

曲線状き裂の応力拡大係数の解析*

野田尚昭*¹, 小田和広*², 石井和光*³

Analysis of Stress Intensity Factors for Curved Cracks

Nao-Aki NODA, Kazuhiro ODA and Kazumitsu ISHII

In this paper, the hypersingular integral equation method (HIEM) is applied to calculate the stress intensity factors of curved crack problems. The stress fields induced by two kinds of displacement discontinuity are used as fundamental solutions. Then, the problem is formulated as a system of integral equations with the singularity of the form of r^{-2} . In the numerical calculation, two kinds of unknown functions are approximated by the products of the fundamental density functions and polynomials. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical results for curved cracks under various geometrical conditions. In addition, a method of evaluation of the stress intensity factors for arbitrary shaped curved cracks is proposed using the approximate replacement to a simple straight crack.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Hypersingular Integral Equation Method, Curved Crack

1. 緒 言

線形破壊力学に基づき、き裂進展挙動を研究するにあたり、き裂が屈折あるいは曲線状に伝ばすることが問題とされることがしばしばある。そのため、屈折き裂だけではなく、曲線または円弧状のき裂についてもこれまでいくつかの応力拡大係数の解析がなされている。平面問題においては、無限板中の円弧状き裂に関して、Muskhelishvili⁽¹⁾ および Sih-Paris-Erdogan⁽²⁾ が解析しているが、Atluriら⁽³⁾ および Cotterell-Rice⁽⁴⁾ がその応力拡大係数の表示の誤りを訂正している。

また半無限板中の円弧状き裂に対しては、Ioakimidis-Theocaris⁽⁴⁾ が解析しており、他の曲線状き裂についても、Sumiら⁽⁵⁾、Chenら⁽⁶⁾ が解析している。一方、Leeversら⁽⁷⁾、Alpaら⁽⁸⁾ は、S字形状き裂の応力拡大係数を円弧状き裂の解より推定する方法を示している。しかし、曲線状き裂先端の曲率の応力拡大係数

への影響などを詳細に検討した研究はあまり見当たらないようである。

著者らはさきに、内部き裂や縁き裂、屈折・分岐き裂等の解析を行い、仮想き裂表面における未知関数である体積力対密度を多項式で近似する方法〔超越特異積分方程式法〕が未知関数を階段関数等で近似する従来の方法〔体積力法(応力法, 合力法)〕に比べて高精度の結果が得られることを示した^{(9)~(11)}。そこで本研究では、曲線状き裂の解析にこの方法を適用する。例として、円弧状の屈曲をもつ無限板中のき裂および半無限板の縁き裂の問題を取扱い、き裂先端の曲率および屈曲角などを系統的に変化させ数値計算を行った。また、任意形状の曲線状き裂の応力拡大係数を推定したい場合のあることを考慮し、曲線状き裂の応力拡大係数をそのき裂先端の角度と投影長さの等しい直線状き裂の応力拡大係数で評価する場合の適用範囲についても検討を行った。

2. 解析方法

ここでは、図1のように遠方で一様引張応力 σ^∞ が作用している半無限板の直線縁に入った円弧状き裂を例にとり超越特異積分方程式法の解析方法を説明する。重ね合わせの原理によりき裂を持つ半無限板の間

* 平成4年3月18日 九州支部第45期総会講演会および平成4年9月3日 材料力学講演会において講演, 原稿受付平成4年7月27日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 准員, 九州工業大学大学院。

*³ いすゞエンジニアリング (〒252 藤沢市土棚8)。

題をき裂のない半無限板の問題に置き換えると、この問題は仮想き裂面上に分布させた引張形およびせん断形の標準形体積力対密度 $f_1(\phi), f_2(\phi)$ を未知関数とする次の形の積分方程式で表される。

$$\int_0^a k_{11}(\phi, \theta) f_1(\phi) d\phi + \int_0^a K_{11}(\phi, \theta) f_1(\phi) d\phi + \int_0^a k_{12}(\phi, \theta) f_2(\phi) d\phi + \int_0^a K_{12}(\phi, \theta) f_2(\phi) d\phi = -\sigma^\infty \cos^2 \theta \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\int_0^a k_{21}(\phi, \theta) f_1(\phi) d\phi + \int_0^a K_{21}(\phi, \theta) f_1(\phi) d\phi + \int_0^a k_{22}(\phi, \theta) f_2(\phi) d\phi + \int_0^a K_{22}(\phi, \theta) f_2(\phi) d\phi = \sigma^\infty \sin \theta \cos \theta \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

