

体積力法の特異積分方程式の数値解析による  
界面き裂および角部の応力拡大係数の解析\*野田 尚 昭\*<sup>1</sup>, 小田 和 広\*<sup>2</sup>  
樋口 健\*<sup>3</sup>, 田中 篤\*<sup>3</sup>Analysis of Stress Intensity Factors of Interface Cracks and Angular  
Corners Using the Singular Integral Equation of the Body Force MethodNao-Aki NODA, Kazuhiro ODA,  
Takeshi HIGUCHI and Atsushi TANAKA

In this paper, the numerical solution of singular integral equations is discussed in the analysis of interface cracks and angular corners. The problems are formulated in terms of a system of singular integral equations on the basis of the body force method. In the case of an interface crack, the unknown functions of the body force doublet densities which satisfy the boundary conditions are approximated by the products of the fundamental density functions and power series. In the case of angular corners, the unknown functions of the body force densities are expressed as a linear combination of two types of fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to express the symmetric stress singularity of  $1/r^{1-\lambda_1}$  and the skew-symmetric stress singularity of  $1/r^{1-\lambda_2}$ . The accuracy of the present analysis is verified by comparing the present results with the results obtained by other researchers and examining the compliance with the boundary conditions. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical results for these problems as well as for ordinary crack problems in homogeneous materials.

**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Composite Material, Singular Integral Equation, Interface Crack, Notch

## 1. 結 言

最近、軽量化と高機能化を目的として複合材料が広分野で使用されるようになり、その強度評価が重要な問題となっている<sup>(1)</sup>。多くの界面を有する複合材料の破壊は、界面に生じたき裂の伝ばに支配されることが多い。また強化材と母材のような異なる材料を接合した角部では特異性が生じるため、その把握が必要となる。しかし界面き裂の問題では、変位の振動現象と応力の振動特異性がその解析を困難なものとしているため、これまで得られた厳密な解析結果はあまり多くない。また異材接合角部の問題では、陳ら<sup>(2)</sup>が指摘しているようにモード I とモード II の変形モードに関係した異なる応力特異性の指数が混在しているため、解析上それらの特異応力場を正確に求める必要がある。

著者らは、これまで均質材中のき裂問題<sup>(3)~(5)</sup>と応力集中問題<sup>(6)~(8)</sup>において、体積力法の特異積分方程式によって問題を定式化し、それを数値的に高精度に

解析する方法について考察した。その結果、未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する離散化手法の有効性を示した。そこで本研究では、これらの方法を接合無限板中の複数個の界面き裂の問題(図1)と無限板および半無限板中の切欠角部の問題(図2, 図3)に応用し、これらの拡張された応力拡大係数が従来のき裂問題、応力集中問題と同様に精度良く解析可能であることをこれらの問題を例として示す。

2. 界面き裂の応力拡大係数の  
特異積分方程式による数値解析方法

図1に示すような複数個の界面き裂の干渉問題を例に取り解析方法を示す。結城らの複素応力拡大係数の定義<sup>(1)(12)</sup>によれば、界面上の応力分布は次式で表される。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{a_j}\right)^{\lambda_j} \dots\dots\dots (1)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln\{(G_2\kappa_1 + G_1)/(G_1\kappa_2 + G_2)\} \dots\dots\dots (2)$$

長さ  $2a_j$  のき裂が  $j=1, \dots, N$  個存在するとき、 $j$  番目の界面き裂の境界条件を表す特異積分方程式は、界面き裂のない接合無限板中の界面上に分布させた  $y$  方向引張形の標準型集中力対ならびにせん断形の標準型

\* 平成6年3月29日 第71期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成6年1月24日。

\*<sup>1</sup> 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

\*<sup>2</sup> 正員、九州工業大学大学院。

\*<sup>3</sup> 学生員、九州工業大学工学部。

集中力対の分布密度  $P_{1j}(\xi_j), P_{2j}(\xi_j)$  を未知関数とする次の式で表される<sup>(9)(10)</sup>.

$$-\pi\beta \frac{dP_{2j}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{1j}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \sum_{k=1, j}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nn}(\xi_k, x_j) P_{1k}(\xi_k) d\xi_k = -\sum_{m=1}^2 \frac{G_m(1+\chi_m)}{\chi_m - 1} \frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty$$

$$\pi\beta \frac{dP_{1j}(x_j)}{dx_j} + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{P_{2j}(\xi_j)}{(\xi_j - x_j)^2} d\xi_j + \sum_{k=1, j}^N \int_{-a_k}^{a_k} h_{nt}(\xi_k, x_j) P_{2k}(\xi_k) d\xi_k = -\sum_{m=1}^2 G_m \frac{\pi}{C} \tau_{xy}^\infty, (j=1, \dots, N) \dots\dots (3)$$

$$C = \frac{2G_1(1+\alpha)}{(1-\beta^2)(\chi_1+1)} = \frac{2G_2(1-\alpha)}{(1-\beta^2)(\chi_2+1)} \dots\dots\dots (4)$$

$$\alpha = \frac{G_2(\chi_1+1) - G_1(\chi_2+1)}{G_2(\chi_1+1) + G_1(\chi_2+1)}, \beta = \frac{G_2(\chi_1-1) - G_1(\chi_2-1)}{G_2(\chi_1+1) + G_1(\chi_2+1)} \dots\dots\dots (5)$$

$$\chi_m = \begin{cases} (3-\nu_m)/(1+\nu_m) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu_m & (\text{平面ひずみ}), \nu_m: \text{ポアソン比}, (m=1, 2) \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

