

切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式* (鋭い60°V形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片)

野田 尚 昭*¹, 西谷 弘 信*²
高瀬 康*³, 篠崎 正 孝*⁴

Convenient Stress Concentration Formula Useful for Any Shape of Notch in a Round Test Specimen (Tension of a Round Bar Having a Extremely Sharp V-Shaped Notch and a Extremely Blunt Circular-Arc Notch)

Nao-Aki NODA, Hironobu NISITANI,
Yasushi TAKASE and Masataka SHINOZAKI

In this work, stress concentration factors (SCFs) of a round bar with a circular-arc or V-shaped notch K_t are considered on the basis of exact solutions for special cases and accurate numerical results. First, for the limiting cases of deep and shallow notches, the body force method is used to calculate the SCFs; then, the formulas are obtained as K_{ta} and K_{ts} . On the one hand, upon comparison of K_t and K_{ta} , it is found that K_t is nearly equal to K_{ta} if the notch is deep or blunt. On the other hand, if the notch is sharp or shallow, K_t is mainly controlled by K_{ts} and the notch depth. The notch shape is classified into several groups according to the notch radius and depth; then, the least squares method is applied for calculation of K_t/K_{ta} and K_t/K_{ts} . Finally, a set of convenient formulas useful for any shape of notch in a round test specimen is proposed. The formulas yield SCFs with less than 1% error for any shape of notch.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Notch, Numerical Analysis, Test Specimen, Tension, Body Force Method

1. 緒 言

図1に示すような円周切欠きを有する丸棒の応力集中評価のためノイバーの提案した三角則⁽¹⁾は、過去40年以上にわたってよく用いられてきた。これは、ノイバー公式が簡便であるにもかかわらず切欠き形状の全範囲に対してある程度の精度で応力集中係数を与えるたいへん便利なものであったためである。著者らはさきに体積法によって得られた高精度の解析結果を基に、ノイバーの三角則による近似式に修正係数をかけることによって精度の高い計算式を提案した⁽²⁾。しかし、この場合、体積法による計算結果を基にしているため切欠き寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を与えることはできなかった。一般にどのような解析方法を用いても、切欠き半径 ρ が極端に大きい円弧形切欠き〔図1(a)〕や切欠き半径 ρ が極端に小さい鋭い切欠き〔図1(c)〕の応力集中係数を精度良く求めることは数値計算上たいへん難しい。

そこで本研究では、これまで得られている切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積法によって得られた解析結果を基に物理的考察を行い、図1に示すような切欠き半径 ρ が極端に大きい円弧形切欠き、および切欠き半径 ρ が極端に小さい60°V形切欠きをも含めた、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案することを目的とする。

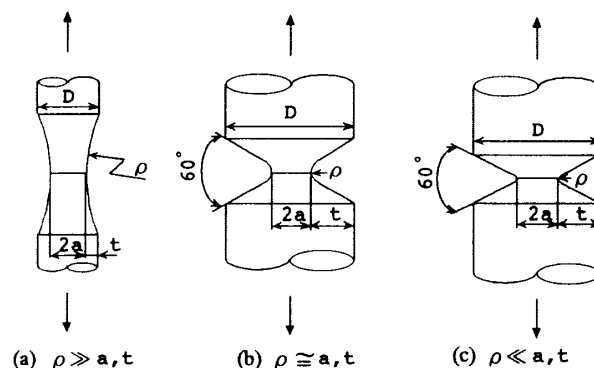


Fig.1 Round specimens with circular-arc and V-shaped notches
(a)extremely blunt notch
(b)ordinary notch
(c)extremely sharp notch

* 原稿受付 1997年1月10日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 正員, 九州産業大学工学部(〒813 福岡市東区松香台2-3-1)。

*³ 准員, 九州工業大学工学部。

*⁴ 九州工業大学大学院。

2. 記号

本論文で使用する記号をまとめて以下に示す.

