

フィレットの寸法的全範囲に対して正確な応力集中係数を 与える計算式*

(フィレット部を有する段付丸棒の引張り)

野田尚昭*¹, 高瀬 康*², 藤本将史*³

Convenient Stress Concentration Formula Useful for Any Shape of Fillet (Tension of a Stepped Round Bar with Fillet)

Nao-Aki NODA*⁴, Yasushi TAKASE and Masashi FUJIMOTO

*⁴ Kyushu Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku Kitakyushu, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this work, stress concentration factors (SCFs) of a round bar with fillet K_t are considered on the basis of exact solutions now available for special cases and accurate numerical results. First, for the limiting cases of large and small values of the step including fillets, the body force method is used to calculate the SCFs; then the formulas are obtained as K_{td} and K_{ts} . Here, K_{td} is a SCF of a deep shoulder fillet and K_{ts} is a SCF of a shoulder fillet in semi-infinite plate. On the one hand, upon comparison of K_t and K_{td} , it is found that K_t is nearly equal to K_{td} if the step is large or the radius of the fillet is small. On the other hand, if the step is small or the radius of the fillet is large, K_t is mainly controlled by K_{ts} and the relative step length. The fillet shape is classified into several groups according as the fillet radius and the step length; then, the least squares method is applied for calculation of K_t/K_{td} and K_t/K_{ts} . Finally, a set of convenient formulas useful for any shape of fillet in a round test specimen are proposed. The formulas yield SCFs for any shape of notch with less than 1% error in most cases.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Fillet, Numerical Analysis, Test Specimen, Tension, Body Force Method

1. 緒 言

一般に切欠き等の応力集中の研究に比べてフィレット部の解析に関する研究は少ない。これは、切欠きに比べてフィレットの問題では、生じる最大応力の位置がフィレット部の寸法 ρ , t に依存して変化するので解析困難であるということが大きな理由の一つと考えられる。しかし、フィレット部を有する丸棒の応力集中の研究は、特に軸や試験片の設計などにおいて問題となるが、現在の軽量かつ強度を追求する構造物の設計において最も重要なものの一つであると言える。そのため、実際に設計や研究に利用される際には応力集中係数を簡単に利用できる近似式の形にしておくことが望ましい。著者らは先に切欠きに対するノイバー三角則⁽¹⁾と同様な考え方に基いて、応力集中係数を評価できる近似公式を提案し、さらにその値を修正することによってフィレット部の広範囲の形状寸法に対して応力集中評価に便利な近似式を与えた⁽²⁾。しかし、この場合、体積力法による計算結果を基にしているためフィレット部の寸法のすべての範囲に対して応力集中

係数を与えることはできなかった。

そこで本研究では、フィレット部を有する丸棒引張問題において、フィレットの段の高さが大きい場合や小さい場合の極限の応力集中係数を正確に求めるとともに、体積力法によって得られた解析結果と比較して物理的考察を行い、フィレット形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式を提案することを目的とする。

2. 記 号

本論文で使用する記号をまとめて以下に示す。全範

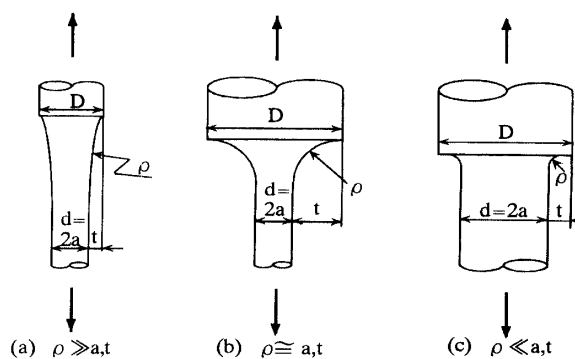


Fig.1 Round specimens with fillet
(a) case of $\rho \gg a, t$
(b) case of $\rho \cong a, t$
(c) case of $\rho \ll a, t$

* 原稿受付 2000年3月13日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 准員, 九州工業大学工学部。

