

超越特異積分方程式法による混合モードき裂の解析*
(多項式展開を用いた体積力法)野田 尚昭*¹, 小田 和広*², 陳 玳 珩*³The Hypersingular Integral Equation Method in the Analysis of
Mixed Mode Crack Problems
(The Extended Body Force Method Using Chebychev Polynomials)

Nao-aki NODA, Kazuhiro ODA and Dai-Heng CHEN

In this paper, the hypersingular integral equation method (HIEM) is applied to calculate the stress intensity factors of the mixed mode crack problems. The stress fields induced by "two kinds of displacement discontinuity" are used as fundamental solutions. Then, the problem is formulated as a system of integral equations with the singularity of the form of $(\xi-x)^{-2}$. In the numerical calculation, two kinds of unknown-functions are approximated by the products of the weight functions and Chebychev polynomials. As examples, the stress intensity factors of the oblique edge crack in the semi-infinite plate are treated. The calculation shows that the HIEM gives rapidly converging numerical results even for extremely oblique edge crack.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Hypersingular Integral Equation Method, Mixed Mode Crack

1. 結 言

近年, コンピュータの進歩と相まって, 種々の数値解法が著しい進展を見たが, その中でも体積力法は, 切欠きの応力集中やき裂の応力拡大係数の解析に多く応用されている。体積力法は, 無限板中の仮想境界面上に体積力または食違いを分布させることによって, 解析しようとする問題を表現するもので, 問題を解くことは, 未知関数である仮想境界上の体積力密度あるいは食違い密度を求めることに帰着する⁽¹⁾。き裂問題の解析に最近用いられるようになってきている超越特異積分方程式法は, き裂となるべき仮想境界上に分布させる食違い密度を未知関数とする体積力法と同一の積分方程式を対象とする解法とみなすことができる。Kaya-Erdogan⁽⁵⁾および著者ら⁽⁷⁾はさきに, このような従来の特異積分方程式法⁽¹⁰⁾よりも高次の特異応力場を用いる方法が, 数値解析上便利であり, 高精度の解析が可能であることを示した。そこで本研究では,

半無限板の直線縁に斜めに入ったき裂の解析を行い, 超越特異積分方程式法が, 混合モードき裂の問題においても有効であることを示す。また, この方法が未知関数の多項式展開表示を用いた体積力法に相当することを指摘するとともに, 未知関数を階段関数等で近似する従来の方法よりも高精度の結果が得られることを示す。

2. 超越特異積分方程式法

弾性体の内部に長さ $(b-a)$ の平面ひずみ状態のき裂が存在するとき, この問題はき裂上下面の法線方向および接線方向の変位差 $V_1(\xi)$, $V_2(\xi)$ を未知関数とする次のような積分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{V_1(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_a^b H_{11}(\xi, x) V_1(\xi) d\xi \\ + \int_a^b H_{12}(\xi, x) V_2(\xi) d\xi = -\frac{1+x}{2G} p(x) \\ \int_a^b \frac{V_2(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_a^b H_{21}(\xi, x) V_1(\xi) d\xi \\ + \int_a^b H_{22}(\xi, x) V_2(\xi) d\xi = -\frac{1+x}{2G} q(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

G : 横弾性係数, $\kappa=3-4\nu$, ν : ポアソン比
ここで, \oint は発散積分の有限部分をとることを意味し,

* 原稿受付 平成2年2月19日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² 学生員, 九州工業大学大学院。*³ 正員, 九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津680-4)。

$H_{ij}(\xi, x)$, ($i, j=1, 2$) はき裂面以外の境界条件を満たす関数である。式(1)はき裂のない弾性体中に想定した仮想き裂面上に変位食違いを分布させた場合の境界条件式に相当する。

