0066230x^3) \\ & + (-0.0055464 - 0.0073035x - 0.59040x^2 + 0.15373x^3)\lambda \\ & + (0.034864 + 1.8095x + 4.3812x^2 - 1.4366x^3)\lambda^2 \\ & + (-0.0072596 - 10.055x - 15.008x^2 + 6.3947x^3)\lambda^3 \\ & + (-0.21221 + 21.408x + 25.748x^2 - 13.109x^3)\lambda^4 \\ & + (0.33539 - 20.005x - 21.267x^2 + 12.161x^3)\lambda^5 \\ & + (-0.14558 + 6.8634x + 6.7186x^2 - 4.1586x^3)\lambda^6 \end{aligned}$$

• • • • (A 3)

### 3. 60° V形切欠きを有する帯板引張・曲げ問題の応力集中係数線図

#### 3.1 60° V形切欠きを有する帯板引張問題

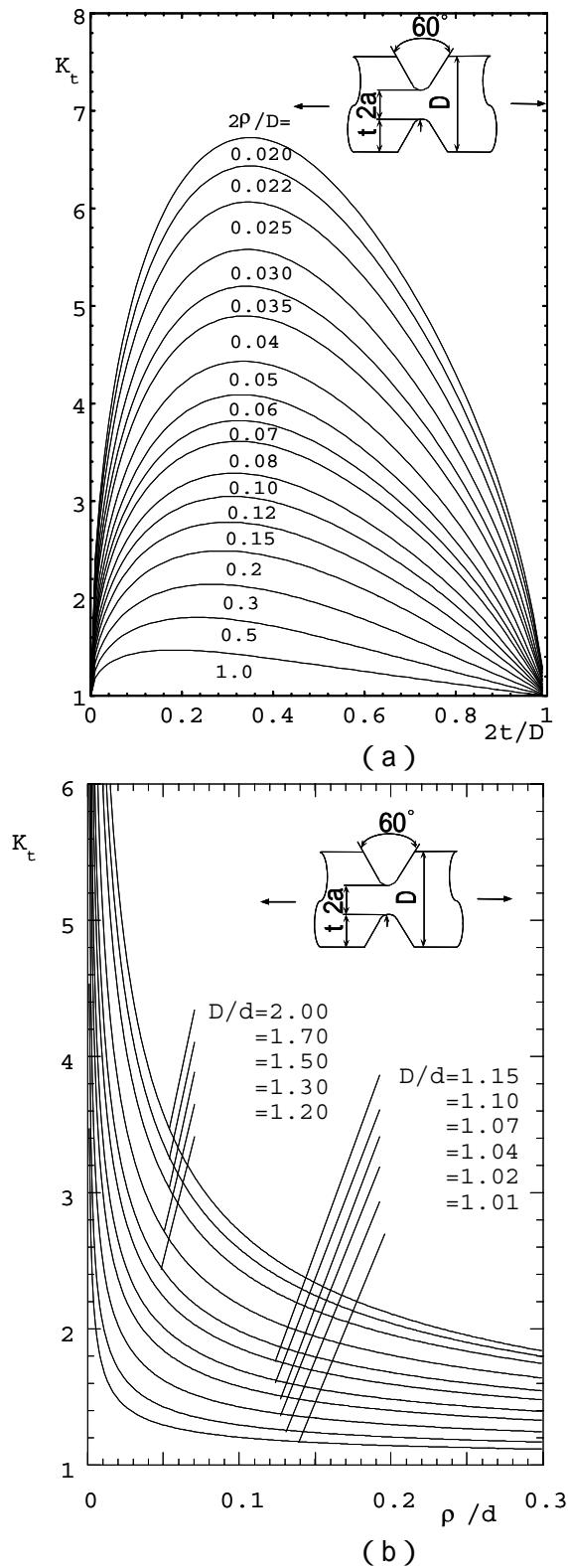
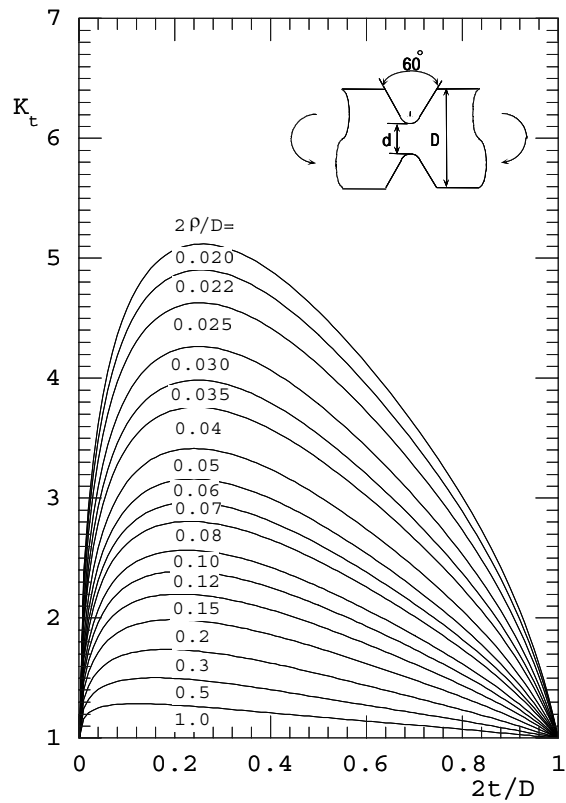
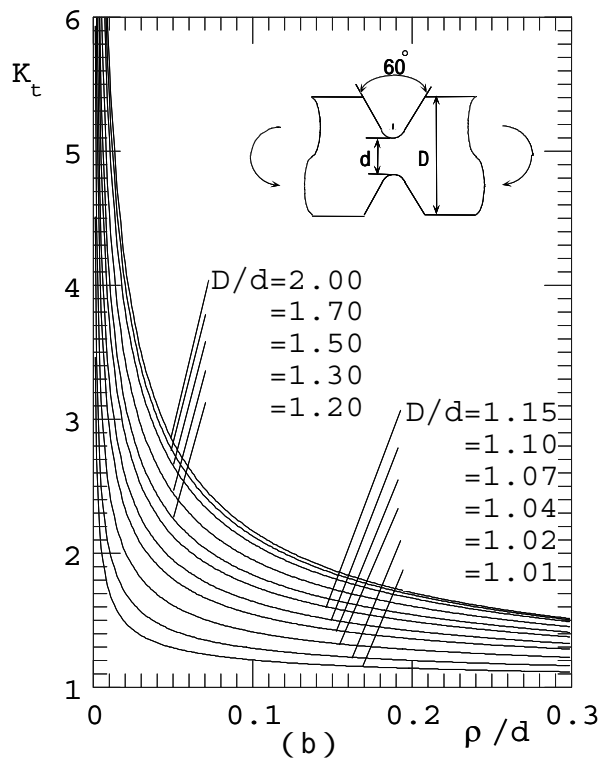


