

大型鋳鋼品に生じるき裂欠陥予測技術に関する研究*

江川 秀二^{*1}, 野田 尚昭^{*2}
田代 康則^{*3}, 竹ノ内 宏司^{*3}Predicting Locations of Defects in the Solidification Process for
Large-Scale Cast SteelShuji EGAWA, Nao-Aki NODA^{*4},
Yasunori TASHIRO and Kouji TAKENOUCI^{*4} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

The large-scale cast steel has been used in broad fields of industries, such as power generation, construction, vessels, and automobiles. In the solidification process of a hummer used for press machine, for example, sometimes defects such as shrinkage cavity, segregation and cracks appear at hummer's surface. Shrinkage cavity and segregation can be predicted by performing non-steady state heat transfer analysis; and therefore such two types of defects can be eliminated by using chills which control solidification process. However, uneven cooling rates at different regions of the large-scale cast steel generate thermal stresses, which cause solidification cracks, between the chills. For causing those cracks, thermal stress may be important; however, there have been few studies for this thermal stress analysis. In this study, a three dimensional thermal elasto-plastic stress analysis has been performed by using finite element method in connection with three dimensional non-steady state heat transfer analysis, including interaction between the temperature and stress field. The results provide further understanding of the observed solidification crack failure for large-scale cast steel.

Key Words: Thermal Stress, Finite Element Method, Plasticity, Cast Steel, Crack

1. 緒 言

大型鋳鋼品は産業機械、発電、土木建築、船舶・自動車等の幅広い分野の重要な構成部品として使用されており、工業基盤を支える大きな役割を果たしている。一方で、鋳鋼品の鋳造プロセスは多くの因子が複雑に関係し、その各工程も熟練を要することが多いため、各技術者・作業者の経験が鋳鋼品の品質に与える影響は多大なものがある。ところが今日では、熟練技術者の不足に伴い、欠陥の低減化が困難になってきている。特に数十トン以上の大型鋳鋼品では、凝固に時間がかかり、ひけ巣、偏析、き裂欠陥が発生しやすく、その溶接補修にも費用がかかる。このため、欠陥発生や位置を予測し、防止する技術がより重要になる。

近年、欠陥発生位置の特定に数値計算法も用いられるようになってきている⁽¹⁾。これにより、鋳鋼品内部の

状況が定量的に把握できるようになり、熟練技術者でなくても容易に欠陥発生の予測ができるようになった。しかし、これまでの研究は熱伝導解析によりひけ巣・偏析といった、その発生が主として鋳物温度に支配される欠陥に関して行なわれている。それらの研究結果からひけ巣・偏析については数値計算で予測が可能となり⁽²⁾⁽³⁾、凝固を促進・制御するための冷し金を使用することでひけ巣・偏析の発生を抑制することができるようになった。しかし、熱応力が原因と見られるき裂状欠陥に関してはこれまでの方法だけでは予測が困難である。

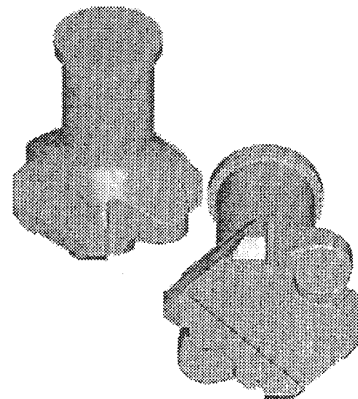


Fig.1 Research object (Hummer)

* 原稿受付 2007年3月26日。

^{*1} 学生員, 九州工業大学大学院工学研究科(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。^{*2} 正員, 九州工業大学工学部。^{*3} 日本鋳鍛鋼(株)(〒804-8555 北九州市戸畑区大字中原先ノ浜46-59)。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

き裂欠陥は鋳物の形状・材質にも依存するが冷し金間に生じる場合が多いことが経験的に知られている。しかし、高温での物性値の不足や、解析方法が複雑であるといった理由から、これまであまり研究されておらず、現在でも正確にその位置を特定することはできていない。そこで本研究では、図1に示すプレス用ハンマを対象に、三次元弾塑性解析と三次元非定常熱伝導解析を連成した熱応力解析を有限要素法により解析を行ない、冷し金の配置・形状を変更したときの鋳物内部の応力状況を把握し、き裂欠陥の発生について検討を行なう。

2. 解析条件

2.1 解析対象のモデル化 図2(a)は本研究の解析対象の自動車プレスに用いる大型鋳鋼品（ハンマ）である。高さが約3m、幅・奥行きが約2~2.5m、重量は約30tで、主に自動車ボディ・鉄板の加工などに用いられる。図2(a)に示すハンマを鋳造する際には、金型を取り付ける製品下面にひげ巣・偏析などの欠陥を発生させないように図2(b)に示すように経験等に基づいて冷し金を複数個配置する必要がある。き裂欠陥は鋳物の形状・材質にも依存するが冷し金間に生じる場合が多いことが経験的に知られている。しかし、実際の製品形状に対応する冷し金の配置は種々の制約からかなり複雑であるため、どのような配置の場合にき裂欠陥が生じやすいかを直接検討することは難しい。そこで本研究では図2(c), (d)に示す冷し金を2個