- ρ : 切欠き半径
- t : 切欠き深さ
- a : 切欠き底の最小断面の半径
- D : 直径
- ξ : $=\sqrt{t/\rho}$
- η : $=\sqrt{\rho/t}$
- ν : ポアソン比 (=0.3)
- λ : $=2t/D$
- x : $a/\rho \leq 1.0$ のとき, $x=a/\rho$
 $\rho/a \leq 1.0$ のとき, $x=2-\rho/a$
- K_t : 図1(a)~(c)の問題の応力集中係数
- K_{ts} : 60° V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数
- K_{tH} : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数⁽¹⁾
- K_{td} : 深い60° V形切欠きの応力集中係数
- K_{tE} : 無限板の円孔の応力集中係数 ($=1+2\sqrt{t/\rho}$)

以下では, まず前報で提案した近似式⁽²⁾の結果を図示して考察する(図2~6の実線). なお一部については体積法⁽³⁾の追加計算を行った(図2~6の破線). その際切欠き深さのパラメータとしては主に $2t/D$ を用い, 切欠き半径のパラメータとしては主に a/ρ (または ρ/a)を用いて整理する.

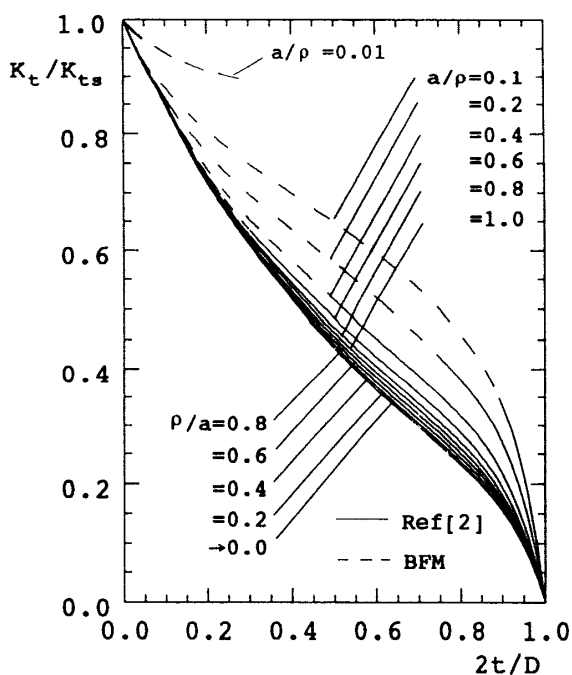


Fig.2 K_t/K_{ts} vs. $2t/D$

3. 鋭い切欠きまたは浅い切欠きの応力集中係数

まず, 切欠き半径 ρ が小さい図1(c)のような60° V形切欠きに対する応力集中係数 K_t を考察する. このような鋭い切欠きの応力集中係数は, 同一形状比 t/ρ の V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数 K_{ts} より求めることができる⁽³⁾. 図2は, 応力集中係数 K_t と60° V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の解 K_{ts} との比を切欠き形状の広い範囲 ($0 < \rho/a \leq 10$) について示したものである. 図2で $\rho/a \rightarrow 0$ の線は, ρ/a が小さい場合, たとえば ρ/a が 0.1 と 0.2 で3桁程度以上一致することを確認して求めている.

図2より以下のことがわかる.

- (1) 鋭い切欠き ($\rho/a \leq 0.1$) では, K_t/K_{ts} の値は $2t/D$ のほぼ全範囲でほとんど $2t/D$ のみによって決まる. 従って K_{ts} とこの関係を用いれば, K_t を求めることができる.
- (2) 浅い切欠き ($2t/D \leq 0.02$) については a/ρ のほぼ全範囲 ($\infty > a/\rho \geq 0.01$) で K_t/K_{ts} の値が $2t/D$ のみによって決まることから同様に K_t を求めることができる.
- (3) 浅い切欠きで, ρ が極端に大きい場合 ($2t/D \leq 0.02$ かつ $a/\rho \leq 0.01$) では, 次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果, $K_t = (1.000 \sim 1.006)$ と見積ることができる. よってこの場合 $K_t = 1.003$ として十分精度よく評価できる.