*³ 九州工業大学工学部。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

囲で求める応力集中係数 K_t は最小断面の公称応力に基づく。

- ρ : フィレットの曲率半径
- t : フィレットの段の高さ
- a : フィレット底の最小断面の半径
- D : 直径
- d : 最小断面の直径, $d = 2a$
- ξ : $= \sqrt{t/\rho}$
- η : $= \sqrt{\rho/t}$
- ν : ポアソン比 (=0.3)
- λ : $= 2t/D$
- x : $a/\rho \leq 1.0$ のとき, $x = a/\rho$
 $\rho/a \leq 1.0$ のとき, $x = 2 - \rho/a$
- K_t : 図 1 (a)~(c) の問題の応力集中係数 ($= \sigma_{\max}/\sigma_a$, $\sigma_a = P/(\pi a^2)$, P = 引張荷重)
- K_{ts} : 段の高さが小さいフィレットを有する半無限板の応力集中係数
- K_{tH} : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数
- K_{td} : 段の高さが無限に大きい場合のフィレットの応力集中係数

以下では、まず前報で提案した近似式⁽²⁾の結果を図示して考察する (図 2, 4 の実線)。なお一部については体積力法の追加計算を行った (図 2, 4 の破線)。その際フィレットの段の高さのパラメータとしては主に $2t/D$ を用い、曲率半径のパラメータとしては主に a/ρ (または ρ/a) を用いて整理する。

3: フィレットの曲率半径が小さいときまたは段の高さが小さいときの応力集中係数

まず、曲率半径 ρ が小さい図 1 (c) のようなフィレットに対する応力集中係数 K_t を考察する。著者らは、このような曲率半径が小さいときの応力集中係数が、同一形状比 t/ρ の段の高さが小さいフィレットを有する半無限板の応力集中係数 K_{ts} ⁽²⁾ (図 2 で $2t/D \rightarrow 0$ に相当) を利用して効率良く求められることを先の研究で確認している^{(3), (4)}。図 2 は、応力集中係数 K_t と段の高さが小さいフィレットを有する半無限板の応力集中係数の解 K_{ts} との比をフィレットの広い範囲 ($0 < \rho/a \leq 10$) について示したものである。なお、図 2 で $\rho/a \rightarrow 0$ の線は、 ρ/a が小さい場合、たとえば ρ/a が 0.10 と 0.15 で K_t/K_{ts} が 3 桁程度以上一致することを確認して求めている。

図 2 ならびにその数値的検討から以下のことがわかる。

(1) 曲率半径が小さいフィレット ($\rho/a \leq 0.1$) では、 K_t/K_{ts} の値は $2t/D$ のほぼ全範囲でほとんど $2t/D$ の

みによって決まる。従って K_{ts} とこの関係を用いれば、段の高さが小さいときのフィレットの K_t を求めることができる。

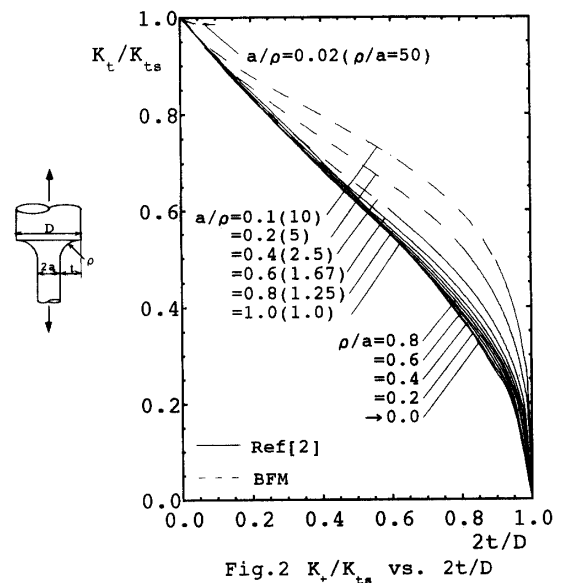
(2) 段の高さが小さい場合のフィレット ($2t/D \leq 0.02$) では、 ρ が極端に大きい場合 ($a/\rho \leq 0.02$) を除き K_t/K_{ts} の値はほぼ $2t/D$ によって決まる狭い範囲に分布する (例えば $2t/D = 0.02$ で $a/\rho \geq 0.02$ ならば、 $0.985 \leq K_t/K_{ts} \leq 0.990$)。従って K_t/K_{ts} のこのような性質を利用すれば、段の高さが小さいときのフィレットの K_t を求めることができる。

(3) フィレットの段の高さが小さく、 ρ が極端に大きい場合 ($2t/D \leq 0.02$ かつ $a/\rho \leq 0.02$) では、次節で曲率半径が大きいフィレットの応力集中係数を考察した結果、 $K_t = (1.000 \sim 1.009)$ と見積ることができる。よってこの場合 $K_t \approx 1.004$ として十分精度よく評価できる。