配置した最も基本的なモデルを用い、冷し金配置の間隔や冷し金接触部の面積、冷し金の高さなどを変更して熱応力の発生について比較検討を行なう。

2.2 解析モデルの形状・寸法 図3(a), (b)に解析に用いたモデルのメッシュ図の例を示す。図3(a)は砂型、断熱材を含めたモデルの全体図であり、図3(b)は砂型の内部に存在する鋳物、冷し金、保温剤のみを表示した図である。鋳物下部と冷し金は凝固開始時において温度差が1000℃以上あり、計算に誤差が生じやすい。そのため鋳物下部と冷し金及び鋳物下部に接触する砂型については比較的細かい四面体一次要素を用いてメッシュを作成し、それ以外の部分については四面体一次要素を用いる。図4(a), (b)に冷し金の形状・寸法を示す。冷し金の形状は立方体（一辺の長さが a の正方形断面×高さ t ）と円柱（直径 d の円形断面×高さ t ）の2種類を考える。冷し金間隔を l 、中心間距離を L と表し、 $l = 30\text{mm}, 70\text{mm}, \infty$ の3種類を考える（ $l = \infty$ は冷し金1個の場合に相当する）。冷し金間隔が $l = 70 \sim 90\text{mm}$ 程度ではこれまでの経験から冷し金形状

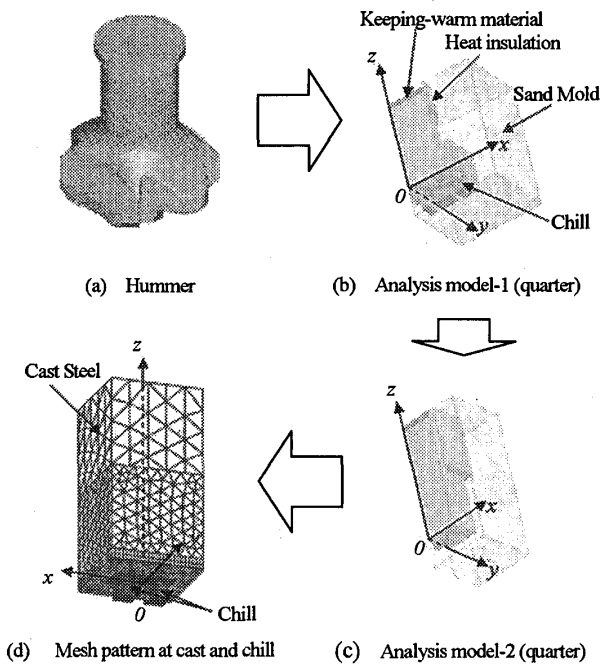


Fig.2 Research object

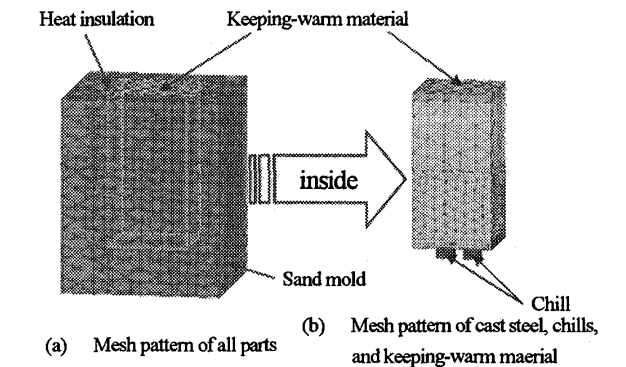


Fig.3 Mesh pattern of FEM model

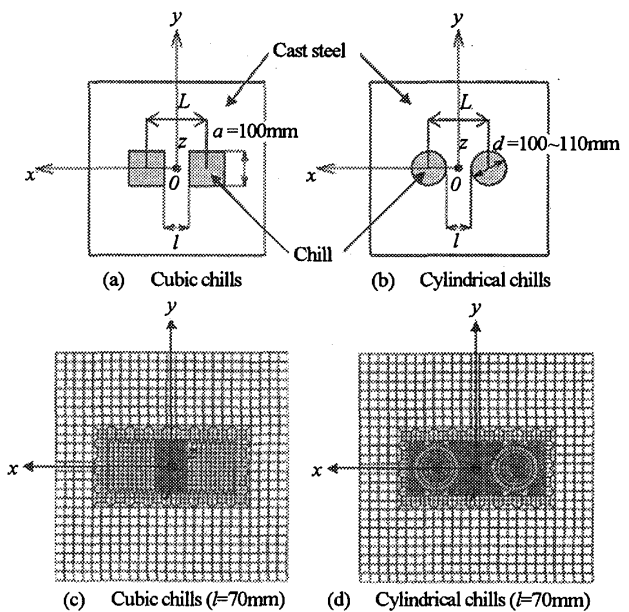


Fig.4 Disposition of chills

が円柱のほうが立方体のよりき裂欠陥が生じにくいことが知られている。図4(c), (d)に解析に用いたメッシュの例を示す。冷し金間隔は $l=70\text{mm}$ で、冷し金について重点的に細かいメッシュを採用している。また、本研究では立方体の冷し金を基準にして鋳物と冷し金の接触部面積と冷し金の高さを大きくしたモデルについても解析を行なう。この場合、立方体の冷し金を基準として、接触部の面積については円柱の直径を 100mm から 110mm に大きくし、冷し金の高さについては円柱の高さを 100mm から 120mm に大きくする。また、接触部の面積と冷し金の高さを変更したとき冷し金の配置を等しくするために中心間距離を $L=170\text{mm}$ でそろえて解析を行なった。

2.3 各材料の物性値 鋳物、冷し金は2Cr-Mo鋼、砂型はケイ砂とした。2Cr-Moの化学成分を表1に示す。鋳物、冷し金、砂型、保温剤、断熱材の物性値を表2に示す。表中の*は温度に依存する物性値であり、鋳