式(3)は界面き裂の境界条件式  $\sigma_y=0, \tau_{xy}=0$  に相当している。ここで  $h_{nn}(\xi_k, x_j)$  等は注目している  $j$  番めのき裂面以外のき裂となる仮想境界に力対を分布させたとき  $x_j$  に生じる応力であり、下添字  $m=1, 2$  はそれぞれ材料1, 2を表す。また、 $\int$  は発散積分の有限部分をとることを意味する。参考のために連続転位分布法によって導かれる界面き裂の特異積分方程式を示せば、仮想き裂面上の転位密度  $B_{xj}(\xi_j), B_{yj}(\xi_j)$  を未知関数とする次式で表される<sup>(9)</sup>.

$$-\pi\beta B_{xj}(x_j) + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{yj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j + \sum_{k=1, j}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nn}(\xi_k, x_j) B_{yk}(\xi_k) d\xi_k = -\frac{\pi}{C} \sigma_y^\infty$$

$$\pi\beta B_{yj}(x_j) + \int_{-a_j}^{a_j} \frac{B_{xj}(\xi_j)}{\xi_j - x_j} d\xi_j + \sum_{k=1, j}^N \int_{-a_k}^{a_k} H_{nt}(\xi_k, x_j) B_{xk}(\xi_k) d\xi_k = -\frac{\pi}{C} \tau_{xy}^\infty \dots\dots\dots (7)$$

$$\int_{-a_j}^{a_j} B_{xj}(\xi_j) d\xi_j = 0, \int_{-a_j}^{a_j} B_{yj}(\xi_j) d\xi_j = 0 \dots\dots (8)$$

ここで、 $f$  は積分のコーシーの主値をとることを意味する。式(3)の標準形体積力対の分布密度  $P_{1j}(\xi_j),$

$P_{2j}(\xi_j)$  は、次式で表されるように1個の界面き裂を表すのに必要な密度を表現する基本密度関数  $w_{1j}(\xi_j), w_{2j}(\xi_j)$  と重み関数  $F_{1j}(\xi_j), F_{2j}(\xi_j)$  の積で近似する。

$$P_{1j}(\xi_j) + iP_{2j}(\xi_j) = \{w_{1j}(\xi_j) + iw_{2j}(\xi_j)\} \{F_{1j}(\xi_j) + iF_{2j}(\xi_j)\} \dots\dots\dots (9)$$

界面き裂の場合、基本密度関数は界面き裂のき裂縁の変位<sup>(11)</sup>をもとにした次式で表される。

$$\sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\chi_m - 1}{1 + \chi_m} w_{1j}(\xi_j) + iw_{2j}(\xi_j) \right\} = \sum_{m=1}^2 \frac{1 + \chi_m}{4 \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a_j^2 - \xi_j^2} \left( \frac{a_j - \xi_j}{a_j + \xi_j} \right)^{i\epsilon} \dots\dots (10)$$

本論文では、重み関数  $F_{1j}(\xi_j), F_{2j}(\xi_j)$  を次のような級数で近似する。

$$F_{1j}(\xi_j) = \sum_{n=1}^M a_n \xi_j^{n-1}, F_{2j}(\xi_j) = \sum_{n=1}^M b_n \xi_j^{n-1} \dots\dots (11)$$