4. フィレットの曲率半径が大きいときまたは段の高さが大きい場合の応力集中係数

ここでは、曲率半径 ρ が大きいまたはフィレットの段の高さが大きいときに対する応力集中係数を考察する。著者らは先に、このようなフィレットに対しては深い回転双曲面切欠きの解 K_{tH} が引張を受ける場合の解が、有限深さのフィレット問題に対して広い範囲で有効 (すなわち $K_t/K_{tH} \approx 1$) であることを確認している⁽²⁾。ここでは、寸法的全範囲で有効な計算式を求めるため、フィレットの段の高さが無限に大きい場合 [図 3 (b)] の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる。

表 1 は、フィレットの段の高さが大きい場合すなわ



ち $2t/D=0.7, 0.8, 0.9$ での応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} を比較したものである。表1において $2t/D=0.7 \rightarrow 0.9$ とフィレットの段の高さが大きくなるに従い応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} との比は一定になる。そこで、まず表1の収束性を利用して $2t/D \rightarrow 1.0^{*1}$ の極限值 K_{td} を求めて表1に示す。表1で $\rho/a < 0.3$ では $2t/D \rightarrow 1.0$ のときの収束性がやや悪くなり、また体積法による計算も困難になるので $2t/D \rightarrow 1.0$ の極限值を求めることが難しくなる。しかし、この場合にも $2t/D=0.7 \sim 0.9$ の範囲で追加計算を行い、 $2t/D \rightarrow 1.0$ の最終的な値を外そうや推定するなどして求めた。表1の $2t/D \rightarrow 1.0$ の値は、 $0 \leq x \leq 1.7$ で有効数字3桁程度、 $1.8 \leq x \leq 2.0$ で誤差1~2%程度以内 [表1の()の値] で得られているものと考えている。そして、段の高さが大きいフィレットの解 K_{td} を表1の結果より最小二乗法を適用してパラメータ x の関数として求めた。結局、フィレットの段の高さが大きい場合 ($2t/D \geq 0.7$) の応力集中係数 K_t は、このようにして求めたフィ

レットの段の高さ t が ∞ の場合 ($2t/D \rightarrow 1$) の K_{td} の値で近似できる (図3)

次に、 K_t と後述する式(3)より求めた K_{td} との比で整理した結果を図4に示す。結局、図4とその数値的検討より以下に示す範囲で、数%の範囲の中で K_{td} で近似できることがわかる (この K_{td} の有効範囲は K_{ts} による近似の有効範囲との兼ね合いも含めて総合的に決めている)。

- (1) $2t/D \geq 0.90$ で $10 \leq a/\rho \leq \infty$ の範囲で $0.987 \leq K_t/K_{td} \leq 1.000$
- (2) $0.4 \leq 2t/D \leq 1.0$ で $0 \leq a/\rho \leq 10$ の範囲で $0.898 \leq K_t/K_{td} \leq 1.013$
- (3) $0.02 \leq 2t/D \leq 0.4$ で $0 \leq a/\rho \leq 0.5$ の範囲で $0.942 \leq K_t/K_{td} \leq 1.012$