一方、従来の転位密度を未知関数とする積分方程式は次のように表される⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_a^b h_{11}(\xi, x) f(\xi) d\xi \\ + \int_a^b h_{12}(\xi, x) g(\xi) d\xi = -\frac{1+\kappa}{2G} p(x) \\ \int_a^b \frac{g(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_a^b h_{21}(\xi, x) f(\xi) d\xi \\ + \int_a^b h_{22}(\xi, x) g(\xi) d\xi = -\frac{1+\kappa}{2G} q(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = 0, \int_a^b g(\xi) d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 \int はコーシーの主値をとることを意味する。

超越特異積分方程式法では、式(3)に示される変位の一価性条件を考慮する必要がないため、数値計算上便利である。

また、食違いによる応力場は、標準型体積力対⁽¹⁾(図1)を分布させることによって得ることができる。単位食違いによる応力を σ_{v1} , σ_{v2} とし、単位大きさの引張りの標準形集中力対による応力を σ_{pr} , 単位大きさのせん断の標準形集中力対による応力を σ_{ps} とすれば、次の係数を掛けることによって変換できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{v1} = \frac{G(x+1)}{x-1} \sigma_{pr}, \sigma_{v2} = G \sigma_{ps} \\ x = 3-4\nu \text{ (平面ひずみ)} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

したがって、仮想き裂境界面上に食違いを分布させ境界条件を満たす超越特異積分方程式法と標準型体積力対を分布させることによって境界条件を満足させる体積力法とは本質的に等価な解法である。

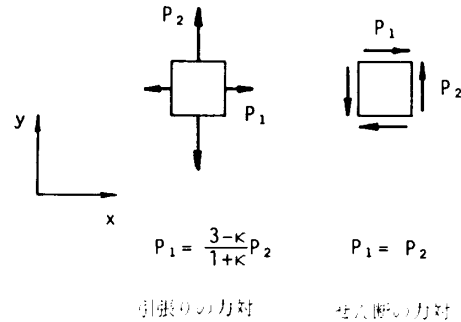


図1 標準型集中力対

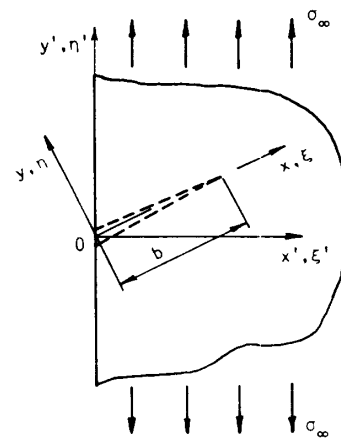


図2 半無限板の斜め縁き裂

3. 混合モードき裂の解析方法

3・1 半無限板の斜め縁き裂 図2のように、遠方で一様引張応力 σ_∞ が作用している半無限板の直線縁に斜めに入ったき裂を例にとり、混合モードき裂の応力拡大係数の解法を説明する。重ね合わせの原理により、き裂を持つ半無限板の問題をき裂のない半無限板の問題に置き換えると、この問題は、仮想き裂面上に分布させた食違い密度 $V_1(\xi)$, $V_2(\xi)$ を未知関数とする次の形の積分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{V_1(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^b K_{11}(\xi, x) V_1(\xi) d\xi + \int_0^b K_{12}(\xi, x) V_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma_\infty \sin^2 \theta \\ \int_0^b \frac{V_2(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^b K_{21}(\xi, x) V_1(\xi) d\xi + \int_0^b K_{22}(\xi, x) V_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

G : 横弾性係数, $x=3-4\nu$ (平面ひずみ), ν : ポアソン比

式(4)の関係をいれれば、この問題は、仮想き裂面上に分布させた標準型体積力対密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を未知関数とする次の形の積分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{P_1(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^b K_{11}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi + \int_0^b K_{12}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sigma_\infty \sin^2 \theta \\ \int_0^b \frac{P_2(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_0^b K_{21}(\xi, x) P_1(\xi) d\xi + \int_0^b K_{22}(\xi, x) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{x+1}{2} \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $K_{ij}(\xi, x)$, $(i, j=1, 2)$ は直線縁の影響を補正する関数である。標準型体積力対が作用する場合の半無限板の基本解については、西谷ら⁽³⁾が詳しく説明しているので、ここでの表示は略す。また、従来用いられている体積力法(応力法)との離散化における相違を示すため、以下は式(6)を基本の積分方程式として議論を進める。