4. 鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数

ここでは, 切欠き半径 ρ が大きく深い切欠きに対する応力集中係数を考察する. このような切欠きに対し

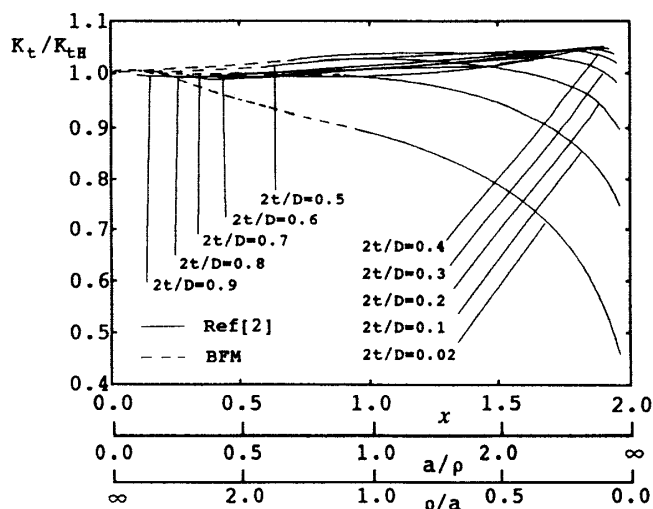


Fig.3 K_t/K_{tH} vs. a/ρ or ρ/a

て著者らは先に深い双曲線切欠きの解が精度の高い近似式を与えることを指摘した⁽⁴⁾。図3は応力集中係数 K_t と深い回転双曲面切欠きの解 K_{tH} との比を示したものである。図3では切欠き半径と切欠き深さのほぼ全範囲 ($0 \leq a/\rho < \infty, 2t/D \geq 0.02$) について、 K_t と K_{tH} との比を示している。図3より、切欠きの深い場合に相当する回転双曲面切欠きの解が、有限深さの切欠き問題に対して広い範囲で有効（すなわち $K_t/K_{tH} \approx 1$ ）であることを示している。そこで本論文では切欠きが深い場合の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる。

表1は、切欠きが深い場合すなわち $2t/D=0.7, 0.8, 0.9$ での応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} を比較したものである。表1において $2t/D=0.7 \rightarrow 0.9$ と切欠きが深くなるに従い応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} との比は一定になる。 $2t/D \rightarrow 1.0$ のとき $K_t/K_{tH} \rightarrow 1.0$ ではなく $K_t/K_{tH} \rightarrow (0.992 \sim 1.060)$ となるのは、切欠き形状が 60° V形であるか、双曲面であるかの違いによるものと考えられる。そこで、まず表1の収束性を利用して $2t/D \rightarrow 1.0$ の極限值 K_{td} を求めて表1に示す。表1で ρ/a が小さく切欠きが深い場合には極値計算が困難であるが、この場合にも異なる $2t/D$ の値の結果から $2t/D \rightarrow 1.0$ の収束性を確認して極限值を正確に求めた。そして、深い 60° V形切欠きの解 K_{td} を表1の結果より最小二乗法を適用してパラメータ x の関数として求めた。表1の K_{td} の値で $a/\rho \rightarrow \infty$ の値は外挿値であるが、 $a/\rho=3.333$ と $a/\rho=5$ の外挿値と $a/\rho=5$ と $a/\rho=10$ の外挿値が3桁一致することから十分正確な値であ

ると考えられる。図4は、切欠きが深い場合の応力集中係数 K_t [図4(a)] が K_{td} [図4(b)] の値で近似できることを示している。

次に、 K_t と式(4)より求めた K_{td} との比で整理した結果を図5に示す。図5と図3を比べれば特に $1 \leq \rho/a \leq 10$ の範囲で K_{td} が K_{tH} に比べて良い近似値を与えていることがわかる。図5より以下に示す範囲で K_{td} による近似が有効であることがわかる。

- (1) $2t/D \geq 0.8$ で $10 \leq a/\rho \leq \infty$ の範囲で $1.000 \leq K_t/K_{td} \leq 1.004$
- (2) $0.3 \leq 2t/D \leq 1.0$ で $0 \leq a/\rho \leq 10$ の範囲で $0.951 \leq K_t/K_{td} \leq 1.034$
- (3) $0.02 \leq 2t/D \leq 0.3$ で $0 \leq a/\rho \leq 0.5$ の範囲で $0.956 \leq K_t/K_{td} \leq 1.029$