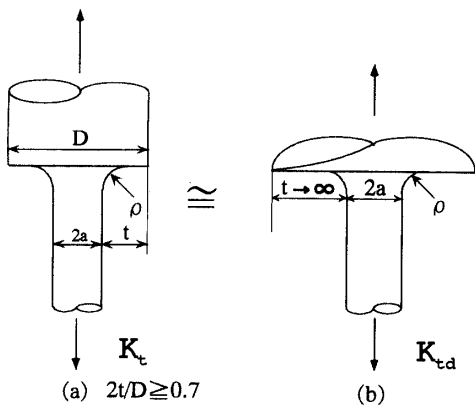


Fig. 3 K_t and K_{td} with fillets

Table 1. K_t/K_{tH} when $2t/D \rightarrow 1.0$

x	a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D→1.0
0.000	0.000	∞				
0.100	0.100	10.00	0.993	0.992	0.992	0.992
0.200	0.200	5.000	0.986	0.984	0.984	0.984
0.300	0.300	3.333	0.977	0.979	0.979	0.979
0.400	0.400	2.500	0.973	0.972	0.972	0.972
0.500	0.500	2.000	0.969	0.967	0.967	0.967
0.600	0.600	1.667	0.967	0.965	0.965	0.965
0.700	0.700	1.429	0.964	0.963	0.962	0.962
0.800	0.800	1.250	0.964	0.963	0.962	0.962
0.900	0.900	1.111	0.964	0.961	0.961	0.961
1.000	1.000	1.000	0.964	0.961	0.961	0.961
1.000	1.000	1.000	0.964	0.961	0.961	0.961
1.100	1.111	0.900	0.962	0.962	0.960	0.960
1.200	1.250	0.800	0.962	0.962	0.961	0.961
1.300	1.429	0.700	0.961	0.961	0.961	0.961
1.400	1.667	0.600	0.961	0.961	0.960	0.960
1.500	2.000	0.500	0.959	0.961	0.961	0.961
1.600	2.500	0.400	0.957	0.958	0.959	0.959
1.700	3.333	0.300	0.950	0.953	0.955	0.956
1.800	5.000	0.200	0.934	0.939	0.943	(0.946)
1.850	6.667	0.150	0.920	0.928		(0.938)
1.900	10.00	0.100	0.901	0.910		(0.928)
2.000	∞	0.000				(0.908)

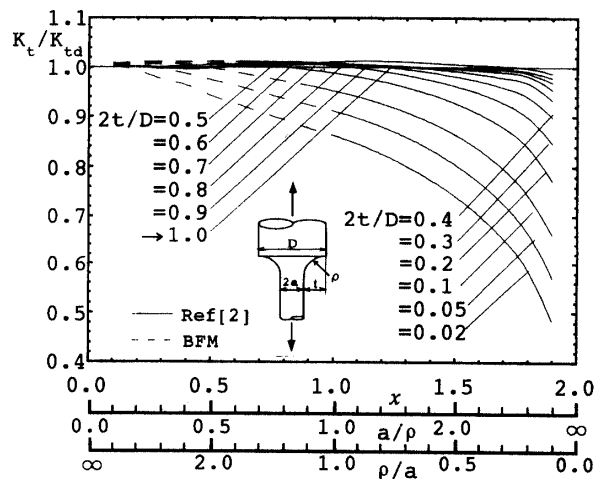


Fig. 4 K_t/K_{td} vs. $2t/D$

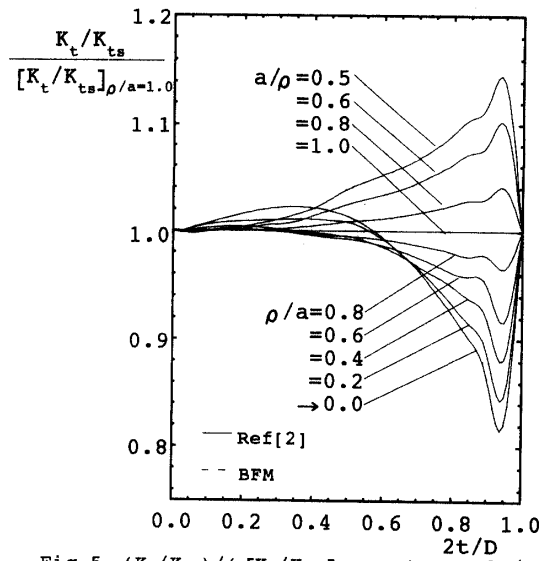


Fig. 5 $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$ vs. $2t/D$

*1 $2t/D \rightarrow 1$ の極限は、表1に示すように a/ρ を一定として考えているので、 a, ρ に比べて t, D がはるかに大きい場合、すなわち、切欠きが無限に深くなった状態 (図3 (b)、 $t/a \rightarrow \infty$) に相当する。

5. その他のフィレットの応力集中係数

ここでは、前節まで示していない範囲 ($0.1 \leq \rho/a \leq 2.0$, $0.02 \leq 2t/D \leq 0.4$) の応力集中係数の評価方法を提案する。図2よりこのような範囲では、 K_t/K_{ts} の値がほぼ $2t/D$ のみによってきまり、狭い範囲に存在していることがわかる。そこで、高精度の近似式を作るため、 $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ の値を基準にして K_t/K_{ts} との比をとる。その結果を図5に示す。図5より $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ と K_t/K_{ts} の比は $0.02 \leq 2t/D \leq 0.4$ の範囲で (1.00~1.02) の狭い範囲にあることがわかる。

6. フィレット形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

以上の議論から、フィレット形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるためその存在領域を6つに分けたものを図6に示す。そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す*2。