物のヤング率を図5、鋳物の降伏応力を図6、鋳物の線膨張係数を図7、鋳物と冷し金の熱伝導係数を図8、鋳物と冷し金の比熱を図9、砂型の熱伝導係数を図10に示す⁽⁴⁾。鋳物、冷し金の固相線温度以上の物性値に関しては固相線温度付近の値から外挿したものを使用する。鋳物の凝固潜熱については、等価比熱法⁽⁵⁾により、固相線温度 1462°C から液相線温度 1509°C の間に 272.4kJ/kg を均等配分して比熱に上乘せして固相-液相の相変化を表現している。また、鋳物、砂型、冷し金、保温剤、断熱材を完全接着の条件で解析を行なっているため、そのまま計算を行なうと冷し金が膨張し、その影響で周囲に圧縮の応力が生じる。そのため、冷し金、砂型、保温剤、断熱材が鋳物に熱的な影響のみを与えるものとし、それぞれの線膨張係数を0、ポアソン比を0、ヤング率を 1kPa として解析を行なう。また、高温では加工硬化係数は微小であると考え、材料を完全弾塑性体として扱う。すなわち、温度が決定

Table.1 Chemical compositions of cast steel (2Cr-Mo Alloy [wt%])

C	Si	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	V	Al
0.15	0.38	0.6	0.008	0.008	0.04	0.15	2.11	0.91	0.007	0.008

Table.2 Material properties of cast steel, chill, sand mold, keeping-warm material, and heat insulation

	Cast steel	Chill	Sand mold	Keeping-warm material	Heat insulation
Mass density [$\times 10^3 \text{ kg/m}^3$]	7.85		1.7	0.15	1.1
Young's modulus [MPa]	*(1.225~205800) (See Fig.5)		0.001		
Poisson's ratio	0.3		0		
Yield stress [MPa]	*(0.490~215.746) (See Fig.6)		0		
Coefficient of linear expansion [$1/^\circ\text{C}$]	*(1.27~1.50) (See Fig.7)		0		
Thermal conductivity [$\times 10^{-2} \text{ W/m}$]	*(2733.0~5191.0) (See Fig.8)		*(66.98~124.8) (See Fig.10)	8.4	41.9
Specific heat [J/kg·K]	*(460.47~1431.63) (See Fig.9)		964	922	1047
Heat transfer coefficient [$\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$]	4144189.5(Cast steel-Chill, Heat insulation-Air) 418.605(Cast steel-Sand mold, Chill-Sand mold, Sand mold-Keeping-warm material, Sand mold-Heat insulation) 41.8605(Cast steel-Keeping-warm material, Cast steel-Heat insulation) 20.903025(Keeping-warm material, Heat insulation-Air) 4.18605(Cast steel-Heat insulation)				

* These properties are depending on temperature as shown Fig.5-10.

すると材料のヤング率、降伏応力が決定し、応力-ひずみの関係が決定される。

2.4 初期条件及び境界条件 本研究の解析対象である大型鋳鋼品の場合、凝固時間が数時間から数十時間を要することに比べ、鋳込み時間は数分(2~3分)と短いため、鋳物上部と下部に生じる鋳込み時間の差については無視し、注湯時の熱移動は考慮しない。よって、砂型は瞬時に溶鋼で満たされるものとして、その時刻を計算開始とする。初期温度は鋳物を1530℃、冷し金、砂型、断熱材を40℃、保温剤、外気を20℃と

する。また、鋳物、冷し金、砂型、保温剤それぞれの境界面にエアギャップが生じないものとする。各境界面の熱の移動は接触熱伝達として考える。表2に各境界面の熱伝達係数を示す。ただし、砂型、保温剤と外気の境界面は対流とする。

初期条件と境界条件から熱伝導解析を行ない、得られた温度を基に力学的境界条件を用いて、応力解析を行なう⁽⁶⁾。そこで得られた温度と応力から次のステップの初期条件、境界条件を決定し再度熱伝導解析、応力解析を行なう。この作業をステップ毎に行なう。