積分範囲を $0 \sim 1$ とするため、変数 r, s を次のように定義する。

$$r = \frac{\xi}{b}, \quad s = \frac{x}{b}, \quad f_i(r) = \frac{P_i(\xi)}{b}, \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

r, s を用いれば式(6)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr + \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr &= -\pi \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sigma_\infty \sin^2 \theta \\ \int_0^1 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr &= -\pi \frac{x+1}{2} \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)の解法として、ここでは $f_i(r)$ を式(9)のように基本密度関数 $w_1(r), w_2(r)$ と Chebychev 多項式の積で近似する。従来の体積力法(応力法)では、本来連続的に変化しているべき体積力対の密度を、き裂を N 等分し、分割した各区分で一定値をとる階段関数と基本密度関数の積で近似している。

$$\begin{aligned} w_1(r) &= \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sqrt{1-r^2}, \quad w_2(r) = \frac{x+1}{2} \sqrt{1-r^2}, \\ f_1(r) &= F_1(r) w_1(r), \quad F_1(r) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n U_n(r), \quad f_2(r) = F_2(r) w_2(r), \quad F_2(r) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n U_n(r) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

そして、特異性を含む項は次の積分公式を利用する。

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(r) \sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr = -\pi(n+1) U_n(s) \quad \dots\dots\dots (10)$$

この公式を利用するために式(8)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr + \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr &= p(s) \\ \int_{-1}^1 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr &= q(s) \\ p(s) &= -\pi \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sigma_\infty \sin^2 \theta, \quad q(s) = -\pi \frac{x+1}{2} \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(9)、(10)を代入すれば、式(11)の積分方程式は係数 a_n, b_n についての $2N$ 元の連立方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} [a_n \{-\pi(n+1) U_n(s) + A_n(s)\} + b_n B_n(s)] &= -\pi \sigma_\infty \sin^2 \theta \\ \sum_{n=0}^{N-1} [a_n C_n(s) + b_n \{-\pi(n+1) U_n(s) + D_n(s)\}] &= -\pi \sigma_\infty \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} A_n &= -\int_{-1}^0 \frac{U_n(r) \sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) U_n(r) \sqrt{1-r^2} dr \\ B_n &= \int_0^1 k_{12}(r, s) U_n(r) \frac{x-1}{x+1} \sqrt{1-r^2} dr, \quad C_n = \int_0^1 k_{21}(r, s) U_n(r) \frac{x+1}{x-1} \sqrt{1-r^2} dr \\ D_n &= -\int_{-1}^0 \frac{U_n(r) \sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{22}(r, s) U_n(r) \frac{x+1}{2} \sqrt{1-r^2} dr \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

境界条件を満足する点は次の式で与えられる。

$$s = \cos \left(\frac{2j}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad j=1, 2, \dots, N$$

応力拡大係数は次のように定義される。

$$K_I = F_I(1) \sqrt{\pi b}, \quad K_{II} = F_{II}(1) \sqrt{\pi b}$$

以上の解法により半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数を求めた。

3・2 分布荷重を受ける縁き裂 図3に示すよう

に、き裂面に $p_{yy}=(x/b)^m, p_{xy}=(x/b)^m$ なる分布荷重が作用している場合の応力拡大係数を解析した。この問題も、境界条件が変わるだけで図2の問題と同じようにして解けばよい。この結果は、残留応力が存在する場合や切欠底にき裂が生じたときの応力拡大係数を推定するのに有効である。