6・1 フィレット部を有する半無限板の K_{ts} ⁽²⁾

(図1で ρ, t が有限で $d, D \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{ts}$)

$$K_{ts}/K_{tsE} = 1.000 + 0.159\xi - 0.127\xi^2 + 0.050\xi^3$$

(平均誤差=0.061%) (1.a)

$$K_{ts}/K_{tsE} = 1.106 + 0.016\eta - 0.059\eta^2 + 0.019\eta^3$$

(平均誤差=0.061%) (1.b)

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tsE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$$

. (1.c)

6・2 フィレットの曲率半径が小さいとき

または段の高さが小さいときの応力集中係数 K_t (図6

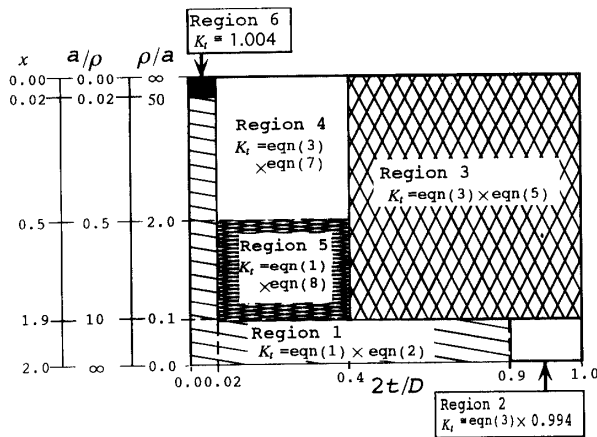


Fig.6 Classification of fillet shape

- Region 1: Small ρ and small t fillet
 - Region 2: Small ρ and large t fillet
 - Region 3: Large t fillet
 - Region 4: Large ρ fillet
 - Region 5: Other fillet
 - Region 6: Large ρ and small t fillet
- Eqns (1)~(7) are indicated in this paper.

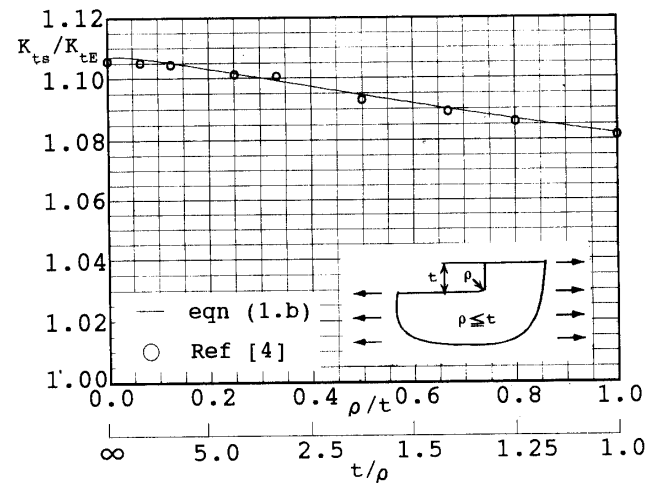
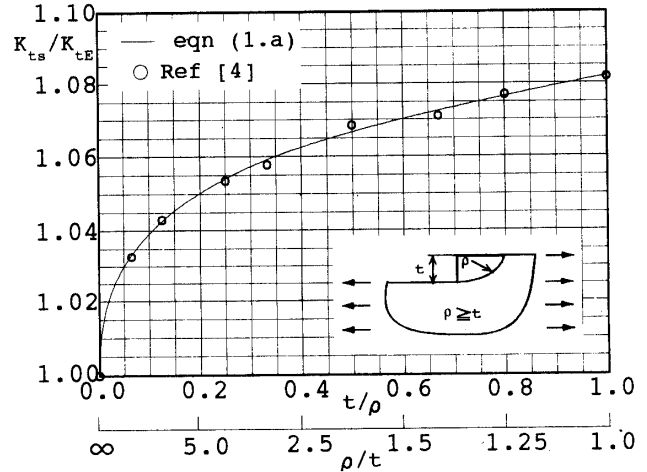