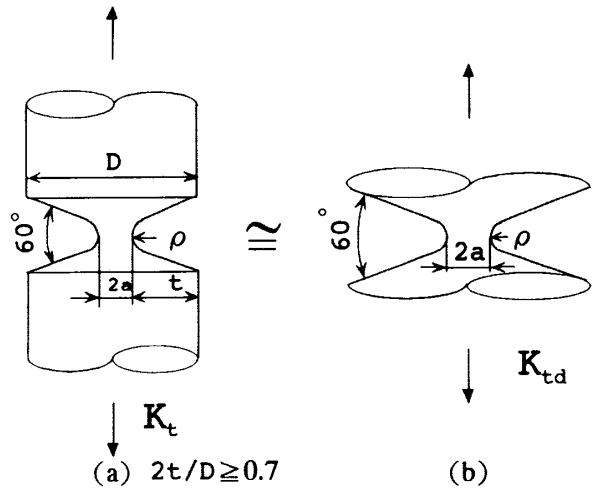


Fig.4 K_t and K_{td} with V-shaped notches

Table 1 K_t/K_{tH} when $2t/D \rightarrow 1.0$

x	a/ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D→1.0
0.000	0.000	∞				
0.100	0.100	10.00	0.999	1.000	1.000	1.000
0.200	0.200	5.000	0.998	0.998	0.998	0.998
0.300	0.300	3.333	0.996	0.996	0.996	0.996
0.400	0.400	2.500	0.995	0.994	0.994	0.994
0.500	0.500	2.000	0.994	0.993	0.993	0.993
0.600	0.600	1.667	0.996	0.993	0.992	0.992
0.700	0.700	1.429	0.997	0.994	0.993	0.993
0.800	0.800	1.250	0.998	0.995	0.994	0.994
0.900	0.900	1.111	1.001	0.997	0.995	0.995
1.000	1.000	1.000	1.002	0.999	0.997	0.997
1.000	1.000	1.000	1.002	0.999	0.997	0.997
1.100	1.111	0.900	1.005	1.001	0.999	0.999
1.200	1.250	0.800	1.008	1.004	1.003	1.003
1.300	1.429	0.700	1.012	1.008	1.006	1.006
1.400	1.667	0.600	1.017	1.013	1.012	1.012
1.500	2.000	0.500	1.023	1.019	1.018	1.018
1.600	2.500	0.400	1.030	1.026	1.026	1.026
1.700	3.333	0.300	1.038	1.035		1.035
1.800	5.000	0.200	1.046	1.045		1.045
1.900	10.00	0.100	1.053			1.053
2.000	∞	0.000				1.060

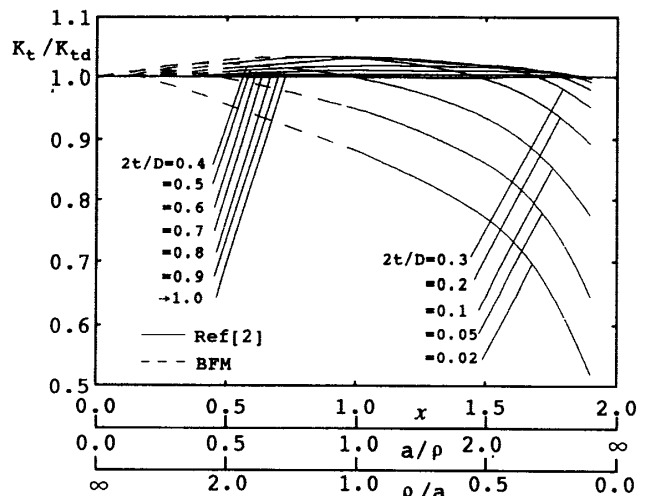


Fig.5 K_t/K_{td} vs. a/ρ or ρ/a

5. その他の切欠きの応力集中係数

ここでは、前節までで示していない範囲 ($0.1 \leq \rho/a \leq 2.0$, $0.02 \leq 2t/D \leq 0.3$) の応力集中係数の評価方法を提案する。図2よりこのような範囲では、 K_t/K_{ts} の値がほぼ $2t/D$ のみによってきまり、狭い範囲に存在していることがわかる。そこで、高精度の近似式を作るため、 $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ の値を基準にして K_t/K_{ts} との比をとる。その結果を図6に示す。図6より $[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0}$ と K_t/K_{ts} の比は $0.02 \leq 2t/D \leq 0.3$ の範囲で(0.97~1.03)の狭い範囲にあることがわかる。

6. 切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

以上の議論から、切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるためその存在領域を6つに分けたものを図7に示す。そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す。

6・1 半無限板の60° V形切欠きまたは円弧形状切欠きの K_{ts} (2) (図1で ρ, t が有限で $d, D \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{ts}$)

$$K_{ts}/K_{tE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \quad \dots \dots \dots (1.a)$$

$$K_{ts}/K_{tE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \quad \dots \dots \dots (1.b)$$