式(1)は円弧状き裂面の境界条件式 $\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$ に相当している。ここで $k_{ij}(\phi, \theta) (i, j=1, 2)$ は無限板中に分布した体積力対によって生じる応力を表す関数であり、また $K_{ij}(\phi, \theta) (i, j=1, 2)$ は半無限板の直線縁の影響を補正する関数である。そして、 \int は発散積分の有限部分をとることを意味する。式(1)の解法として $f_1(\phi), f_2(\phi)$ を式(2)のように基本密度関数 $w_1(\phi), w_2(\phi)$ と関数 ϕ^n の積で近似する。

$$f_1(\phi) = F_{I1}(\phi) w_1(\phi), F_{I1}(\phi) \cong \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi^n$$

$$w_1(\phi) = \frac{(x+1)^2 \sigma^\infty}{2(x-1)} \rho \sqrt{\alpha^2 - \phi^2} \dots\dots\dots (2 \cdot a)$$

$$f_2(\phi) = F_{II}(\phi) w_2(\phi), F_{II}(\phi) \cong \sum_{n=0}^{N-1} b_n \phi^n$$

$$w_2(\phi) = \frac{(x+1) \sigma^\infty}{2} \rho \sqrt{\alpha^2 - \phi^2} \dots\dots\dots (2 \cdot b)$$

ここで N : 選点数, $x=3-4\nu$ (平面ひずみ), ν : ポアソン比である。以上の離散化の方法により、式(1)の積分方程式を解くことは、係数 a_n, b_n についての $2N$ 元の連立方程式を解く問題に帰着する。

境界条件を満足させる点は式(3)で与えられ、これはき裂先端と縁で密となるように選点の位置を決めている。

$$\theta_j = \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{N} \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} \quad (j=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (3)$$

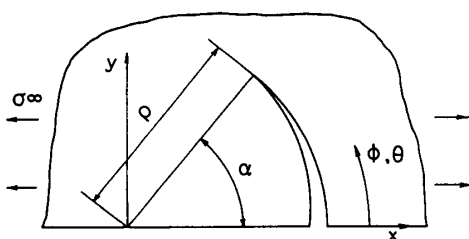


図1 一軸引張りを受ける半無限板中の円弧状縁き裂

係数 a_n, b_n が決定されれば、き裂先端の応力拡大係数は式(4)で与えられる。

$$K_{I,II} = F_{I,II}(\alpha) \sigma^\infty \sqrt{\pi \rho \alpha} \dots\dots\dots (4)$$

本章で示した方法は、円弧以外のき裂にも応用可能である。具体的な解析例として、本研究ではき裂が直線と円弧からなるモデルを考察したが、この解析の直線部の境界条件を満足させるには、前報の Chebyshev 多項式を用いる方法^{(9)~(11)}を適用した。

3. 特異積分の処理

式(1)の左辺第1項と第3項の積分は、特異項を含んでいるので特別に処理する必要がある。これまでの著者らの解析^{(9)~(11)}では Chebyshev 多項式の積分公式を利用してこれを評価したが、曲線状き裂の問題ではこの公式は使用できないので、ここでは二次元応力集中問題の解法に用いられている方法⁽¹²⁾を参考にし、以下に示す方法により特異積分の処理を行う。

注目点 θ 近傍において、被積分関数を ϵ のべき級数で表してから、被積分関数から特異項を取り出す。すなわち注目点 θ を含む区間 $[0, \alpha]$ を、図2のように三つの区間 $[0, \theta - \epsilon_0], [\theta - \epsilon_0, \theta + \epsilon_0], [\theta + \epsilon_0, \alpha]$ に分ける。

$$I = \int_0^a k(\phi, \theta) f(\phi) d\phi = \int_0^{\theta - \epsilon_0} k(\phi, \theta) f(\phi) d\phi + \int_{\theta - \epsilon_0}^{\theta + \epsilon_0} k(\phi, \theta) f(\phi) d\phi + \int_{\theta + \epsilon_0}^a k(\phi, \theta) f(\phi) d\phi = I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots\dots (5)$$