境界条件を満足させる選点は、き裂の両端で同じよう

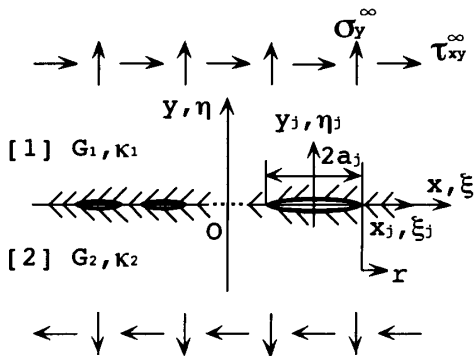


図1 複数の界面き裂の干渉問題

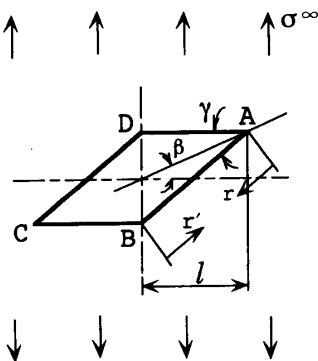


図2 平行四辺形孔を有する無限板

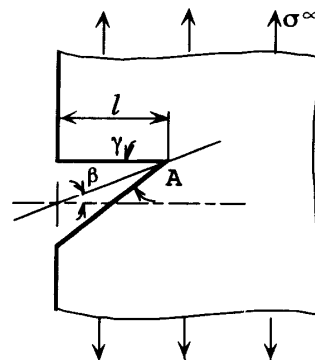


図3 V形切欠きを有する半無限板

に密となるように配置する<sup>(4)(5)</sup>。以上のような離散化手法により式(3)で表される特異積分方程式は、係数  $a_n, b_n$  についての  $2(M \times N)$  元の連立方程式に帰着される。それを解くことによって未知関数  $F_{1j}(\xi_j), F_{2j}(\xi_j)$  を決定し、き裂先端での重みの値より  $j$  番めの界面き裂の応力拡大係数は次式のように表される。

$$K_1 + iK_2 = \{F_{1j}(a_j) + iF_{2j}(a_j)\} \sqrt{\pi a_j} (1 + 2i\epsilon) \dots\dots\dots (12)$$

3. 角部の応力拡大係数の特異積分方程式による数値解析法

異材接合角部近傍の特異応力場は、次式のように特異性の指数がそれぞれ  $1/r^{1-\lambda_1}$  と  $1/r^{1-\lambda_2}$  となる、モード I とモード II の二つの特異応力場の和で表せることが陳ら<sup>(2)</sup> によって示されている。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \dots\dots\dots (13)$$

式中の  $K_{I,\lambda_1}, k_{II,\lambda_2}$  は、角部先端の特異応力場の強さを表すパラメータであり、異材角部の応力拡大係数と呼ぶべきものである。

このような角部の特異応力解析の最も単純な問題として、図2に示す平行四辺形の二辺 AB, AD の長さの等しい場合、すなわち菱形切欠きを有する無限板を例に取り解析方法を説明する。

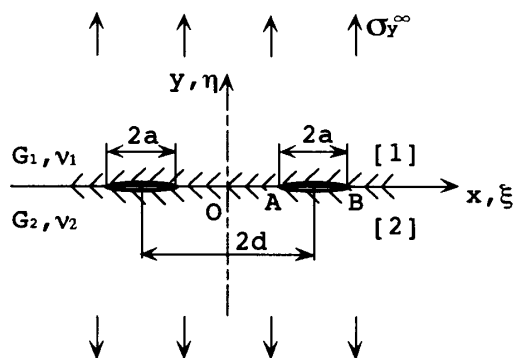


図4 等長二界面き裂の干渉

切欠角部での応力特異場を表現するために、切欠きとなるべき上下の仮想境界に分布させるべき体積力を、切欠きの二等分線に対して対称形(モード I)と逆対称形(モード II)の2種類の分布形式の組合せで表現する。また、角部 A と B では特異性の指数が異なるので、辺の中央より二分割して解析を行う。分布させる体積力の  $r$  方向(仮想境界に対して接線方向)と  $\theta$  方向(法線方向)の密度をそれぞれ  $F_r = F_r^I + F_r^{II}, F_\theta = F_\theta^I + F_\theta^{II}$  (添字はモード I, II の分布形式に相当) とすれば、角部 A 付近での境界条件を表す特異積分方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} F_\theta(s) + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nn}^{F_\theta}(r, s) F_\theta(r) dr + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nr}^{F_r}(r, s) F_r(r) dr \\ & + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nn}^{F_\theta}(r', s) F_\theta'(r') dr' + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nr}^{F_r}(r', s) F_r'(r') dr' = -\sigma_n^\infty(s) \\ & -\frac{1}{2} F_r(s) + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nn}^{F_r}(r, s) F_r(r) dr + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nr}^{F_\theta}(r, s) F_\theta(r) dr \\ & + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nn}^{F_r}(r', s) F_r'(r') dr' + \int_0^{L_{AB}/2} h_{nr}^{F_\theta}(r', s) F_\theta'(r') dr' = -\tau_{ni}^\infty(s) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_n^\infty(s)$  および  $\tau_{ni}^\infty(s)$  は仮想境界上の点  $s$  で打ち消すべき法線方向および接線方向の応力であり、 $h_{nn}(r, s)$  等は仮想境界上の点  $r$  に  $r$  方向または  $\theta$  方向の単位大きさの集中力(対称形および逆対称形)が作用するとき、点  $s$  に生じる応力である。また、 $r$  と  $r'$  はそれぞれ角部 A と B を原点とする座標であり、角部 B 付近における境界条件式も同様に表現される。本研究では、未知関数  $F_r, F_\theta$  を基本密度関数と級数で以下のように近似する( $F_r', F_\theta'$  も同様)。

$$F_\theta(r) = F_\theta^I(r) + F_\theta^{II}(r) = W_\theta^I(r) r^{\lambda_1-1} + W_\theta^{II}(r) r^{\lambda_2-1}, F_r(r) = F_r^I(r) + F_r^{II}(r) = W_r^I(r) r^{\lambda_1-1} + W_r^{II}(r) r^{\lambda_2-1} \dots\dots\dots (15)$$

$$W_\theta^I(r) = \sum_{n=1}^M a_n r^{n-1}, W_r^I(r) = \sum_{n=1}^M b_n r^{n-1}, W_\theta^{II}(r) = \sum_{n=1}^M c_n r^{n-1}, W_r^{II}(r) = \sum_{n=1}^M d_n r^{n-1} \dots\dots\dots (16)$$