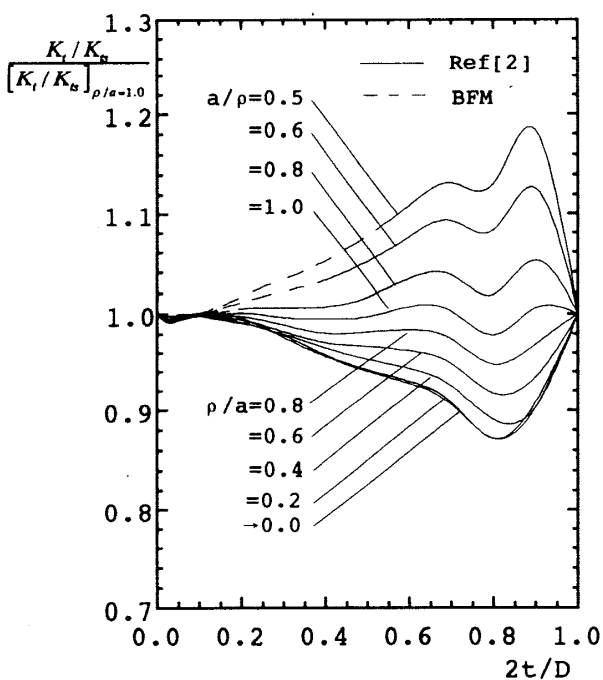


Fig.6 (K_t/K_{ts})/ $([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$ vs. $2t/D$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \quad \eta = \sqrt{\rho/t}, \quad K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \quad \dots \dots \dots (1.c)$$

図8に、式(1)の K_{ts}/K_{tE} の値を図示する。

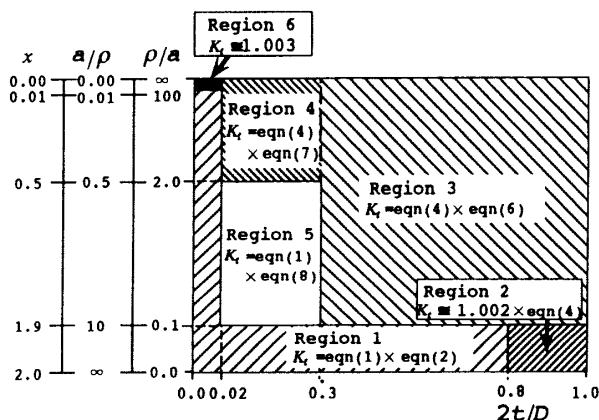


Fig.7 Classification of notch shape

- Region 1: Sharp or shallow notch
- Region 2: Sharp and deep notch
- Region 3: Deep notch
- Region 4: Blunt notch
- Region 5: Ordinary notch
- Region 6: Blunt and shallow notch

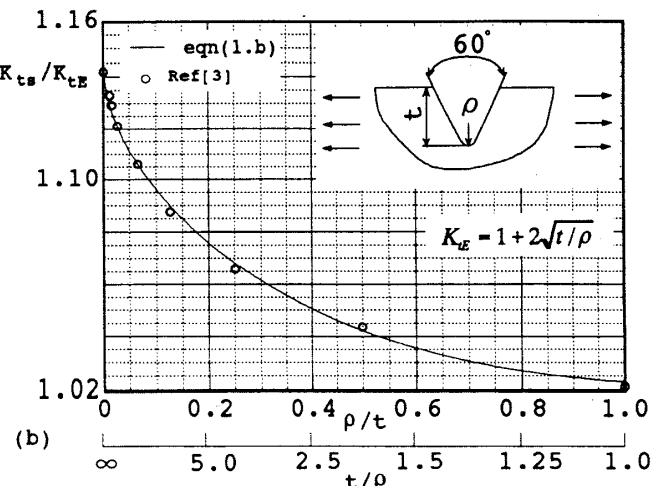
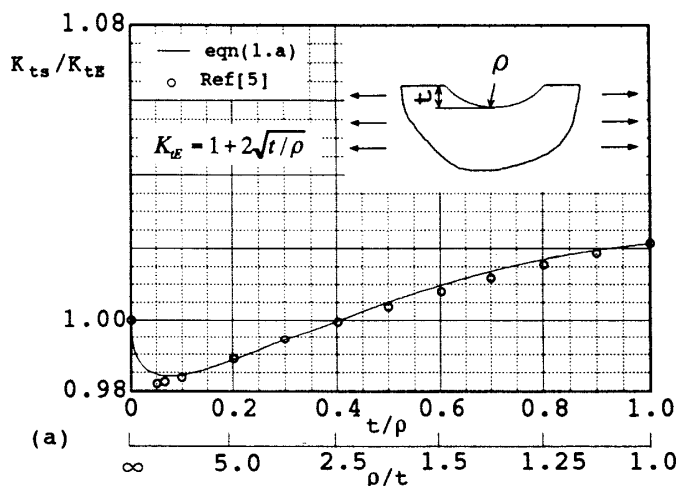