注目点 θ を含まない区間 $[0, \theta - \epsilon_0], [\theta + \epsilon_0, \alpha]$ ($\epsilon_0 \ll \alpha$) においては、特異項がないので数値積分公式を用いてそのまま数値積分できる。注目点 θ を含む区間 $[\theta - \epsilon_0, \theta + \epsilon_0]$ については、被積分関数に $\phi = \theta + \epsilon$ を代入して、式(6)に示すような被積分関数の ϵ のべき級数の展開式を用いる。

$$I_2 = \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} k(\theta + \epsilon, \theta) f(\theta + \epsilon) d\epsilon = \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{a_1 \epsilon^4 + a_2 \epsilon^5 + a_3 \epsilon^6 + \dots}{b_1 \epsilon^6 + b_2 \epsilon^7 + b_3 \epsilon^8 + \dots} d\epsilon$$

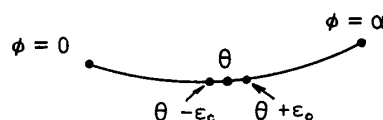


図2 特異積分の処理方法

$$= \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \left(\frac{c_1}{\epsilon^2} + \frac{c_2}{\epsilon} + c_3 + \dots \right) d\epsilon \dots\dots\dots (6)$$

式(6)の第1項は発散積分の有限部分をとることにより積分値が評価でき、また第2項は ϵ の奇関数なので、その積分のCauchyの主値は零となる。したがって、式(6)の積分は、 ϵ_0^2 以上の項を無視すれば

$$I_2 \doteq -\frac{2c_1}{\epsilon_0} + 2c_3\epsilon_0 \dots\dots\dots (7)$$

となり、 ϵ のべき級数展開式の係数 c_1 および c_3 を決定することにより求められる。

4. 計算結果および考察

4・1 無限板中の円弧状き裂 無限板中の円弧状き裂の応力拡大係数の解析を行い、厳密解と比較する

ことにより本解析法の計算精度を確認した。また、参考のため式(2)の $F_I(\phi)$, $F_{II}(\phi)$ を階段関数で近似する従来の体積力法の方法でも解析し結果を比較した。表1に、階段関数を用いたときの結果を示す。表1に示すように、階段関数を用いたときの結果では、選点数 $N=150$ と200の計算結果から外挿した値[表1の $\infty(150-200)$]と厳密解は有効数字3けた程度一致する。一方、表2に示す本解析結果法による結果は、厳密解と選点数 $N=6$ からは有効数字7けたまで一致し、非常に精度がよい。この結果から、未知関数を多項式で近似する方法は、少ない選点数で高精度の結果が得られることがわかる。また選点数が少ないため計算時間も大幅に短縮される。

4・2 無限板中の曲線状き裂 き裂先端の曲率が応力拡大係数に及ぼす影響を考えるための基本的なき裂

表1 未知関数の階段関数近似による解析結果

N	$\alpha=30.0 \quad \beta=0.0$		$\alpha=30.0 \quad \beta=30.0$		$\alpha=30.0 \quad \beta=30.0$	
	$k_{IA,B}$	$k_{IIA,B}$	k_{IA}	k_{IIA}	k_{IB}	k_{IIB}
30	0.97846	0.57695	1.1603	0.058016	0.38559	0.78451
50	0.97650	0.58114	1.1620	0.053928	0.38177	0.78581
80	0.97559	0.58322	1.1630	0.051956	0.37990	0.78652
100	0.97534	0.58386	1.1632	0.051378	0.37935	0.78675
150	0.97506	0.58463	1.1636	0.050697	0.37869	0.78706
200	0.97495	0.58497	1.1638	0.050409	0.37840	0.78722
$\infty(100-150)$	0.97450	0.58517	1.1644	0.049336	0.37736	0.78769
$\infty(150-200)$	0.97463	0.58601	1.1644	0.049543	0.37754	0.78768
Exact	0.97496	0.58562	1.1643	0.050048	0.37797	0.78768

$k_{I, II} = K_{I, II} / \sigma \sqrt{\rho}$

表2 未知関数の多項式近似による解析結果

N	$\alpha=30.0 \quad \beta=0.0$		$\alpha=30.0 \quad \beta=30.0$		$\alpha=30.0 \quad \beta=30.0$	
	$k_{IA,B}$	$k_{IIA,B}$	k_{IA}	k_{IIA}	k_{IB}	k_{IIB}
2	0.9895561	0.5619829	1.151651	0.05946876	0.4074583	0.7688413
4	0.9749634	0.5856141	1.164283	0.05005156	0.3779830	0.7876736
6	0.9749593	0.5856211	1.164287	0.05004821	0.3779741	0.7876775
8	0.9749593	0.5856211	1.164287	0.05004820	0.3779741	0.7876775
10	0.9749593	0.5856212	1.164287	0.05004821	0.3779741	0.7876775
Exact	0.9749593	0.5856211	1.164287	0.05004821	0.3779741	0.7876775