ここで  $r^{\lambda_1-1}, r^{\lambda_2-1}$  は、切欠角部 A 端での特異応力場を表現するための基本密度関数である。本研究で取扱う先端角部  $\gamma$  の切欠角部では、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は、次の特性方程式の根として与えられる<sup>(13)</sup>。

$$\text{モード I : } \sin\{\lambda_1(2\pi - \gamma)\} = -\lambda_1 \sin \gamma, \text{モード II : } \sin\{\lambda_2(2\pi - \gamma)\} = \lambda_2 \sin \gamma \dots\dots\dots (17)$$

モード I, II の変形が混在する問題では、境界上に作用させる体積力は式(15)のように対称形と逆対称形の和で表される。このような離散化手法により特異積分方程式(14)を解くことにより、角部での応力拡大係数  $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$  は

切欠先端での重み  $W_I^I(0)$ ,  $W_I^{II}(0)$ ,  $W_0^I(0)$ ,  $W_0^{II}(0)$  より求められる<sup>(13)</sup>.

4. 解析結果および考察

4.1 界面き裂の干渉問題の解析結果 はじめに、界面に垂直方向の引張りを受ける等長二界面き裂(図4)の応力拡大係数の解析を行った。表1に、 $\lambda = a/d = 0.5$ と $0.8$ の場合の解の収束性を示す。干渉効果の大きい $\lambda = 0.8$ の場合でも選点数  $M = 12$  程度で有効数字5けた程度の収束性を示している。また、本解析の有効

表1 等長二界面き裂問題(図4)の解の収束性 ( $\Gamma = G_1/G_2 = 0.1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , 平面応力)

$\lambda$	M	$F_{1,A}$	$F_{2,A}$	$F_{1,B}$	$F_{2,B}$
0.5	4	1.04938	0.00428	1.02881	0.00224
	6	1.04946	0.00431	1.02885	0.00222
	8	1.04946	0.00431	1.02885	0.00220
	10	1.04946	0.00430	1.02886	0.00218
	11	1.04946	0.00430	1.02886	0.00217
	12	1.04946	0.00429	1.02886	0.00216
	13	1.04946	0.00429	1.02886	0.00214
0.8	4	1.22703	0.03631	1.08158	0.01137
	6	1.23281	0.03938	1.08300	0.01087
	8	1.23351	0.03985	1.08319	0.01100
	10	1.23360	0.03992	1.08321	0.01098
	11	1.23361	0.03992	1.08322	0.01097
	12	1.23361	0.03993	1.08322	0.01096
	13	1.23362	0.03993	1.08322	0.01095

性をみるために、き裂先端近傍の境界条件の満足度も確認した。 $\lambda = 0.8$ の場合の  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  の値を表2に示す。表より、本解析では、境界上で零となるべき  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  の値は  $10^{-5}$  程度以下であることがわかる。このことから、未知関数を基本密度関数と級数の積で近似する本解析法が、界面き裂問題の解析においても有効であることが確認される。

表3に  $\Gamma = G_1/G_2$  および  $\lambda = a/d$  を系統的に変化させて解析を行った結果を示す。表3中の( )内の値は、才本<sup>(14)</sup>の解析結果であり、( )\*で示す値は、Erdoganによる均一材中の等長二き裂の厳密解<sup>(15)</sup>である。表より、本解析結果と才本の結果はよく一致しており、 $\Gamma = 1.0$  (均一材)の場合はErdoganの厳密解と非常によく一致している。

次に3個の等長界面き裂の干渉問題(図5)の解析結果を表4に示す。( )の値は、Sihによる均一材の場合の厳密解<sup>(16)</sup>の値を示している。 $\Gamma = 1.0$ の場合の解析結果は $\lambda$ の広範囲にわたってSihの厳密解とよく一致している。また、表3および表4よりわかるように、剛性比は $\Gamma = 1.0 \sim 0.001$ まで大きく変化しているにもかかわらず、結城らの定義による無次元化応力拡大係数  $F_I$  は、均質材の場合( $\Gamma = 1.0$ )のそれとほとんど変わらない。このことから結城らの定義に基づく任

表2 界面き裂先端の境界条件の満足度 ( $r$ : き裂先端 A からの距離)

$\Gamma = 0.1, \lambda = 0.8, M = 14$		
$r/a$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
0.01	-3.4998E-05	7.1568E-05
0.02	-1.4064E-06	3.6386E-06
0.03	2.3276E-06	-7.2903E-06
0.04	2.1751E-06	-8.2153E-06
0.05	1.4159E-06	-6.6027E-06
0.06	7.5789E-07	-4.4652E-06
0.07	3.0787E-07	-2.4732E-06
0.08	8.9595E-08	-8.3326E-07
0.09	-3.1892E-08	3.8552E-07
0.10	-2.5696E-08	1.2284E-06