Fig.7 K_{ts}/K_{tsE} vs. t/ρ or ρ/t

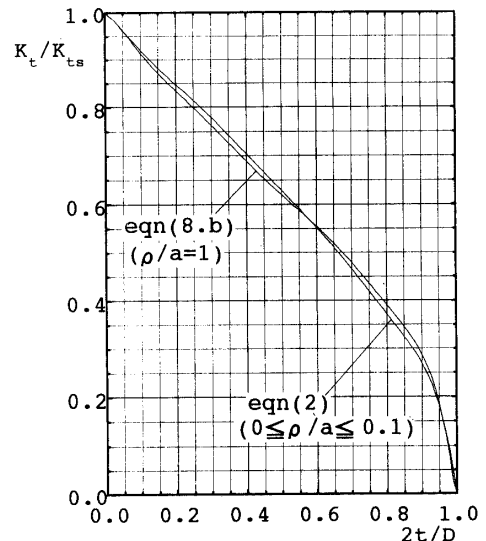


Fig.8 K_t/K_{ts} vs. $2t/D$

*2 各式の末尾括弧内に体積法と近似式による値の差の平均値を付記している。最大誤差は平均誤差の数倍程度と考えてよい。

の領域 1 : $\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \leq 0.90$ または $a/\rho \geq 0.02$ かつ $2t/D \leq 0.02$

$$K_t/K_{ts} = 0.99883 - 0.46411\lambda - 7.6027\lambda^2 + 67.298\lambda^3 - 283.92\lambda^4 + 650.13\lambda^5 - 829.06\lambda^6 + 553.08\lambda^7 - 150.46\lambda^8 \quad (\text{平均誤差}=0.227\%) \dots (2)$$

図 8 に、式 (2) の K_t/K_{ts} の値を図示する。

6・3 段の高さが大きいフィレットの K_{td} [図 3(b)] (図 1 で a, ρ が有限で $t \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{td}$)

$$K_{td}/K_{tH} = 1.0007 - 0.10457x + 0.12152x^2 - 0.11645x^3 + 0.08214x^4 - 0.023524x^5 \quad (\text{平均誤差}=0.088\%) \dots (3.a)$$

$$K_{tH} = (1/N) \{ (a/\rho) \sqrt{a/\rho + 1} + (0.5 + \nu)(a/\rho) + (1 + \nu) \sqrt{a/\rho + 1} + 1 \} \dots (3.b)$$

$$N = a/\rho + 2\nu \sqrt{a/\rho + 1} + 2 \dots (3.c)$$

図 9 は、式 (3) の K_{td}/K_{tH} の値を線図にしたものである。

6・4 フィレットの曲率半径が小さく段の高さが大きいときの K_t (図 6 の領域 2 : $\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \geq 0.9$)

$$K_t/K_{td} = 0.994 \quad (\text{平均誤差}=0.374\%) \dots (4)$$

6・5 段の高さが大きいフィレットの K_t [図 6 の領域 3 : $2t/D \geq 0.4$ かつ $a/\rho \leq 10$ ($0 \leq x \leq 1.9$)]

$$K_t/K_{td} = 0.98726 + 0.013259\lambda + 0.037656\lambda^2 - 0.038056\lambda^3 + (0.34671 - 0.90519\lambda + 0.57452\lambda^2 - 0.015761\lambda^3)x + (-0.26004 - 0.27256\lambda + 1.9405\lambda^2 - 1.4056\lambda^3)x^2 + (0.069415 + 0.89735\lambda - 2.4565\lambda^2 + 1.4891\lambda^3)x^3 + (-0.04792 - 0.15813\lambda + 0.54481\lambda^2 - 0.33913\lambda^3)x^4 \quad (\text{平均誤差}=0.284\%) \dots (5)$$