Fig.8(a) and (b) K_{ts}/K_{tE} vs. ρ/t or t/ρ

6・2 鋭い切欠きまたは浅い切欠きの K_t (図7の領域1: $\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \leq 0.8$ または $a/\rho \geq 0.01$ かつ $2t/D \leq 0.02$)

$$K_t/K_{ts} = 0.99981 - 1.5611\lambda - 2.0531\lambda^2 + 31.554\lambda^3 - 137.39\lambda^4 + 313.02\lambda^5 - 395.19\lambda^6 + 261.31\lambda^7 - 70.691\lambda^8 \dots (2)$$

図9に、式(2)の K_t/K_{ts} の値を図示する..

6・3 鈍く浅い切欠きの K_t (図7の領域6: $a/\rho \leq 0.01$ かつ $2t/D \leq 0.02$)

$$K_t = 1.003 \dots (3)$$

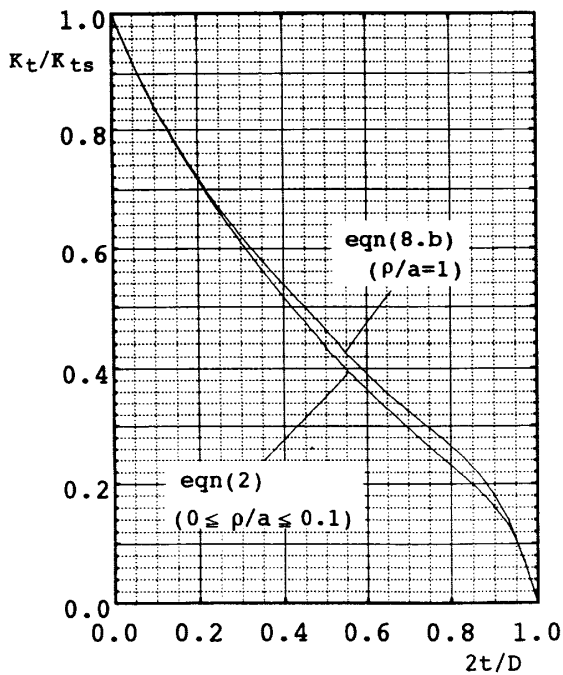


Fig.9 K_t/K_{ts} vs. $2t/D$

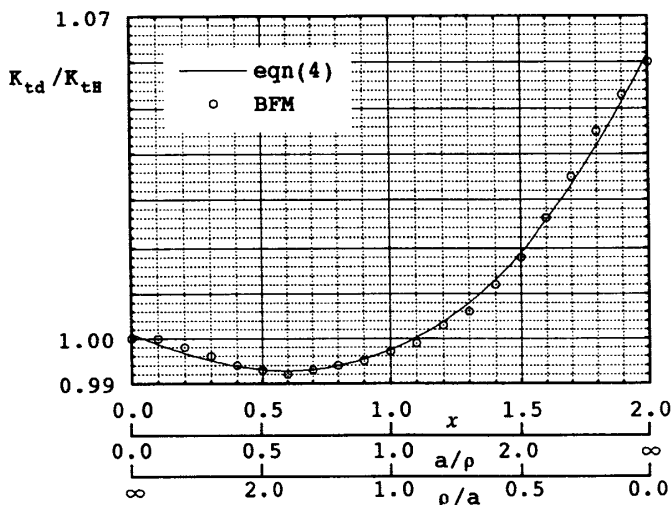


Fig.10 K_{td}/K_{th} vs. a/ρ or ρ/a

6・4 深い60° V形切欠きの K_{td} [図4(b)]

(図1で a, ρ が有限で $t \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{td}$)

$$K_{td}/K_{th} = 1.0011 - 0.025485x + 0.015727x^2 + 0.006131x^3 \dots (4.a)$$

$$K_{th} = (1/N) \left\{ (a/\rho)\sqrt{a/\rho+1} + (0.5+\nu)(a/\rho) + (1+\nu)\sqrt{a/\rho+1} \right\} \dots (4.b)$$

$$N = a/\rho + 2\nu\sqrt{a/\rho+1} + 2 \dots (4.c)$$

図10は、式(4)の K_{td}/K_{th} の値を線図にしたものである.