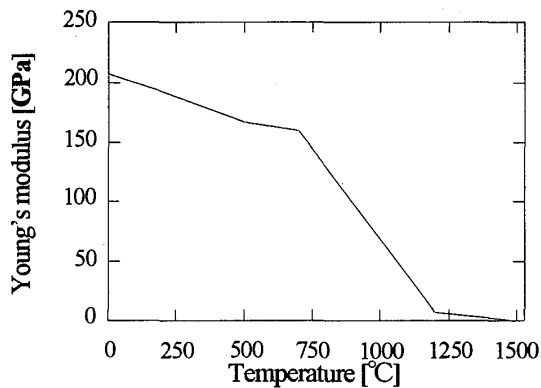


Fig.5 Young's modulus of cast steel

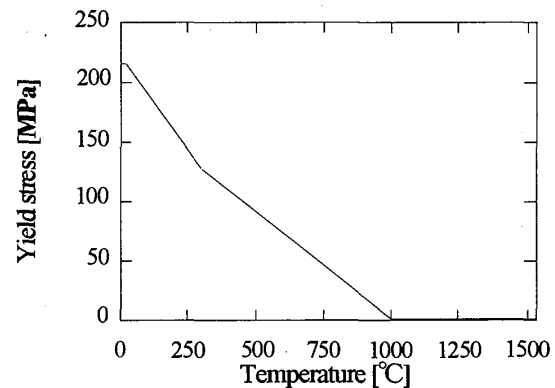


Fig.6 Yield stress of cast steel

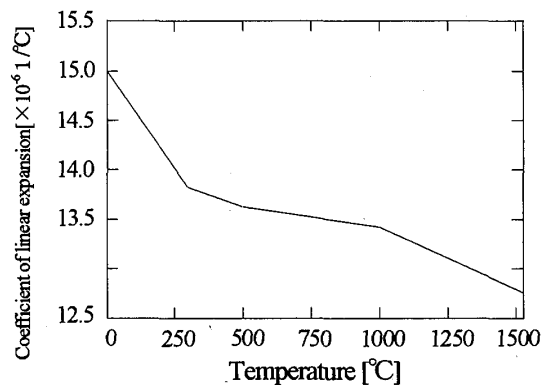


Fig.7 Coefficient of linear expansion of cast steel

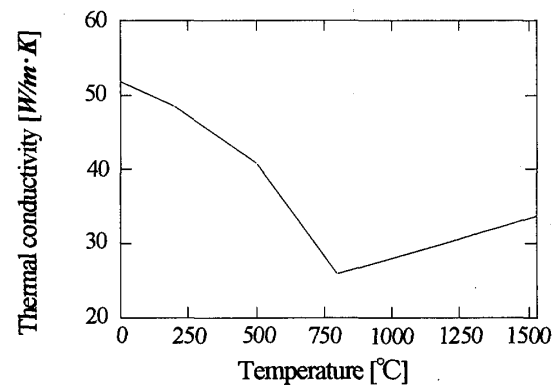


Fig.8 Thermal conductivity of cast steel and chills

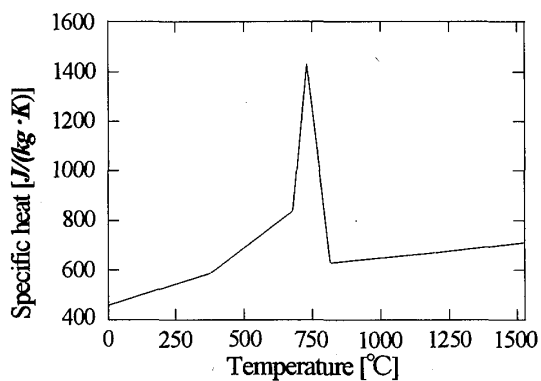


Fig.9 Specific heat of cast steel and chills

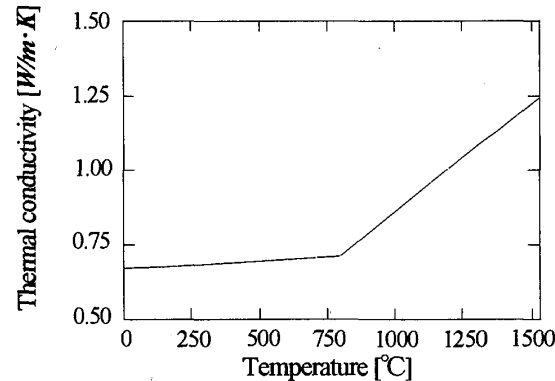


Fig.10 Thermal conductivity of sand mold

3. 解析結果

3.1 き裂発生に重要な σ_x の生じる位置について

図4のように冷し金を配置した場合、き裂は x 軸に垂直な yz 平面に平行な面上に発生することが経験的に知られている。そこで、き裂の発生に関係する σ_x に注目する。図11に冷し金間隔 $l=70\text{mm}$ のときの冷し金の間における σ_x の時間変化の例を示す。事前の検討により、ここでは応力が最も大きく現れる $x=5\text{mm}$ (立方体の場合)、 $x=15\text{mm}$ (円柱の場合)に注目し、 (x, y) 座標を固定して、 $z=0\text{mm}, 5\text{mm}, 10\text{mm}, 30\text{mm}$ としたときの σ_x の時間変化を示している。図11より立方体、円柱ともに $z \approx 5\text{mm} \sim 10\text{mm}$ 程度で σ_x が最大となっている。よって以下では $z=10\text{mm}$ での σ_x 等の熱応力に注目する。鋳物表面($z=0\text{mm}$)の場合を除き、 $z>0\text{mm}$ では500秒から1000秒の間で圧縮応力が生じた後、引張応力に転じて約1200秒後で最大値をとり、その後応力が徐々に小さくなり0に収束する。そのため凝固開始直後の鋳物と冷し金の接触面では引張応力が生じ、鋳物・冷し金接触面から少し鋳物内部に入り込んだところでは圧縮応力が生じる。凝固殻が鋳物内部に進展するにしたがって、引張応力が生じる範囲も内部に進展する⁽⁷⁾。この引張応力は冷し金の冷却能力が大きく影響すると考えられる。なお、図11で時間が $t=0 \sim 3600$ 秒の熱応力 σ_x を示しているが、この範囲で鋳物の温度変化は 1530°C ($t=0$ 秒) \rightarrow 1200°C 程度 ($t=3600$ 秒)であり、この範囲での鋼の降伏応力 $\sigma_{yield} = 0.8 \sim 1.5\text{MPa}$ 程度であることに注意する必要がある。

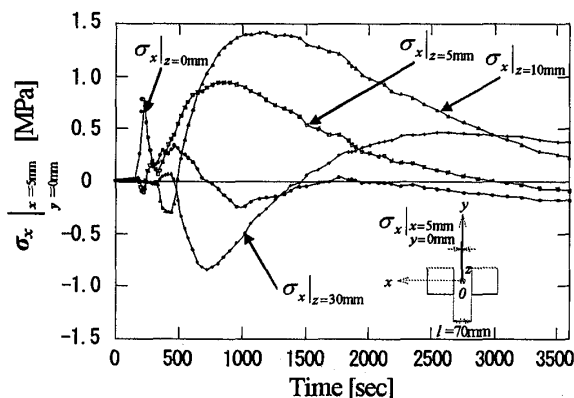
3.2 冷し金間に生じる熱応力と降伏応力 鋳物の降伏応力は温度に依存するため熱応力の最大値を示す場所・時間で必ずしもき裂が発生するとは限らない。すなわち、大型鋳鋼品のき裂欠陥予測に関して、熱応