表3 無限板中の円弧と直線からなるき裂の応力拡大係数 ($F_{I,II} = K_{I,II} / \sigma \sqrt{\pi c}$)

α	15.0		30.0		45.0		60.0	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
$\rho/2c$								
0.1	0.9656	0.1616	0.8547	0.3257	0.6746	0.4571	0.4480	0.5327
0.2	0.9623	0.1741	0.8389	0.3557	0.6387	0.5006	0.3890	0.5820
0.4	0.9581	0.1907	0.8207	0.3934	0.6009	0.5532	0.3338	0.6386
0.6	0.9554	0.2024	0.8100	0.4183	0.5826	0.5847	0.3141	0.6675
0.8	0.9533	0.2116	0.8034	0.4361	0.5742	0.6042	0.3110	0.6797
1.0	0.9517	0.2190	0.7992	0.4492	0.5718	0.6152	0.3165	0.6805
Straight	0.9493	0.2544	0.8059	0.4653	0.5946	0.5946	0.3536	0.6124

モデルとして、表3の図中に示すような片端が円弧状に屈曲したき裂が、主き裂と垂直な方向に一様引張力を受ける問題の解析を行った。表3に、き裂先端の曲率 ρ および屈曲角 α を変化させ解析した結果を示す。得られた結果は、主き裂のき裂線上に投影したき裂長さ c を用いて無次元化した。また、実際の構造物中に発生する任意形状の曲線状き裂の応力拡大係数のだいたいの値を推定しなければならない場合のあることを考慮して、図3に示すような曲線状き裂と投影長さが等しくき裂先端Bと同じ傾きをもつ直線き裂の応力拡大係数(表中のStraightの値)との比較も行った。表よりわかるように、曲線状き裂の応力拡大係数を、直線き裂の値を用いて近似推定を行う場合、 F_I の値は $\rho/2c \geq 0.2$, $\alpha \leq 45^\circ$ の範囲であれば誤差4%程度以内で評価できる。一方、 F_{II} の値は、 F_I に比べて直線き裂の応力拡大係数で近似するときの精度はかなり悪いようである。

4.3 半無限板中の円弧状縁き裂 縁き裂の例として、はじめにき裂先端が半無限板の直線縁に対し常に垂直となるような円弧状縁き裂の解析を行った。表4に、本解析結果とIoakimidisらの結果⁽⁴⁾との比較

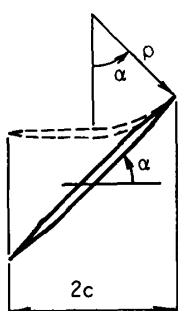


図3 直線き裂近似による応力拡大係数の評価

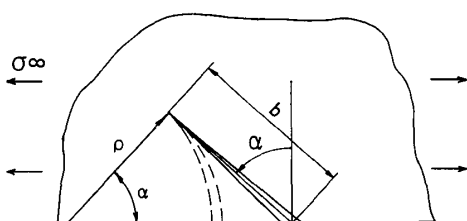


図4 円弧状縁き裂先端と接するような斜め縁き裂

を示す。応力拡大係数の無次元化はき裂長さ ρa を用いて行っている。表より、Ioakimidisらの結果は本解析結果とよく一致していることがわかる。また、表4には、き裂の投影長さ $b = \rho \sin \alpha$ を用いて無次元化した応力拡大係数 F^* も示した。その値は、直線縁き裂の値1.1215に近い値となっている。

次に、図1のような円弧状縁き裂の解析を行った。表5に、図1の問題を解析した場合の応力拡大係数の収束性を示す。表より、本解析手法は、縁き裂の問題においても良好な収束性を示すことがわかる。また、図4に示すような円弧状き裂先端と接するような直線斜め縁き裂の応力拡大係数と本解析結果との比較を表6に示す。この解析結果から二つの無次元化応力拡大係数はモードIについては α の広範囲で、モードIIでは