Fig. A2-1 SCF of a V-shaped notch in flat bar under tension

### 3.2 60° V形切欠きを有する帯板曲げ問題



(a)



(b)

Fig. A2-2 SCF of a V-shaped notch in flat bar under bending

#### 4. 60°V形切欠きを有する帯板引張・曲げ問題の応力集中係数計算式

##### 4.1 帯板引張問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / ((K_{ts} - 1)^{2.0} + (K_{td} - 1)^{2.0})^{1/2.0} \right\} + 1$$

$$K_t / K_{tN} =$$

$$\begin{aligned} & (1.0009 - 0.003561x + 0.001841x^2) \\ & + (0.2424 + 0.722x - 0.4555x^2)\lambda \\ & + (-1.741 - 1.660x + 1.767x^2)\lambda^2 \\ & + (4.113 + 1.121x - 2.943x^2)\lambda^3 \\ & + (-4.0762 + 0.0762x + 2.354x^2)\lambda^4 \\ & + (1.462 - 0.2603x - 0.7221x^2)\lambda^5 \end{aligned}$$

・・・(A 4)

##### 4.2 帯板曲げ問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / ((K_{ts} - 1)^{2.0} + (K_{td} - 1)^{2.0})^{1/2.0} \right\} + 1$$

$$K_t / K_{tN} =$$

$$\begin{aligned} & (1.0005 - 0.001828x + 0.0007x^2) \\ & + (0.09368 + 0.04880x - 0.02401x^2) \\ & + (-0.5977 - 0.2138x + 0.4545x^2)\lambda^2 \\ & + (1.427 - 0.2510x - 1.029x^2)\lambda^3 \\ & + (-1.456 + 1.066x + 0.7642x^2)\lambda^4 \\ & + (0.5334 - 0.6513x - 0.1648x^2)\lambda^5 \end{aligned}$$

・・・(A 5)



## 5. フィレットを有する丸棒の引張り・曲げの応力集中係数線図

### 5.1 フィレットを有する丸棒引張問題

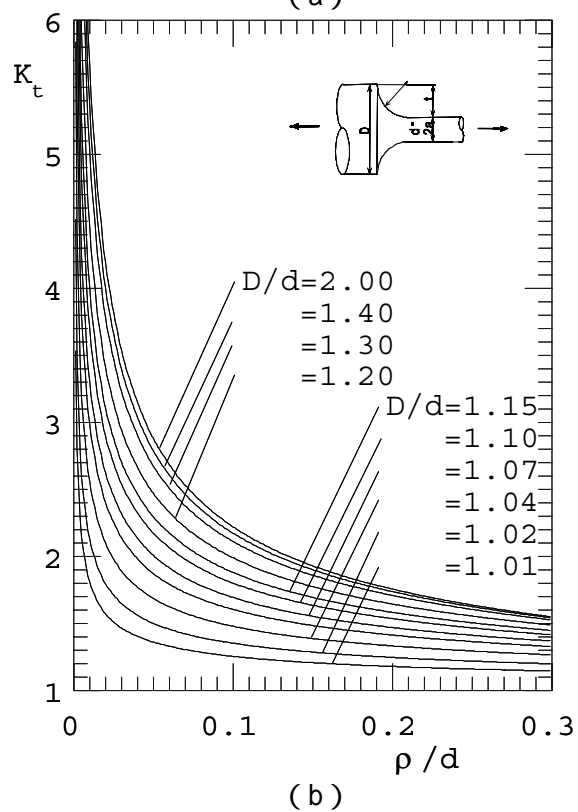
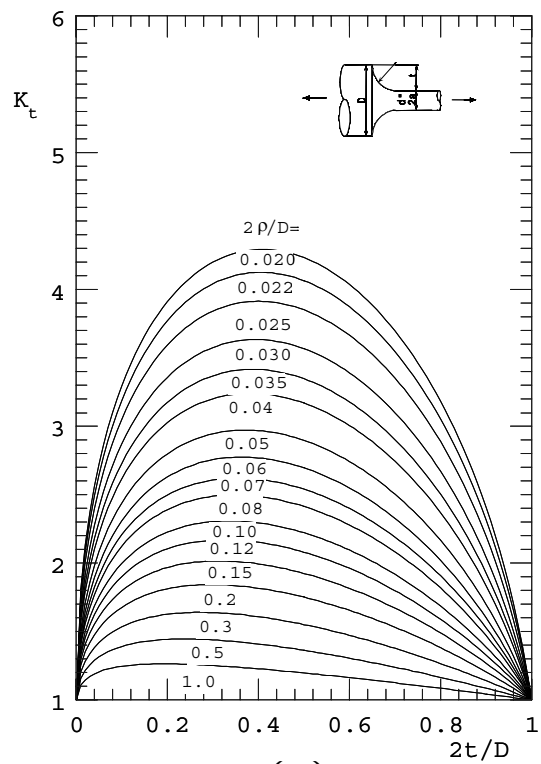
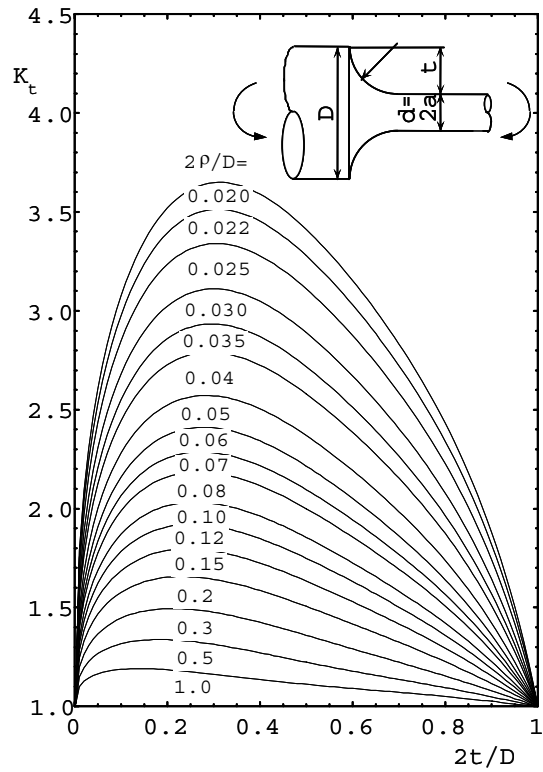
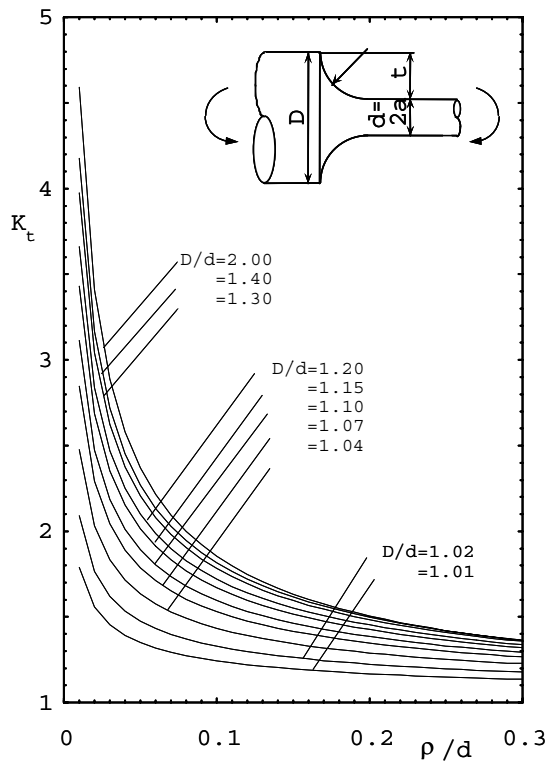