力の絶対値ではなく、各温度における熱応力と降伏応力との比が重要であると考えられる。そこで本研究では、降伏条件 $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ に注目する。 σ_{eq} は相当応力、 σ_{yield} は温度に依存する降伏応力である。材料は完全弾塑性体なので、 $\sigma_{eq}/\sigma_{yield} \leq 1$ である。降伏域が長時間生じるとき($\sigma_{eq}/\sigma_{yield} = 1$)き裂が生じる可能性があり、降伏域が長時間生じないとき($\sigma_{eq}/\sigma_{yield} < 1$)き裂は生じないと考える。

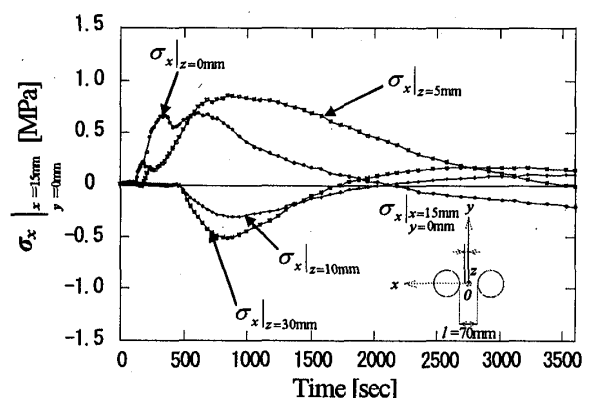
3.3 冷し金間に生じる熱応力と冷し金間隔の関係

図12~図14に冷し金の間における $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ の時間変化を示す。図12(a), (b)は冷し金間隔 $l=30\text{mm}$ 、図13(a), (b)は $l=70\text{mm}$ 、図14(a), (b)は $l=\infty$ で、 (x, y, z) 座標系の $(y, z) = (0, 10)$ に固定して x を変化させたときの $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ の時間変化を示している。図12(a), (b)より、冷し金間隔 $l=30\text{mm}$ のときは、立方体、円柱ともに降伏した状態($\sigma_{eq}/\sigma_{yield} = 1$)が続いており、き裂が生じる可能性がある。図13(a), (b)より、冷し金間隔 $l=70\text{mm}$ のときは、立方体では降伏した状態が続いているが、円柱は降伏した状態が続いていない。よって、冷し金間隔 $l=70\text{mm}$ のとき、円柱の冷し金を使用するとき裂が生じない。これまでの経験で、 $l=70 \sim 90\text{mm}$ 程度では冷し金形状が円柱のとき立方体よりき裂欠陥が生じにくいことが知られている。本解析によって、 $l=70\text{mm}$ のとき、両者の熱応力状態に顕著な違いがあることが明らかとなった。図14(a), (b)より、冷し金間隔 $l=\infty$ のときは、立方体、円柱ともに降伏した状態が続いていない。しかし、冷し金間隔を $l=70\text{mm}$ よりある程度大きくすると、冷し金間でき裂は生じないが、十分な冷却効果を得ることができずひけ巣・偏析などの別の欠陥が生じると考えられる。

3.4 冷し金間に生じる降伏域 図15, 16に冷し金間の $z=10\text{mm}$ における xy 平面の降伏域を示す。



(a) σ_x at $(x, y) = (5, 0)$ for cubic chills



(b) σ_x at $(x, y) = (15, 0)$ for cylindrical chills

Fig.11 σ_x vs. Time ($l=70\text{mm}$)

$z = 10\text{mm}$ に固定するのはき裂発生に関係する σ_x が $z = 10\text{mm}$ で最大の値を示すためである。図15, 16は冷し金間隔 $l = 70\text{mm}$ についての降伏域である。各図の(a)は σ_x が最大値を示す時間付近の降伏域、(b)は(a)から600秒後の降伏域を示している。冷し金間隔が $l = 30\text{mm}$ のときは、立方体、円柱ともに冷し金とのほとんどで降伏域が見られるため図を省略する。図15, 16より冷し金間隔が $l = 70\text{mm}$ のとき、立方体では冷し金の間で降伏域が広く存在し、長時間続いている。よってき裂が生じる可能性がある。一方、円柱では降伏域が生じるが、長時間続かないためにき裂は生

じないと考えられる。また、立方体と円柱の降伏域の広さを比べると立方体のほうが円柱に比べ広いことがわかる。

3.5 冷し金間の降伏域と冷し金の接触面積の関係

図17に冷し金間の $z = 10\text{mm}$ における xy 平面の降伏域を示す。このモデルは立方体の冷し金を基準として円柱の直径を 100mm から 110mm に大きくすることで接触部の面積を $a = 100\text{mm}$ の立方体(図15)と等しくしたものである。図15の立方体の冷し金と図17の円柱の冷し金の結果では中心間距離 $L = 170\text{mm}$ をそろえて示している。図15と図17より、冷し金の接触面積と