表4 円弧状縁き裂の応力拡大係数
($F_I = K_I / \sigma^\infty \sqrt{\pi \rho a}$, $F_I^* = K_I / \sigma^\infty \sqrt{\pi b}$, $b = \rho \sin \alpha$)

α	Present analysis		Ioakimidis et al. [4]
	F_I	(F_I^*)	F_I
15.0	1.1152	(1.1216)	1.115
30.0	1.0962	(1.1218)	1.100
45.0	1.0647	(1.1221)	1.065
60.0	1.0206	(1.1223)	1.023
75.0	0.9642	(1.1224)	0.965

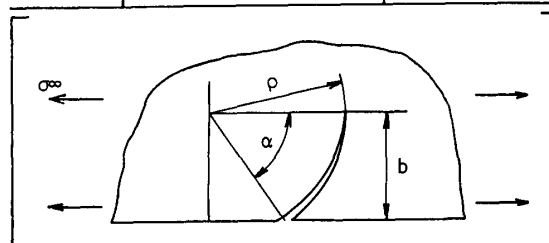


表5 円弧状縁き裂の $F_{I,II}$ の収束性 [図1]

N	$\alpha = 30.0$		$\alpha = 60.0$	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
4	0.920717	0.304933	0.463699	0.352683
6	0.919676	0.305050	0.462889	0.352426
8	0.919664	0.305088	0.462765	0.352481
10	0.919671	0.305095	0.462749	0.352493
12	0.919675	0.305096	0.462747	0.352496
14	0.919677	0.305097	0.462747	0.352496

表6 円弧状縁き裂と斜め縁き裂の応力拡大係数の比較 ($F_{I,II} = K_{I,II} / \sigma^\infty \sqrt{\pi b}$, $b = \rho \tan \alpha$)

α	Present analysis		Straight		Comparison	
	F_I	F_{II}	F_{Is}	F_{IIs}	F_I/F_{Is}	F_{II}/F_{IIs}
15.0	1.0684	0.1720	1.0686	0.1738	0.9998	0.9896
30.0	0.9197	0.3051	0.9201	0.3058	0.9996	0.9977
45.0	0.7044	0.3699	0.7049	0.3645	0.9993	1.0148
60.0	0.4627	0.3525	0.4625	0.3362	1.0004	1.0485
75.0	0.2345	0.2540	0.2318	0.2261	1.0112	1.1234

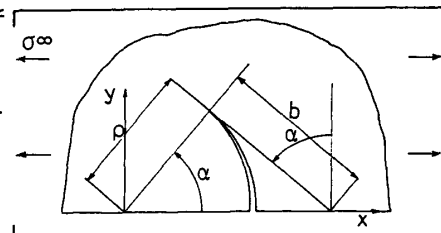
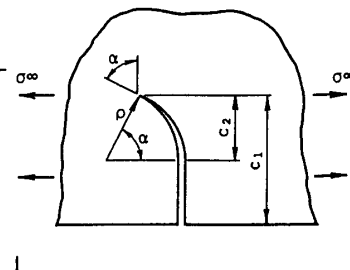


表 7 半無限板中の円弧と直線からなる縁き裂の応力拡大係数 ($F_{I,II} = K_{I,II}/\sigma^\infty \sqrt{\pi b}$, $b = c_1/\cos \alpha$)

α	15.0		30.0		45.0		60.0	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
c_2/c_1								
0.1	1.0697	0.1604	0.9240	0.2873	0.7117	0.3541	0.4707	0.3465
0.2	1.0689	0.1649	0.9212	0.2950	0.7065	0.3629	0.4639	0.3539
0.4	1.0685	0.1690	0.9197	0.3015	0.7040	0.3692	0.4613	0.3573
0.6	1.0684	0.1706	0.9196	0.3037	0.7040	0.3704	0.4618	0.3562
0.8	1.0684	0.1715	0.9196	0.3047	0.7042	0.3703	0.4624	0.3543
1.0	1.0684	0.1720	0.9197	0.3051	0.7044	0.3699	0.4627	0.3525
Straight	1.0686	0.1738	0.9201	0.3058	0.7049	0.3645	0.4625	0.3362



α の大きいときを除き非常によく一致していることがわかる。このことから半無限板の円弧状縁き裂の応力拡大係数は、き裂先端がその円弧状縁き裂と接するような斜め縁き裂の応力拡大係数でかなり良く近似できることがわかる。