図 10 は、式 (5) の K_t/K_{td} の値を線図にしたものである。

6・6 フィレットの段の高さが小さく曲率半径が

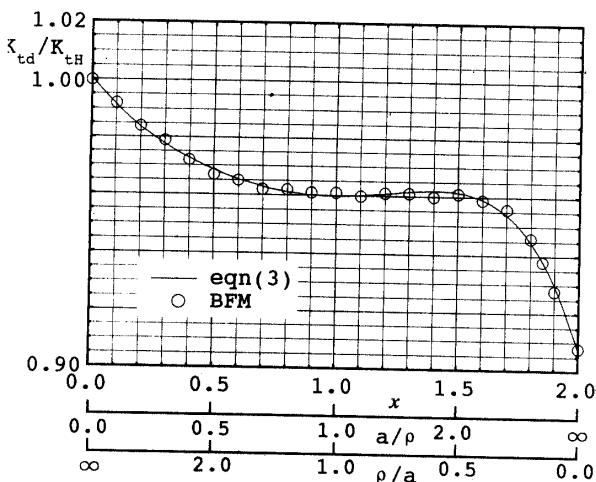


Fig.9 K_{td}/K_{tH} vs. a/ρ or ρ/a

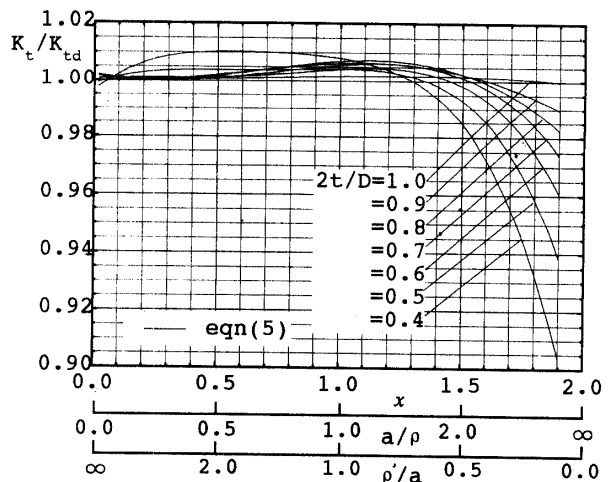


Fig.10 K_t/K_{td} vs. a/ρ or ρ/a

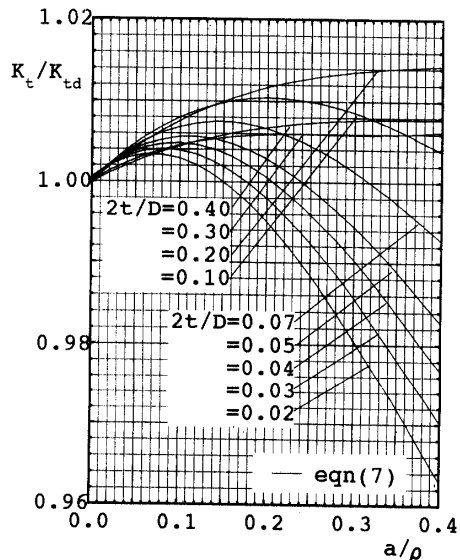


Fig.11 K_t/K_{td} vs. a/ρ or ρ/a

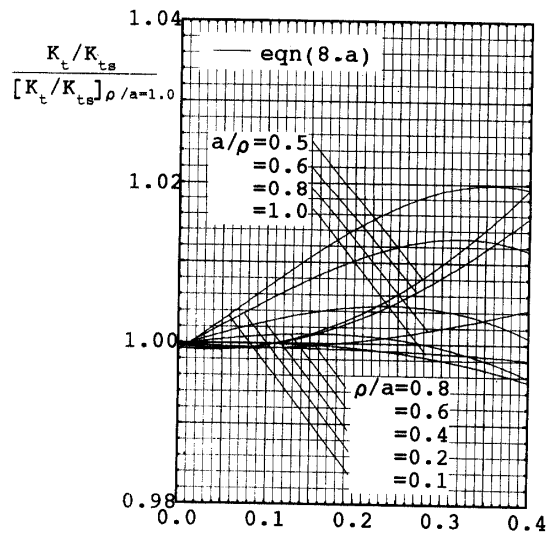


Fig.12 $(K_t/K_{ts}) / ((K_t/K_{ts})_{\rho/a=1.0})$ vs. $2t/D$

大きいときの K_t (図6の領域6 : $a/\rho \leq 0.02$ かつ $2t/D \leq 0.02$)

$$K_t \approx 1.004 \quad \dots \dots \dots (6)$$

6・7 曲率半径が大きいフィレットの K_t [図6の領域4 : $a/\rho \leq 0.5$ ($0 \leq x \leq 0.5$) かつ $0.02 \leq 2t/D \leq 0.4$]

$$K_t/K_{td} = 1.0008 - 0.013066\lambda + 0.0611\lambda^2 - 0.085109\lambda^3 + (0.071204 + 0.81013\lambda - 4.7083\lambda^2 + 6.5\lambda^3)x + (-0.81645 + 7.3901\lambda - 30.313\lambda^2 + 40.157\lambda^3)x^2 + (0.74712 - 9.2542\lambda + 45.728\lambda^2 - 66.397\lambda^3)x^3$$

(平均誤差=0.197%) $\dots \dots \dots (7)$

図11に, 式(7)の K_t/K_{td} の値を図示する.