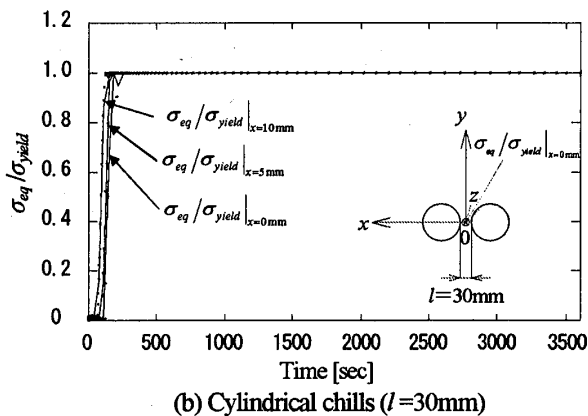
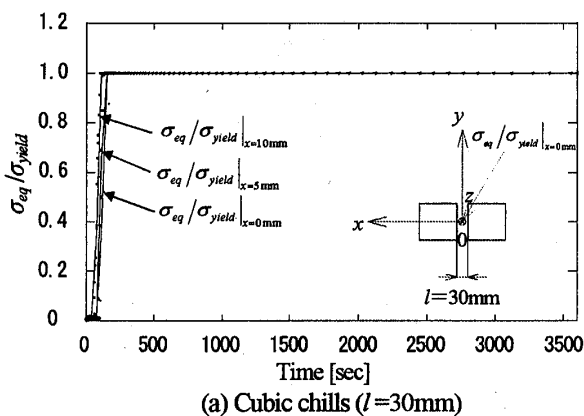


Fig.12 $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ vs. Time ($l = 30\text{mm}$, $z = 10\text{mm}$)

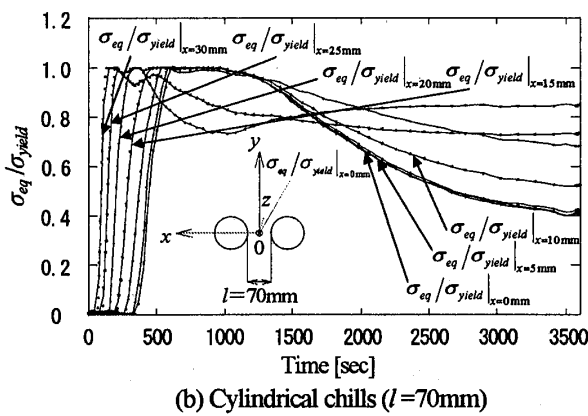
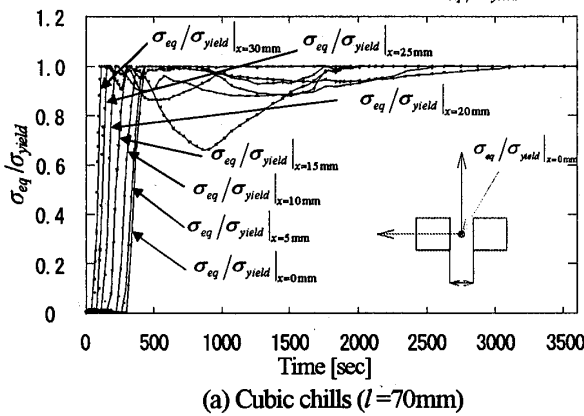


Fig.13 $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ vs. Time ($l = 70\text{mm}$, $z = 10\text{mm}$)

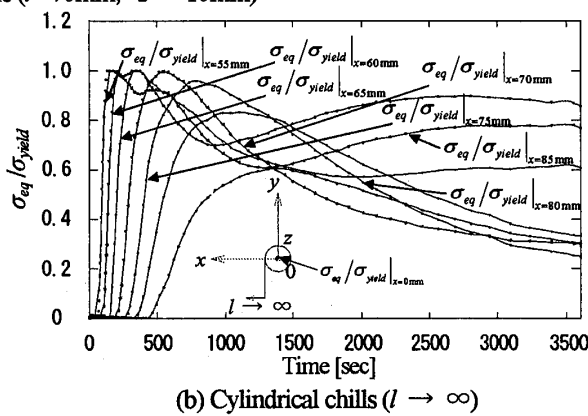
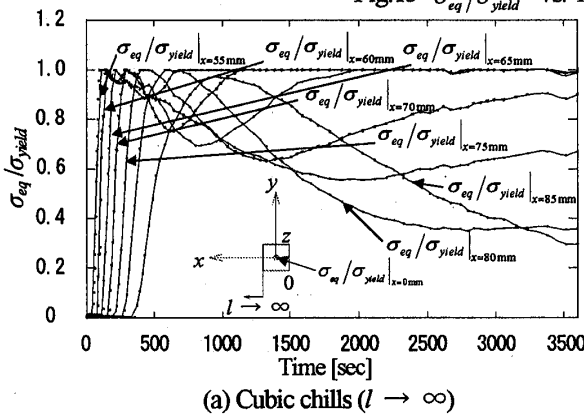


Fig.14 $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ vs. Time ($l \rightarrow \infty$, $z = 10\text{mm}$)