4・4 半無限板中の曲線縁き裂 表7の図中に示すような、直線縁から垂直に伸びたき裂端が円弧状に屈曲した場合の応力拡大係数を解析した。き裂先端の屈曲角 α およびき裂の屈曲部の長さ c_2 と投影長さ c_1 の比 c_2/c_1 を変化させ、き裂先端の角度および曲率の影響について考察した。その結果を表7に示す。表中のStraightの値は、曲線状縁き裂先端と接するような斜め縁き裂の値である。表よりわかるように、 F_I の値は斜め縁き裂の値とよく一致している。また、 F_{II} の値は、 α の大きい時および曲率が小さいときを除き非常によく一致する。このことから曲線状縁き裂の応力拡大係数は、内部き裂と比較してき裂先端の曲率の影響は少なく、き裂先端の角度と投影長さによって、ほとんど決定できることがわかる。

5. 結 論

本研究は、曲線状き裂の応力拡大係数の解析に超越特異積分方程式法を適用し、曲線状き裂の先端の曲率および角度が応力拡大係数に及ぼす影響について考察した。その結果をまとめると以下のようになる。

(1) 仮想境界上の未知関数である体積力対密度を、基本密度関数と多項式によって離散化を行う本解析手法は、Chebyshev多項式を用いた積分公式によってその特異積分を評価できない場合でも、高精度の結果を与えることがわかった。特に無限板中の円弧き裂の結果は、選点数 $N=6$ 程度で、厳密解と有効数字7けたまで一致し、階段関数で未知関数を近似する場合よりはるかに良好な収束性を示した。

(2) 内部き裂の例として、無限板中の円弧状の屈曲をもつき裂の応力拡大係数の解析を行い、その結果

を示すとともにき裂先端の曲率および屈曲角の影響について検討した。曲線状き裂の応力拡大係数をそれと投影長さとき裂先端の角度の等しい直線き裂で評価する場合、き裂先端の曲率と投影長さの比が $\rho/2c \geq 0.2$ かつ屈曲角が $\alpha \leq 45^\circ$ であれば、モードIの応力拡大係数は直線き裂の値で十分評価できることがわかった。しかし、モードIIの応力拡大係数はモードIに比べ直線き裂で近似する場合の精度はかなり悪い。

(3) 先端が円弧状に屈曲した縁き裂の応力拡大係数を解析し、そのき裂先端と接するような斜め縁き裂の応力拡大係数と比較した。この結果、曲線状縁き裂の応力拡大係数は、内部き裂と比較してき裂先端の曲率の影響は少なく、き裂先端の角度と投影長さがわかれば、斜め縁き裂の応力拡大係数によってよく近似できることがわかった。

本研究の一部は平成3年度科学研究費奨励研究(A)の援助を受けたことを記し、深く謝意を表する。

文 献

- (1) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, (1953), 542-545, Noordhoff.
- (2) Sih, G. C., Paris, P. C. and Erdogan, F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **29**(1962), 306-312.
- (3) Cotterell, B. and Rice, J. R., *Int. J. Fract.*, **16-2**(1980), 155-169.
- (4) Ioakimidis, N. I. and Theocaris, P. S., *Int. J. Fract.*, **15-4**(1979), 299-309.
- (5) Sumi, Y., Nemat-Nasser, S. and Keer, L. M., *Int. J. Fract.*, **21**(1983), 67-79.
- (6) Chen, Y. Z., Gross, D. and Huang, Y. J., *Eng. Fract. Mech.*, **39-5**(1991), 791-797.
- (7) Leever, P. S., Radon, J. C. and Culver, L. E., *J. Mech. Phys. Solids*, **24**(1976), 381-395.
- (8) Alpa, G., Bozzo, E. and Gambarotta, L., *Eng. Fract. Mech.*, **13**(1980), 791-799.
- (9) 野田・梅木・Erdogan, 機論, **55-520**, A(1989), 2521.
- (10) 野田・小田・陳, 機論, **56-532**, A(1990), 2405.
- (11) 野田・小田・増田, 機論, **57-542**, A(1991), 232.
- (12) 西谷, 機誌, **70-580**(1967), 627.
- (13) Atluri, S. N., Kobayashi, A. S. and Nakagaki, M., *Int. J. Fract.*, **11-2**(1975), 257-271.