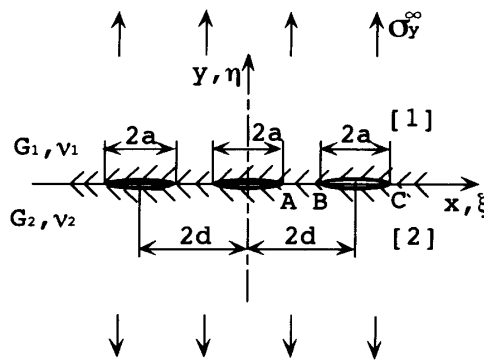


図5 等長三界面き裂の干渉

表3 等長二界面き裂(図4)の無次元化応力拡大係数 [ $K_1 + iK_2 = (F_1 + iF_2)\sigma^\infty \sqrt{\pi a(1+2i\epsilon)}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ , 平面応力]

$\Gamma$	$\lambda$	0.1	0.2	0.5	2/3	0.8
1.0	$F_{1,A}$	1.00132 (1.00132)*	1.00566 (1.00566)*	1.04796 (1.04796)*	1.1124	1.2289 (1.22894)*
	$F_{1,B}$	1.00119 (1.00120)*	1.00462 (1.00462)*	1.02795 (1.02795)*	1.0516	1.0810 (1.08107)*
0.1	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0058 (1.0058)	1.0494 (1.0489)	1.1155 (1.1145)	1.2336
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0042 (0.0035)	0.0146 (0.0118)	0.0399
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0047 (1.0047)	1.0288 (1.0285)	1.0532 (1.0527)	1.0832
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0021 (0.0018)	0.0055 (0.0045)	0.0109
0.01	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0059 (1.0059)	1.0501 (1.0493)	1.1169 (1.1154)	1.2357
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0002 (0.0002)	0.0052 (0.0042)	0.0180 (0.0145)	0.0490
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0048 (1.0048)	1.0292 (1.0288)	1.0539 (1.0531)	1.0842
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0026 (0.0022)	0.0068 (0.0055)	0.0134
0.001	$F_{1,A}$	1.0013 (1.0014)	1.0059 (1.0059)	1.0502 (1.0934)	1.1171 (1.1154)	1.2360
	$F_{2,A}$	0.0000 (0.0000)	0.0002 (0.0002)	0.0054 (0.0043)	0.0184 (0.0146)	0.0501
	$F_{1,B}$	1.0012 (1.0012)	1.0048 (1.0048)	1.0293 (1.0288)	1.0540 (1.0532)	1.0843
	$F_{2,B}$	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0001)	0.0027 (0.0022)	0.0070 (0.0056)	0.0137

表 4 等長三界面き裂(図5)の無次元化応力拡大係数  $[K_1 + iK_2 = (F_1 + iF_2)\sigma\sqrt{\pi}a(1+2i\epsilon), \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \text{平面応力}]$

$\Gamma$	$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	$F_{1,A}$	1.00251 (1.00252)	1.01029 (1.01030)	1.02407 (1.02407)	1.04529 (1.04529)	1.07663 (1.07663)	1.12316 (1.12316)	1.19557 (1.19558)	1.3213 (1.32136)	1.606 (1.60685)
	$F_{1,B}$	1.00164 (1.00164)	1.00701 (1.00702)	1.01710 (1.01710)	1.03353 (1.03353)	1.05913 (1.05913)	1.09915 (1.09915)	1.16456 (1.16456)	1.2834 (1.28348)	1.564 (1.56454)
	$F_{1,C}$	1.00150 (1.00150)	1.00585 (1.00585)	1.01296 (1.01296)	1.02297 (1.02297)	1.03631 (1.03631)	1.05383 (1.05383)	1.07724 (1.07724)	1.1103 (1.11032)	1.164 (1.16439)
0.1	$F_{1,A}$	1.0026	1.0106	1.0248	1.0468	1.0790	1.1269	1.2010	1.3290	1.616
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0021	0.0052	0.0121	0.0295	0.086
	$F_{1,B}$	1.0016	1.0072	1.0176	1.0346	1.0610	1.1022	1.1692	1.2900	1.570
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0048	0.0104	0.0220	0.0484	0.128
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0060	1.0134	1.0237	1.0375	1.0556	1.0796	1.1136	1.168
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0002	0.0010	0.0024	0.0046	0.0081	0.0140	0.025
0.01	$F_{1,A}$	1.0026	1.0108	1.0252	1.0475	1.0802	1.1286	1.2036	1.3326	1.620
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0010	0.0026	0.0064	0.0149	0.0363	0.106
	$F_{1,B}$	1.0017	1.0073	1.0179	1.0351	1.0619	1.1037	1.1714	1.2930	1.573
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0002	0.0006	0.0024	0.0059	0.0129	0.0272	0.0596	0.158
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0061	1.0136	1.0241	1.0381	1.0564	1.0808	1.1151	1.170
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0029	0.0057	0.0101	0.0173	0.031
0.001	$F_{1,A}$	1.0026	1.0108	1.0253	1.0476	1.0804	1.1289	1.2039	1.3330	1.621
	$F_{2,A}$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0010	0.0027	0.0065	0.0153	0.0371	0.108
	$F_{1,B}$	1.0017	1.0073	1.0179	1.0352	1.0620	1.1038	1.1716	1.2934	1.573
	$F_{2,B}$	0.0000	0.0002	0.0006	0.0024	0.0060	0.0132	0.0277	0.0609	0.161
	$F_{1,C}$	1.0015	1.0061	1.0136	1.0242	1.0382	1.0565	1.0810	1.1154	1.170
	$F_{2,C}$	0.0000	0.0001	0.0003	0.0013	0.0030	0.0058	0.0102	0.0177	0.032