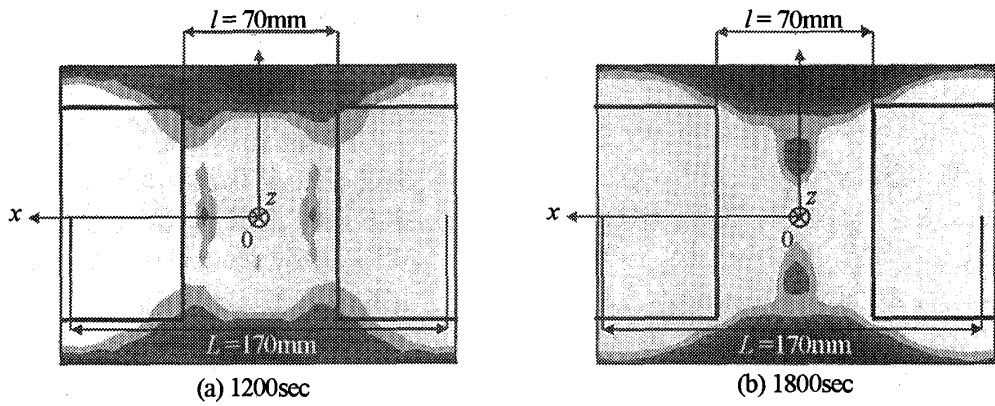


Fig. 15 Yielding Region (Cubic Chills, $l=70\text{mm}$, $a=100\text{mm}$, $t=100\text{mm}$, $z=10\text{mm}$)

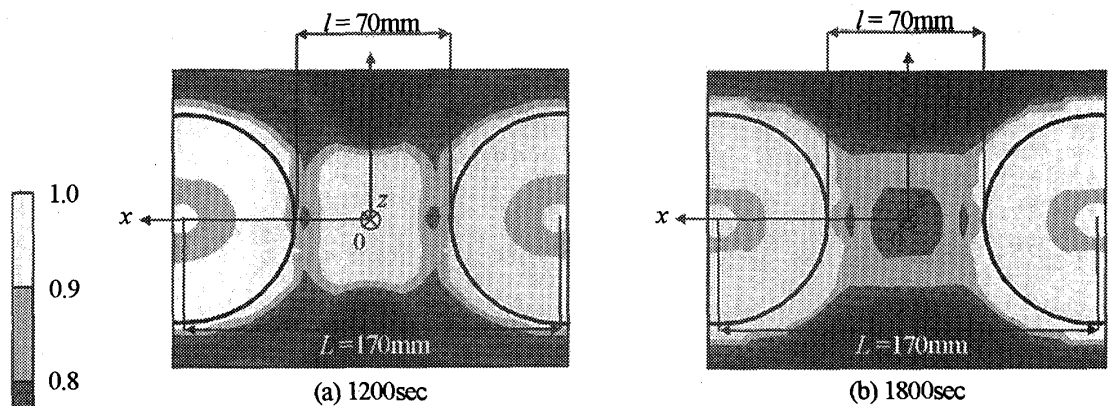


Fig. 16 Yielding Region (Cylindrical Chills, $l=70\text{mm}$, $d=100\text{mm}$, $t=100\text{mm}$, $z=10\text{mm}$)

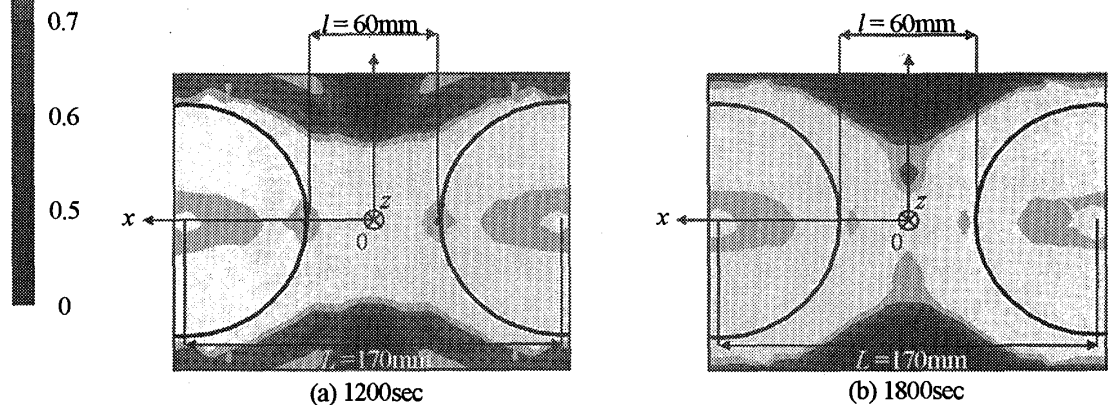


Fig. 17 Yielding Region (Cylindrical Chills, $L=170\text{mm}$, $d=110\text{mm}$, $t=100\text{mm}$, $z=10\text{mm}$)

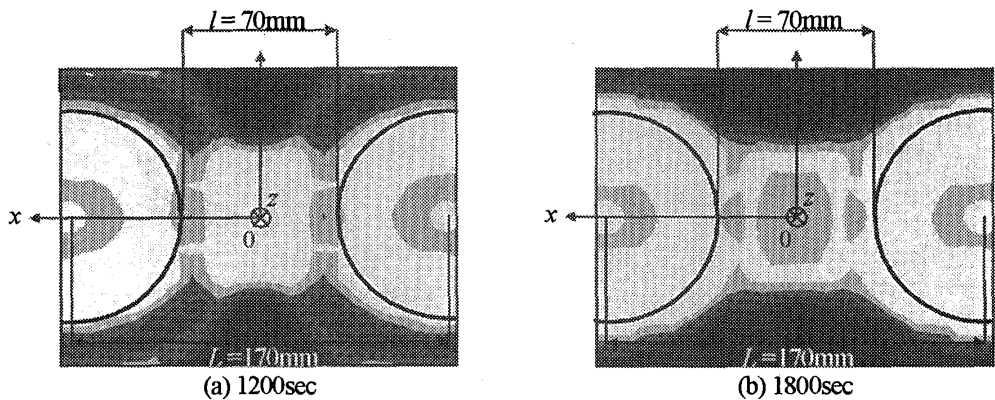


Fig. 18 Yielding Region (Cylindrical Chills, $L=170\text{mm}$, $d=100\text{mm}$, $t=120\text{mm}$, $z=10\text{mm}$)