4. 計算結果および考察

半無限板の斜め縁き裂の問題は、西谷、石田らによって体積力法による解析がなされている⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。石田らの解法は、未知関数を基本密度関数と折れ線関数の積で近似し、区間の合力で境界条件を満足させる合力法を用いて精度を高めている。また長谷部らは、等角写像法によりこの問題を解析している⁽⁶⁾。そこで、本法の収束性を表1に、他の解析結果と本法による解析結果との比較を表2に示す。本解析法(HIEM)では、選点数 $N=20$ 程度で十分な精度が得られた。4種類の異なる解法による結果は、ほぼ一致しているが、 $\theta=30^\circ$ より小さいところでは結果に差が認められる。体積力法による解析値より、むしろ長谷部らの等角写像法による解析値が本法とよく一致していることがわかる。また表1からわかるように、き裂の角度が小さいところでは解の収束が遅くなる傾向がみられた。そこで、

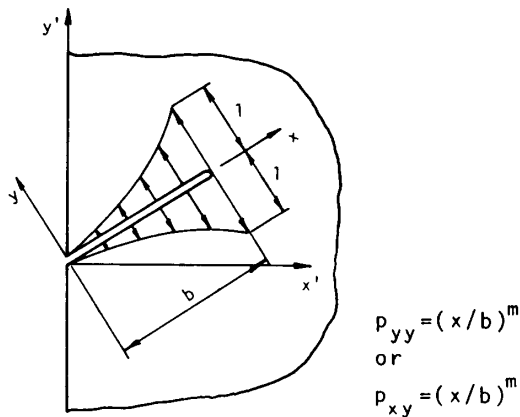


図3 分布荷重を受ける縁き裂

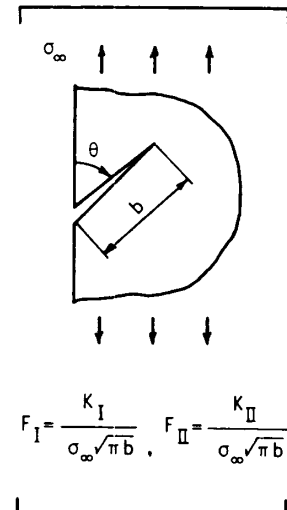
本法と体積力法(応力法)の未知関数の密度変化を調べてみた。図4にそれを示す。多項式展開を用いる本解析法(HIEM)では、選点数 $N=30$ 程度で密度はほとんど収束してしまい連続関数である分布密度を良く近似しているが、体積力法(BFM)の階段関数表示では急な密度変化をうまく表現することができず、HIEMの結果と差がでている。 θ が 30° 以下になるとこの傾向は顕著になり、とくにき裂根本付近でのBFMの密度は不正確である。このために、応力拡大係

表1 超越特異積分方程式法の収束性

θ deg.	H I E M			B F M		
	N	F_I	F_{II}	N	F_I	F_{II}
45	5	0.70403	0.36557	24	0.70788	0.36106
	10	0.70499	0.36455	32	0.70704	0.36190
	15	0.70488	0.36446	64	0.70583	0.36321
	20	0.70489	0.36447	96	0.70546	0.36365
	25	0.70490	0.36448	(32-24)	0.70453	0.36443
				(64-32)	0.70462	0.36452
				(96-64)	0.70472	0.36454
30	H I E M			B F M		
	N	F_I	F_{II}	N	F_I	F_{II}
	10	0.46260	0.33590	24	0.45300	0.34275
	15	0.46257	0.33620	32	0.45505	0.34122
	20	0.46254	0.33619	64	0.45838	0.33880
	24	0.46250	0.33617	96	0.45960	0.33795
	30	0.46247	0.33616	(32-24)	0.46117	0.33660
				(64-32)	0.46171	0.33638
				(96-64)	0.46204	0.33626
15	H I E M			B F M		
	N	F_I	F_{II}	N	F_I	F_{II}
	20	0.23225	0.22637	24	0.23976	0.22916
	25	0.23184	0.22617	32	0.23611	0.22884
	30	0.23182	0.22616	64	0.23247	0.22780
	35	0.23181	0.22615	96	0.23175	0.22733
	40	0.23180	0.22614	128	0.23151	0.22707
				(32-24)	0.22517	0.22786
				(96-64)	0.23031	0.22639
				(128-96)	0.23078	0.22628