表 5 半無限板の V 形切欠き(図3)の解の収束性 ( $\gamma=60^\circ, \beta=30^\circ$ )

M	$F_{I,\lambda_1}$ $\lambda_1=0.5122214$		$F_{II,\lambda_2}$ $\lambda_2=0.7309007$	
	from $W_0^I(0)$	from $W_2^I(0)$	from $W_0^{II}(0)$	from $W_2^{II}(0)$
2	0.90412	0.84967	0.59667	0.61162
4	1.07587	1.09915	0.58194	0.57702
6	1.04600	1.05007	0.58066	0.58012
8	1.04263	1.04419	0.57668	0.57679
10	1.04177	1.04252	0.57691	0.57675
12	1.04132	1.04182	0.57699	0.57688
14	1.04114	1.04148	0.57687	0.57681
16	1.04099	1.04123	0.57688	0.57683
18	1.04093	1.04111	0.57685	0.57681
20	1.04085	1.04100	0.57684	0.57682
22	1.04083	1.04094	0.57684	0.57682
Chen[13]	1.040*		0.577*	

\* Extrapolated value from the results of M=40 and 100

意個の界面き裂の  $F_1$  は、均一材のき裂の解析結果から推定できるものと思われる。

4.2 角部先端の応力拡大係数の解析結果 図2 および図3に示すような無限板および半無限板の切欠角部の応力拡大係数  $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$  の解析を行った。結果を示すに際して、次のような無次元化した値  $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$  を用いた。

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_2} \dots (18)$$

まず、このような切欠問題における本法の解析精度について検討を行う。切欠先端の応力拡大係数は、 $K_{I,\lambda_1}$  については  $W_1^I(0), W_2^I(0)$  からは、 $K_{II,\lambda_2}$  については  $W_1^{II}(0), W_2^{II}(0)$  よりそれぞれ求められる。r 方向と  $\theta$  方向の重みより求められる  $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$  の値は、数値

表 6 V 形切欠先端の境界条件の満足度 ( $r$ : 切欠先端 A からの距離)

$\gamma=60^\circ, \beta=30^\circ, M=20$		
$r/l_{AB}$	$\sigma_n$	$\tau_{nt}$
0.01	-2.8699E-04	1.2971E-04
0.02	1.0475E-04	-1.6635E-04
0.03	2.0660E-05	-1.4201E-04
0.04	2.3489E-06	3.3265E-05
0.05	3.9110E-05	1.3906E-04
0.06	5.2104E-05	1.2401E-04
0.07	1.9843E-05	3.6819E-05
0.08	-3.3566E-05	-5.4891E-05
0.09	-7.3811E-05	-1.0562E-04
0.10	-7.9306E-05	-1.0286E-04

解析の誤差を除けばそれぞれ一致する。例として、表5に半無限板のV形切欠きで  $\gamma=60^\circ, \beta=30^\circ$  の場合の解の収束性を示す。陳ら<sup>(13)</sup>は折れ線関数を用いて同様の解析を行っているので、解析手法の比較のために表に示した。陳らの結果は分割数  $M=40$  と  $100$  からの外そう値である。本解析結果は、 $M=14$  程度でそれぞれ有効数字4けた程度一致しており、良好な収束性を示すことがわかる。また表6に、切欠近傍の境界条件の満足度を示す。境界上で零となるべき  $\sigma_n, \tau_{nt}$  は、切欠先端近傍で  $10^{-4}$  程度以下であり、本解析法の有効性が確認される。

表7に、図2および図3に示す切欠角部の特異応力解析問題において  $\gamma$  と  $\beta$  の値を系統的に変化させて解析を行い、角部Aについて得られた  $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$  の値を示す。半無限板のV形切欠き(図3)については陳らの結果と比較して示した。表より、両者の値はよく一致していることがわかる。また、無限板と半無限板の