6・8 その他のフィレットの K_t [図6の領域5 : $0.1 \leq \rho/a \leq 2.0$ かつ $0.02 \leq 2t/D \leq 0.4$]

$$K_t/K_s = \{0.99864 + 0.0033093(\rho/a) - 0.0029078(\rho/a)^2 + 0.00070844(\rho/a)^3 + (0.090052 - 0.17954(\rho/a) + 0.10613(\rho/a)^2 - 0.020694(\rho/a)^3)\lambda + (0.13636 - 0.62649(\rho/a) + 0.69145(\rho/a)^2 - 0.18773(\rho/a)^3)\lambda^2 + (-0.42858 + 0.96788(\rho/a) - 0.7725(\rho/a)^2 + 0.19886(\rho/a)^3)\lambda^3\} \left[\frac{K_t}{K_s} \right]_{\rho/a=1.0}$$

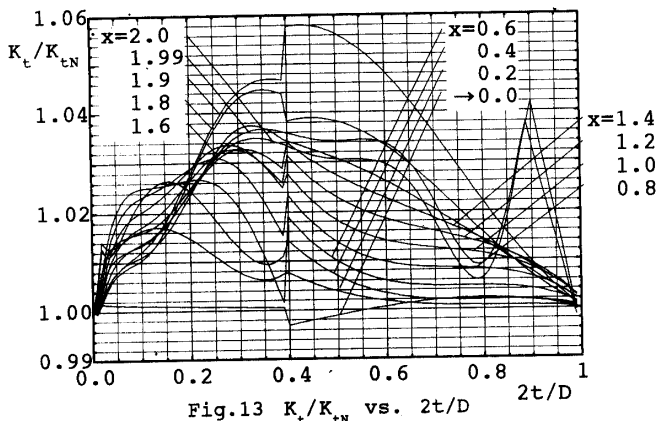
(平均誤差=0.183%) $\dots \dots \dots (8.a)$

$$\left[\frac{K_t}{K_s} \right]_{\rho/a=1.0} = 0.99696 - 0.2997\lambda - 11.814\lambda^2 + 98.442\lambda^3 - 402.36\lambda^4 + 906.05\lambda^5 - 1142.2\lambda^6 + 754.8\lambda^7 - 203.65\lambda^8$$

(平均誤差=0.163%) $\dots \dots \dots (8.b)$

図12に, 式(8.a)の $(K_t/K_s) / \left[\left(\frac{K_t}{K_s} \right)_{\rho/a=1.0} \right]$ の値を図示する.

以上の式および線図を利用することにより全範囲の



$$\left[K_{tN} = \left\{ (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \left((K_{ts} - 1)^{1.8} + (K_{td} - 1)^{1.8} \right)^{1/1.8} \right\} + 1 \right]$$

応力集中係数 K_t が求まる. 図13は K_t とフィレットの評価に拡張されたノイバーの三角則との比 K_t/K_{tN} を示す. ここで K_{tN} は, 前報⁽²⁾と異なり正確な K_{ts} と K_{td} を用いている. フィレットの曲率半径が小さい場合は応力集中の厳密な数値解析が困難となるが, 本論文の近似式はそれの評価が可能である. 図14は, K_t の値を線図にしたものである. これは, 著者らが以前に作製した線図⁽²⁾と比べて利用範囲が広い.

7. 結 言

本論文ではフィレットを有する丸棒(図1)の応力集中係数 K_t をフィレット形状の全範囲で正確に与えることを目的とした. そのため, 特にフィレットの段の高さが大きい場合(図3)の応力集中係数 K_{td} を正確に計算式として求め利用した. また, 先に求めたフィレット部を有する半無限板の解⁽³⁾も合わせて利用した. これらの解と問題の K_t を比較検討して, すべてのフィレット形状に対して誤差1~2%程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した.

文 献

- (1) Neuber, H., Kerbspannungslehre, (1957), 11, Springer-Verlag.
- (2) 野田尚昭・高瀬康・門田圭司, フィレット部を有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, 機械の研究, 48-8, (1996), 855-860.
- (3) 野田尚昭・山崎丈巳・松尾勝規・西谷弘信, フィレットを有する丸棒および平板試験片の応力集中解析, 機論, 59-566, A (1993), 2404-2411.
- (4) 野田尚昭・佐伯高秀・西谷弘信, フィレットを有する平板試験片の引張りによる応力集中, 機論, 55-509, A (1989), 69-72.