表2 半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数

θ deg.	H I E M		Nisitani		Isida		Hasebe	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
10	0.1621	0.1734					0.162	0.174
15	0.2318	0.2261					0.232	0.226
20	0.3054	0.2710	0.225	0.228	0.239	0.219	0.305	0.271
22.5	0.3436	0.2905			0.335	0.301		
30	0.4625	0.3362	0.461	0.337	0.461	0.338	0.463	0.336
37.5	0.5845	0.3613			0.584	0.362		
40	0.6251	0.3648					0.6251	0.3648
45	0.7049	0.3645	0.705	0.364	0.705	0.364	0.7050	0.3644
50	0.7817	0.3543					0.7818	0.3543
60	0.9201	0.3058	0.920	0.306	0.920	0.306	0.9201	0.3058
67.5	1.0048	0.2474			1.005	0.247		
70	1.0286	0.2243					1.0286	0.2243
75	1.0686	0.1738	1.068	0.174	1.069	0.174		
80	1.0978	0.1186			1.098	0.119	1.0978	0.1186
85	1.1155	0.0601			1.116	0.060		
90	1.1215	0.0000	1.121	0.000	1.121	0.000	1.1215	0.0000



数にも誤差がでていいると思われる。しかし、階段関数でも分割数を増すと本法の値に近づいていくことがわかる。表2の西谷の値は分割数 $N=24, 32$ から外挿により求めたものであるが、表1に示すようにもっと分割数を増して外挿を行った結果は本法の値に近づいていく。これより本解析法 (HIEM) が体積力法よりはる

かに少ない選点数で、しかも外挿なしで高精度の結果が得られることがわかる。

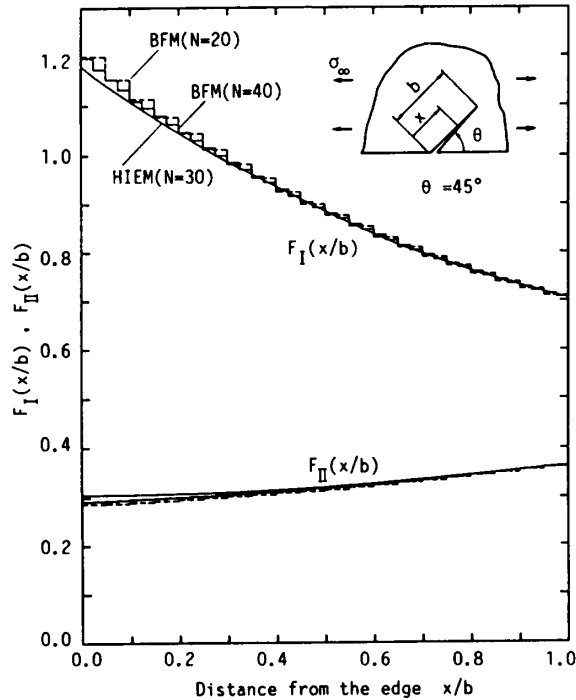
また、表3に分布荷重を受ける縁き裂の解析結果を示す。この問題は $\theta=90^\circ$ の場合を Stallybrass⁽⁷⁾ が、 $\theta=30\sim 90^\circ$ の場合を西谷ら⁽³⁾ が解析しているが、本研究では従来の方法では解析が困難であった θ が小さい範囲まで精度よい解析結果を得た。