6・5 鋭く深い切欠きの K_t (図7の領域2: $\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \geq 0.8$)

$$K_t/K_{td} = 1.002 \dots (5)$$

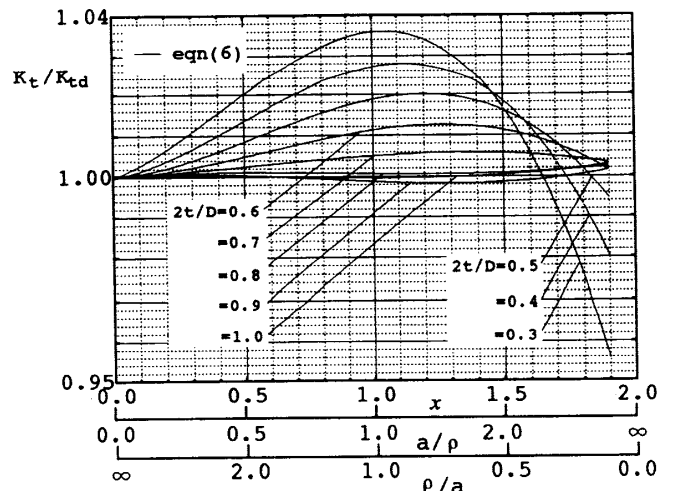


Fig.11 K_t/K_{td} vs. a/ρ or ρ/a

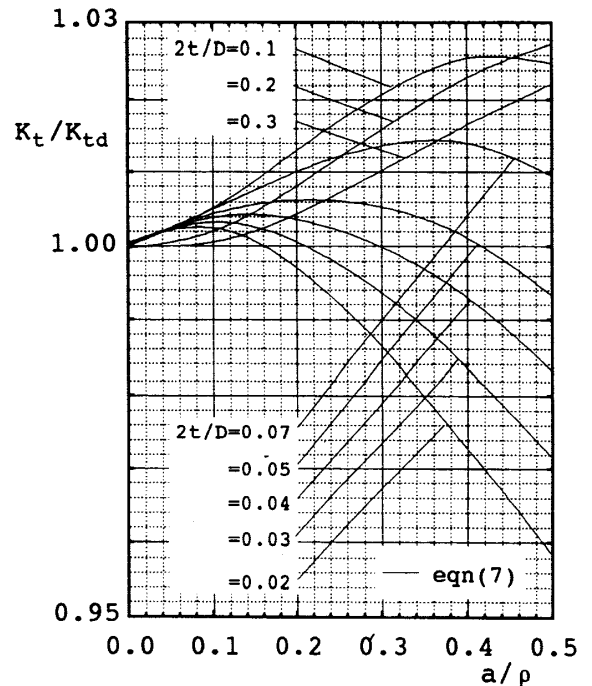


Fig.12 K_t/K_{td} vs. a/ρ or ρ/a

6・6 深い切欠きの K_t [図7の領域3 : $2t/D \geq$

0.3 かつ $a/\rho \leq 10$ ($0 \leq x \leq 1.9$)]
 $K_t/K_{ts} = 1.0003 - 0.004428\lambda + 0.0091157\lambda^2 - 0.0045697\lambda^3$
 $+ (0.11519 - 0.46435\lambda + 0.63297\lambda^2 - 0.28290\lambda^3)x$
 $+ (0.010653 + 0.34748\lambda - 0.85221\lambda^2 + 0.49036\lambda^3)x^2$
 $+ (-0.06707 + 0.061199\lambda + 0.12722\lambda^2 - 0.11927\lambda^3)x^3$
 (6)