Fig. A3-1 SCF of a fillet in round bar under tension

## 5.2 フィレットを有する丸棒曲げ問題



(a)



(b)

Fig. A3-2 SCF of a fillet in round bar under bending

## 6. フィレットを有する丸棒の引張り・曲げの応力集中係数計算式

### 6.1 フィレットを有する丸棒引張問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1 \right\} (K_{td} - 1) / \left\{ (K_{ts} - 1)^{1.8} + (K_{td} - 1)^{1.8} \right\}^{1/1.8} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} &= (1.0002 - 0.0001x + 0.00003x^2) \\ &+ (0.1866 + 0.2231x - 0.1534x^2)\lambda \\ &+ (-1.261 + 0.3102x + 0.3829x^2)\lambda^2 \\ &+ (2.995 - 3.420x + 0.3724x^2)\lambda^3 \\ &+ (-3.017 + 5.402x - 1.453x^2)\lambda^4 \\ &+ (1.097 - 2.516x + 0.8515x^2)\lambda^5 \end{aligned}$$

・・・(A 6)

### 6.2 フィレットを有する丸棒曲げ問題

$$K_{tN} = \left\{ K_{ts} - 1 \right\} (K_{td} - 1) / \left\{ (K_{ts} - 1)^{1.6} + (K_{td} - 1)^{1.6} \right\}^{1/1.6} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} &= 1.0005 + 0.0017219x - 0.0010527x^2 \\ &+ (0.16467 + 0.19626x - 0.031310x^2)\lambda \\ &+ (-1.1176 - 0.87011x + 0.68405x^2)\lambda^2 \\ &+ (2.6857 + 1.0239x - 1.9163x^2)\lambda^3 \\ &+ (-2.6520 - 0.22573x + 2.0113x^2)\lambda^4 \\ &+ (0.91873 - 0.12401x - 0.74777x^2)\lambda^5 \end{aligned}$$

・・・(A 7)