中心間距離 L をそろえたとき、冷し金の間における降伏域の広さは立方体と円柱で明確な差が見られない。したがって、図15と図16で1800秒後の結果に違いが認められる理由は主として冷し金の接触面積の違いによるものと考えられる。

3.6 冷し金間の降伏域と冷し金の高さの関係

図18に冷し金間の $z=10\text{mm}$ における xy 平面の降伏域を示す。このモデルは円柱の高さを100mmから120mmに大きくしたものである。図16の円柱の冷し金と図18の円柱の冷し金の結果では中心間距離 $L=170\text{mm}$ をそろえて示している。図16と図18では、円柱の高さを100mmから120mmに大きくしたことで降伏域が若干広がったことがわかる。冷し金の高さが大きくなったことで冷し金上の鋳物の冷却が促進され、熱応力が大きくなったためと考えられる。

4. 結 言

大型鋳鋼品は産業機械、発電、土木建築、船舶・自動車等の幅広い分野の重要な構成部品として使用されている。しかし、通常の大サイズの鋳鋼品に比べて冷却に時間がかかり欠陥が生じやすくその溶接補修に多額の費用がかかる。これまでの数値解析では熱伝導解析によりひけ巣・偏析といった、その発生が主として鋳物温度に支配される欠陥に関して行なわれていた。しかし、熱応力が原因と見られるき裂欠陥に関しては、これまでの方法では予測が困難である。

そこで本研究ではプレス用ハンマを対象に、立方体または円柱（寸法 $100 \times 100 \times 100\text{mm}^3$ 程度）の冷し金を2個配置した最も基本的なモデルを考え有限要素法を用いて熱応力解析を行なった。そしてき裂欠陥の発生について関係があると考えられる（I）冷し金の間隔、（II）冷し金の接触面積、（III）冷し金の高さの解析結果に注目し検討を行ない以下の結論を得た。

(1) 冷し金形状が立方体の場合、冷し金間隔 $l \leq 70\text{mm}$ では、冷し金間に降伏域が長時間生じるのでき裂が発生する可能性がある。一方、冷し金形状が円柱のとき、 $l=70\text{mm}$ でも降伏域が長時間生じない。これまでの経験で $l=70 \sim 90\text{mm}$ 程度では冷し金形状が円柱のとき立方体よりき裂欠陥が生じにくいことが知られている。本解析によって、 $l=70\text{mm}$ のとき、両者の熱応力状態に顕著な違いがあることが明らかとなった。

(2) 冷し金間隔を大きくすると（ $l > 70\text{mm}$ ）、冷し金形状にかかわらず冷し金間で降伏域は長時間生じない。しかし、冷し金間隔が大きいため十分な冷却効果が得ることができずひけ巣、偏析などの発生が経験

的に予測される。

(3) 冷し金の接触部面積と中心間距離をそろえたとき、冷し金の間における降伏領域は立方体と円柱で明確な違いが見られない。従って、結果(1)は主として冷し金の接触面積の違いによるものと考えられる。

(4) 冷し金の接触面積と中心間距離をそろえたとき、円柱の高さを100mmから120mmに高くするとことで冷し金間での降伏領域は若干広くなる。

(1)～(4)の結論は、熱応力を評価するパラメータとして $\sigma_{eq}/\sigma_{yield}$ に注目し、冷し金を2個配置したモデルによって得られる結果であり、その正当性に関して今後も検討が必要と考えるが、これまでの冷し金配置に関する経験的知見（結言(1)等）を熱応力の観点からある程度説明可能である。冷し金の個数や寸法の影響など実際の冷し金配置を考慮したモデルの解析は今後検討する予定である。

本研究の一部は大学院学生露成正一君の助力を得た。記して謝意を表す。

文 献

- (1) Ohnaka, I., Computer Simulation of Solidification, Bulletin of the Japan Institute of Metals, Vol.22, No.9 (1983), pp.802-808 (in Japanese).
- (2) Niyama, E., Uchida, T., Morikiwa, M., and Saito, S. A Method of Shrinkage Prediction and Its Application to Steel Casting Practice, Imono, vol.54, No.8(1982), pp.507-517.
- (3) Narita, K., Taniguchi, M., On the Mechanism of Formation of the Inverted V Segregates in Killed Steel Ingots, Tetsu-to-Hagane, Vol.56, No.2 (1970), pp.68-85 (in Japanese).
- (4) Yamamoto, S., Tashiro, Y., Hirose, Y., Kusano, K., Takebayashi, K., Saeki, K., Solidification Analysis of Metal Steel Castings, Imono, Vol.57, No.1 (1985), pp.47-50 (in Japanese).
- (5) Salcudean, M., Abdullah, Z., On The Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.25(1988), pp.445-473.
- (6) Kinoshita, K., Emi, T., Kasai, M., Thermal Elasto-plastic Stress Analysis of Solidifying Shell in Continuous Casting Mold, Tetsu-to-Hagane, Vol.65, No.14 (1979), pp.40-49 (in Japanese).
- (7) Yoshio, E., Kazuyoshi, S., and Masujiroh, H., Analysis of Thermal and Residual Stresses of a Low Alloy Cast Steel Ingot by Use of Viscoplastic Constitutive Equations Considering Phase Transformation, Tetsu-to-Hagane, Vol.78, No.14 (1992), pp.50-57 (in Japanese).