切欠角部の  $F_{I,\lambda_1}$ ,  $F_{II,\lambda_2}$  の比較を図 6 (a)~(c) に示す。両者の値は、傾き角  $\beta$  の変化に対して類似の傾向を示しており、 $0^\circ \sim 45^\circ$  の  $\beta$  の全範囲で、つねに  $F_{I,\lambda_1}$  は半無限板の値のほうが大きく、 $F_{II,\lambda_2}$  は逆に無限板の値が大きいことがわかる。 $\gamma=30^\circ, 60^\circ$  のように開き角が大きくなると、 $\beta$  に対する無限板の値は半無限板の値に比べその変化が急になる傾向がある。

5. 結 言

本研究では、接合無限板中の界面き裂の問題(図 1)と無限板および半無限板中の切欠角部の問題(図 2, 3)を取扱い、これらの拡張された応力拡大係数を体積力法の特異積分方程式を用いて高精度に解析する方法について考察した。得られた結果をまとめると以下のようになる。

表 7 図 2 および図 3 の問題の計算結果

$$(F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_2})$$

$\gamma$	$\beta$	Results in Fig.2		Results in Fig.3			
		$F_{I,\lambda_1}$	$F_{II,\lambda_2}$	Present analysis		Chen et al.[13]	
				$F_{I,\lambda_1}$	$F_{II,\lambda_2}$	$F_{I,\lambda_1}$	$F_{II,\lambda_2}$
0°	0°	1.000	0.000	1.122	0.000	1.122	0.000
	5°	0.994	0.087	1.118	0.060	1.118	0.060
	15°	0.949	0.254	1.088	0.177	1.088	0.177
	30°	0.806	0.465	0.989	0.329	0.989	0.329
	45°	0.595	0.595	0.838	0.433	0.838	0.433
15°	0°	1.011	0.000	1.129	0.000		
	5°	1.004	0.093	1.125	0.066		
	15°	0.957	0.271	1.094	0.194		
	30°	0.809	0.492	0.991	0.358		
	45°	0.594	0.619	0.829	0.467		
30°	0°	1.042	0.000	1.147	0.000	1.148	0.000
	5°	1.032	0.108	1.145	0.075	1.140	0.075
	15°	0.977	0.308	1.111	0.218	1.107	0.218
	30°	0.816	0.551	1.003	0.398	1.000	0.397
	45°	0.575	0.681	0.834	0.507	0.834	0.505
45°	0°	1.088	0.000	1.182	0.000		
	5°	1.073	0.132	1.177	0.089		
	15°	1.006	0.367	1.139	0.258		
	30°	0.811	0.646	1.021	0.464		
	45°	0.513	0.768	0.834	0.574		
60°	0°	1.148	0.000	1.225	0.000	1.225	0.000
	5°	1.125	0.170	1.220	0.113	1.218	0.113
	15°	1.040	0.463	1.178	0.327	1.176	0.326
	30°	0.805	0.789	1.041	0.577	1.040	0.577
	45°	0.485	0.905	0.825	0.685	0.824	0.684
75°	0°	1.217	0.000	1.277	0.000		
	5°	1.187	0.243	1.271	0.163		
	15°	1.084	0.646	1.221	0.469		
	30°	0.817	1.074	1.059	0.809		
	45°	0.416	1.158	0.795	0.902		
90°	0°	1.293	0.000	1.336	0.000	1.336	0.000
	5°	1.258	0.471	1.328	0.331	1.327	0.331
	15°	1.139	1.244	1.267	0.946	1.266	0.946
	30°	0.823	2.077	1.066	1.575	1.065	1.576

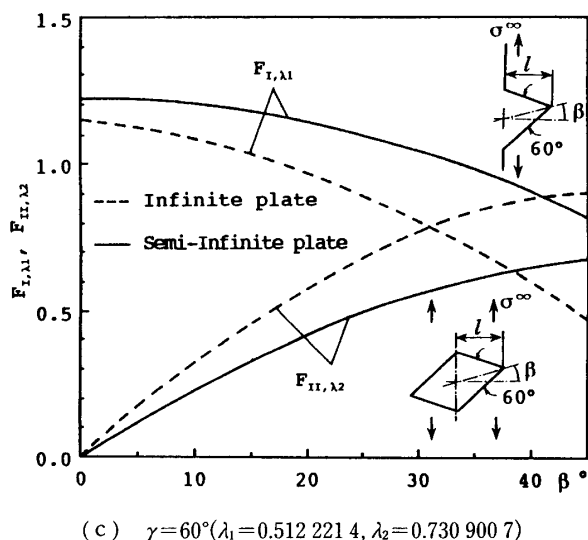
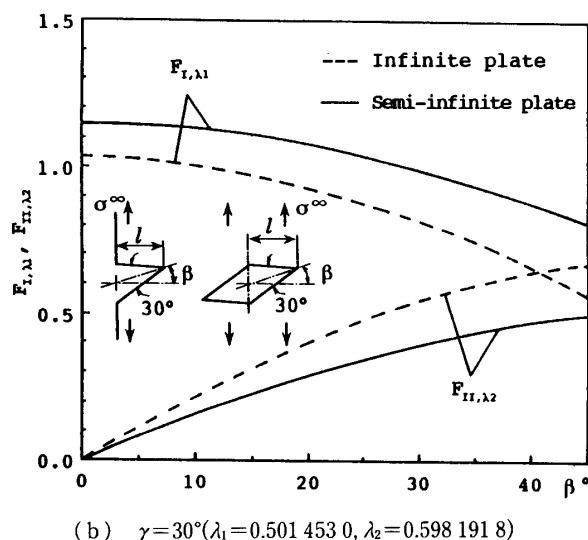
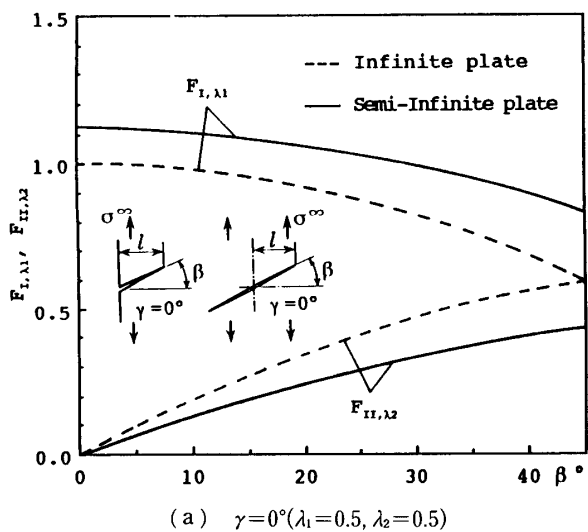