# 7 フィレットを有する帯板の引張りの応力集中係数線図

## 7.1 フィレット引張問題

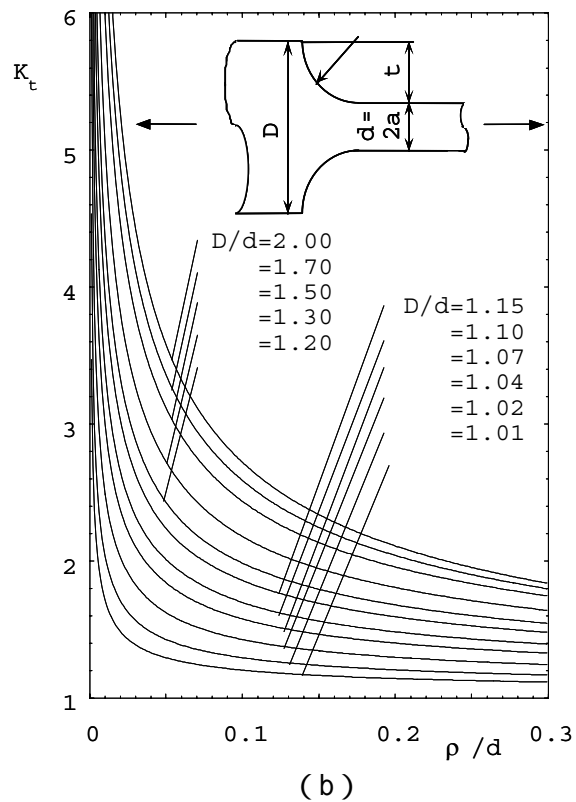
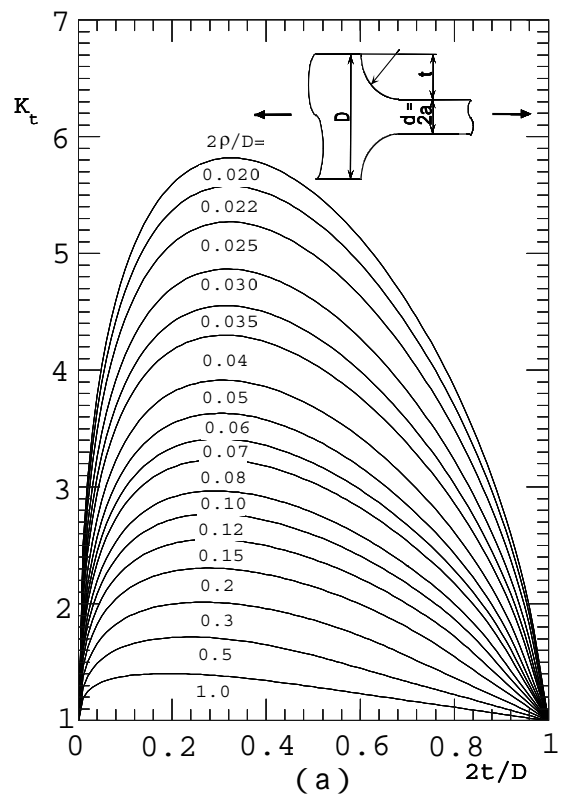


Fig. A4-1 SCF of a fillet in flat bar under tension

## 8. フィレットを有する帯板の引張りの応力集中係数計算式

### 8.1 フィレットを有する帯板引張問題

$$K_{tN} = \left\{ (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left( (K_{ts} - 1)^{1.6} + (K_{td} - 1)^{1.6} \right)^{1/1.6} \right\} + 1$$

$$\begin{aligned} K_t / K_{tN} = & 1.0001 + 0.0010812x - 0.00060452x^2 \\ & + (0.25406 - 0.2786x + 0.1575x^2)\lambda \\ & + (-1.2949 + 3.5075x - 1.6332x^2)\lambda^2 \\ & + (2.5378 - 9.4629x + 4.3688x^2)\lambda^3 \\ & + (-2.2499 + 9.9393x - 4.6004x^2)\lambda^4 \\ & + (0.75284 - 3.704x + 1.7068x^2)\lambda^5 \end{aligned}$$

• • • • (A 8)