図11は、式(6)の K_t/K_{ts} の値を線図にしたものである。

6・7 鈍い切欠きの K_t [図7の領域4 : $a/\rho \leq$

0.5 ($0 \leq x \leq 0.5$) かつ $0.02 \leq 2t/D \leq 0.3$]
 $K_t/K_{ts} = 1.0007 - 0.0071666\lambda + 0.0012083\lambda^2 + 0.049476\lambda^3$
 $+ (0.073591 - 0.49666\lambda + 0.37944\lambda^2 + 0.97121\lambda^3)x$
 $+ (-0.83503 + 19.753\lambda - 103.43\lambda^2 + 164.69\lambda^3)x^2$
 $+ (0.78512 - 23.474\lambda + 132.20\lambda^2 - 217.06\lambda^3)x^3$
 (7)

図12に、式(7)の K_t/K_{ts} の値を図示する。

6・8 その他の切欠きの K_t [図7の領域5 :

$0.1 \leq \rho/a \leq 2.0$ かつ $0.02 \leq 2t/D \leq 0.3$]

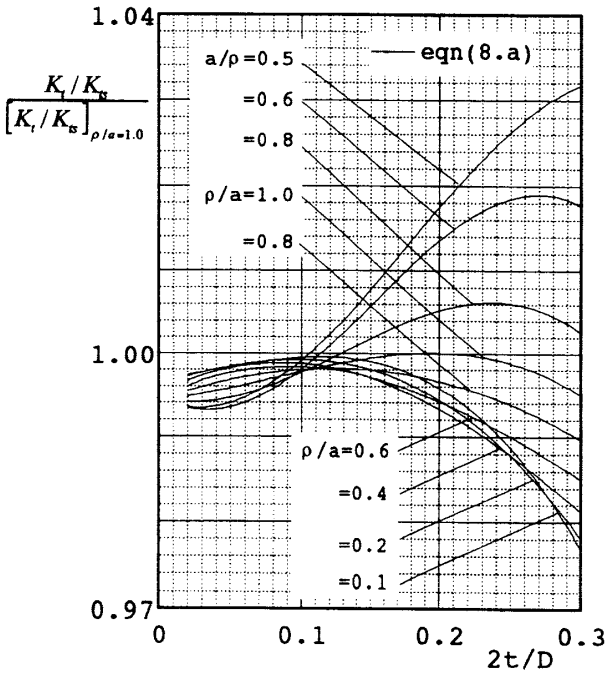


Fig.13 $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$ vs. $2t/D$

$K_t/K_{ts} = \{(0.99750 - 0.009307(\rho/a) + 0.0082361(\rho/a)^2$
 $- 0.0021749(\rho/a)^3)$
 $+ (-0.012636 + 0.49854(\rho/a) - 0.66661(\rho/a)^2$
 $+ 0.20013(\rho/a)^3)\lambda$
 $+ (0.61979 - 5.7347(\rho/a) + 7.6371(\rho/a)^2$
 $- 2.2656(\rho/a)^3)\lambda^2$
 $+ (-2.7417 + 14.305(\rho/a) - 18.013(\rho/a)^2$
 $+ 5.4021(\rho/a)^3)\lambda^3\}([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$
 (8.a)

$[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0} = 1.0046 - 1.7334\lambda + 1.1221\lambda^2 + 4.9028\lambda^3$
 $- 17.228\lambda^4 + 20.570\lambda^5 - 8.6378\lambda^6$
 (8.b)

図13は、式(8.a)の $(K_t/K_{ts}) / ([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=1.0})$ の値を線図にしたものである。

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数 K_t が求まる。

7. 結 言

本論文では切欠きを有する丸棒(図1)の応力集中係数を切欠き形状の全範囲で正確に与えることを目的とした。そのため、特に切欠きが深い場合(図4)の応力集中係数と切欠きが浅い場合に相当する半無限板の応力集中係数を正確に計算式として求め、それを有効に利用した。その結果、すべての切欠き形状に対して誤差1%程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した。

文 献

(1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), 11, Springer-Verlag.
 (2) 野田尚昭・高瀬康・門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, *機械の研究*, 48-7, (1996), 757-762.
 (3) 西谷弘信・野田尚昭, 60° V形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察, *機論*, 51-461, A(1985), 54-62.
 (4) 西谷弘信・野田尚昭, 浅い円弧形切欠きを有する疲労試験片のねじり, 引張り, 曲げにおける応力集中係数, *機論*, 51-463, A(1985), 775-783.
 (5) 石田誠, *学振129委員会資料*, (1964).