5. 結 言

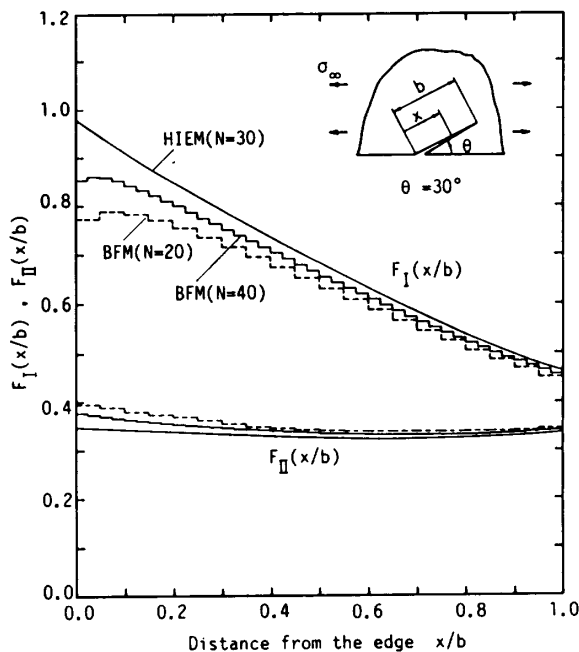
本研究では、半無限板に斜めに入った縁き裂の問題を例にとり、混合モードき裂の超越特異積分方程式法による解析法を考察した。また、過去の研究結果との比較を行い、本解析法の精度を確認した。結果をまとめると以下ようになる。

(1) 従来の転位密度を未知関数とする特異積分方程式法に比べ高次の特異応力場を用いる超越特異積分方程式法は、変位の一価性条件[式(3)]を考慮する必要がないので、数値計算上便利である。また、超越特異積分方程式法と体積力法は仮想き裂面上の食違いまたは標準型体積力対の密度を未知関数とする同一の積分方程式を対象とする等価な解析法とみなすことができる。

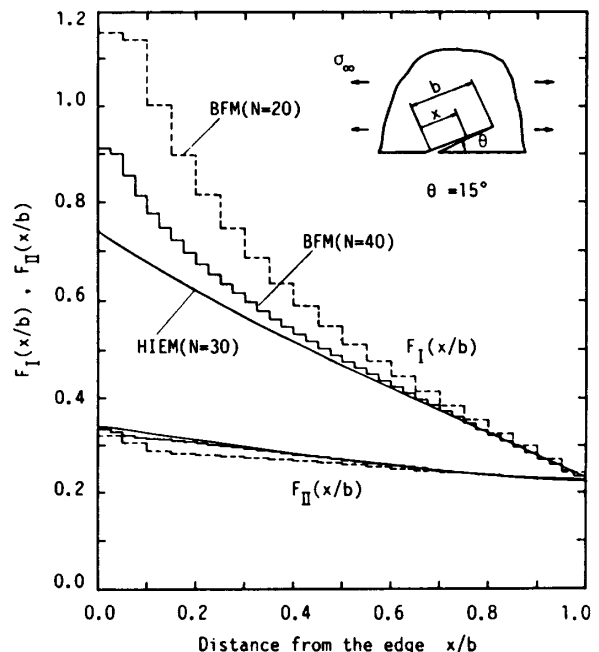
(2) 未知関数を Chebychev 多項式と基本密度関数の積で近似する超越特異積分方程式の解法は、従来の体積力法より少ない選点数で高精度の結果を与える。したがって、き裂面以外の境界条件を満足する基



(a) $\theta=45^\circ$ の場合



(b) $\theta=30^\circ$ の場合



(c) $\theta=15^\circ$ の場合

図4 仮想き裂面に沿う重み関数 F_I, F_{II} の変化 (階段関数との比較)