図 6 無限板と半無限板中の切欠角部の  $F_{I,\lambda_1}$ ,  $F_{II,\lambda_2}$  の  $\beta$  に対する変化  
 $(F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_2})$

(1) 界面き裂の干渉問題について、体積力法の特異積分方程式(3)と転位分布法による特異積分方程式(7)を比較して示した。均質材のき裂問題等で有効であった未知関数を基本密度関数と級数の積で近似する手法によって式(1)の数値解析を行った結果、良好な解の収束性が得られ境界条件もほとんど完全に満足させることが可能であることが確認された。

(2) 2個および3個の等長界面き裂の干渉問題の解析を行い、き裂の相対位置  $\lambda=a/d$  および剛性比  $\Gamma = G_1/G_2$  を系統的に変化させた結果を示した(表3, 表4)。 $\Gamma=1.0$  の場合の解析結果は、均質材で得られた厳密解と非常に良く一致した。また、結城らの定義に基づく無次元化応力拡大係数  $F_I$  は剛性比が違っても  $\Gamma=1.0$  (均質材)のときのそれとほとんど変わらないことがわかった。

(3) 無限板および半無限板中の切欠角部の問題を、体積力法の特異積分方程式によって定式化した。これらの問題では、未知関数である体積力密度を、角部の二等分線に対して対称形(モードI)と逆対称形(モードII)の2種類の基本密度関数と級数の一次結合によって表現する。その結果、このような指数の異なる二つの特異応力場が混在する問題に対しても良好な解の収束性が得られ、高い境界条件の満足度が確認された。

(4) 無限板中の平行四辺形孔(図2)および半無限板中のV形切欠き(図3)の問題について、開き角、傾き角を変化させて数値解析を行い、その角部の応力拡大係数を表示した(表7, 図6)。無限板と半無限板の  $F_{I,11}$ ,  $F_{II,12}$  は、開き角が  $0^\circ$  (き裂)の場合と同様に、傾き  $\beta$  に対して類似の傾向を示し、 $\beta=0^\circ\sim 45^\circ$  の全範囲で、つねに  $F_{I,11}$  は半無限板の値のほうが大きく、 $F_{II,12}$  は逆に無限板の値が大きいく。

## 文 献

- (1) 結城, 界面の力学, (1993), 162, 培風館.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-534, A (1991), 366.
- (3) 野田・小田・陳, 機論, 56-532, A (1990), 2405.
- (4) 野田・小田・増田, 機論, 57-542, A (1991), 2332.
- (5) 野田・小田・石井, 機論, 59-558, A (1993), 332.
- (6) 野田・松尾, 機論, 58-555, A (1992), 2179.
- (7) 野田・松尾, 機論, 59-559, A (1993), 785.
- (8) 野田・松尾, 機論, 59-564, A (1993), 1964.
- (9) Comninou, M., *J. Appl. Mech.*, 44 (1977), 631.
- (10) 野田・矢野, 機論, No. 938-2 (1993-7), 186.
- (11) 西谷・才本・野口, 機論, 59-557, A (1993), 68.
- (12) 結城・曹, 機論, 55-510, A (1989), 340.
- (13) 陳・西谷, 機論, 57-538, A (1991), 1406.
- (14) 才本, 九州大学学位論文, (1993), 114.
- (15) Erdogan, F., *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, (1962), 547.
- (16) Sih, G. C., *Proc. Second Conf. Theor. Appl. Mech.*, (1964), 117, Pergamon Press.