表 3 分布荷重を受ける縁き裂の F_I, F_{II} の値

(a) $p_{uu} = (x/h)^m, p_{uv} = 0$

θ deg.	m	0		1		2		3		4		5	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
15		5.182	-3.088	2.184	-1.034	1.3329	-0.5167	0.9561	-0.3107	0.7490	-0.2080	0.6197	-0.1494
30		2.325	-1.034	1.1390	-0.3468	0.7749	-0.1747	0.6019	-0.1062	0.5009	-0.0720	0.4345	-0.0523
45		1.587	-0.505	0.8618	-0.1698	0.6239	-0.0864	0.5048	-0.0531	0.4322	-0.0364	0.3828	-0.0267
60		1.290	-0.265	0.7479	-0.0894	0.5614	-0.0458	0.4643	-0.0284	0.4034	-0.0196	0.3611	-0.0145
75		1.159	-0.117	0.6975	-0.0395	0.5336	-0.0204	0.4462	-0.0127	0.3906	-0.0088	0.3513	-0.0065
90		1.1215	0.0000	0.6829	0.0000	0.5255	0.0000	0.4410	0.0000	0.3868	0.0000	0.3485	0.0000

(b) $p_{uv} = 0, p_{vv} = (x/h)^m$

θ deg.	m	0		1		2		3		4		5	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
15		-0.461	1.732	-0.2192	0.9616	-0.1367	0.6953	-0.0968	0.5585	-0.0736	0.4743	-0.0586	0.4168
30		-0.274	1.373	-0.1261	0.7952	-0.0766	0.5922	-0.0531	0.4861	-0.0396	0.4193	-0.0310	0.3739
45		-0.178	1.234	-0.0803	0.7324	-0.0480	0.5545	-0.0328	0.4604	-0.0242	0.4009	-0.0188	0.3593
60		-0.110	1.165	-0.0489	0.7020	-0.0289	0.5366	-0.0196	0.4484	-0.0144	0.3921	-0.0111	0.3526
75		-0.053	1.132	-0.0233	0.6873	-0.0137	0.5280	-0.0092	0.4427	-0.0068	0.3880	-0.0052	0.3494
90		0.0000	1.1215	0.0000	0.6829	0.0000	0.5255	0.0000	0.4410	0.0000	0.3863	0.0000	0.3485

本解が得られる場合には、混合モードのき裂問題において本解析法 (HIEM) は有力な方法である。未知関数を階段関数と基本密度関数で近似する従来の体積力法 (応力法) の方法では、分割区間に不連続が生じるため密度分布をうまく表現できない場合があるが、未知関数の多項式展開表示を用いることにより、連続曲線である真の密度分布を精度よく表現することができる。

(3) 半無限板の斜め縁き裂の解析を行った結果、長谷部らの等角写像法による結果は本解析値とほぼ一致したが、体積力法による結果はき裂の角度が 30° より小さいところでは差が認められた。これは体積力法 (応力法) の階段関数では密度分布を精度よく近似することができないことが原因である。しかし体積力法 (応力法) でも分割数をもっと増やして解析を行えば、本法による結果に近づく。

(4) 分布荷重が作用している縁き裂の応力拡大係

数を従来の方法では解析が困難であった自由表面との角度が小さい範囲まで精度良く解析した。この結果は、残留応力が存在する場合や切欠底にき裂が生じたときの応力拡大係数を推定するのに有効である。

文 献

- (1) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 9, 培風館.
- (2) 西谷, 機論, **41**-344, A (1975), 1103.
- (3) 西谷・尾田, 機論, **46**-407, A (1980), 745.
- (4) 石田, 機論, **45**-392, A (1979), 306.
- (5) Kaya, A. C. and Erdogan, F., *Q. Appl. Math.*, **45**-1 (1987), 105.
- (6) Stallybrass, M. P., *Int. J. Eng. Sci.*, **8**(1970), 351.
- (7) 野田・梅木・Erdogan, F., 機論, **55**-520, A (1989), 2521.
- (8) Hasebe, N. and Nagoya, I., *Ing. -Arch.*, **49**(1980), 51.
- (9) Krenk, S., *Int. J. Solids Struct.*, **11**(1975), 693.
- (10) Nemat-Nasser, S. 編, *Mechanics Today*, **4**(1978), 1, Pergamon Press.